

Riešenia 3. kola zimnej časti

3.1 Pod lampou

vzorák **Zuzka**, opravovala **Majka**

Najprv si musíme vyjasniť, prečo vidíme farby. Farba svetla je funkciou vlnových dĺžok, z ktorých sa skladá. Ľudské oko nie je schopné vnímať všetky možné vlnové dĺžky, ale iba veľmi malý interval. Preto napríklad nevidíme infračervené, ultrafialové a iné svetlo.

Samotné slnečné svetlo je biele.¹ Ak vyhodnotíme, že farba nejakého objektu je biela, znamená to zhruba toľko, že sa od neho odrazí všetko slnečné svetlo, ktoré naň dopadne. Ak nejaký objekt vyhodnotíme ako napríklad červený, znamená to, že je vyrobený z materiálu, ktorý pohltí zelenú a modrú a odrazí červenú časť spektra.² A čo čierna farba? Tu môže vzniknúť istá nejasnosť. Vo fyzike sa často vyskytuje pojem *dokonale čierne teleso*. To je hypotetický objekt, ktorý dokonale pohltí všetky vlnové dĺžky naň dopadajúce. Pozor, nie len tie viditeľné, ale vskutku všetky! Avšak na to, aby sme niečo vnímali ako čierne sfarbené, nemusí daný objekt byť dokonale čiernym telesom. Stačí ak pohltí všetky vlnové dĺžky, ktoré my vidíme. Čiže ak pohltí všetko viditeľné svetlo, ktoré naň dopadne.

Pri rozjímaní nad našim svetelným problémom porovnáваме dva prípady. V prvom máme vypnutý mobil – teda s čiernou obrazovkou – položený pod rozsvietenou lampou, v druhom je mobil zapnutý, obrazovka je pre zjednodušenie čisto biela a taktiež je položený pod rozsvietenou lampou. Žiarovka lampy emituje viditeľné svetlo, teda celé spektrum od 380 nm do 750 nm.

Pokiaľ je však taký objekt čierny a lesklý ako napríklad displej telefónu, predstavme si ho ako dve vrstvy. Môžeme povedať, že povrch obrazovky (prvá vrstva) nejaké svetlo odrazí, podobne ako keď sa pozeráme cez okno z rozsvietenej miestnosti do tmy. Obrazovka za ním pohltí viditeľnú časť svetla, ktoré prešlo cez prvú vrstvu. Znie to veľmi výhodne pre telefón, ktorý sa rád vyhrieva, lenže berúc v úvahu to, že taká bežná žiarovka na viditeľné svetlo premení len asi 4 % svojho výkonu, absorbovaná energia vo viditeľnom spektre bude vskutku mizivá v porovnaní s ostatnými vlnovými dĺžkami.

Teraz telefón zapneme a položíme opäť na teplé (alebo nie až také teplé) miestečko. Keďže lesklosť prvej vrstvy displeja je rovnaká ako v prvom prípade, jeho schopnosť odraziť svetlo sa takisto nezmenila. Zapnutý mobil emituje vlastné biele svetlo a zmenou konfigurácie kvapalných kryštálov v displeji³ sa pravdepodobne mierne zmenší schopnosť pohlcovať svetlo tej časti, ktorá bola vo vypnutom stave čierna.

Inými slovami, zapnutý displej nepohltí všetko viditeľné svetlo, ale teoreticky by ho mal všetko odraziť.⁴ Lenže spomeňme si, že iba 4 % sú vyžiarené vo viditeľnom spektre. Aj keby rozsvietený telefón odrazil všetko toto svetlo, stále je tu tých zvyšných 96 %, ktoré môže veselo pohlcovať. Navyše sa mobil v zapnutom stave trochu zahrieva sám, čo ale nečiní významný rozdiel v teplote, pokiaľ teda nemá mobil nejakú poruchu⁵.

Môžeme teda tvrdiť, že pri zahrnutí všetkých možných faktorov hodných uváženia bude mať mobil v oboch prípadoch približne rovnakú teplotu.

¹Tento fakt vskutku súvisí s evolúciou.

²Za predpokladu, že nemáme dáku očnú vadu.

³https://sk.wikipedia.org/wiki/Monitor_LCD#Technol.C3.B3gia

⁴Toto je ale dosť vážne tvrdenie, pretože je ťažké odhadnúť, ako sa správajú kryštály v displeji.

⁵Ale za Samkov mobil by som teda ruku do ohňa nedala.

3.2 Mám nabité

vzorák Kvík, opravoval Helboj

Úloha chcela okrem iného zistiť, ako sa zvládnete popasovať s neintuitívnym výsledkom. Náboj uložený v batérii mobilu je totiž omnoho väčší, než aký sa preniesie pri údere blesku. Ako je to možné? Každý predsa vidí, že blesk je úkaz omnoho energetickejší, než nabíjanie telefónu. Nuž, energia ešte nie je všetko.

Blesk

Údaje pre blesk si ľahko nájdeme na internete. Už tu trochu narazíme, pretože uvádzané hodnoty sa značne líšia. Naš výpočet teda zjavne nebude veľmi presný. Preto sa uspokojíme s rádovým odhadom – zaujímať nás bude len počet cifier, ktorým vieme zapísať výsledok. Presnejšie to s takými vstupnými dátami aj tak nepôjde.

Zvoľme si teda jeden aspoň trochu dôveryhodne vyzerajúci zdroj, napríklad [túto stránku](#). Tá hovorí, že pri priemernom blesku sa preniesie prúd približne 30 kA. Občas sa však vyskytne aj “superblesk”, kde priemerný prúd môže dosiahnuť až hodnotu 300 kA.

Vzduch je za normálnych okolností veľmi dobrý izolant, avšak ani on nevydrží napätia, aké vznikajú počas búrky. Bežne udávaná hodnota prierazného napätia pre suchý vzduch je asi 3 kV/mm, vo vlhkom vzduchu počas búrky ale stačí aj podstatne menej. Dĺžka blesku však bude obrovská, rádovo v kilometroch. K prierazu dôjde pri typickej hodnote napätia asi 100 MV. Hodnoty sa tu opäť môžu líšiť, ale opäť platí, že pri rádovom odhade nám to prekážať nebude.

Prenos náboja vraj trvá približne 1 ms. Nenechajte sa pomýliť tým, že pri búrke často blesk vidíme dlhšie. Viditeľný úkaz však spôsobuje najmä rozpálený vzduch, prípadne ďalšie údery tým istým vodivým kanálom; pôvodné nosiče náboja sú však v tej chvíli už dávno na druhej strane. Priebeh prúdu síce nie je ani náhodou konštantný, v hrubom odhade sa však môžeme tváriť, že to tak je. Prenesený náboj potom vypočítame ako súčin prúdu a času,

$$Q = It \approx 30 \text{ kA} \cdot 1 \text{ ms} = 30 \text{ C}.$$

Ďalej nás zaujíma energia. Tá je daná súčinom náboja a napätia. Obe veličiny poznáme, stačí ich teda vynásobiť:

$$E = QU \approx 30 \text{ C} \cdot 100 \text{ MV} = 3 \text{ GJ},$$

čiže $3 \times 10^9 \text{ J}$. Nakoniec si môžeme ešte vyjadriť výkon. Energiu a čas poznáme, takže opäť pôjde iba o jednoduché dosadenie:

$$P = \frac{E}{t} \approx \frac{3 \times 10^9 \text{ J}}{1 \times 10^{-3} \text{ s}} = 3 \text{ TW}.$$

Batéria

Pri batériách sa naopak zvykne udávať ich celková kapacita a napätie. Pod kapacitou sa tu rozumie priamo náboj, aj keď sa neudáva v coulomboch, ale v miliampérhodinách.

Nabíjateľná Li-ion batéria, aké máme v telefónoch, udržiava medzi kontaktami napätie približne 3,7 V. Kapacity sú samozrejme rôzne. Za bežnú hodnotu môžeme vziať 2500 mAh – takáto batéria dokáže dodávať prúd 2500 mA po dobu jednej hodiny. Tomu zodpovedá náboj

$$Q = It = 2,5 \text{ A} \cdot 3600 \text{ s} = 9000 \text{ C}$$

a energia

$$E = QU = 9000 \text{ C} \cdot 3,7 \text{ V} = 33,3 \text{ kJ},$$

alebo teda približne $3 \times 10^4 \text{ J}$. No a pre úplnosť si určíme aj výkon: vieme, že aj pri aktívnom používaní batéria vydrží aspoň deväť hodín, čo je približne práve tých 3×10^4 sekúnd, takže priemerný výkon bude rádovo 1 W .

Nuž, porovnanie energie nás asi neprekvapí – aj pred výpočtom by sme mali tušiť, že energia obsiahnutá v batérii mobilu by za žiadnych okolností nemohla vytvoriť jav porovnateľný s prírodným bleskom⁶. Takých batérií by sme potrebovali minimálne 100 000. Zato fakt, že vo vrecku bežne nosíme zdroj elektrického náboja o tri rády mocnejší než Perún, by nás už prekvapil mohol. Keby sme nejakým magickým spôsobom dokázali dodať potrebné napätie, náboj z jednej batérie by nám vydržal na približne 1000 bleskov.

Mechanická analógia

Ak nám stále chýba ľahšie uchopiteľná predstava, môžeme nakoniec skúsiť spraviť analógiu s mechanickými objektami. Blesk môžeme prirovnať ku guľke z pušky, ktorá má málo hmoty, ale zato prenesie veľkú energiu a navyše za krátky čas. Batéria mobilu skôr pripomína závažie na kukučkových hodinách. Tá má omnoho viac hmoty, ale pomerne málo energie, a navyše ju uvoľňuje len veľmi pomaly.⁷

Náboj v našej analógii zodpovedá hmotnosti. Tá síce s energiou a výkonom súvisí, ale veľký náboj ešte nemusí nutne znamenať veľkú energiu, ak je napätie malé.

3.3 Príliš mastná polievka

vzorák :Denda, opravovala :Denda

Prvým úspešným krokom k riešeniu je spomenúť si na *Archimedov zákon*. Ten nám hovorí, že teleso ponorené do kvapaliny je nadľahčované hydrostatickou vztlakovou silou, ktorej veľkosť sa rovná tiaži kvapaliny s rovnakým objemom, ako je objem ponorenej časti telesa. Inými slovami, po tom, čo teleso ponoríme do kvapaliny, pôsobia naňho dve sily: tiažová, ktorá ho "ťahá" nadol a vztlaková, ktorá ho "ťahá" nahor.

Je zrejmé, že ak je tiažová sila väčšia než vztlaková,⁸ teleso klesne ku dnu. Ak by boli tieto sily rovnaké ($\rho_{\text{kvapalina}} = \rho_{\text{teleso}}$), teleso sa bude voľne vznášať vo vode, ale bude celé ponorené. Ak je jeho hustota menšia, než hustota kvapaliny, bude ponorená práve taká časť, aby tiažová sila pôsobiaca na kvapalinu objemu ponorenej časti bola rovná tiažovej sile pôsobiacej na celé teleso. Toto je presne náš prípad.

Pre zaujímavosť a hlbšie pochopenie si ešte uvedomme, že ak nádobu s vodou položíme na váhu, vynulujeme a následne do kvapaliny ponoríme teleso, váha nám ukáže hmotnosť tohoto telesa vo všetkých troch prípadoch. Ak by sme do vody ponorili prst, ukáže nám hmotnosť, tekutiny s rovnakým objemom, ako má ponorená časť prsta. Po tom, čo do kvapaliny začneme ponárať prst, na nás kvapalina začne pôsobiť vztlakovou silou. My na kvapalinu pôsobíme presne takou silou, aby sme túto vztlakovú silu vyrovnali. Inak by sa buď prst ponáral hlbšie alebo stúpil nahor. A je to ekvivalentné vloženiu telesa s hmotnosťou, ktorú vidíme na váhe (tiažová sila by sa rovnala nášmu silovému pôsobeniu). Poďme však už k samotnému príkladu.

Poučení predchádzajúcimi odsekmi vieme, že vztlaková sila od oleja spolu so vztlakovou silou od vody majú vyrovnáť tiažovú silu pôsobiacu na teleso (ak teleso nemá klesnúť ku dnu):

$$F_{\text{tiaž}} = F_{\text{olej}} + F_{\text{voda}}.$$

⁶Iba že by ste mali druhú batériu z antihmoty...

⁷Pokiaľ teda nemáte niektorý z vybuchujúcich modelov nemenovanej kórejskej spoločnosti. Ale aj tam sa vynájdem – predstavte si, čo sa stane, keď sa také závažie odtrhne a padne vám na hlavu.

⁸Toto tvrdenie je úplne ekvivalentné s tvrdením, že teleso má väčšiu hustotu než kvapalina. Ak neviete prečo, premyslite si to.

Označme si plochu podstavy valca S . Objem valca potom bude $V_{\text{valec}} = S \cdot 25 \text{ cm}$ a tiažová sila pôsobiaca na valec $F_{\text{tiaž}} = V_{\text{valec}} \cdot \rho_{\text{drevo}} \cdot g$, kde ρ_{drevo} je hustota materiálu, z ktorého je valec vyrobený, čiže to, čo chceme spočítať, a g je tiažové zrýchlenie. V oleji je ponorená časť valca s objemom $V_{\text{v oleji}} = S \cdot 9 \text{ cm}$. Vztlaková sila pôsobiaca na valec od oleja je teda $F_{\text{olej}} = V_{\text{v oleji}} \cdot \rho_{\text{olej}} \cdot g$, čiže tiažová sila pôsobiaca na olej s objemom $V_{\text{v oleji}}$. Posledný člen, ktorý potrebujeme, je vztlaková sila od vody a tá je rovná $F_{\text{voda}} = V_{\text{vo vode}} \cdot \rho_{\text{voda}} \cdot g$, kde $V_{\text{vo vode}} = S \cdot 12 \text{ cm}$. Rovnosť si teda môžeme prepísať na

$$V_{\text{valec}} \cdot \rho_{\text{drevo}} \cdot g = V_{\text{v oleji}} \cdot \rho_{\text{olej}} \cdot g + V_{\text{vo vode}} \cdot \rho_{\text{voda}} \cdot g$$

a jednoduchými matematickými úpravami dospejeme k výsledku

$$\rho_{\text{drevo}} = \frac{9\rho_{\text{olej}} + 12\rho_{\text{voda}}}{25} = 0,804 \text{ g/cm}^3.$$

Hustota dreva, z ktorého je materiál vyrobený, je teda $\rho_{\text{drevo}} = 0,804 \text{ g/cm}^3 = 804 \text{ kg/m}^3$.

3.4 Ľarcha presnosti

vzorák Jaro, opravoval Jaro

Vzorové riešenie tejto úlohy si rozdelíme na dve časti. V prvej si predstavíme metódy, aké sa dajú použiť a aj sa používali, resp. sa stále používajú na meranie tiažového zrýchlenia a prediskutujeme ich presnosť. V druhej časti si potom vyberieme niektorú z prezentovaných metód a vykonáme vlastné merania.

Na úvod venujme pár slov všeobecným informáciám o tiažovom zrýchlení Zeme a jeho meraní. Je to taká bohatá téma, že sa ňou zaoberá samostatný odbor geofyziky – gravimetria. Dnes vieme merať tiažové zrýchlenie s vysokou presnosťou. Napríklad Förste (2015) uvádza hodnotu $g = 9,807\,246\,731 \text{ m/s}^2$. Je zrejmé, že hodnota tiažového zrýchlenia variuje v priestore i v čase. Uveďme si na príklade tejto hodnoty, ktorý rád ovplyvňujú aké faktory (čísla odpovedajú cifráram):

- 0 – sploštenie Zeme a rotácia (odstredivá sila);
- 7 – začínajú sa prejavovať nehomogenity rozloženia hmoty Zeme; pohoria, oceánske chrbty, výškový rozdiel 1 km;
- 2 – nehomogenity hustoty vo vnútri Zeme;
- 4 – veľké vodné nádrže;
- 6 – začínajú sa prejavovať časovo premenné faktory; príliv a odliv, výškový rozdiel 1 m;
- 7 – obrovské budovy, podzemná voda;
- 3 – oceánska topografia (odchýlka hladiny od sféry $\sim 1 \text{ m}$), pohyb zemského pólu;
- 1 – výškový rozdiel 1 mm.

V gravimetrii sa často stretáme s jednotkou $1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm/s}^2$. Dnes vieme merať tiažové zrýchlenie s presnosťou až $\sim 0,1 \mu\text{Gal}$. Pre lepšiu predstavu, tohoto rádu je gravitačné zrýchlenie od listu papiera (A4, 80 g/m^2) $13,5 \text{ cm}$ pod jeho ťažiskom.

Podme teraz už k metódam merania tiažového zrýchlenia. Vo všeobecnosti sa rozlišujú dva druhy meraní – absolútne a relatívne. Pri absolútnych meraniach sa určuje priamo veľkosť tiažového zrýchlenia. Pri relatívnych meraniach sa určujú rozdiely v tiažovom zrýchlení v priestore či v čase. To znamená, že vždy musíme najskôr vykonať absolútne meranie a až potom môžeme používať relatívne merania. Uvedomme si, že tiažové zrýchlenie sa nedá merať priamo. Vždy musíme vykonať aspoň dve merania – zväčša meranie dĺžky a času. V praxi sa využívajú dve základné metódy absolútneho merania, a to merania vykonávané pomocou kyvadiel a merania založené na voľnom páde.

Metóda kyvadiel

Najjednoduchším modelom kyvadla je matematické kyvadlo. Je známe, že pre periódu malých kmitov matematického kyvadla platí vzťah $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, odkiaľ dostávame vyjadrenie pre tiažové zrýchlenie

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

Vidíme, že naozaj potrebujeme vykonať dve merania, a to meranie dĺžky závesu kyvadla l a jeho periódy T . Uvedený vzťah pre periódu platí len pre malú amplitúdu kmitov $\Phi \ll 1$. Ak táto podmienka nie je splnená, treba použiť lepšiu aproximáciu $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16}\Phi^2 + \frac{11}{3072}\Phi^4 + \dots\right)$.

Matematické kyvadlo je len teoretický model, ktorý v skutočnosti neexistuje. Ako vhodnú korekciu môžeme započítať moment zotrvačnosti závažia. V prípade závažia guľového tvaru ($J_0 = \frac{2}{5}mr^2$) s použitím Steinerovej vety vieme nájsť modifikovaný vzťah pre periódu kmitov kyvadla $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g} \left[1 + \frac{2}{5} \left(\frac{r}{l}\right)^2\right]}$, kde r je polomer závažia. Ak $r \rightarrow 0$, naozaj dostávame vzťah pre matematické kyvadlo.

To sme sa už ale dostali ku konceptu fyzikálneho kyvadla. Pre periódu fyzikálneho kyvadla platí $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mg\xi}}$, kde J je moment zotrvačnosti kyvadla okolo osi závesu a ξ je vzdialenosť závesu od ťažiska. Zavedením redukovanej dĺžky kyvadla $l_r = \frac{J}{m\xi}$ dostávame pre periódu $T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}$, čo je formálne rovnaký vzťah ako pre matematické kyvadlo.

Problémom fyzikálneho kyvadla je, že pre kyvadlá komplikovanejších tvarov nevieme presne lokalizovať ťažisko a určiť moment zotrvačnosti. S týmto problémom sa vieme vysporiadať použitím metódy reverzného kyvadla. Táto metóda využíva skutočnosť, že na každej osi prechádzajúcej ťažiskom kyvadla existuje dvojica bodov A a B ležiacich na tej istej polosi od ťažiska, v ktorých keď kyvadlo zavesíme, bude kmitať s rovnakou periódou. Nech príslušné vzdialenosti bodov závesu od ťažiska sú ξ_A a ξ_B . Jednoduchým výpočtom sa dá ukázať, že $\xi_A + \xi_B = l_r$, čo je redukovaná dĺžka kyvadla vystupujúca vo vzťahu pre periódu, no a vzdialenosť závesov nie je problém merať, teda na výpočet tiažového zrýchlenia pomocou reverzného kyvadla možno použiť vzťah

$$g = \frac{4\pi^2 l_r}{T^2}.$$

Reverzné kyvadlo je zvyčajne realizované dvojicou pohyblivých závaží umiestnených na opačných koncoch tyče, ktoré vieme po tejto tyči posúvať, čím efektívne meníme moment zotrvačnosti kyvadla, a tým aj jeho redukovanú dĺžku. Problémom býva nájsť dvojicu osí, pre ktoré má kyvadlo presne rovnakú periódu. Z toho dôvodu sa na výpočet g používajú merania okolo dvoch osí s blízkymi periódami $T_{A,B} = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + m\xi_{A,B}^2}{mg\xi_{A,B}}}$. Vylúčením momentu zotrvačnosti okolo ťažiska J_0 z rovníc dostávame vzťah pre tiažové zrýchlenie

$$g = 4\pi^2 \frac{\xi_A^2 - \xi_B^2}{T_A^2 \xi_A - T_B^2 \xi_B}.$$

V praxi sa polohy závaží na kyvadle volia tak, aby rozdiel $|\xi_A - \xi_B|$ bol čo najväčší. Za tohto predpokladu možno zavedením priemernej periódy $T_p = \frac{T_A + T_B}{2}$ odvodiť pre tiažové zrýchlenie vzťah

$$g \approx \frac{4\pi^2 l_r}{T_p^2} \left(1 - \frac{l_r}{T_p} \frac{T_A - T_B}{\xi_A - \xi_B}\right),$$

ktorý pre $T_A = T_B$ prechádza na vyššie uvedený vzťah na výpočet tiažového zrýchlenia pri použití reverzného kyvadla.

Zaoberajme sa chvíľu presnosťou merania tiažového zrýchlenia použitím kyvadiel. Nepresnosť merania g vypočítame podľa vzťahu

$$\delta g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l_r} \delta l_r\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T} \delta T\right)^2} = g \sqrt{\left(\frac{\delta l_r}{l_r}\right)^2 + 4 \left(\frac{\delta T}{T}\right)^2} = \frac{g}{l_r} \sqrt{(\delta l_r)^2 + \frac{g l_r}{\pi^2} (\delta T)^2},$$

kde δl_r je nepresnosť merania redukovanej dĺžky a δT je nepresnosť merania periódy. Pre $l_r = 1$ m dostávame $\delta g \approx 10 \left(\sqrt{(\delta l_r)^2 + (\delta T)^2}\right)$.

Metóda reverzných kyvadiel sa používala na meranie tiažového zrýchlenia dlhé roky. V roku 1862 sa podarilo touto metódou zmerať tiažové zrýchlenie s presnosťou až 3 mGal. Túto presnosť sa dlho nedarilo prekonať. Až v roku 1979 sa podarilo zmerať g touto metódou s presnosťou až 0,3 mGal, čím sa narazilo na limity tejto metódy.

Metóda voľného pádu

Posledných asi 30 rokov sa na meranie tiažového zrýchlenia používa metóda založená na voľnom páde. Ak uvažujeme homogénne tiažové pole neznámej veľkosti g , tak medzi dobou pádu t a dráhou pádu h platí vzťah

$$h = \frac{1}{2} g t^2,$$

odkiaľ nie je problém vyjadriť hľadané g .

Pre naše potreby je táto metóda dostačujúca, v praxi však nie. Spomeňme si, čo sme povedali na začiatku. Dráha voľného pádu pri meraní sa pohybuje rádovo aspoň v metroch. Lenže pri takýchto výškových rozdieloch sa prejavujú zmeny tiažového zrýchlenia na úrovni $\sim 0,1$ mGal, čo je hraničná presnosť pre metódu kyvadiel. To znamená, že metóda voľného pádu pri uvažovaní homogénneho tiažového poľa nie je presnejšia než metóda kyvadiel. Môžeme však predpokladať, že tiažové zrýchlenie sa v prvom priblížení mení s výškou lineárne, teda $g(y) = g + \gamma y$. Napíšme si pohybovú rovnicu pre padajúce teleso v takomto prípade:

$$m\ddot{y} = mg + m\gamma y.$$

Ak by sme ju vyriešili, tak pre výšku pádu dostaneme vzťah

$$h = \frac{g}{\gamma} [\cosh(\sqrt{\gamma}t) - 1] \approx \frac{1}{2} g t^2 \left(1 + \frac{\gamma}{12} t^2 + \dots\right).$$

Všimnime si, že v ňom vystupujú dve neznáme – g a γ – takže treba vykonať aspoň dve merania. V praxi sa však na spracovanie získaných dát častejšie používa metóda najmenších štvorcov s dvomi voľnými parametrami.

Na zaistenie dostatočnej presnosti sa experiment vykonáva vo vákuovej komore. Padajúci objekt je navyše umiestnený do malej škatuľky padajúcej spolu s ním a poháňanej motorom, aby sa zabezpečila rovnaká rýchlosť padania, čím sa eliminuje aj odpor zostatkového vzduchu v komore. Experiment sa opakuje mnohokrát (> 1000) a vyhodnocuje sa štatisticky. Pomocou tejto metódy sa dá dosiahnuť presnosť až ~ 1 μ Gal, čo je zhruba o dva rády vyššia presnosť než pri použití kyvadiel.

Relatívne merania

Druhým typom meraní sú relatívne merania. Vo všeobecnosti sú presnejšie než absolútne merania, no ich hlavnou výhodou oproti absolútnym je predovšetkým ich jednoduchšia realizácia. Ich princíp spočíva v tom, že sa jedna meraná veličina zafixuje a meria sa len druhá. Relatívne merania nám umožňujú merať zmeny tiažového poľa na danom mieste v čase, prípadne zriedkavejšie rozdiel v tiažovom zrýchlení medzi dvomi miestami. Relatívne merania sa dajú rozdeliť do troch kategórií podľa použitej metódy – merania využívajúce kyvadlá, merania pružinovými gravimetrami a merania supravodivým gravimetrom.

Princíp relatívnych meraní najlepšie pochopíme na príklade metódy kyvadiel. Už vieme, že tiažové zrýchlenie vypočítame z nameranej redukovanej dĺžky a periódy podľa vzťahu $g = 4\pi^2 \frac{l_r}{T^2}$. Zafixujme redukovanú dĺžku kyvadla l_r . To znamená, že ak sa na danom mieste zmení tiažové zrýchlenie, zmení sa perióda kyvadla, ktorú meriame. Zo zmien periódy možno dopočítať zmenu tiažového zrýchlenia

$$\Delta g \approx -2 \frac{g}{T} \Delta T.$$

Typická perióda používaných kyvadiel je rádovo ~ 1 s, takže presnosť tejto metódy je $\delta g \approx 20 \cdot \delta T$, kde δT je presnosť merania času. Metóda kyvadiel sa postupne zdokonaľovala. V druhej polovici minulého storočia sa na korekciu chýb spôsobených namáhaním materiálu začali používať dva páry kyvadiel a presnosť sa zvýšila až na 0,2mGal. Metóda kyvadiel sa používala zhruba do 70. rokov minulého storočia.

Gravimetre sú tradične konštruované na princípe pružín. Pružinové gravimetre možno rozdeliť na statické a astatické. Princíp statických gravimetrov je veľmi jednoduchý. Uvažujme závažie hmotnosti m na pružinke pokojovej dĺžky l_0 s tuhosťou k . V stave statickej rovnováhy platí pre dĺžku pružinky vzťah $l = l_0 + \frac{m}{k}g$. Ak sa na danom mieste zmení hodnota tiažového zrýchlenia, zmení sa dĺžka pružinky. Zo zmeny dĺžky pružinky možno dopočítať zmenu tiažového zrýchlenia podľa vzťahu

$$\Delta g \approx \frac{k}{m} \Delta l.$$

Tuhosť pružiny je problematické určiť s dostatočnou presnosťou. S využitím vzťahu pre periódu kmitov $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ možno ale tuhosť zo vzťahu vylúčiť a dostaneme

$$\Delta g \approx \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \Delta l.$$

Zadefinujme citlivosť gravimetra ako jeho odozvu na zmenu tiažového zrýchlenia

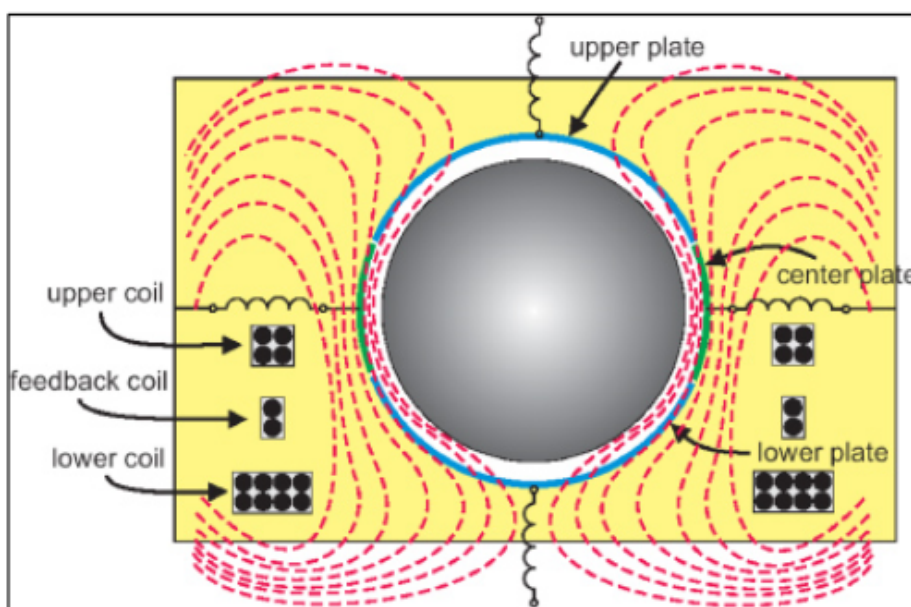
$$e = \frac{dl}{dg} = \frac{1}{4\pi^2} T^2.$$

Úmernosť medzi citlivosťou gravimetra a štvorcom jeho vlastnej periódy je všeobecnou vlastnosťou všetkých pružinových gravimetrov. To znamená, že teoreticky môžeme merať zmeny tiažového zrýchlenia s ľubovoľnou presnosťou za predpokladu, že perióda vlastných kmitov gravimetra je dostatočne veľká. Príkladom pružinového gravimetra je Askania gravimeter.

Problémom statických gravimetrov je ich silná odozva na zmenu tiažového zrýchlenia. Inými slovami, keď gravimeter vychýlime z rovnovážnej polohy, vratná sila bude veľká a závažie gravimetra sa rozkmitá s vysokou frekvenciou. Z toho dôvodu sa gravimetre konštruujú dômyselne, aby sa tomuto javu predchádzalo – hovoríme o tzv. astatizácii a o astatických gravimetoch. Príkladom takéhoto gravimetra je LaCoste&Romberg gravimeter.

V súčasnosti najpresnejšie gravimetrické merania sú vykonávané pomocou supravodivého gravimetra. Ten pozostáva z cievok so spoločnou osou vo vertikálnom smere a gule zo supravodivého materiálu. Dve cievky zo supravodivého materiálu vytvárajú mierne nehomogénne, no časovo nemenné magnetické pole. Po zapnutí tohto poľa sa na povrchu supravodivej nióbovej gule podľa Faradayovho zákona indukujú prúdy, ktoré tečú po horizontálnych kružniciach. Magnetické pole je z gule vytláčané v súlade s Meisner-Ochsenfeldovým efektom.

Smer magnetického poľa od indukovaných prúdov je daný Lenzovým zákonom. Výsledkom toho je, že na guľu pôsobí magnetická sila smerom nahor, ktorá vyrovnáva tiažovú silu, takže guľa levituje. Ak sa zmení veľkosť tiažového poľa, guľa má tendenciu pohnúť sa. Tomu sa zabráňuje tým, že do “feedback cievok” sa púšťa časovo premenný prúd, ktorý mierne upravuje magnetické pole tak, aby magnetická sila na sféru presne reflektovala zmeny tiažovej sily, a tým sa zabezpečí to, že sféra zostáva v rovnováhe. Z prúdu tečúcim “feedback cievkou” sa určí zmena tiažového zrýchlenia. Magnetické pole cievok musí byť extrémne stabilné, preto je nutné dôsledne odtieniť vplyv magnetického poľa Zeme. Ak sa to urobí dobre, nepresnosť supravodivého gravimetra je $\lesssim 1 \mu\text{Gal}$.



Obrázok 1: Supravodivý gravimeter

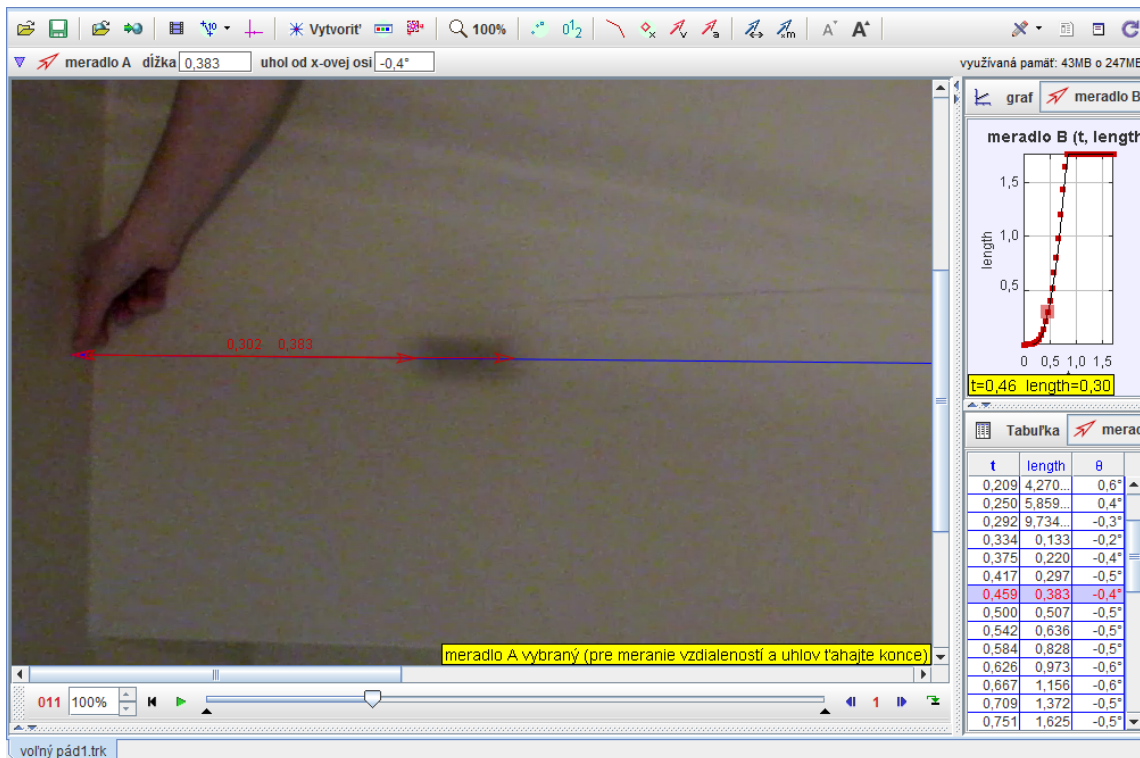
Meranie

Teraz už máme všetky potrebné informácie, takže môžeme pristúpiť k meraniu. V prvom rade si vyberieme svoju obľúbenú metódu. Je zjavné, že vyberať budeme z metód absolútneho merania. Naše možnosti sú teda dosť obmedzené. Pre potreby vzorového riešenia sme si vybrali metódu voľného pádu.

Z plastelíny sme si vyrobili guľôčku s polomerom $r = 2 \text{ cm}$. Digitálne kuchynské váhy povedali, že mala hmotnosť $m = 60 \text{ g}$. Nechali sme ju padať z výšky $H = 1,81 \text{ m}$ a natáčali sme si to na video. Použitá kamera mala snímkovaciu frekvenciu $f = 24 \text{ Hz}$, čo znamená, že sme mali informáciu o polohe guľôčky každých $\Delta t = 0,041667 \text{ s}$.

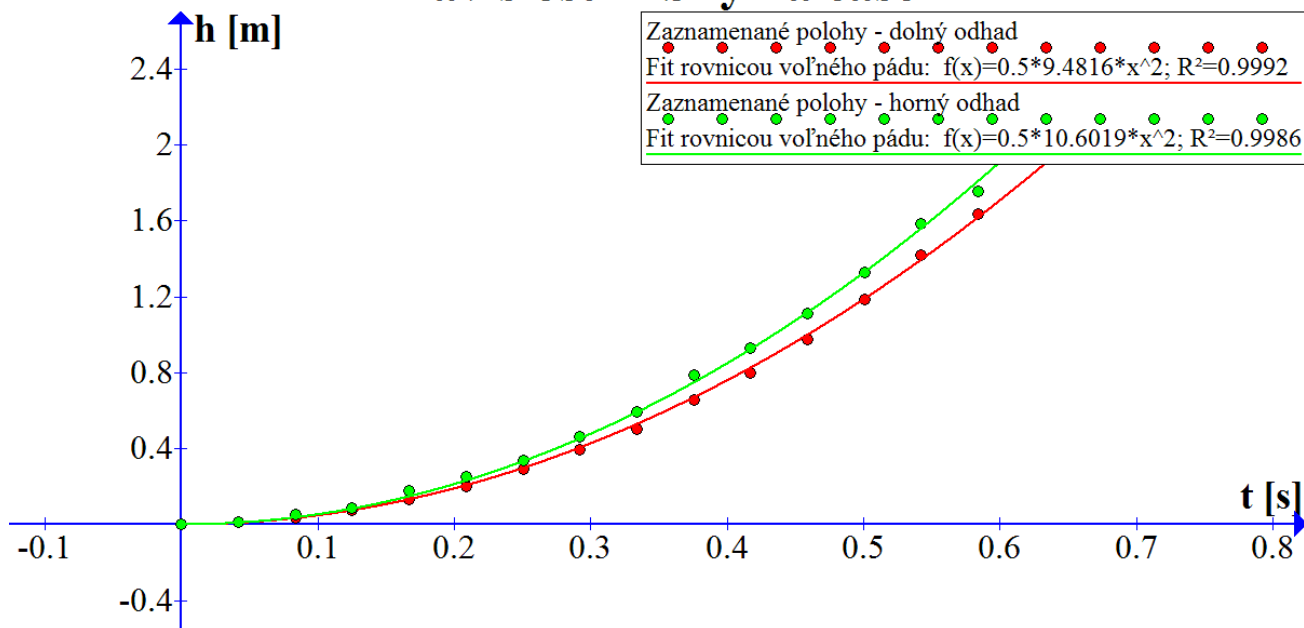
Po zrealizovaní experimentu už len zostávalo z videa odčítať hĺbku, do ktorej sa guľôčka dostala oproti počiatočnej polohe, v jednotlivých časových hladinách. Tu sa objavil obrovský problém – kamera obyčajného digitálneho fotoaparátu nedokázala zachytiť okamžitú polohu guľôčky, a tak keď tá dosiahla vyššie rýchlosti, na snímkach už nie je guľôčka ale pretiahnutý tieň obdĺžnikového tvaru. Toto je systematická chyba, ktorú

nedokážeme odstrániť opakovaným meraním, takže nemalo zmysel opakovať meranie viackrát. Miesto toho sme z videozáznamu určili aspoň horný a dolný odhad, a to tak, že sme merali vždy prejdenu dráhu po horný i dolný koniec tieňa. Tým sme dostali dáta, na grafe zobrazené červenými a zelenými krúžkami pre dolný, resp. horný odhad.



Obrázok 2: Rozmazanie guľôčky

Závislosť hĺbky na čase



Obrázok 3: Nameraná závislosť dráhy na čase

Na získanie tiažového zrýchlenia z nameraných dát sme použili metódu najmenších štvorcov. Pre hĺbku, do ktorej sa dostane guľôčka pri voľnom páde za čas t , platí vzťah

$$h(t) = \frac{1}{2}gt^2,$$

kde g je hľadané tiažové zrýchlenie. Ešte sa presvedčme o tom, že pád našej guľôčky môžeme považovať naozaj za voľný. Gravimetrické merania sa totiž vykonávajú vo vákuu. My sme však experiment vykonali za bežných atmosférických podmienok. Porovnajme teda rád tiažovej a odporovej sily. Guľôčka mala hmotnosť $m = 60$ g, takže na ňu pôsobila tiažová sila veľkosti $F_G \approx 0,6$ N. Pre odporovú silu pri turbulentnom obtekaní platí vzťah $F_o = \frac{1}{2}CS\rho v^2$, kde C je koeficient aerodynamického odporu (pre guľu $C \approx 0,2$), S je čelný prierez gule (pre našu guľu s $r = 2$ cm, $S \doteq 12,6$ cm²), $\rho \approx 1$ kg/m³ je hustota vzduchu a v je rýchlosť, ktorú guľôčka dosiahla – pri trvaní pádu menej než 0,6 s je to menej než $v = 6$ m/s. Pre tieto hodnoty $F_o \approx 3,6 \times 10^{-3}$ N, čiže $\frac{F_o}{F_G} \approx 6 \times 10^{-3}$. Vidíme, že odporová sila je o viac než dva rády nižšia než tiažová, takže pád guľôčky možno naozaj považovať za voľný a namerané dáta teda možno fitovať funkciou v uvedenom tvare.

Povedzme si aspoň v krátkosti, na čom je založená metóda najmenších štvorcov.⁹ Máme nameraný súbor dát $[t_i; h_i]$. Dáta sme vyniesli do grafu a chceme ich preložiť takou krivkou, aby čo najlepšie zodpovedala nameraným dátam. V našom prípade vieme, že to má byť parabola $h = \frac{1}{2}gt^2$. Chceme teda nájsť taký parameter g , aby súčet štvorcov $\sum_i (h_i - \frac{1}{2}gt_i^2)^2$ bol čo najmenší.

Výpočet prenecháme svojmu obľúbenému tabuľkovému kalkulátoru či inému programu na spracovanie dát. Pre nami získané dáta dostávame dolný odhad tiažového zrýchlenia $g \doteq 9,48$ m/s² a horný odhad $g \doteq 10,6$ m/s². V oboch prípadoch je koeficient determinácie vyšší než 0,99, takže namerané dáta naozaj zodpovedajú predpovedanej teoretickej závislosti.

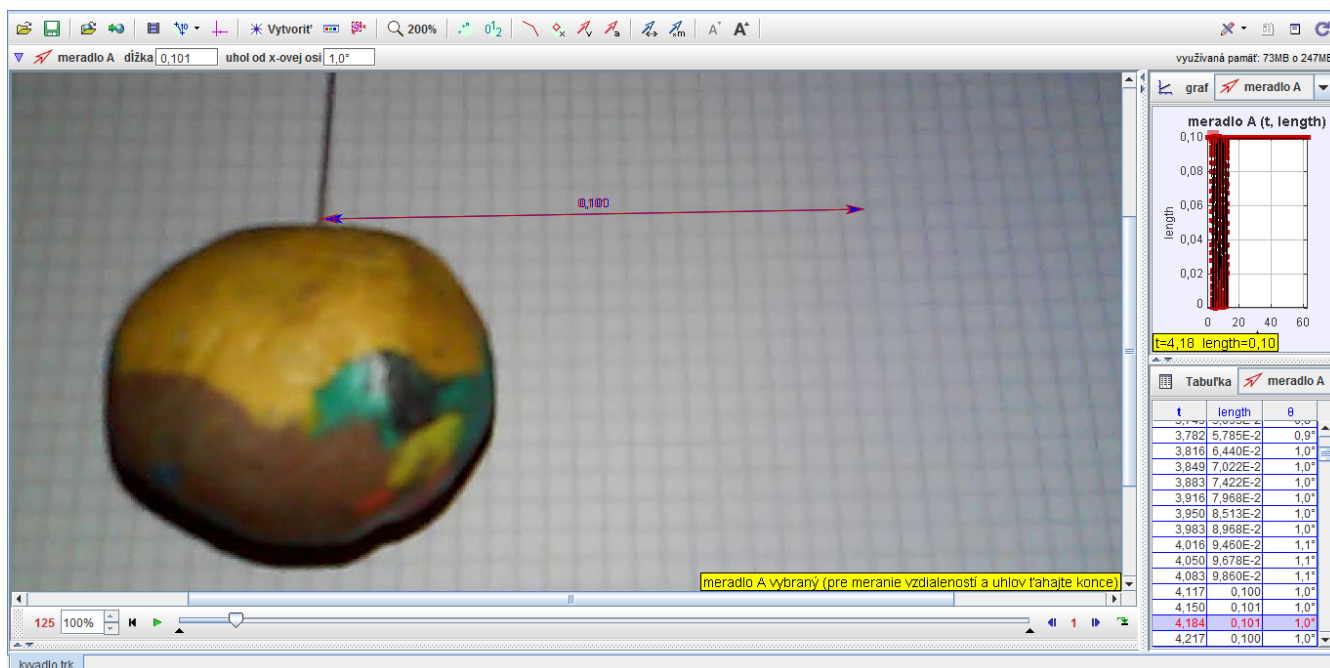
My sme však ambiciózni a neuspokojíme sa s takýmto hrubým odhadom. Vyskúšajme, či metódou kyvadla nedosiahneme presnejšie výsledky. Rozhodneme sa, aký typ kyvadla na meranie použijeme. My sme si zvolili matematické kyvadlo. Z plastelínovej guľôčky z predchádzajúceho merania sme ho zostavili jednoducho. Predvídali sme, že budeme chcieť robiť aj toto meranie, preto sme pri jej výrobe do stredu vložili gombík s nitkou, ktorej koniec trčal z guľôčky, takže už stačilo len predĺžiť záves.

Dĺžka kyvadla od osi otáčania po stred guľôčky bola $l = 73,0 \pm 0,2$ cm $\gg r$, takže guľôčku možno považovať za hmotný bod. Kyvadlo sme zavesili a rozkývali. Opäť sme si celý priebeh natočili. Tentokrát sme natáčali na telefón, ktorého snímkovacia frekvencia bola $f = 30$ Hz. To znamená, že sme odčítavali výchylky s časovým rozostupom $\Delta t = 0,0333$ s. Potom už len stačilo zvoliť si krátky úsek videa a snímku po snímke merať výchylku kyvadla.

Zo záznamu sme sa rozhodli odčítavať horizontálnu výchylku, nie uhol. Pre malé výchylky možno totiž kružnicový oblúk nahradiť dotyčnicou a vzdialenosť sa jednoduchšie meria než uhly. Získané dáta sú opäť zobrazené na grafe. Analyzovali sme len krátku sekvenciu videa, preto sa tlmenie nestihlo prejaviť a možno ho zanedbať. V takom prípade ale kyvadlo koná harmonické kmity a časová závislosť horizontálnej výchylky kyvadla je popísaná funkciou

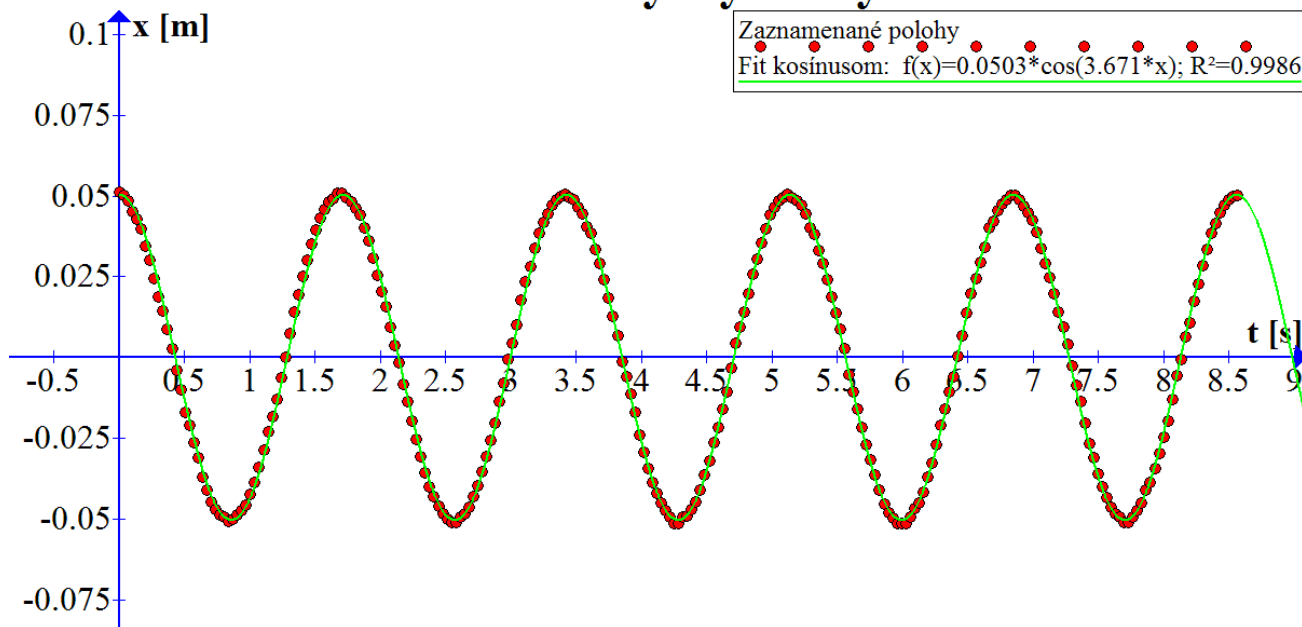
$$x(t) = A \cos(\omega \cdot t),$$

⁹Viac sa o metóde najmenších štvorcov môžete dozvedieť napríklad na <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/mereni.pdf>, kapitola 6.



Obrázok 4: Kyvadlo

Horizontálna výchylka kyvadla



Obrázok 5: Nameraná závislosť výchylky na čase

kde A je amplitúda kmitania a ω uhlová frekvencia. Dáta sme opäť spracovali metódou najmenších štvorcov. Tentokrát voľnými parametrami boli práve amplitúda a uhlová frekvencia. Dopracovali sme sa k hodnotám $A = 5,03$ cm a $\omega = 3,671/s$. Koefficient determinácie je opäť vyše 0,99, takže matematický model dobre fituje namerané dáta. Ešte môžeme odhadnúť neistotu merania. Pre odhad smerodajnej odchýlky merania x dostávame $\sigma_x = 0,13$ cm. Odtiaľ možno odhadnúť smerodajnú odchýlku vlastnej frekvencie kyvadla ako $\sigma_\omega \approx \frac{2\omega}{\pi A} \sigma_x = 0,063/s$.

Vieme, že vlastná frekvencia kmitania matematického kyvadla je daná vzťahom $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Vzhľadom na to, že $l = 73,0 \pm 0,2$ cm, môžeme jednoducho dopočítať hľadané tiažové zrýchlenie

$$g = \omega^2 l = 9,84 \text{ m/s}^2.$$

Podľa pravidiel o skladaní chýb dostávame $\sigma_g = g \cdot \sqrt{\left(2 \cdot \frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2} \approx 0,34 \text{ m/s}^2$. Táto chyba je však veľmi nadhodnotená. V skutočnosti by sme mali uvažovať smerodajnú odchýlku priemeru definovanú ako $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$, kde N je počet meraní. Keď vykonáme tie isté výpočty s touto novou hodnotou, dostaneme lepší odhad $\sigma_{\bar{g}} \approx 0,04 \text{ m/s}^2$. Aby sme dostali odhad krajnej chyby, treba túto hodnotu prenásobiť Studentovým koeficientom. Pre 95 % mieru pravdepodobnosti je jeho hodnota približne 2, takže dostávame

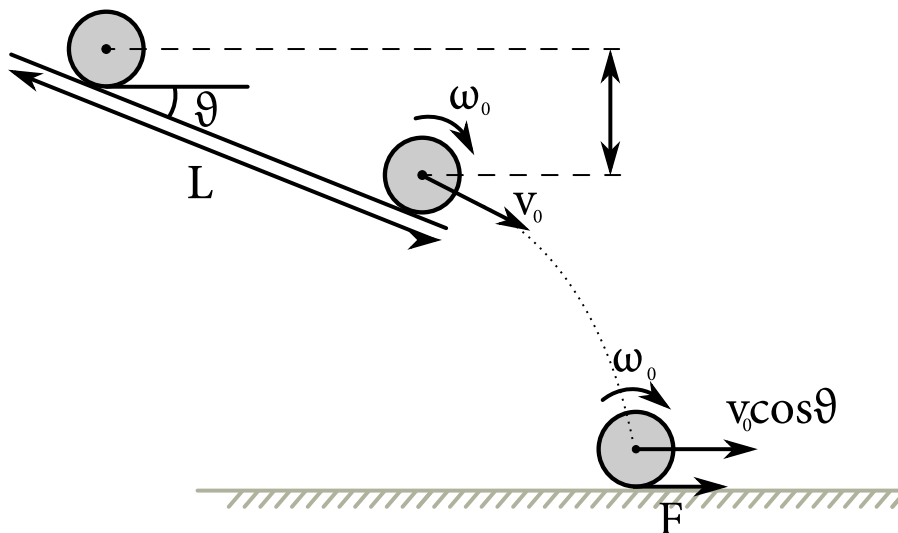
$$g = 9,84 \pm 0,08 \text{ m/s}^2.$$

Vykonalí sme teda merania obomi prezentovanými spôsobmi. Metódou matematického kyvadla sme sa dopracovali k hodnote, ktorá je veľmi blízka skutočnej hodnote tiažového zrýchlenia. Metódou voľného pádu sme sa dopracovali len k veľmi hrubému odhadu tiažového zrýchlenia, ale to bolo dôsledkom nedostatočného technického vybavenia a nie dôsledkom presnosti metódy. V skutočnosti metóda založená na voľnom páde je presnejšia než metóda kyvadiel a v súčasnosti sa používa na kalibrovanie relatívnych gravimetrov.

3.5 Ozembuch

vzorák Adam, opravoval Adam

Celú situáciu môžeme popísať nasledovne:



Označme si θ uhol, ktorý zvierajú ruka s vodorovným smerom, t. j. pre $\theta = 0^\circ$ je vo vodorovnej polohe. Zadanie nám hovorí, že počas pohybu na ruke valec istotne neprešmykuje. Neprešmykovanie znamená, že okraj valca a povrch ruky sa navzájom nepohybujú, a teda trecia sila nekoná na valci prácu. To nám vcelku spríjemňuje život umožnením použitia zákona zachovania energie na zistenie rýchlosti a uhlovej rýchlosti, ktoré si valec z ruky odnesie:

$$\Delta E = \Delta E_{\text{pot}} + \Delta E_{\text{pos.}} + \Delta E_{\text{rot.}} = 0.$$

$$-mgL \sin \theta + \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 = 0.$$

Neprešmykovanie nám tiež hovorí, že posuvná a uhlová rýchlosť sú spriahnuté cez polomer valca ako

$$v_0 = \omega_0 r$$

a moment zotrvačnosti valca okolo vlastnej osi je $I = \frac{1}{2}mr^2$. Dostávame teda

$$\frac{3}{4}mv_0^2 = mgL \sin \theta.$$

Keďže zadanie sa nás pýta len na optimálny uhol, potrebujeme poznať jedine závislosť v_0 od θ . Predchádzajúca rovnica nám prezrádza, že

$$v_0 \propto \sqrt{\sin \theta}.$$

Počas letu sa valčeku nemení ani uhlová, ani vodorovná zložka posuvnej rýchlosti. Meniaca sa zvislá zložka rýchlosti je teda počas letu jedinou vzrušujúcejšou udalosťou. Čo sa však stane s valčekom po dopadnutí? Nepochybne sa zbaví zvislej zložky rýchlosti. Najjednoduchší prístup je na ňu jednoducho zabudnúť, čo však nie je vcelku korektný prístup. Každá zmena hybnosti je krytá pôsobiacou silou, alebo presnejšie povedané impulzom sily. A ako v riadnej sústave tento impulz reakčnej sily podložky značí aj impulz (momentu) tretej sily. Žiaľ, keďže takéto riešenie vyžaduje kvôli svojej všeobecnej analytickej neriešiteľnosti konkrétne hodnoty zadaných veličín, musí sa čitateľ uspokojiť s nie úplne správnym postupom a viac bodmi. Zabudnime teda na vodorovnú zložku rýchlosti a riešme ďalej.

Tesne po dopadnutí máme po novom valček s rýchlosťou $v_0 \cos \theta$ a uhlovou rýchlosťou $\omega_0 = \frac{v_0}{r}$. Keďže sa tieto hodnoty líšia nie faktorom $\frac{1}{r}$, ale $\frac{\cos \theta}{r}$, s istotou vieme, že valček bude po dopade prešmykovať. Obvodová rýchlosť valčeka (ωr) je na začiatku nutne väčšia než jeho posuvná rýchlosť v . To značí, že na spodku valčeka nám bude pôsobiť trecia sila F v smere pohybu valčeka. Zároveň však moment tejto sily $N = Fr$ bude pribrzďovať rotáciu valčeka. Naša dvojica rovníc teda vyzerá takto:

$$v = v_0 \cos \theta + \frac{F}{m}t,$$

$$\omega = \omega_0 - \frac{Fr}{I}t.$$

Rozpísaním momentu zotrvačnosti v druhej rovnici a jej pre násobením r dostaneme pre obvodovú rýchlosť vzťah

$$v_{\text{obv.}} = \omega r = v_0 - 2\frac{F}{m}t.$$

Vieme, že výsledná posuvná rýchlosť valčeka musí byť rovnaká ako jeho obvodová, teda taká, že $v = v_{\text{obv.}}$. Prenásobme teda prvú rovnicu dvoma a sčítajme ju s druhou. Pre nás zaujímavé časy to dopadne takto:

$$3v = v_0 (1 + 2 \cos \theta).$$

A teda pre konečnú rýchlosť valčeka na podložke platí vo vzťahu k θ

$$v \propto \sqrt{\sin \theta} (1 + 2 \cos \theta).$$

Hľadať maximum tejto funkcie bez derivovania nie je žiadna slasť, avšak vykreslením grafu vieme celkom presne a pohodlne určiť, že valček dosiahne maximálnu rýchlosť pre $\theta = 42,5^\circ$.

3.6 Sklípka dotykov

vzorák Fero a Simon, opravoval Simon

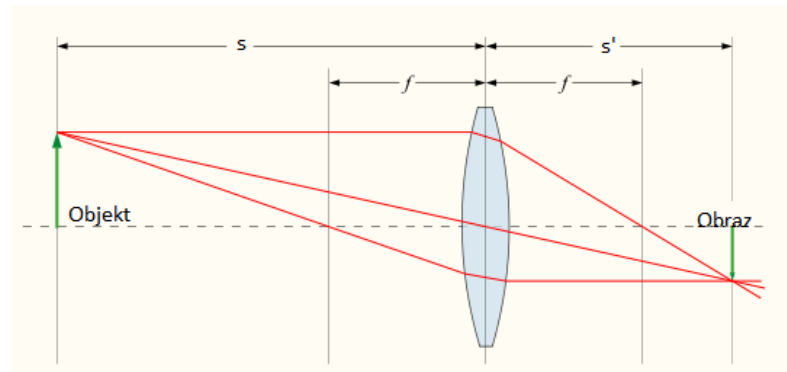
Čo robí taká šošovka? Šošovka sa skladá. Z? Materiálu. A ako asi viete, z rôznych dôvodov sa v materiáloch svetlo pohybuje pomalšie ako vo vákuu. A keďže svetlo sa vždy chce dostať z jedného miesta na druhé za najkratší čas¹⁰, spôsobí to, že lúč svetla na rozhraní dvoch materiálov zabočí. To je zákon lomu. Šošovky ale majú taký špeciálny tvar, že lúče, ktoré prichádzajú z jedného bodu, sa zlomia presne tak, že v jednom bode aj skončia. To je princíp zobrazenia v optickej sústave. A existujú aj opačné šošovky, ktoré lúče z jedného bodu zlomia tak, že stále budú vyzerat', ako keby prichádzali z jedného bodu, ale bližšieho. To je celé poslanie šošoviek.

To, ako veľmi šošovka láme svetlo, teda aká je silná, nám určuje *ohnisková dĺžka* f . Čím kratšia ohnisková dĺžka, tým silnejšia šošovka a tým viac láme svetlo. Niektorí ľudia ale majú problém s tým, keď menšie číslo znamená niečo silnejšie. Našťastie pre nich, tento problém má jednoduché riešenie a to, že si vymyslíte aj veličinu $1/f$. Tak aj urobili, nazvali ju *optická mohutnosť* s jednotkou dioptria a majú. Takže okuliare s 5 dioptriami majú ohniskovú dĺžku 20 cm.

Asi by bolo dobré zistiť, kde tie lúče vlastne skončia. Ak budú lúče vychádzať z bodu vo vzdialenosti s od šošovky s ohniskovou vzdialenosťou f , v akej vzdialenosti s' od šošovky bude bod, v ktorom sa stretnú? S trochou geometrie sa dá odvodiť celkom jednoducho:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

Vzdialenosti sú vyznačené aj na tomto obrázku:



Riešenie

Po úvodnej reči sa môžeme konečne pustiť do riešenia. Čo znamená “nahradit' sústavu”? Asi to, že chceme, aby nová šošovka zobrazila každý predmet do toho istého miesta, ako dve staré šošovky. Tak si to napíšme. Poloha obrazu po prejdení prvou šošovkou bude

$$s'_1 = \frac{s_1 f_1}{s_1 - f_1}$$

¹⁰Vážne, nevymýšľam si, ono to tak naozaj je. Volá sa to princíp najkratšieho času. Všetky zákony optiky vrátane zákona lomu a zákona odrazu sa dajú odvodiť len tak, že si povieme, že trasa medzi nejakými dvoma bodmi, ktorú si svetlo vyberie, je taká, že zo všetkých možných trás je to tá najrýchlejšia. Nájdite si o tom niečo alebo si to sami odvodte, nie je to ťažké. Ale ako svetlo *vie*, ktorá trasa je najrýchlejšia a ktorú si má vybrať, to sa ma už nepýtajte.

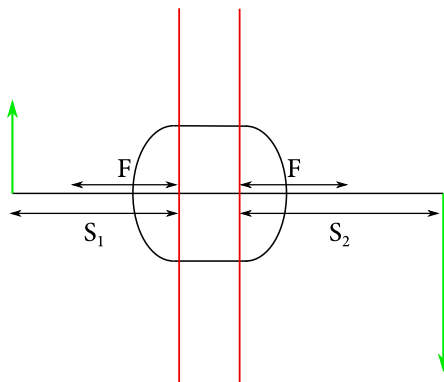
Tento obraz môžeme použiť ako zdroj pre ďalšiu šošovku, keďže tá samozrejme netuší, či sa pozerá na skutočný objekt, alebo na obraz vytvorený inou šošovkou:

$$s'_2 = \frac{(d - s'_1)f_2}{d - s'_1 - f_2}.$$

s'_1 dosadíme do druhej rovnice:

$$s'_2 = \frac{f_2 \left(d - \frac{f_1 s_1}{s_1 - f_1} \right)}{d - \frac{f_1 s_1}{s_1 - f_1} - f_2}. \quad (1.6.1)$$

Teraz by sme chceli, aby táto sústava bola ekvivalentná sústave s jednou šošovkou. Avšak ukazuje sa tu jeden problém. Ak by sme uvažovali, že nová šošovka je tenká a nachádza sa vo vzdialenosti δ_1 od prvej šošovky, potom by bola vzdialenosť novej od druhej šošovky rovná $\delta_2 = d - \delta_1$. Avšak dá sa ukázať, že ohnisková vzdialenosť a pozícia by v takomto prípade závisela od polohy predmetu. Toto si ukážeme neskôr. Záverom, tenká šošovka ekvivalentná pôvodnej sústave neexistuje.



Obrázok 6: Hlavné roviny šošovky. F je ohnisková vzdialenosť a S_1, S_2 označujú vzdialenosti predmetu a obrazu vystupujúce v zobrazovacej rovnici takejto šošovky.

Avšak v optike existuje koncept takzvaných hlavných rovín. Predstavte si, že z nejakého dôvodu by neplatila iba “obyčajná” zobrazovacia rovnica $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$, kde vzdialenosti s a s' sú merané od šošovky. Ale platila by aj upravená verzia, veľmi podobná tej obyčajnej, len s tým rozdielom, že vzdialenosti s a s' by sme nemerali od šošovky, ale od nejakých rovín, ktoré si nazveme “hlavné roviny”. Rovnica by potom mala tvar

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} = \frac{1}{F},$$

kde S_1 a S_2 sú vzdialenosti od prvej, resp. od druhej hlavnej roviny a F je vzdialenosť ohniskového bodu od hlavných rovín. Najväčšia vymoženosť toho je, že hlavné roviny nemusia byť totožné. Je to ako keby ste šošovku rozdelili na dve polovice, umiestnili by ste ich do nejakej vzdialenosti od seba, a potom sa tvárili, že svetlo sa medzi týmito dvoma polovicami “teleportuje”. Sranda je, že takto to naozaj funguje, že každá šošovka, či už hrubá alebo tenká, alebo nejaká optická sústava sa dá nahradiť nejakými hlavnými rovinami a nejakou výslednou ohniskovou vzdialenosťou F . Takže ak určíte tieto parametre optickej sústavy, môžete ju nahradiť akoukoľvek inou optickou sústavou s rovnakými parametrami. My máme nahradiť sústavu len jednou šošovkou, takže musíme použiť šošovku, ktorá nemá totožné hlavné roviny. Bude to hrubá šošovka?

Predpokladajme, že hlavné roviny novej sústavy sú od seba vzdialené D . Neuškodí to nášmu postupu, keďže ak by to tak nebolo, nakoniec by sme akurát došli k tomu, že $D = 0$. Ako sa ale ukáže, takto to nebude. Vzdialenosť prvej roviny a prvej pôvodnej šošovky nech je δ_1 a vzdialenosť druhej roviny od druhej pôvodnej šošovky nech je δ_2 . Platí $d = D + \delta_1 + \delta_2$. Zobrazovacia rovnica novej šošovky je

$$\frac{1}{s_1 + \delta_1} + \frac{1}{s'_2 + \delta_2} = \frac{1}{F},$$

kde s_1, s'_2 sú staré vzdialenosti zo zobrazovacej rovnice dvoch tenkých šošoviek. Osamostatníme s'_2 :

$$s'_2 = \frac{F(s_1 + \delta_1)}{s_1 + \delta_1 - F} - \delta_2. \quad (1.6.2)$$

Keďže požadujeme, aby táto sústava bola ekvivalentná pôvodnej sústave, s'_2 zároveň musí vyhovovať rovnici Rovnica 1.6.1. Máme dve rovnice a tri neznáme, ktoré musia ale platiť pre všetky hodnoty parametra s_1 . Nie veľmi nádejná situácia. Avšak my sa pokúsime vynájsť. Vieme, že rovnobežný lúč sa zobrazí do ohniska novej sústavy. Toto korešponduje so situáciou, kedy je predmet v nekonečne, takže v limite $s_1 \rightarrow \infty$ rovnica Rovnica 1.6.2 prejde na

$$s'_2 = F - \delta_2.$$

Podobne, ak by sme vyjadrili nie s'_2 ale s'_1 a urobili limitu $s_2 \rightarrow \infty$, dostaneme

$$s'_1 = F - \delta_1.$$

Ak spočítame rovnakú limitu pre s'_2 respektíve s'_1 z rovnice Rovnica 1.6.1, s využitím predchádzajúcich dvoch limitných vzťahov dostaneme

$$F = \frac{f_1 f_2 - f_2 d}{f_1 + f_2 - d} + \delta_2, \quad (1.6.3)$$

$$F = \frac{f_1 f_2 - f_1 d}{f_1 + f_2 - d} + \delta_1. \quad (1.6.4)$$

Poslednú rovnicu získame z faktu, že lúč predmetu umiestneného priamo v ohnisku prvej šošovky pôvodnej sústavy sa zobrazí do ohniska druhej šošovky. Teda ak $s_1 = f_1$, potom $s'_2 = f_2$. Po dosadení do Rovnica 1.6.2 získame:

$$f_2 = \frac{F(f_1 + \delta_1)}{f_1 + \delta_1 - F} - \delta_2. \quad (1.6.5)$$

Z týchto rovníc Rovnica 1.6.3, Rovnica 1.6.4, Rovnica 1.6.5 dokážeme vyjadriť ohniskovú vzdialenosť novej sústavy a vzdialenosti hlavných rovín.¹¹

$$F = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d},$$

$$\delta_1 = \frac{d f_1}{f_1 + f_2 - d},$$

¹¹V skutočnosti toto vyjadrenie nie je až také očividné. Treba chytiť pero a papier a absolvovať malé cvičenie z algebry.

$$\delta_2 = \frac{df_2}{f_1 + f_2 - d}$$

Hneď postrehneme niekoľko vecí. V prvom rade neplatí všeobecne, že $\delta_1 + \delta_2$ by sa rovnala d , čiže $D \neq 0$. Takže tým sa opodstatňuje použitie hlavných rovín. Poznámka na záver. Aby náš dôkaz bol korektný, potrebovali by sme ukázať, že riešenia ktoré sme našli naozaj vyhovujú všetkým hodnotám parametra. Toto sa dá urobiť spätným dosadením nájdených riešení. Vskutku to vyjde, môžete sa presvedčiť.

Na záver necháme vo vzduchu visieť otázku, či ku každej dvojici hlavných rovín existuje skutočná šošovka. Po chvíli zamyslenia by sme mohli uveriť tomu, že to tak naozaj je. Uvedomme si, že môžeme voliť polohu ekvivalentnej šošovky, takže to, čo nás v skutočnosti zaujíma, je iba vzájomná vzdialenosť hlavných rovín a nie ich skutočná poloha voči šošovke. Vzhľadom na to, že tenká šošovka má splývajúce hlavné roviny ($D = 0$), musíme hľadať medzi hrubými šošovkami. Poloha hlavných rovín hrubej šošovky závisí okrem iného aj na jej hrúbke¹², takže na to, aby sme našli šošovku s požadovanou vzdialenosťou hlavných rovín, stačí zvoliť správnu hrúbku šošovky.

3.7 Scott a Amundsen

vzorák **Fero**, opravoval **MaťoB**

Na vyriešenie úlohy stačilo použiť jedinú myšlienku, takže riešenie je pomerne jednoduché. Pokiaľ sa chcete dozvedieť iba samotné riešenie, tak Vám stačí prečítať si nasledujúci odsek. Pokiaľ sa chcete dozvedieť aj niečo viac o magnetoch, môžete čítať smelo ďalej aj nasledujúce sekcie. V poslednej sekcii sa aj podrobne pozrieme na to, prečo spomínaný trik funguje. Napriek tomu, že vzorákovač tejto úlohy sa snažil v tejto časti náš rozumný kompromis medzi rigóznosťou a náročnosťou, nie je mu jasné, či sa mu to podarilo. I tak vás však povzbudzujem k prečítaniu, keďže túto časť považujem za celkom dôležitú.

Samotné riešenie

Ak máme pri sebe dva magnety, orientované tak, aby sa odpudzovali, na presunutie jedného z magnetov po priamke, na ktorej ležia ich stredy, potrebujeme prácu W . Ako je to však ale s otočením? Jeden zo spôsobov, ako otočiť magnet, je posunúť ho do nekonečna, tam ho bez námahy otočiť, pretože už necíti magnetické pole druhého magnetu, a potom ho vrátiť naspäť. Posunutie do nekonečna nás stálo prácu W , posunutie naspäť tiež. Premyslite si, že posunutie otočeného magnetu musí stať toľko isto energie. Celkovo nás otočenie stojí $2W$. Odpoveď na otázku zo zadania je teda taká, že otočenie nás stojí viac práce. Pomer prác je $1 : 2$, respektíve $2 : 1$, podľa toho, ako sa na to pozeráme. Riešenie vyzerá extrémne jednoducho, ale za jednoduchým postupom je skrytých niekoľko hlbokých myšlienok.

Úvod do magnetických dipólov a magnetov

Zamerajme sa najprv na situáciu dvoch magnetických slučiek. Magnetické pole takejto slučky je

$$\vec{B}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(3 \left(\vec{m} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) \frac{\vec{r}}{r} - \vec{m} \right),$$

kde \vec{m} označuje magnetický moment slučky. V prípade slučky sa počíta sa ako $\vec{m} = I\vec{a}$, kde $\vec{a} = S\vec{\hat{a}}$, pričom S je plocha slučky, $\vec{\hat{a}}$ je jednotkový vektor kolmý na rovinu slučky a jeho smer závisí od smeru prúdu podľa pravidla pravej ruky. Inými slovami, ak obrátíme smer prúdu, zmení sa aj smer magnetického momentu \vec{m} na opačný.

¹²Pozri http://www.kf.elf.stuba.sk/~bokes/DI_web/DI-II/DI-II-11-8.pdf, vzťahy 4 a 5

Prečo sme toto vôbec rozoberali? Dôvod je jednoduchý, všetky magnetické polia sú vytvorené buď tečúcimi prúdmi, alebo zmenami elektrického poľa. Elektrón obiehajúci okolo jadra si môžeme predstaviť ako analogickú prúdovú slučku¹³. Každý elektrón obiehajúci okolo jadra produkuje určitý magnetický (dipólový) moment, ktorý následne vytvára magnetické pole.

Prečo potom nevytvárajú magnetické polia všetky materiály, keď vo všetkých látkach je veľa elektrónov obiehajúcich okolo jadier? Odpoveď je jednoduchá, magnetické dipólové momenty sú orientované náhodne, a preto sa v konečnom dôsledku vyrušia. Avšak ak dáme prúdovú slučku do magnetického poľa, pôsobí na ňu moment sily, ktorý sa ju snaží natočiť v smere magnetického poľa. Toto nie je až také jednoduché. Podľa toho, čo sa stane v externom magnetickom poli s prúdovými slučkami v konkrétnom materiáli, ich delíme na para-, dia- a feromagnetické. Paramagnetické látky zosilňujú vonkajšie elektrické pole, pretože sa v nich “prúdové slučky” natočia do smeru vonkajšieho elektrického poľa. Diamagnetické látky zoslabujú vonkajšie elektrické pole. Napokon poznáme feromagnetické látky, ktorých “slučky zamrzli” vo svojich pozíciách. Korektné objasnenie feromagnetizmu si však vyžaduje kvantovú mechaniku.

Pokročilá diskusia

Od teraz zabudneme na to, že sa hráme s magnetmi a všetky svoje úvahy sformulujeme pre slučky s magnetickým momentom \vec{m} . Po prvé, povedali sme, že dve prúdové slučky sa priťahujú. V skutočnosti magnetická slučka v homogénnom magnetickom poli necíti žiadnu silu, iba moment sily. Vhodné je predstaviť si štvorcovú slučku a spočítať si sily, ktoré na ňu pôsobia. V homogénnom poli vyjde výsledna sila nulová. Teraz si predstavme magnetické pole, ktoré je kolmé na slučku, ale na jednej strane je silnejšie ako na druhej. Na takúto slučku pôsobí nenulová sila.

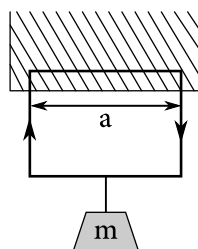
Po druhé, je známym faktom, že magnetické pole nikdy nekoná prácu. O tomto sa ľahko presvedčíme: Sila na náboj v magnetickom poli je

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B},$$

kde q je náboj, \vec{v} je rýchlosť a \vec{B} je vektor magnetického poľa. Posunutie o \vec{l} vieme prepísať ako $\vec{v}t$ a prácu následne vyjadriť ako

$$W = \vec{F} \cdot \vec{l} = q \vec{v} \times \vec{B} \cdot \vec{v}t.$$

Avšak, keďže $\vec{v} \times \vec{B}$ je kolmé na \vec{v} , skalárny súčin v predchádzajúcej rovnici nám dá nulu. Ako je to teda s tou prúdovou slučkou? Veď tá sa pohne v smere sily, čiže magnetické pole koná prácu. Kde je problém? Predstavme si situáciu, ktorá je vykreslená na obrázku.



Obrázok 7: Prúdová slučka. Magnetické pole B je nenulové iba vo vyšrafovanom regióne a smeruje do papiera.

¹³Náboj obiehajúci po kružnici rýchlosťou v je v podstate prúd $I = \frac{qv}{2\pi r}$. V skutočnosti táto predstava neplatí, keďže elektróny podľa kvantovej mechaniky neobiehajú okolo jadra ako planéty. Na úrovni klasickej fyziky je ale táto predstava postačujúca. V skutočnosti by však žiadne permanentné magnety nemohli bez kvantovej mechaniky existovať. Dôvody nie sú práve triviálne, a dozviete sa o nich neskôr na vysokej škole.

Čitateľ ľahko nahliadne, že sila pôsobiaca na slučku je $F_z = Iba$. Čo je to vlastne za silu? Jednoduchý argument by bol, že magnetické pole iba mení smer rýchlosti elektrónov, tie avšak sú obmedzené tým, že sa môžu pohybovať iba v rámci vodiča. Elektrón ktorý teda zatočí, narazí na okraj vodiča a odovzdá mu svoju kinetickú energiu. Magnetické pole premieňa “prúdovú energiu”, teda kinetickú energiu elektrónov, na potenciálnu. Ak chceme, aby slučka stúpala, musíme udržiavať vo vodiči prúd, a teda prácu koná ten, kto udržiava prúd, a nie magnetické pole.

Avšak o slovo sa ešte hlási druhý mechanizmus. Keď slučka začne stúpať, elektróny v nej sa vzhľadom na magnetické pole nepohybujú len v smere vodiča, ale aj v smere pohybu vodiča. Čiže aj doprava a zároveň hore. Magnetická sila teda nepôsobí iba kolmo na vodič, ale aj proti smeru tečenia prúdu. Inými slovami, vo vodiči sa indukuje napätie, ktoré pôsobí proti smeru tečenia prúdu. Ak teda chceme, aby sa vodič pohol, musíme mu dodávať viac energie a udržiavať v ňom prúd.

Tento fakt možno poznáte ako to, že indukované napätie je záporná časová zmena magnetického toku.

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Ukazuje sa, že, práca ktorá musí byť vykonaná na udržanie prúdu, je rovná tej, ktorú sme spočítali iba z úvah pre magnetickú silu. Je prekvapujúce, a zároveň pre nás výhodné, že práca, ktorú koná niekto iný ako magnetické pole, sa dá spočítať ako práca, ktorú koná magnetické pole, hoci vieme, že to nikdy nekoná prácu. Analogické úvahy môžeme vykonať pre magnetické slučky v materiáli. Avšak tu už nik neudržiava stály prúd, čiže všetko funguje na úkor vnútorných prúdov, resp. na úkor kinetickej energie nábojov v magnete. Vo všeobecnosti sa dá na magnetické pole pozeráť ako na sprostredkovateľa, ktorý nekoná prácu, ale iba mení jeden druh energie na druhý.

Posledný problém je, že vôbec nie je očividné prečo by malo otočenie magnetu, čiže magnetickej slučky, stáť rovnako veľa práce, ako jeho posunutie do nekonečna, otočenie a posunutie naspäť. V podstate tvrdíme, že magnetické pole je konzervatívne, čo znamená, že práca potrebná na posunutie z jedného bodu do druhého bodu závisí iba od týchto bodov, nie cesty medzi nimi. To je ale pre magnetické polia splnené triviálne, pretože práca medzi ľubovoľnými dvoma bodmi je nulová. Avšak my veselo počítame prácu z magnetickej sily pre slučky, aj keď vieme, že magnetické pole nekoná žiadnu prácu. Je dôležité si uvedomiť, že to je iba výpočtový trik. Táto sila, pôsobiaca na slučku, resp. magnetický dipól sa dá vypočítať ako¹⁴

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}). \quad (1.7.1)$$

Symbol \vec{m} označuje magnetický dipólový moment. Nemusíte sa trápiť, čo presne je ∇ . Zaužívaný názor pre ∇ je gradient. Teraz využijeme jednu netriviálnu znalosť z matematiky, a to, že pole je konzervatívne práve vtedy, keď sa dá napísať ako gradient nejakej funkcie, nazývanej potenciál, v matematickej reči ∇V . Avšak to je presne tvar sily, ktorá pôsobí na dipól. Táto sila je gradientom nejakej skalárnej funkcie, potenciálu. Čiže potenciál pre takúto “silu na dipól” existuje, a preto “silu na dipól” je konzervatívna a môžeme robiť triky, ktoré sme robili, čiže cestovať rôznymi cestami za rovnakú cenu.¹⁵

Taktiež vidíme, prečo proces vracania otočeného magnetu naspäť stojí rovnako veľa energie. Dôvod je ten, že otočený magnet má dipólový moment $-\vec{m}$.

¹⁴Malý háčik je vo fakte, že rovnica 1.7.1 je pre mikroskopické dipóly a nie pre veľké, ako napríklad náš magnet.

¹⁵Na ilustráciu, aká je to úžasná vlastnosť, to je ako keby idete do školy, a za cenu lístka na autobus si urobíte zachádzku do Londýna a naspäť.