Riešenia 1. kola zimnej časti

1.1 Krízový manažér

vzorák **Jumaj**, opravoval **Matúš**

Kladky sú jednoduché mechanické stroje, ktoré využívajú jednu z výborných vlastností lán: dajú sa všelijako ohýbať, no napriek tomu sú pevné v ťahu a ich dĺžka sa zachováva.

Predstavme si nasledujúcu situáciu: lano je napnuté a zatiahneme za jeden jeho koniec. Ten sa pohne a keďže lano chce držať pokope, koniec lana bude ťahať zase kus vedľa neho. Ten zatiahne zase za ďalší kus a takto sa ťah prenesie až na druhý koniec lana. Ten sa pohne do smeru predchádzajúceho kusu lana, čo však už môže byť úplne iný smer, než ten, ktorým sme ťahali jeho začiatok.

Tento prenos ťahu nenastáva hneď, no väčšinou je taký rýchly, že si ho nevšimneme. Pekne to vidieť na púšťaní visiaceho *slinky*[1], to má väzby medzi jednotlivými časťami svojej dĺžky slabšie.

Keď Vladko zatiahol lano, ťah sa postupne prenášal na druhý koniec lana, ktorý potom ťahal teleso. Pokiaľ v dobrej viere predpokladáme nulové straty po ceste[2], koniec lana ťahá teleso vodorovným smerom rovnakou silou, ako Vladko lano.

Na teleso bude teda pôsobiť sila, ktorá ho pohne po stole. Ako je to ale s prácou? Vladko pôsobí silou na lano v smere jeho rýchlosti, no lano je spojené s telesom. Aby sa lano pohlo, musí rozpohybovať aj teleso. Teda Vladko vykoná prácu síce iba na lane, no to následne vykoná prácu na telese, aby ho potiahlo so sebou. Ak chce Vladko rozpohybovať lano na určitú rýchlosť, musí vykonať na lane toľko práce, aby udelil rýchlosť lanu a aj telesu. Teda vlastne koná prácu aj na telese, len nepriamo.

1.2 Vtákoprch

vzorák **Simon**, opravoval **Simon**

Na začiatok je dobré si uvedomiť, že aj keď sa holuby pohybujú v rade rovnakou konštantnou rýchlosťou, pohyb ktoréhokoľvek holuba vôbec nezávisí na holubovi pred ním alebo za ním. Závisí len na tom, kedy sa daný holub stretne s chlapcom. To znamená, že pokojne môžeme ignorovať holuby vnútri radu a pozerať sa len na to, ako ďaleko od seba skončia prvý a posledný holub.

V momente, keď sa chlapec stretne s prvým holubom, sa holub od chlapca začne vzďaľovať rýchlosťou $v - u$. Vo vzdialenosti l od prvého holuba sa tesne pred stretom pohyboval posledný holub. Ten sa po otočení prvého holuba bude naďalej pohybovať rýchlosťou v voči zemi a teda $v + u$ voči chlapcovi, lebo ho predsa netrápi, čo sa deje s holubom pred ním. Stret posledného holuba s chlapcom znamená jeho otočenie, takže medzi otočením prvého a posledného holuba uplynie čas

$$t = \frac{l}{v+u}.$$

Holub, ktorý sa otočil ako prvý, sa za tento čas od chlapca vzdiali o vzdialenosť

$$l' = (v-u)t = \frac{v-u}{v+u}l.$$

[1] https://youtu.be/wGIZKETKKdw
[2] Stratami by bolo v tomto prípade neelastické natiahnutie lana, teda jeho prípadná deformácia.

Po otočení posledného holuba sa holuby opäť pohybujú rovnakou rýchlosťou a rovnakým smerom, teda ako rad. A vzdialenosť l' medzi nimi je teda nová dĺžka radu.

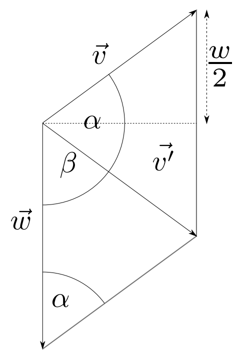
Skúsme si teraz otestovať, či hodnoty, ktoré z nášho vzorca dostaneme v niektorých špeciánych prípadoch, súhlasia s našou intuíciou. Keby sa holuby pohybovali rovnakou rýchlosťou ako chlapec, vôbec by sa od neho po otočení nevzďaľovali. Všetky holuby by sa teda nahromadili na chlapcovi a výsledná dĺžka radu by bola nulová. Po dosadení $u = v$ do nášho vzorca dostávame očakávaný výsledok. Teraz, čo keby chlapec iba stál na mieste?[3]. Vtedy by sa holuby iba po jednom otáčali, takže dĺžka radu by sa nezmenila. A opäť, po dosadení $v \gg u$ sa nám vzorec zredukuje len na l.

Ako bonus môžete ešte porozmýšľať nad tým, ako by vyzeralo riešenie pre $u > v$.

1.3 Rande v oblakoch

vzorák **SamoT**, opravoval **SamoT**

Pozrime sa najprv na obrázok, kde je situácia znázornená – rýchlosť severného vetra je znázornená vektorom $\vec{w}$ a rýchlosť vzducholode vektorom $\vec{v}$. Vektor $\vec{v'}$ je vektorový súčet vektorov $\vec{w}$ a $\vec{v}$ alebo aj výsledná rýchlosť vzducholode.



Obrázok 1: *Relatívna rýchlosť vzducholode voči vetru*

Uvažovaním podmienky zo zadania (vietor nám má viac pomáhať, ako brzdiť) prídeme na to, že nová rýchlosť $\vec{v'}$ by mala byť väčšia ako $\vec{v}$. Teda pre špeciálny uhol $\alpha + \beta$, kedy tieto dve rýchlosti budú rovné, bude výška trojuholníka na obrázku rozpoľovať stranu w a aj uhol α. Vtedy vieme využiť definíciu funkcie sínus pre zistenie veľkosti uhla $\alpha/2$:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{w}{2v},$$

$$\frac{\alpha}{2} = \arcsin\frac{w}{2v}.$$

Z obrázka je tiež vidno, že $\alpha + \beta$ nie je nič iné, ako $\alpha/2 + 90°$,

$$\alpha + \beta = 90° + \arcsin\frac{w}{2v}.$$

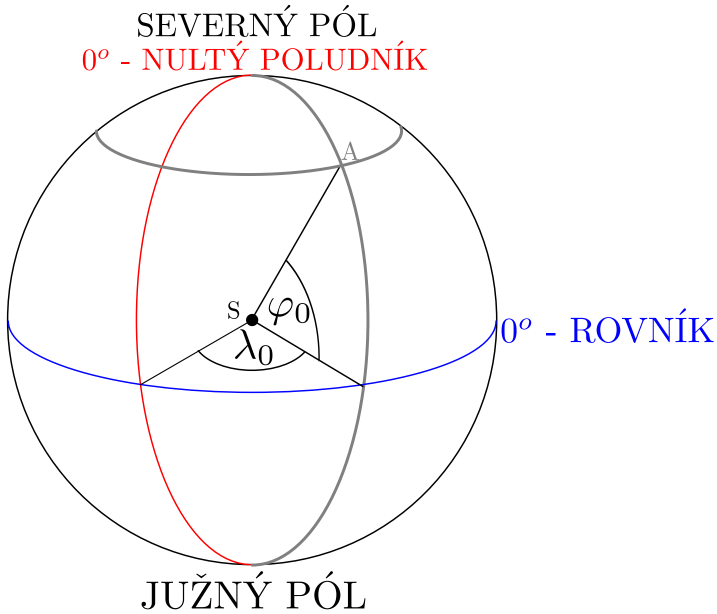
$\alpha + \beta$ je limitný uhol, kedy vietor nebrzdí a ani neurýchľuje vzducholoď. Interval priaznivých uhlov na let vzducholoďou je teda $\left(-90° - \arcsin\frac{w}{2v}; 90° + \arcsin\frac{w}{2v}\right)$.

[3] alebo ekvivalentne – rýchlosť chlapca by bola voči rýchlosti holubov zanedbateľná

1.4 GPS

vzorák **:Denda**, opravovala **:Denda**

Na začiatok si stručne zopakujme, čo sú vlastne tie GPS súradnice, ktorými určujeme polohu. Prvá súradnica, zemepisná šírka, je uhol medzi rovinou rovníka a spojnicou stredu Zeme s miestom, ktorého súradnice určujeme. Rovník má teda 0° zemepisnej šírky, severný pól 90° a južný pól −90°. Druhou súradnicou je zemepisná dĺžka, teda uhol, ktorý zviera rovina miestneho poludníka s nultým (greenwichským) poludníkom, pričom poludník je polkružnica spájajúca severný pól s južným. Zemepisná šírka sa teda udáva v stupňoch od 180° západnej zemepisnej dĺžky po 180° východnej zemepisnej dĺžky.



Obrázok 2: *Bod A má na obrázku GPS súradnice φ_0, λ_0.*

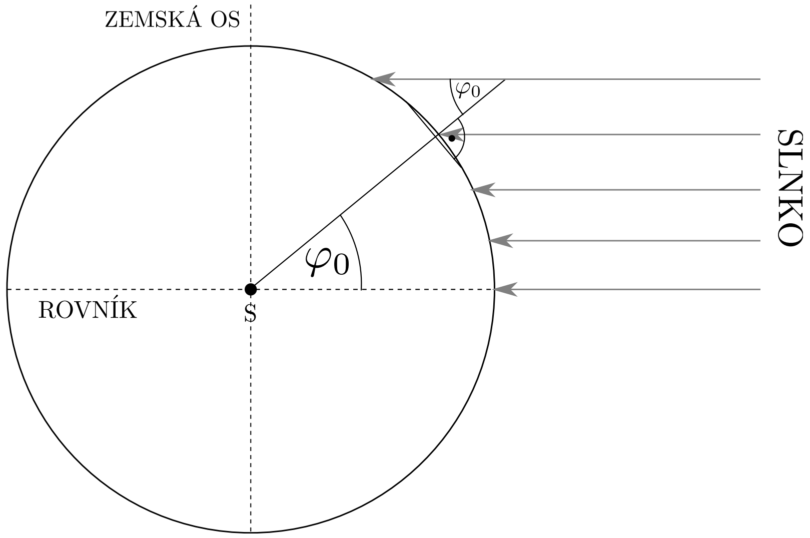
Ako však zistiť tieto súradnice bez použitia mapy? Začnime zemepisnou šírkou. Tu existujú dve možnosti. Môžeme merať buď na pravé poludnie[4] pomocou Slnka alebo v noci za použitia Polárky. Princíp je v tom, že Slnko (alebo Polárka) je voči Zemi ako objektu umiestnené v konkrétnom smere (viď obr. 3 pre Slnko a obr. 5 pre Polárku). Avšak nakoľko Zem nie je rovina, ale v podstate guľa[5], uhol, pod ktorým vidíme Slnko (alebo Polárku), sa môže líšiť. Nuž a presne na pravé poludnie v deň jarnej alebo jesennej rovnodennosti[6], je 180°, mínus uhol medzi Slnkom a kolmicou k zemi[7] rovný presne zemepisnej šírke (viď obr. 4).

[4] okamih, keď je Slnko najvyššie na oblohe

[5] V skutočnosti geoid, čo znamená, že náš kolmý smer vo všeobecnosti nesmeruje presne k stredu Zeme. Avšak zanedbanie tohoto faktu spraví menšiu chybu, než je moja presnosť. Za kolmý smer preto vo zvyšku textu budeme uvažovať smer k stredu Zeme.

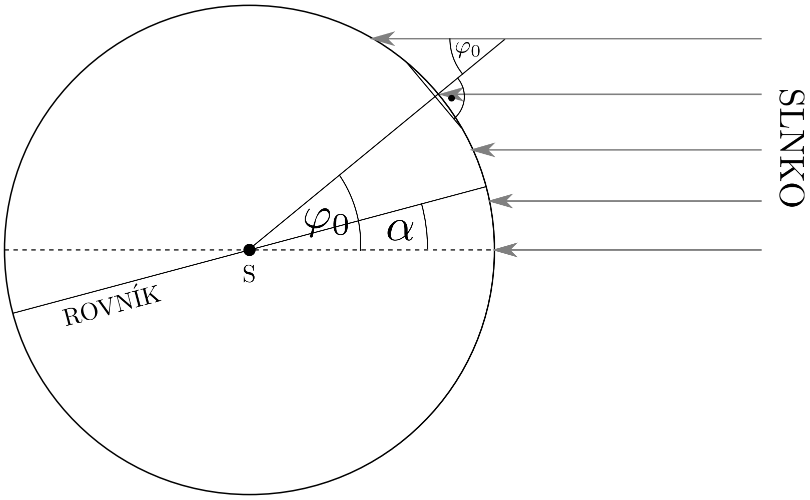
[6] T. j. keď stred obrazu Slnka leží v rovine rovníka. V tento deň taktiež zemská os nesmeruje ani od Slnka ani k Slnku a deň má všade presne 12 hodín

[7] Pre istotu opakujem, že smer k stredu Zeme stotožňujeme s kolmicou k Zemi, ak keď to tak v skutočnosti nemusí byť.



Obrázok 3: *V deň jarnej a jesennej rovnodennosti na pravé poludnie je zemepisná šírka φ rovná presne 180° mínus uhol, ktorý zvierajú dopadajúce lúče s kolmicou na Zem.*

Samozrejme, zemepisnú šírku vieme merať aj v iný deň. Vtedy je však potrebné odpočítať deklináciu Slnka[8] (viď obr. 4).



Obrázok 4: *Vo všeobecnosti je potrebné z nameraného uhla φ_0 odpočítať deklináciu Slnka α. Ako vidíte z obrázku, máme ju zbytočne započítanú navyše. Ak by bola záporná, bol by to naopak uhol, ktorý by nám chýbal.*

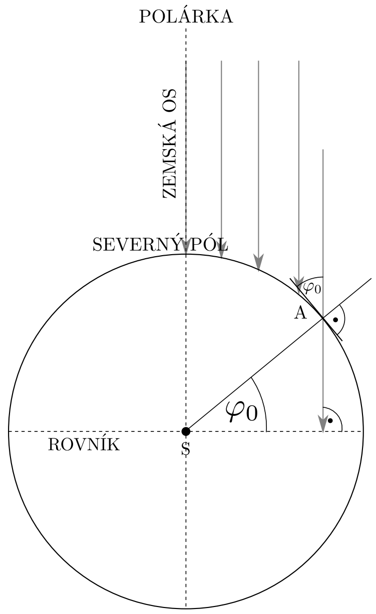
S Polárkou je meranie jednoduchšie v tom, že sa nachádza presne nad zemskou osou a teda jej poloha sa na oblohe nemení – takže kým vidíme hviezdy (a hlavne Polárku), môžeme merať kedykoľvek. V tomto prípade uhol vodorovného smeru a smeru k Polárke predstavuje práve zemepisnú šírku:

Princíp merania zemepisnej dĺžky je o niečo jednoduchší.[9] Spočíva v tom, že Zem sa otáča konštantnou rýchlosťou 360° za 24 hodín (prepočítajme na niečo výhodnejšie: 1° za 4 minúty). Ak teda vieme určiť, kedy je

[8] Uhlová vzdialenosť Slnka od rovníka. Za kladný smer považujeme smer k severnému pólu.

[9] V minulosti to však bol obrovský oriešok. Za nájdenie jednoduchého a praktického spôsobu, ako zistiť túto súradnicu pri plavení sa po mori boli sľúbené vysoké odmeny. V skutočnosti je história zemepisnej dĺžky dosť zaujímavý príbeh.

u nás presné poludnie a kedy bolo pravé poludnie na nultom poludníku, z ich rozdielu už vieme zemepisnú dĺžku jednoducho určiť – je to spomínaný rozdiel časov delený 4 (dostaneme teda počet stupňov, o ktorý sa Zem medzičasom otočí, čo je vlastne presne to, čo sme chceli :)). Už chýba len určiť smer. Ak je u nás viac hodín než v Greenwichi[10], u nás bolo poludnie skôr a teda sme východnejšie alebo naopak, ak by u nás bolo menej hodín, poludnie by bolo skôr na Greenwichi a zisťovaná súradnica by bola západnej zemepisnej dĺžky.



Obrázok 5: *Zemepisná šírka je rovná uhlu medzi horizontálnym smerom a smerom k Polárke.*

Meranie

K meraniu je potrebné vyriešiť ešte dve otázky. Prvou je: ako zistiť, kedy je pravé poludnie? Druhou: ako odmerať daný uhol? V prípade zemepisnej dĺžky sme nájdením odpovede na prvú otázku vlastne už vyhrali, zatiaľ čo pri zemepisnej šírke potrebujeme hlavne odpoveď na tú druhú. Čas pravého poludnia vieme určiť buď pomocou faktu, že tieň ukazuje presne na skutočný sever[11] – rovník je na juh od nás a Slnko vtedy nie je ani na východe, ani na západe – alebo využitím skutočnosti, že tieň je vtedy najkratší (Slnko je predsa v najvyššom bode svojej dráhy). Ďalšou možnosťou je merať uhol k Slnku a poludnie by bolo vtedy, keď je uhol maximálny. Na Greenwichi však poludnie nie je presne 12:00 (alebo 13:00 letného času)[12]. Kedy bolo alebo bude, viete vyčítať napríklad z tejto tabuľky: `http://www.ppowers.com/EoT.htm/`

Čo sa týka odpovede na druhú otázku, prvou možnosťou je odmerať výšku h nejakého predmetu, na ktorý cez poludnie svieti Slnko. V tom prípade je taktiež potrebné zistiť dĺžku jeho tieňa t na pravé poludnie. Potom z uvedených údajov je možné vypočítať zemepisnú šírku φ použitím vzťahu jasného z obr. 6:

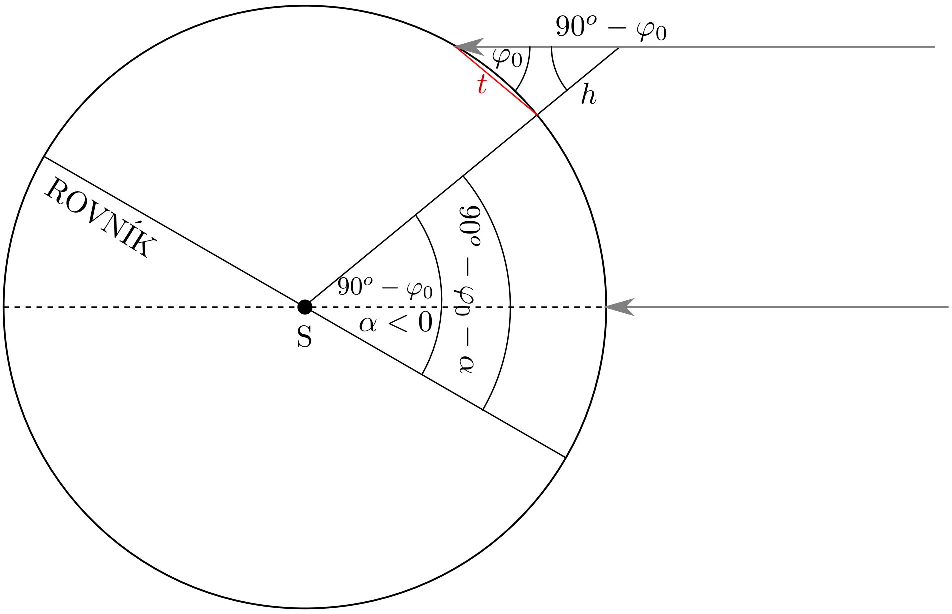
$$\varphi = 90° - \arctan\left(\frac{h}{t}\right) - \alpha, \tag{1}$$

kde α je deklinácia Slnka.

[10] nezabúdajte na existenciu letného a zimného času – nás vždy zaujíma len ten astronomický

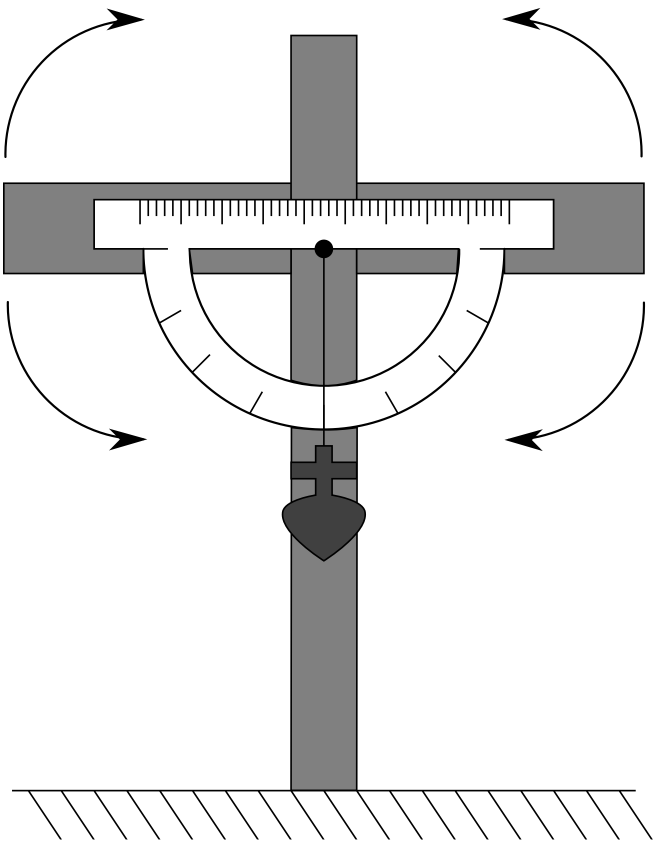
[11] Pozor na to, že magnetický sever nie je zároveň ten skutočný – ukazujúci na severný pól. O rozdiele medzi nimi sa viete niečo dozvedieť napríklad tu: `http://www.1sg.sk/~pkubinec/magnetzem.html`. Taktiež spomeňme, že na južnej pologuli bude tieň smerovať na juh, nie na sever.

[12] Ak vás zaujíma prečo a nebojíte sa angličtiny, viac nájdete tu: `https://en.wikipedia.org/wiki/Analemma/` a `https://en.wikipedia.org/wiki/Equation_of_time/`.

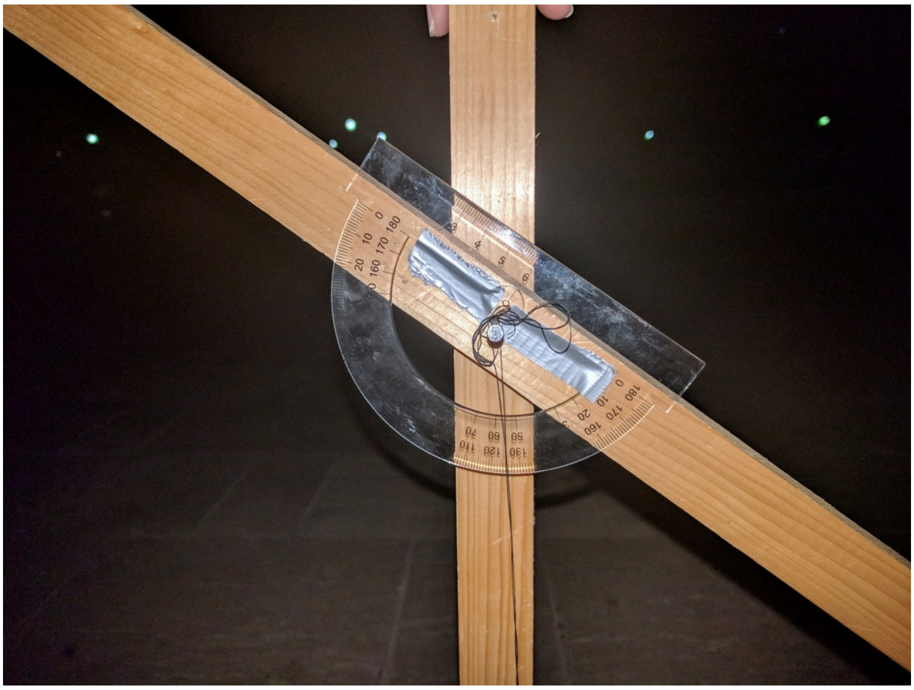


Obrázok 6: *Zemepisná šírka je rovná* $(90° - \varphi_0 - \alpha)$*, kde* $\varphi_0 = \arctan\left(\frac{h}{t}\right)$ *je uhol, ktorý sme namerali.*

Ďalším možným spôsobom je vytvoriť si na to špeciálny uhlomer. Ja som zvolila nasledujúci model: dve dosky pribité klincom tak, že jednu položíme kolmo na zem a druhou môžeme spokojne otáčať. Na klinec taktiež zavesíme závažie, aby sa ľahšie a presnejšie odčítaval uhol.



Obrázok 7: *Model použitého zariadenia*



Obrázok 8: *Zemepisná šírka je rovná* $\left(90° - \varphi_0 - \alpha\right)$*, kde* $\varphi_0 = \arctan\left(\frac{h}{t}\right)$ *je uhol, ktorý sme namerali.*

Keď je rotačná časť vodorovne, uhlomer ukazuje presne 90° (prípadne inú konštantu, ak lepíte krivo). Následne využitím tieňa – tieň rotačnej časti má minimálny obsah práve vtedy, keď ňou mierime priamo na Slnko[13] – zistíme, akému uhlu zodpovedá smer k Slnku a nakoniec už len rozdielom uhlov a prípadným odčítaním deklinácie Slnka, ktorú pre daný deň nájdeme v deklinačnej tabuľke[14] určíme hľadanú zemepisnú šírku.

Ak by sme sa rozhodli merať v noci, pre mierenie na Polárku by bolo ideálne použiť dobrý laser. Laser priložíme k rotačnej časti a namierime tak, aby svietil na Polárku. Nakoniec už len určíme hľadaný uhol a máme vyhraté. Ja som bohužiaľ laser nemala, tak som rotačnú časť namierila rovnobežne s mojou rukou ukazujúcou na Polárku a na moje prekvapenie bol výslený uhol odlišný len o 1° (49° miesto 48,185°)[15] Ten jeden stupeň je v skutočnosti dosť značný rozdiel. Ak vás však zaujíma len približné miesto na Zemi, kde sa nachádzate, tak je tento spôsob v poriadku. Pri navigácií na mori by ste sa však dlho asi nedožili.

Hlavnú pozornosť merania som však sústredila na poludnie. Pomocou uhlomerovo-tieňovej metódy som namerala uhol medzi kolmicou a smerom k Slnku: 51°. Deklinácia Slnka v daný deň bola −2,6°, takže zemepisná šírka by mala byť rovná 53,6°. To je však takmer až o 6° zle (správna hodnota: 48,185° N). Druhý spôsob, ktorý som zvolila, bolo vytvorenie slnečných hodín. Na veľký kus kartónu som nalepila ceruzku, ktorej výšku som si zmerala, a v okolí obeda som si každú minútu značila polohu tieňa. Pri prvej realizácii, keď deklinácia Slnka bola −1,8° a poludnie na nultom poludníku 12:51 GMT, mi poludnie u nás vyšlo 12:53 – zemepisná dĺžka rovná 58/4 = 14,5° (miesto skutočných 17,071°) – a zemepisná šírka podľa rov. 1: 50,5° N.

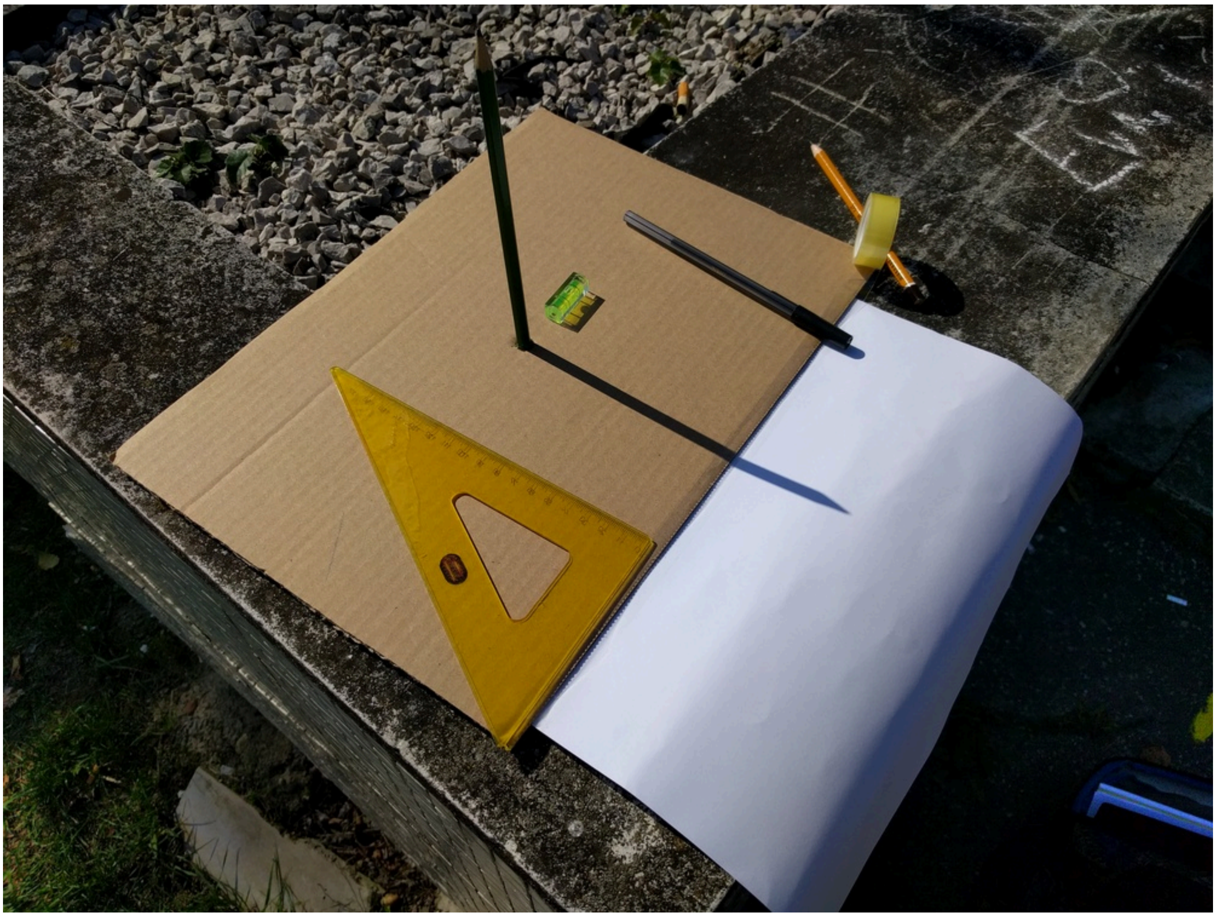
Čiže namiesto skutočnej lokácie v Bratislave mi vyšlo, že sa nachádzam kúsok severne od Prahy. Druhé opakovanie merania bolo s deklináciou −2,6° a poludním na nultom poludníku 12:50 (ten istý deň, čo uhlomer-tieňové meranie). Poludnie mi vyšlo o 12:46, z čoho vychádza zemepisná dĺžka 16°E a zemepisná šírka (zo vzťahu 1) 52,9° – čo je však už takmer severná časť Poľska. Hlavným problémom v daný deň bolo časté prechádzanie oblakov popred slnko a tým pádom žiaden tieň – nebolo možné spozorovať každú minútu. Nepres-

[13] pozerať sa na Slnko nie je dobrý nápad

[14] napríklad tu: `https://astronavigationdemystified.com/survival-declination-table/`

[15] Samozrejme, v presnosť na nejaké desatinné miesta s bežne dostupným materiálom ani nedúfam.

nosti mohli byť aj v určovaní dĺžky tieňa. Veľmi užitočnou pomocou pri meraní je kamarát, ktorý vám pomôže uchycovať predmety vodorovne/kolmo – pravdepodobne jeden z výrazných faktorov, prečo mi nočné meranie vyšlo o toľko presnejšie. Vyhovujúce by bolo zvoliť aj vhodné závažie, ktoré sa ľahko popasuje s vetrom.



Obrázok 9: *Foto použitého modelu*

1.5 Stabilný a labilný

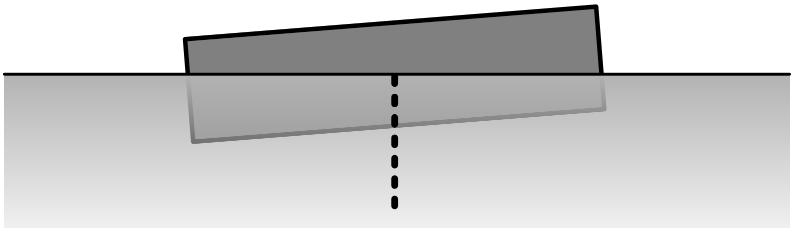
vzorák **Adam**, opravoval **Adam**

To že je poloha stabilná, vyžaduje okrem rovnovážnosti stavu splnenie dvoch ďalších podmienok. Jednou je vratnosť výslednej sily po malom vychýlení z rovnovážnej polohy. Po malom vychýlení telesa teda musí platiť, že výsledná sila je buď nulová, alebo má opačný smer ako má vychýlenie. Posunutím hocako natočeného hranolu nejakým vodorovným smerom sa nezmení ani hmotnosť hranola, ani objem jeho ponorenej časti, čo znamená, že výsledná sila zostane po takomto úkone nulová.

Ak naopak hranol zatlačíme alebo podvihneme v zvislom smere, objem ponorenej časti sa zväčší, resp. zmenší a dominanciu v dynamickom rozpoložení telesa získa vztlaková, resp. tiažová sila. Po krátkom vyhodnotení tejto zákonitosti sa dá dospieť k tomu, že v oboch prípadoch bude výsledná sila pôsobiť proti posunutiu, takže čo sa síl týka, obe polohy sú stabilné.

Druhá – a v našom prípade dôležitejšia – podmienka stability je analogická k tej prvej, avšak miesto posunutí a síl obsahuje to isté pre pootočenia a momenty síl. Tu je na mieste spomenúť, že keďže nás zaujímajú len a len pootočenia, oba z hranolov zostanú pri každom z nich vždy spolovice pod vodou a v silovej rovnováhe. Vďaka tomu môžeme s ťažiskom hranola narábať pri vyšetrovaní takejto otočnej stability ako s pevným bodom otáčania.

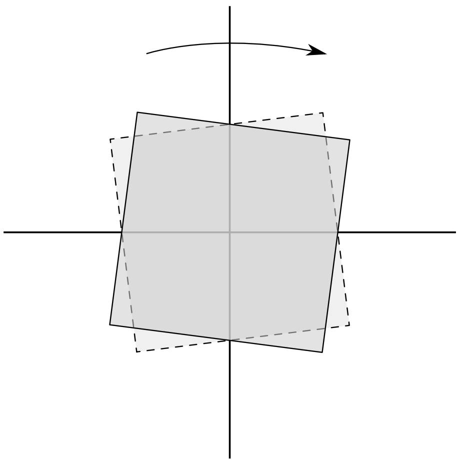
Otočenie okolo zvislej osi prakticky nič na situácii ani jedného z hranolov nezmení, takže nám ostáva povenovať sa otočeniami okolo osí vodorovných. Ak hranol pootočíme okolo vodorovnej osi kolmej na jeho vlastnú os, je pomerne ľahko (s pomocou obrázku) poznať, že v oboch prípadoch sa objem ponorenej časti na jednej strane ťažiska zväčší na úkor druhej tak, že takto vznikuvší moment sily vracia hranol späť do pôvodnej polohy (treba si uvedomiť, že tento efekt je umocnený podobnou zmenou čo sa týka ramien momentov síl).



Obrázok 10: *Otáčanie okolo niektorej z kratších osí*

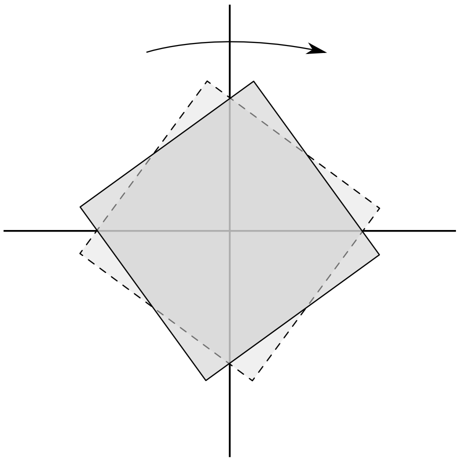
Ako už čitateľ mohol vytušiť zo vzoráku či sugestívneho obrázku v zadaní, rozhodujúca chvíľa formovania charakteru čaká hranol pri pootočení okolo jeho vlastnej osi. Kvôli symetrii majú po pootoční z oboch polôh ponorené časti na oboch stranách osi otáčania rovnaký objem, takže rozsúdenie stability nebude také jednoduché ako v predošlom prípade.

Keďže objemy a teda aj časti vztlakovej sily sú na oboch stranách bodu otáčania rovnaké, rozhodujúcim faktorom budú ramená týchto síl. Mohlo by byť známe, že pôsobiskom (z povahy tejto sily len pomyselným) vztlakovej sily je geometrický stred vyšetrovaného objemu. Javí sa (nielen retrospektívne) ako rozumné, zaujímať sa len o nesymetrie ponorených častí, ktoré sú znázornené na obrázku, keďže vztlak poskytnutý vyseparovanou časťou vďaka symetrii nespôsobuje žiaden moment sily. Ostávajú nám teda v oboch prípadoch dva kúsočky, od ktorých závisí výsledný smer momentu sily.



Obrázok 11: *Otáčanie okolo dlhšej osi blízko vodorovnej polohy*

Ak pootočíme hranol vo „vodorovnej“ polohe, vidíme že nesymetrický výčnelok naľavo je vo vodorovnom smere (kolmom na pôsobenie vztlakovej sily) ďalej od osi otáčania než kúsok napravo. To značí že výsledný moment sily začne hranol roztáčať v smere hodinových ručičiek, čo nie je vratným účinkom ani náhodou.



Obrázok 12: *Otáčanie okolo dlhšej osi blízko šikmej polohy*

Naopak ak je hranol v opačnej polohe, dispozícia výčnelkov po (nie opačnom!) pootočení je opačná, teda moment sily bude pôsobiť opačným smerom, a je naopak v porovnaní predchádzajúcim (opačným) prípadom vratný. Táto poloha narozdiel od svojej konkurencie obstála vo všetkých smerodajných testoch stability, takže sa už nebudeme dalej opálať s uznaním tejto jej vlastnosti.

1.6 Diera v prepážke

vzorák **MaťoB**, opravoval **MaťoB**

Pri riešení tejto úlohy je veľmi vhodné predstaviť si, čo sa deje s plynom na úrovni jednotlivých častíc plynu, čím sa šikovne vyhneme skoro akémukoľvek riešeniu rovníc a pomôže nám to získať malý nadhľad. Pustime sa teda do práce.

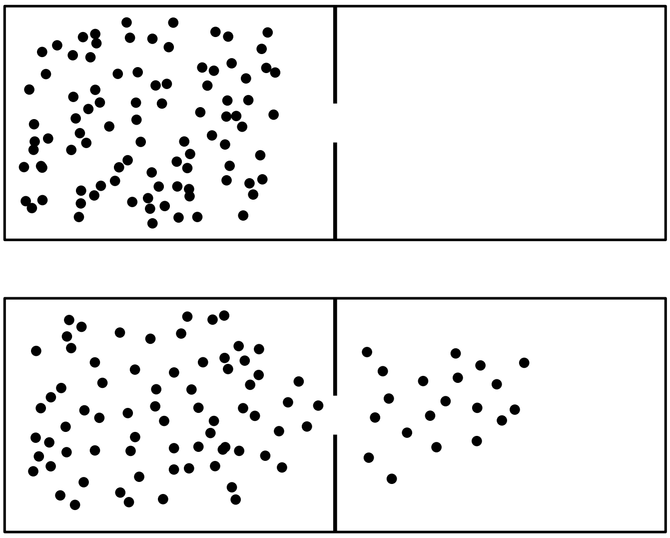
Najprv sa zamyslime, kedy je plyn v krabici ustálený. To bude vtedy, keď v obidvoch častiach krabice, rozdelenej prepážkou, bude rovnaký tlak aj teplota. Ak by v oboch častiach krabice nebol rovnaký tlak, cez dieru v prepážke by prechádzalo z časti s väčším tlakom do časti s nižším tlakom viac častíc ako smerom naopak. A to až do času, keď by v oboch častiach krabice bol rovnaký tlak. Podobne ak by v obidvoch častiach krabice nemali častice rovnakú teplotu (t. j. rovnakú priemernú energiu), pri zrážkach v blízkosti prepážky by častice plynu prichádzajúce z časti s väčšou teplotou odovzdávali v priemere viac energie časticiam plynu prichádzajúcich z časti s nižšou teplotou. Touto jednoduchou úvahou sme teda prišli na to, že z makroskopického pohľadu musia byť v ustálenom stave[16] obe veličiny, teplota a tlak plynu, rovnaké vo všetkých jeho častiach.

Ak skúmame plyn ako celok, jediné, čo zo zadania vieme zatiaľ povedať je to, že počas procesu sa objem plynu zdvojnásobí a počet častíc nezmení. Keďže Kvíkova krabica je dokonale izolovaná, taktiež vieme, že žiadne teplo nemôže vstúpiť ani odísť cez steny krabice do okolia. Inak povedané, celková vnútorná energia plynu je konštantná. Plní energie sa teda skúsme najprv pozrieť na to, či dej v zadaní nie je príkladom nejakého deja, o ktorom sme sa učili v škole (izotermický, adiabatický, izochorický či izobarický).

Prečo to nie je nič z toho, čo sme sa už učili?

Keďže počas deja sa mení objem plynu[17] zjavne nemôže ísť o príklad izochorického procesu. Taktiež vieme, že počas deja sa cez steny krabice neprijíma ani neodovzdáva žiadne teplo, takže nemôže ísť ani o príklad izotermického a izobarického procesu. Pri izotermickom procese totiž plyn koná prácu na úkor prijímaného tepla, pri izobarickom dokonca aj na úkor prípadnej zmeny vnútornej energie. Zostal nám teda adiabatický proces.

[16] Odborne sa tomu hovorí stav termodynamickej rovnováhy.
[17] Ak sa pozeráme na krabicu ako celok.



Obrázok 13: *Voľná expanzia plynu do vákua*

Pri adiabatickom procese plyn koná prácu na úkor poklesu vnútornej energie (neprijíma ani neodovzdáva žiadne teplo), vďaka čomu poklesne jeho teplota. Zamyslime sa však, či pri našom procese koná plyn prácu. Pri procese, ktorý nastal v Kvíkovej krabici, nebol žiadny piest, na ktorom by mohol plyn konať prácu, resp. nič piestu podobné. Plyn jednoducho iba „vyfučal" do prázdneho priestoru. Plyn tak nemohol stratiť energiu konaním práce, keďže ju nemal na čom konať! Priznávam, tento argument zatiaľ stojí tak trošku na vode, no pokúsime sa spolu nazrieť trochu hlbšie v nasledujúcom odstavci.

Prečo to nie je adiabatický proces?

Keď má plyn konať prácu prostredníctvom piestu, musí na piest vyvíjať tlak a dodávať mu nejakým spôsobom (zrážkami častíc s piestom) energiu. Ak sa zamyslíme, čo sa deje z mikroskopického pohľadu, častice plynu nesúce hybnosť narážajú na piest. Ten pred nimi uteká. Vďaka tomu majú po odraze od piestu menšiu rýchlosť ako pred odrazom[18], a teda stratia časť svojej energie. To je presne tá energia, vďaka ktorej môže piest konať prácu (pri zrážke medzi piestom a časticou si ju odniesol piest).

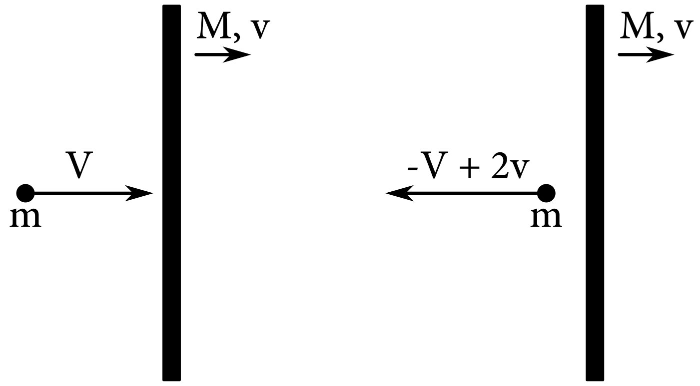
Túto energiu však stratila častica pri náraze. Strata energie častice sa prejaví ako pokles vnútornej energie plynu, a teda nutne aj teploty[19]. Keď však nieto piestu ani ničoho jemu podobnému, neexistuje spôsob, ako môžu častice stratiť energiu inak ako nárazom do nejakej inej častice plynu. Častice navyše nepribúdajú, neubúdajú a ani neodchádzajú nikam z krabice alebo do krabice (a teda nemôžu odísť, resp. prísť s energiou takýmto spôsobom). Taktiež energia nemôže utiecť cez steny zrážkami so stenami krabice, keďže tie sú dokonale izolované[20]. Hľa, energia Kvíkovho plynu v krabici sa teda nezmení!

Tu sa ešte patrí poznamenať, že pracujeme s ideálnym plynom, pre ktorý platí, že jeho častice sa medzi sebou necítia, až na dokonale pružné zrážky, a teda ich celková energia je daná len kinetickou energiou. Keďže nieto potenciálnej energie, energia sa nemôže skryť ani na toto „miesto". Dochádzame teda k silnejšiemu záveru: celková kinetická energia častíc plynu sa nezmení! A teda nezmení sa ani teplota plynu! Pozor, to neznamená, že proces, ktorý vidíme je izotermický proces v takom zmysle slova, ako sme sa učili v škole. Proces, ktorý nastal v Kvíkovej krabici je zvláštny totiž tým, že sa pri ňom nekoná práca a ani neprijíma či odovzdáva teplo.

[18] Pre neveriacich alebo nedočkavých, nižšie si to spočítame :P
[19] Teplota je jednoducho len priemerná energia plynu
[20] Teda zrážky so stenami krabice musia byť zo svojej podstaty dokonale pružné.

Ako je to teda s tým piestom a zrážkami s ním?

Predstavme si ťažký piest hmotnosti M idúci doprava rýchlosťou v a ľahkú časticu hmotnosti m, idúcu tiež doprava rýchlosťou $V > v$. Vzhľadom na piest sa častica teda pohybuje rýchlosťou $V - v$. Po náraze bude mať v sústave spojenej s piestom rýchlosť $-(V - v)$ (keďže $M \gg m$, ide o pružnú zrážku so stenou) a teda vzhľadom na stojacu krabicu rýchlosť $-(V - v) + v = -V + 2v$[21]. Koľko energie stratila častica?



Obrázok 14: *Mikroskopická predstava zrážky*

$$\Delta E = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}m(-V + 2v)^2 = \frac{1}{2}m\left(4vV - v^2\right) > 0.$$

Kam zmizla táto energia? Keďže $M \gg m$, rýchlosť piestu sa prakticky nezmení, keďže hybnosť častice plynu je malá. Napriek tomu si ale odnesie energiu. Takýmto spôsobom teda plyn na mikroskopickej úrovni koná prácu, a stráca svoju vnútornú energiu za to, že koná prácu.

Ako to teda je?

Počet častíc sa nezmení. Objem plynu sa zdvojnásobí. Tlak a teplota musia byť v obidvoch častiach po ustálení rovnaké. Plyn nevykoná žiadnu prácu. Neprijme ani neodovzdá žiadne teplo. Teplota sa nezmení tiež. Ak predpokladáme, že ide o ideálny plyn, na začiatku platila stavová rovnica,

$$pV = nRT.$$

Po ustálení musí platiť tiež[22], a preto

$$p'V' = nRT',$$

$$p'2V = nRT,$$

$$p' = \frac{1}{2}\frac{nRT}{V} = \frac{1}{2}p.$$

Plyn bude mať teda stále rovnakú teplotu, ale polovičný tlak.

[21] Kto neverí, môže si napísať zákon zachovania hybnosti a energie potom vypočítať rýchlosť častice po odraze. Na konci treba využiť, že $M \gg m$.

[22] Pozor, počas toho ako plyn fučí do druhej polovice stavová rovnica neplatí, pretože nie je dobre definovaný objem plynu a ani jeho tlak. Stavová rovnica totiž platí iba pre rovnovážne stavy, a stav, kedy plyn fučí, nie je rovnovážny. Preto ho ani stavová rovnica nevie popísať. Stavová rovnica však vie správne popísať začiatok a koniec, keďže to už sú rovnovážne stavy.

Pár poznámok nakoniec

Taktiež si môžeme všimnúť, že počas toho, ako sa plyn rozpína do druhej časti krabice, nie je v druhej časti krabice dobre definovaný tlak v okamihu, keď sa už v druhej časti krabice nachádzajú častice, no ešte nenarážajú na jej steny). Takéto procesy, pri ktorých nie je dobre definovaná[23] nejaká termodynamická veličina, sa nazývajú nerovnovážne. Pre tie nemožno použiť stavovú rovnicu v okamihu, keď plyn ešte nie je ustálený (t. j. v rovnováhe).

Proces v Kvíkovej krabici je navyše príkladom nevratného procesu. To je proces, v ktorom nevieme nekonečne malými zmenami nejakých veličín dostať postupne plyn cez rovnovážne stavy naspäť do „pôvodného stavu". Opakom sú vratné procesy, kedy je systém vždy v rovnováhe[24]. Adiabatický, izotermický, izochorický a izobarický proces sú všetko vratné procesy. Preto má aj zmysel kresliť nejaké im prislúchajúce krivky napr. v p–V diagrame. Príkladom nevratného procesu je napríklad to, čo vidíme tuto, otvorenie voňavky a pod. a všetky ďalšie príklady, pri ktorých ste počuli populárne rozprávky o tom, že sa entropia zvyšuje.

K nej však napokon ešte jedna poznámka. Entropia plynu sa môže meniť aj pri vratných procesoch a aj sa mení, napr. pri izotermickom, izochorickom a izobarickom procese. Pri adiabatickom sa nemení. Ako súvisí entropia s prijatým teplom, vratnosťou a nevratnosťou sa však poriadne dozviete až na vysokej škole. Takže sa netreba báť, že vôbec nerozumiete tomu, čo sa skrýva za týmto populárne znejúcim slovom :)

Komentár k prideleným bodom

Bodovanie bolo tento raz veľmi náročné. Snažil som sa čo najviac zohľadniť logickú konzistentnosť Vašich úvah. Taktiež som veľmi ocenil, ak sa niekto snažil vysvetliť nejako hlbšie prečo sa napríklad teplota nezmení či prečo nakonci musí byť v priemere polovica častíc v jednej časti krabice.

Naopak body som strhával za nekonzistentnosť úvah či prístup typu „Vyber si z tohto správne riešenie" :) Dobre odôvodnené „adiabatické" riešenia[25] získali typicky viac bodov ako neokomentované riešenia typu „Vyber si, nastane toto alebo toto", ktoré sa nepokúšali vôbec nič vysvetliť.

Tým Vás chceme motivovať, aby ste sa nebáli rozmýšľať nad úlohami a nebáli sa rozmýšľať nad tým čo píšete v riešeniach, kedy vlastne platia veci, ktoré nás učia v škole, aj keď nám častokrát zamlčia kopec detailov.

1.7 Popletená Denda

vzorák **Dušan**, opravoval **Dušan**

Priznávam, vypočítať odpor medzi dvoma susednými uzlami Dendinej siete je celkom ťažký oriešok. Nestačia na to štandardné triky ako prekreslenie komplikovaného zapojenia na čisto sériové a paralelné, či už pomocou transformácie trojuholník–hviezda alebo spájania a rozpájania uzlov s rovnakým potenciálom. Treba vytiahnúť väčší kaliber s názvom „superpozícia".

Čo to vlastne znamená? Celý elektromagnetizmus, vrátane správania sa prúdov a potenciálov v odporových schémach, je popísaný štyrmi Maxwellovými rovnicami.[26] Netreba vám ich poznať, netreba ich riešiť, stačí vedieť, že sú to lineárne diferenciálne rovnice.

Tie majú veľmi dobrú vlastnosť: keď vezmeme jedno rozloženie nábojov, prúdov, potenciálov…, ktoré spĺňa Maxwellove rovnice, druhé nejaké iné rozloženie, ktoré tiež spĺňa Maxwellove rovnice, tak aj ľubovoľná lineárna kombinácia[27] týchto rozložení spĺňa Maxwellove rovnice. A to my presne využijeme, keďže odpor vieme

[23] zo štatistického pohľadu

[24] T. j. všetky termodynamické veličiny ako tlak, teplota, … sú z makroskopického pohľadu počas celého procesu stále ustálené a dobre definované.

[25] Ale postavené ale na zlom predpoklade.

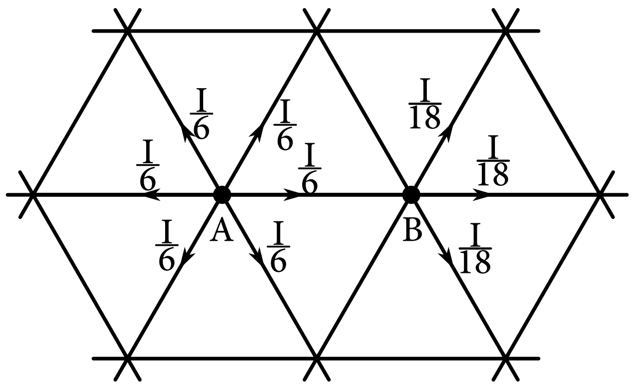
[26] Ohmov zákon, respektíve Kirchhoffové zákony sa z nich dajú ľahko odvodiť.

[27] Superpozícia

spočítať pomocou Ohmovho zákona, ak vieme zistiť, aký prúd bude pretekať schémou pri nenulovom napätí medzi spomínanými uzlami. Nájdeme teda dve situácie, v ktorých vieme jednoducho priradiť potenciály spomínaným uzlom a prúdy jednotlivým vetvám, a potom ich skombinujeme tak, aby vchádzal prúd iba do jedného uzla, a vychádzal iba z druhého.

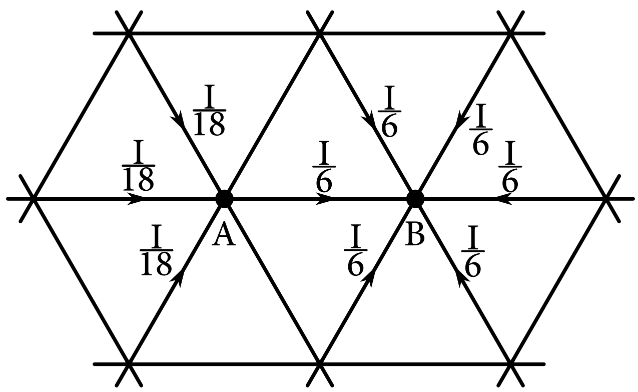
Pustime sa teda rovno do toho. Na začiatok si označme ľavý zo spomínaných dvoch uzlov A, a pravý nech je B. Prvá situácia, v ktorej vieme pomerne jednoducho zrátať prúdy a potenciály je, že do uzla A bude vstupovať prúd I, pričom uzol nech má potenciál $\varphi'_A = 0$, a bude vychádzať v nekonečne. To je pomerne neštandardné, no takýmto zavedením podmienok dosiahneme to, že prúd sa bude symetricky rozchádzať do všetkých smerov od uzla A.

To znamená, že prúd z A do B má hodnotu $\frac{I}{6}$ a potenciál uzla B má v tomto prípade hodnotu $\varphi'_B = \frac{-RI}{6}$[28]. Keby sme si chceli zrátať potenciál v nekonečne, formálne by sme dostali $\varphi'_\infty = -\infty$, pretože odpor medzi uzlom A a nekonečnom je nekonečný. Ako si však ukážeme neskôr, nezahrá si to vo výpočte žiadnu úlohu, takže nás to nemusí trápiť.



Obrázok 15: *Prúdy tečúce z uzla A do ∞*

Druhá situácia je podobná. Nech nám vteká prúd I v nekonečne a nech vyteká von z uzla B. Takže teraz bude prúd vtekať symetricky do uzla B zo všetkých strán, pričom jeho hodnota z A do B bude opäť $\frac{I}{6}$. Ak si povieme, že potenciál $\varphi''_B = 0$, tak v A musí byť potenciál $\varphi''_A = \frac{RI}{6}$. Formálne je tentokrát v nekonečne potenciál $\varphi''_\infty = \infty$.



Obrázok 16: *Prúdy tečúce z ∞ do uzla B*

[28] Znamienko mínus je tam preto, že prúd tečie z oblasti s väčším potenciálom do oblasti s menším

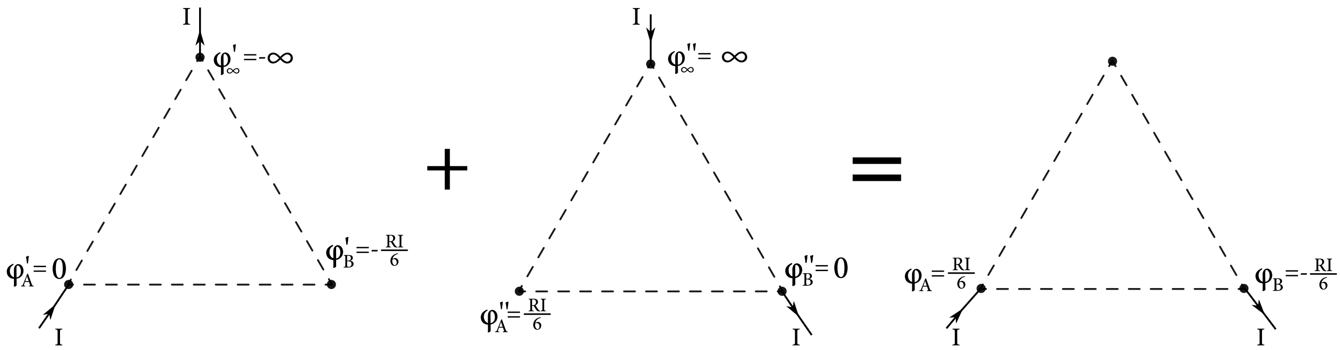
Tak a teraz stačí tieto dve situácie sčítať. To znamená, že do uzla A vteká prúd I, z uzla B vyteká prúd I, a v nekonečne je všetko v poriadku lebo sa prúdy vyrušili. Ešte treba sčítať potenciály. Pre uzol A platí

$$\varphi_A = \varphi'_A + \varphi''_A = \frac{RI}{6},$$

a pre uzol B

$$\varphi_B = \varphi'_B + \varphi''_B = \frac{-RI}{6},$$

Výsledný potenciál v nekonečne nás nemusí trápiť, keďže tade prúd nevteká ani nevyteká. Navyše ani by sme ho nevedeli určiť, lebo rozdiel dvoch nekonečien môže byť čokoľvek.



Obrázok 17: *Schématicky znázornená superpozícia*

Už by sme mali počuť zvuk fanfár, lebo máme všetko potrebné na výpočet výsledného odporu. Pri pretekajúcom prúde I cez sieť je napätie medzi uzlami A a B $U = \varphi_A - \varphi_B = \frac{RI}{3}$, takže z Ohmovho zákona triviálne dostávame, že odpor medzi dvoma susednými bodmi Dendinej siete je $\frac{R}{3}$.