Riešenia 3. kola letnej časti

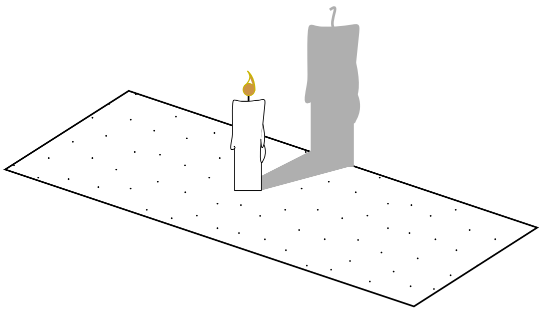
3.1 Umelecký outsourcing

vzorák **Zuzka**, opravovala **Katka**

Aby sme vyriešili pálčivú otázku sviečky, musíme sa najprv zamyslieť nad tým, ako vzniká tieň. Tieň je výsledkom nejakej prekážky, ktorú položíme toku fotónov do cesty, od ktorej sa odrážajú. Od tienidla, čo je v našom prípade stena za sviečkou, sa teda odráža do nášho oka menej fotónov, ako od oblastí, pred ktorými žiadna prekážka nestojí, a zdajú sa nám teda tmavšie.

Väčším zdrojom svetla na obrázku je lampa. Tá svieti na sviečku, ktorá na stene tvorí tieň (sviečka samotná je zdrojom svetla, ale o tom potom). Podľa obrázka, ktorý Vladko Čajke nakreslil, sa situácia tvári tak, že fotónom z lampy prekáža v ceste na tienidlo vosková časť sviečky, jej trčiaci knôt aj plameň. A tu sa nám začína zdať, že niečo nesedí.

Plameň sviečky nie je nič iné, než zmes horiacich plynov. Zanedbávajúc drobné pevné častice odlietavajúce zo sviečky, svetlo z lampy sa nemá na čom zastaviť. Preto na stene za sviečkou nebudeme vidieť tieň plameňa a správne by mal byť obrázok nakreslený takto:



Obrázok 1: *Správny tieň*

Teraz by ste sa ešte mohli udiviť nad tým, prečo sa na stene nezobrazí plameň sviečky, ale naše oko ho vidí. Ináč, prečo my máme schopnosť vnímať plameň, ale tienidlo ho „nevníma“. Sviečka je dosť silným zdrojom svetla na to, aby naše oči nevedeli rozlíšiť predmety za jej plameňom. Svetlo z lampy však nemá ako „zastaviť“.

3.2 Tá blbšia blcha

vzorák **Arthur**, opravoval **Arthur**

Stanovme si nulovú hladinu potenciálnej energie vo výške, v ktorej sa nachádza blcha. Pred skokom nemá žiadnu energiu. Energia, ktorú musí blcha vyvinúť na jeden skok, je $E = \frac{1}{2}mv^2$. Hľadáme minimálne E potrebné na doskočenie na okraj ďalšieho schodu, lebo naša blcha je lenivá a chce minúť minimum energie. Hmotnosť má konštantnú, teda hľadáme minimálne v^2.

Uvažujme, že blcha skáče pod uhlom α. Napíšme si pohybové rovnice vo vodorovnom a zvislom smere:

$$v\cos(\alpha)t = h,$$

$$v\sin(\alpha)t - \frac{gt^2}{2} = h.$$

Vyjadrime si z prvej rovnice t:

$$t = \frac{h}{v\cos(\alpha)}.$$

Dosaďme za t do druhej rovnice a upravíme:

$$h\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \frac{gh^2}{2v^2cos^2(\alpha)} = h,$$

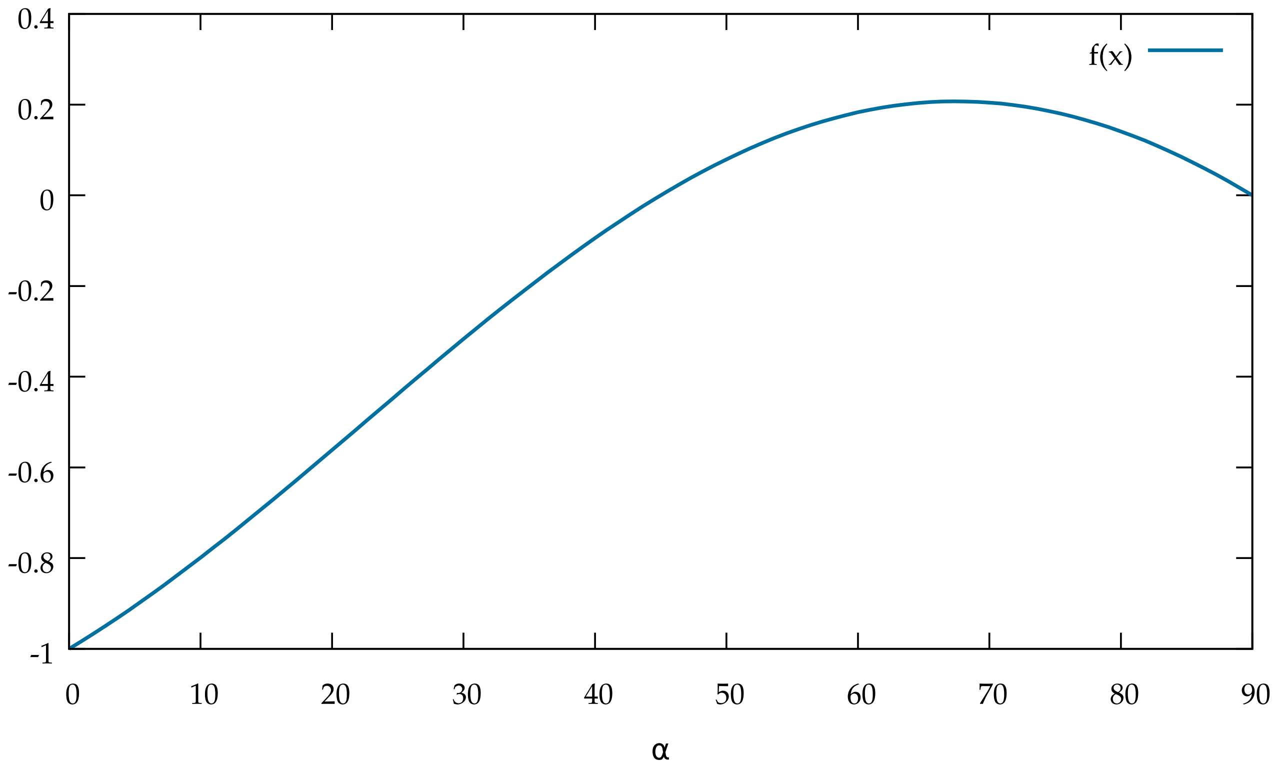
$$\sin(\alpha) - \cos(\alpha) = \frac{gh}{2v^2cos(\alpha)},$$

$$\sin(\alpha)\cos(\alpha) - \cos^2(\alpha) = \frac{gh}{2v^2}.$$

Nakoniec si vyjadríme v^2:

$$v^2 = \frac{gh}{2}\frac{1}{\sin(\alpha)\cos(\alpha) - \cos^2(\alpha)}.$$

Keďže g a h sú konštanty, tak pre minimálne v^2 musíme nájsť maximum funkcie $\sin(\alpha)\cos(\alpha) - \cos^2(\alpha)$ na intervale $(0°; 90°)$. Maximum môžeme nájsť napríklad graficky.



Obrázok 2: *Vykreslenie funkcie*

Z grafu vidíme, že funkcia nadobúda maximum pri $\alpha = 67{,}5°$, a že pri 45° a menších uhloch je nemožné doskočiť na okraj. Minimálna energia na jeden skok je

$$E = \frac{mgh}{4}\frac{1}{\sin(67{,}5°)\cos(67{,}5°) - \cos^2(67{,}5°)}.$$

Ako môžeme vidieť, energia závisí jedine od výšky, a to lineárne. Takže na dva skoky o jeden schod blcha spotrebuje rovnako veľa energie ako na jeden skok o dva schody. Teda ani jeden spôsob skákania nie je výhodnejší, než ten druhý.

Je jedno akým spôsobom blcha skáče, takže na vyskákanie celého schodiska musí spraviť napríklad 12 skokov o jeden schod. Celková energia teda bude

$$E_c = \frac{3mgh}{\sin(67{,}5°)\cos(67{,}5°) - \cos^2(67{,}5°)}.$$

3.3 Luxusný problém

vzorák **Samašec**, opravoval **SamoŠ**

Zamyslime sa najprv nad tým, ako funguje taká dýza, respektíve systém dýz vypúšťajúci vzduch. Princíp je jednoduchý, na začiatku máme kompresor, ktorý stlačí vzduch, ten prejde rúrkami do potrubia, z ktorého je viacero vývodov do masážnej vane. Toto by nám malo stačiť na opis situácie. Poďme si teraz rozobrať po krokoch, čo sa stane z fyzikálneho hľadiska:

Vzduch sa stlačí v kompresore. Stlačenie jednoznačne spôsobí zohriatie, keďže ide o pomerne rýchly dej. Po rýchlom zamyslení je nám jasné, že tlak vzduchu musí byť väčší, ako tlak tekutiny v mieste ústia dýzy. Dokonca musí byť podstatne väčší, aby vzduch unikal vo veľkom množstve cez malé výpusty, cez ktoré sa voda nedostane do potrubia (po rýchlom googlení som narazil na špecifikácie takejto vane, kde uvádzali pretlak 6 kPa). To zodpovedá maximálnej hĺbke dýz vo vani asi 60 cm.

Vzduch pokračuje do potrubia cez rúrky, v ktorých sa stihne tento vzduch ochladiť na teplotu okolia. Je to spôsobené tým, že vzduch má veľmi nízku tepelnú kapacitu a tak sa v rúrkach veľmi efektívne chladí. Vzduch vchádza do potrubia, v ktorom je konštantný tlak. Aj keby sa neochladil doteraz, ochladí sa tu. Vzduch vchádza cez dýzy do vane. Vo vani je tlak výrazne nižší ako v potrubí. Vzduch v bublinách musí expandovať, keďže zmenil jeho tlak a rovnako aj schladne. Ako sme povedali už skôr, vzduch má veľmi nízku tepelnú kapacitu a tak sa rýchlo opäť zohreje. Ale ak sa oprieme priamo o výpust dýzy, sme ešte stále schopní vnímať vzduch ako chladný.

Podotkol by som ešte jednu vec, uvažovanie povrchového napätia. O rozdieli tlakov v bublinke (tiež nazývanom Laplaceov tlak) nám hovorí Young-Laplaceova rovnica:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R},$$

kde σ je povrchové napätie (v našom prípade vzduch–voda pri teplote 25 °C je táto hodnota $\sigma = 0{,}073\ \mathrm{N\,m^{-1}}$) a R je polomer bublinky. Pri bublinkách s polomerom 2 mm je rozdiel tlakov úbohých 73 Pa. To je oproti nášmu rozdielu tlakov $\Delta p = 6$ kPa absolútne zanedbateľné.

3.4 Fantastický Kozmický Softvér

vzorák **Kvík**, opravoval **Kvík**

Povedal som si, že okrem počítacích úloh by ste sa mohli s gravitáciou nakoniec aj trochu pohrať. Grafika síce nebola nič moc a ani zápletku to veľmi nemalo, zato fyzikálne bola na tom simulácia podstatne lepšie, než som pôvodne plánoval a všetko fungovalo zhruba tak, ako malo.

Do budúcna by som ešte rád vyriešil posúvanie v čase – žiadna z úloh síce v ideálnom prípade nezabrala ani dve minúty, ale po prvé ste to nemuseli vedieť, a po druhé vám tiež zrejme nešlo všetko ideálne hneď na prvý pokus. Ostáva dúfať, že vás to aj napriek týmto nedostatkom aspoň trochu bavilo.

Takže sa pozrime na úlohy.

Obežná dráha

Prvá úloha sa dala vyriešiť všelijako. Ale ak ste aj dosiaľ žiadny podobný simulátor neskúšali, metódou pokusov a omylov by ste mali pár dôležitých zásad rýchlo objaviť aj sami. Napríklad, že

- chceme plný ťah motorov od samého začiatku (ideálne teda stlačíme z);
- raketu chceme začať otáčať do smeru plánovaného pohybu čo najskôr;
- pri tom všetkom sa ale potrebujeme vzdialiť od povrchu planéty čo najmenej;
- ale zase nie primálo, aby sme sa s povrchom nezrazili.

Prečo je ale toto riešenie najlepšie? Prvý bod by vám mal byť aj intuitívne jasný: motor musí prekonávať gravitačnú silu, ktorá raketu ťahá smerom do stredu planéty. Celkový impulz, ktorý rakete udelí gravitačná sila, však závisí od času. Na orbite nás to už trápiť nebude, pretože bude pôsobiť kolmo na smer nášho pohybu a teda nebude meniť energiu.

Pri štarte to ale dôležité je. Čím dlhšie nám potrvá dostať sa na orbitu, tým viac paliva budeme musieť spáliť. Čím vyšší ťah motor má, tým menej času musí pôsobiť proti gravitácii. Naopak, ak ťahá slabo, palivo veselo mizne, ale raketa sa ani nepohne, pretože sila motora nestačí ani len prekonať gravitáciu.

Rovnaký argument zdôvodní aj našu druhú zásadu. V prvom momente je zrýchlenie rakety $300\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, pričom gravitačné zrýchlenie na povrchu je $200\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Ak teda motor rakety smeruje priamo do stredu planéty, dve tretiny jeho ťahu sa spotrebujú iba na prekonanie gravitačnej sily a len zvyšná tretina raketu urýchľuje.

Teraz nakloňme raketu pod vhodným uhlom – teda tak, aby radiálna zložka sily akurát vyrovnávala gravitačnú silu. V našom prípade to bude

$$\alpha_0 = \arcsin \frac{2}{3} \doteq 41^\circ .$$

Zložka sily pôsobiaca v transverzálnom smere potom bude mať veľkosť

$$\cos\left(\arcsin \frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{3} \doteq 74{,}5\ \%$$

ťahu motora. Ako raketa získava výšku, gravitačné zrýchlenie klesá a teda sa môžeme otočiť ešte viac. Okrem toho raketa naberá rýchlosť v priečnom smere a povrch planéty sa pod ňou začína zakrivovať, takže musíme zatáčať ešte viac. O chvíľku dosiahneme apogeum, kde bude radiálna rýchlosť nulová. Tam už raketu môžeme otočiť v smere dotyčnice, teda rovnobežne s povrchom pod ňou a použiť na zrýchľovanie celý ťah motora.

Tretí a štvrtý bod vysvetľovať nemusíme. Planéta nemá atmosféru, takže môžeme letieť ľubovoľne blízko k jej povrchu. Ak celý manéver prebehne dobre a neprestrelíme to s výškou, po dosiahnutí nízkej obežnej dráhy nám môže ostať prinajmenšom 13 180 kg paliva[1].

Pre porovnanie, kebyže je ťah rakety ľubovoľne veľký (a teda zmení svoju rýchlosť za zanedbateľne krátky čas, ako výstrel z kanóna), potrebné palivo vieme spočítať z Ciolkovského rovnice.[2] V takom prípade by nám ostalo približne 15 421 kg paliva.

Úniková rýchlosť

Do nekonečna sa dá dostať aj úplne primitívne – zapneme motory na plný výkon a čakáme. Takto dosiahneme maximálnu rýchlosť približne $4350\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, prípadne ak motory vypneme v okamihu, keď sa dráha zmení na hyperbolickú, ostane nám približne 1100 kg paliva.

[1] Rekord od Matúša Kopunca. Za úplne ideálnych okolností to mohlo byť zhruba 13 300 kg.

[2] Tu s tým nebudem zaberať miesto, ale ak vás to zaujíma, skúste si spočítať, ako som na to prišiel.

Keď už však vieme, čo dokáže spraviť gravitačný odpor, hneď by sme si mali uvedomiť, že to veru vieme spraviť aj múdrejšie. Najprv dosiahneme nízku obežnú dráhu, rovnako ako v predchádzajúcom prípade. Pravdepodobne sa nám nepodarí dokonale kruhová dráha, to ale ničomu neprekáža. Vypneme motory a počkáme, kým sa raketa dostane do perigea, teda miesta, kde sa najviac priblíži k stredu planéty (a teda aj povrchu). Tam je potenciálna energia rakety najnižšia, takže kinetická musí byť maximálna.

Raketa sa teraz nachádza na takzvanej *parkovacej orbite*. Pre samotný štart totiž nie je dôležité, kedy nastane, stojí nás vždy rovnako. Preto môžeme vyštartovať napríklad vtedy, keď je pekné počasie, párkrát obletíme zem v malej výške a potom v správny okamih začneme opäť zrýchľovať. V tomto prípade nás zatiaľ časovanie samozrejme trápiť nemusí.

Následne sa znovu otočíme *prográdne*, teda v smere pohybu, a znovu zapneme motory na plný výkon. Manéver však nie je okamžitý, takže počas neho budeme potrebovať raketu ešte trochu natáčať, aby sme stále mierili do smeru pohybu.

Tento manéver sa nazýva *powered fly-by*[3]. Ide o to, že raketa dokáže z paliva využiť nielen chemickú energiu uloženú vo väzbách medzi atómami, ale aj jeho kinetickú energiu[4]. Pri spálení určitého množstva paliva sa ale zakaždým vyvinie rovnaký celkový impulz a teda aj zmena rýchlosti Δv.

Pre únik z gravitačnej jamy nás však nezaujíma priamo rýchlosť, ale celková energia rakety. Ak vieme zmeniť rýchlosť o nejakú konštantu, určite to chceme spraviť pri väčšej rýchlosti, než pri menšej – zmena energie tak bude podstatne väčšia a to hrá v náš prospech. Preto sa oplatí zapnúť motory vtedy, keď je kinetická energia veľká, teda čo najnižšie v potenciálovej jame.

Ak vám to ešte nie je jasné, skúsime to ešte inak. Raketa si svoje palivo vždy *nesie so sebou*. Čiže ak chce meniť svoju rýchlosť v mieste, kde je potenciál vyšší, musí si tam palivo najprv doniesť – čiže dodať mu potenciálnu energiu. No a na to musí takisto páliť palivo. Takže je vždy výhodnejšie palivo páliť čo najhlbšie v potenciálovej jame, čiže čo najbližšie pri povrchu.

Vráťme sa k našej úlohe. Obežná rýchlosť na ideálnej nízkej kruhovej dráhe je $\sqrt{10}\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, zatiaľ čo na únik potrebujeme dosiahnuť $\sqrt{20}\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, čiže musíme zrýchliť o približne $1{,}31\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. S trochou šikovnosti nám môže ostať vyše 6739 kg paliva.[5]

Pri okamžitom impulze by nám teoreticky mohlo ostať až približne 8474 kg paliva.

Pristátie na mesiaci

Hlavným predpokladom úspechu je tu vyštartovať *prográdne*, teda v rovnakom smere, v akom mesiac planétku obieha. S mesiacom sa síce dokážeme ľahko zraziť aj pri protismernom lete, na mäkké pristátie by sme však potrebovali trochu viac paliva, ako máme[6]. Preto budeme postupovať takto:

- Opäť dosiahneme nízku parkovaciu orbitu v *prográdnom*, teda kladnom smere. Letíme podstatne väčšou uhlovou rýchlosťou, ako mesiac.
- Tu si počkáme, kým bude mesiac približne 75° pred raketou.
- Zapneme motory a zrýchlime tak, aby naše apocentrum, teda najvzdialenejší bod dráhy od stredu planéty, ležalo približne vo vzdialenosti mesiaca.
- Znovu počkáme, kým sa k mesiacu dostatočne priblížime. Môžeme zazoomovať tak, aby sme planétu nevideli. Kamera je vždy zameraná na raketu – mesiac vyzerá, ako keby sa pomaly približoval k stredu obrazovky.

[3] Slovenský preklad, žiaľ, nepoznám… možno „poháňaný oblet“? :-)
[4] Možno si spomínate na úlohu Záhadné rakety z 3. kola letnej časti 30. ročníka. Ak aj nie, oplatí sa prečítať si vzorák.
[5] Znovu Matúšov rekord.
[6] Na asi pätnásty pokus sa mi podarilo pristáť aj z retrográdnej orbity. Ale je to o nervy.

- Otočíme sa smerom od mesiaca a pomaly brzdíme. Kvôli gravitačnému odporu a Oberthovmu efektu je opäť lepšie brzdiť čo najnižšie. Samozrejme, nemôžeme to prehnať, inak sa rozdrúzgame.
- Ak sme nič nepokazili, raketka spokojne dosadne na mesiac.

Ak máte dostatok trpezlivosti a budete to skúšať dostatočne dlho, mohli by ste si všimnúť, že medzi dobou letu a množstvom spáleného paliva vieme robiť kompromisy. Môžeme dokonca zrýchliť ešte viac a zdvihnúť apocentrum nad dráhu mesiaca, ale za tú cenu, že pri mesiaci budeme musieť viac brzdiť. A ak to preženieme, už sa nám zabrzdiť nepodarí, lebo nebudeme mať dosť paliva.

Toto je okrem iného dôvod, prečo dnes nedokážeme pristáť na Plute, aj keď sonda *New Horizons* už bez ťažkostí preletela okolo. Ak poletíme veľkou rýchlosťou, ako bol jej prípad, môžeme pri Plute byť za približne 10 rokov, ale minieme ho rýchlosťou zhruba 15 $\mathrm{km\,s^{-1}}$. Ak by sme sonde udelili iba takú rýchlosť, aby tam doletela čo najúspornejšie, brzdenie o zhruba 4 $\mathrm{km\,s^{-1}}$ by sa teoreticky dalo zvládnuť, let by však trval vyše 50 rokov.

Komentár k riešeniam

Viacerí ste mi písali už počas série a chceli vedieť, aká je hmotnosť planéty. Táto informácia vám nemala byť na nič, ale predpokladám, že ste chceli spočítať prvú a druhú kozmickú rýchlosť. Zo zdrojových kódov sa ľahko dalo zistiť, že hmotnosť planéty je 500, nikto vám však nepovedal, čoho. Simulácia samozrejme beží bezrozmerne, môžeme sa však riadiť jednotkami vo výpise v pravom dolnom rohu, kde sú za jednotky dĺžky považované kilometre, za jednotky času sekundy a za jednotky hmotnosti kilogramy. Zrýchlenie bude teda takisto v jednotkách 1000-krát väčších, ako SI.

Keďže v simulácii je aj gravitačná konštanta $G = 1$, hmotnosť planéty v SI jednotkách potom musí byť

$$\frac{500\ \mathrm{kg}}{6{,}67\cdot 10^{-11}}\cdot 1000^3 \approx 7{,}5\cdot 10^{21}\ \mathrm{kg}.$$

Spätným dosadením potom ľahko zistíme, že gravitačné zrýchlenie na povrchu je 200 $\mathrm{m\,s^{-2}}$, čo by malo sedieť s pozorovaním :-)

Dával som po tri body ku každej úlohe, väčšinou dva za správny postup a tretí za to, ak sa vám aj naozaj podarilo ušetriť rozumné množstvo paliva. Drobné rozdiely môžu byť ešte spôsobené vašimi nepresnými formuláciami, prípadne občas zjavne nepravdivými tvrdeniami (aj keď zvyšok podúlohy bol dobre).

Táto úloha si okrem korektného riešenia aj pýta voľáke celkové umiestnenie. Takže tu ho máte:

Prvá úloha: nízka obežná dráha

Minimálne prvých desať najlepších riešení išlo presne podľa vzorového postupu, takže výsledná hodnota zrejme odráža skôr zručnosť s klávesnicou a množstvo pokusov, ktoré ste boli ochotní spraviť :-)

Miesto	Autor	Ušetrené palivo
1.	Matúš Kopunec	13 180 kg
2.	Ivan Čermák	12 992 kg
3.	Tomáš Švihorík	12 778 kg

Druhá úloha: úniková rýchlosť

Opäť, všetky riešenia sú robené optimálnym spôsobom.

Miesto	Autor	Ušetrené palivo
1.	Matúš Kopunec	6739 kg
2.	Tomáš Švihorík	6550 kg
3.	Ivan Čermák	6463 kg

Tretia úloha: mäkké pristátie

Tu som nakoniec vyhodnotil čas, a nie množstvo paliva. V reálnom prípade by sme na návrat potrebovali ešte asi $\Delta v \approx 1\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

Miesto	Autor	Čas
1.	Jonáš Dujava	67,04 s
2.	Marek Jankola	69 s
3.	Ivan Čermák	75,48 s

3.5 O držku

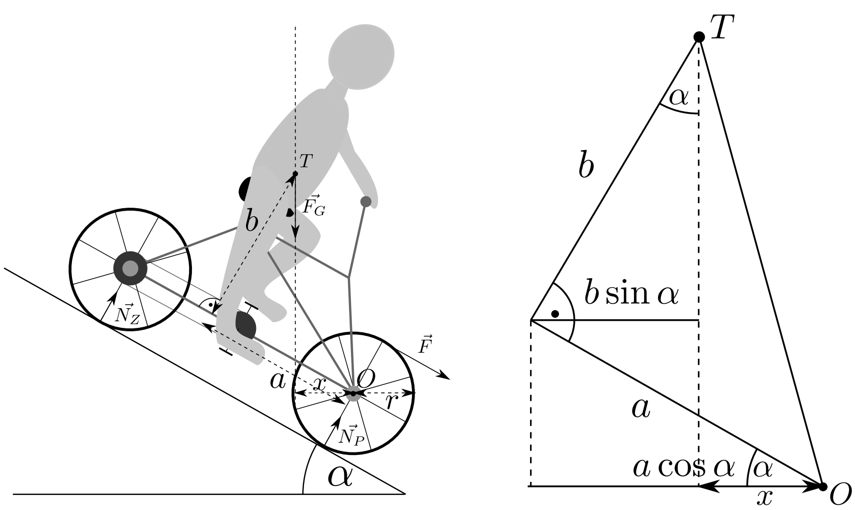
vzorák **Jaro**, opravovala **Majka**

Zo zadania máme informáciu, že z rýchlosti $v = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ zabrzdíme na dráhe $s = 10\,\mathrm{m}$. To by sme mohli využiť na získanie informácie o maximálnom zrýchlení (spomalení) bicykla a tým pádom aj o veľkosti brzdnej sily. Avšak nedá sa to urobiť jednoduchšie?

Predpokladajme, že bicykel s jazdcom majú celkovú hmotnosť m. Tým ale poznáme počiatočnú energiu bicykla pred začatím brzdenia $E = \frac{1}{2}mv^2$. Po zastavení má bicykel nulovú energiu, takže nejaké sily museli konať prácu.

Zamyslime sa nad tým, aké sily sú pôvodcom tohto brzdenia. Je jasné, že zdrojom tejto práce sme my tým, že sme zatiahli za páčku. Lenže počítať takto vykonanú prácu je trošku problematické.

Je dôležité uvedomiť si, kde dochádza k stratám energie. Zadanie hovorí, že koleso pri brzdení neprešmykuje, takže na kontakte koleso-vozovka k žiadnym stratám energie nedochádza. Jediným miestom je teda kontakt bŕzd s kolesom. Uvažovať budeme klasické čeľusťové brzdy, takže toto miesto leží prakticky na okraji kolesa.



Obrázok 3: *Cyklista na svahu*

Čo sa teda pri brzdení deje? Zatiahneme za páčku a pomocou lanka sa zovrú čeľuste bŕzd, čím vyvolajú brzdnú silu F na obvode kolesa. Všimnime si, že rovnaký efekt by sme dosiahli, keby sme priamo pôsobili na okraj kolesa silou F, takže prácu W potrebnú na zabrzdenie možno počítať pomocou tejto sily F a nie podľa toho, akou silou pôsobíme pri zatiahnutí páčky.

Predpokladajme, že brzdíme rovnomerne, takže sila F je konštantná počas celého brzdenia. Potom prácu vypočítame ako obyčajný súčin tejto sily a dráhy, na ktorej pôsobí. Tým, že brzdná sila pôsobí prakticky na okraji kolesa a koleso neprešmykuje, je táto dráha rovná brzdnej dráhe bicykla s. Tým pádom $W = Fs$.

Dajme do rovnosti počiatočnú energiu bicykla a prácu brzdnej sily. Odtiaľ vieme získať informáciu o veľkosti brzdnej sily

$$F = \frac{mv^2}{2s}. \tag{1}$$

Teraz už pristúpme k situácii, keď ideme dolu kopcom. Predpokladajme sklon svahu α. Situácia vyzerá ako na obrázku. To, čo rozhoduje o tom, či sa v konečnom dôsledku pri brzdení prevrátime alebo nie, sú momenty síl. Momenty síl budeme počítať vzhľadom na bod, okolo ktorého sa bude bicykel v prípade prevrátenia otáčať. Je ním os predného kolesa.

Aké sily na bicykel pôsobia? V prvom rade je to tiažová sila $F_G = mg$ pôsobiaca nadol a normálové sily N_P a N_Z, ktorými pôsobí svah na predné a zadné koleso. Po začatí brzdenia k nim pribudne ešte brzdná sila F pôsobiaca na okraji kolesa.

Zrátajme si momenty týchto síl. Moment vypočítame ako obyčajný súčin veľkosti sily a dĺžky ramena sily, t. j. vzdialenosti vektorovej priamky sily[7] od osi otáčania, ktorou je os predného kolesa.

V prípade sily N_P jej vektorová priamka prechádza priamo osou otáčania, takže jej moment je nulový. Moment sily N_Z nás nezaujíma, pretože iba zabezpečuje to, že za bežných okolností sa bicykel neotáča. V momente, keď sa bicykel začne pri brzdení pretáčať, zadné koleso sa nadvihne a vtedy je $N_Z = 0$, čiže aj jej moment je v tomto prípade nulový.

Záver je, že o tom, či sa bicykel pri brzdení prevrhne, rozhodujú len momenty tiažovej a brzdnej sily. Moment brzdnej sily má veľkosť Fr, kde r je polomer kolesa, a spôsobuje otáčanie v zápornom zmysle. Moment tiažovej sily je mgx, kde x je horizontálna vzdialenosť ťažiska bicykla s cyklistom od osi predného kolesa, a pôsobí v kladnom zmysle.

Teraz už vieme povedať, za akých okolností sa bicykel pri brzdení prevrhne. Za prevrhnutie je zodpovedná brzdná sila. Tiažová sila sa naopak snaží brzdnú silu umravniť. K prevrhnutiu teda dôjde, ak moment brzdnej sily je väčší než moment tiažovej sily. Pre hraničný prípad platí $Fr = mgx$.[8] S využitím (1) dostávame

$$x = \frac{v^2 r}{2sg}. \tag{2}$$

Zatiaľ sme nikde nespomenuli sklon svahu a pritom to je to, čo nás zaujíma. Kde tu teda sklon svahu vystupuje? Na sklone závisí rameno tiažovej sily x. Vyjadrime si ho z geometrie problému. Na to ale potrebujeme lokalizovať ťažisko bicykla s cyklistom.

[7] Vektorová priamka je priamka, na ktorej sila leží.

[8] Prísne vzaté, toto je podmienka pre nadvihnutie zadného kolesa. Stále sa môže stať, že pri brzdení sa zadné koleso nadvihne, no akt brzdenia netrvá dostatočne dlho na to, aby sa spoločné ťažisko cyklistu s bicyklom do momentu zastavenia bicykla dostalo nad os otáčania, a teda bicykel sa neprevráti, ale dosadne späť na zadné koleso. Dôsledok bude taký, že skutočný hraničný sklon svahu, kedy sa bicykel ešte neprevráti, bude o čosi väčší, než sklon, ktorý dostaneme naším odhadom. O koľko, to samozrejme závisí na rýchlosti, z ktorej brzdíme.

Zvoľme si dva význačné smery dané spojnicou kolies a kolmicou na ňu. Nech ťažisko leží vo vzdialenosti a za osou predného kolesa a výške b nad spojnicou kolies. Potom rameno tiažovej sily možno vyjadriť ako

$$x = a\cos\alpha - b\sin\alpha. \tag{3}$$

Dajme do rovnosti výrazy (2) a (3). Odtiaľ už možno dopočítať hraničný sklon svahu α. Pri výpočte využijeme, že α je ostrý uhol, a teda jeho sínus i kosínus sú kladné. Potom $\cos\alpha = +\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Postupnými úpravami dostávame

$$x = a\sqrt{1-\sin^2\alpha} - b\sin\alpha,$$
$$\sin^2\alpha + \frac{2bx}{a^2+b^2}\sin\alpha + \frac{x^2-a^2}{a^2+b^2} = 0,$$
$$\sin\alpha = \frac{-bx \pm a\sqrt{a^2+b^2-x^2}}{a^2+b^2},$$

kde x je dané výrazom (2). Hľadáme riešenie, ktoré dáva kladný ostrý uhol. Vidíme, že ho dostávame, keď vezmeme riešenie pre „+“, teda

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a\sqrt{a^2+b^2-x^2} - bx}{a^2+b^2}\right). \tag{4}$$

Dopracovali sme sa k nejakému výsledku, takže by sme sa mali zamyslieť nad tým, či zodpovedá tomu, čo by sme očakávali. Predstavme si, že naše brzdy sú veľmi slabé. V takom prípade brzdná dráha je veľmi veľká. Výraz (2) potom ide do nuly. Keď v (4) položíme $x = 0$, dostaneme $\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, čo zodpovedá takému sklonu svahu, kedy ťažisko je priamo nad osou predného kolesa, takže i zanedbateľne slabé brzdenie spôsobí prevrátenie. Vidíme, že výsledok je konzistentný s tým, čo očakávame, takže môžeme o čosi pokojnejšie spávať, že sme to vyriešili dobre.

Nájdime ešte numerický odhad. Na to potrebujeme odhadnúť polohu ťažiska a polomer kolesa. Povedzme, že $a = b = 0{,}5\ \mathrm{m}$ a $r = 30\ \mathrm{cm}$. V takom prípade dostávame $\alpha \doteq 32{,}75°$.

Prv než sa dostaneme k druhej otázke, povedzme si, čo by sa zmenilo, keby sme uvažovali kotúčové brzdy namiesto čeľusťových. Pre kotúčové brzdy platí, že k brzdeniu dochádza bližšie k osi otáčania vo vzdialenosti $\rho < r$, takže brzdná sila $\tilde{F}$ teraz pôsobí na dráhe $\tilde{s} = N \cdot 2\pi\rho$, kde $N = \frac{s}{2\pi r}$ je počet otáčok kolesa od začiatku brzdenia do zastavenia, čiže $\tilde{s} = \frac{\rho}{r}s$. Z rovnosti počiatočnej energie a vykonanej práce teraz dostávame $\tilde{F} = \frac{r}{\rho}\frac{mv^2}{2s} = \frac{r}{\rho}F$, takže kotúčové brzdy vyvolávajú pri rovnakej brzdnej dráhe väčšiu silu. To by mohlo naznačovať, že aj jej moment by mohol byť väčší a teda k prevráteniu bicykla by mohlo dôjsť skôr. Nenechajme sa však zmiasť. Tým, že sila $\tilde{F}$ pôsobí vo vzdialenosti $\rho < r$, jej moment je $\tilde{F}\rho = \frac{r}{\rho}F\rho = Fr$, čo je presne rovnaký moment, aký spôsobovali čeľusťové brzdy, takže nezáleží na tom, aký typ bŕzd používame.

Pristúpme konečne k druhej otázke. Tu by mal byť výpočet už priamočiary. Opäť budeme vychádzať z energetickej bilancie. Jediný rozdiel oproti rovine je, že v tomto prípade sa mení aj potenciálna energia. Predpokladajme, že bicykel zastane na dráhe s', takže brzdná sila vykoná prácu $W' = Fs'$. Tá sa má rovnať celkovému poklesu energie $E' = \frac{1}{2}mv^2 + mg\Delta h$, kde $\Delta h = s'\sin\alpha$ je výškový rozdiel, ktorý cyklista prekoná, kým zastane. Využijúc (1) odtiaľ dostávame

$$s' = \frac{v^2 s}{v^2 - 2gs\sin\alpha}, \tag{5}$$

kde α je daná výrazom (4). Už len dosadiť číselné hodnoty a dostaneme numerický výsledok.

Hups. Keď tak urobíme, dostávame zápornú dráhu $s' \doteq -122\ \mathrm{m}$. No nič to, niekde sme sa sekli pri nahadzovaní do kalkulačky, tak to skúsme ešte raz. Znova tá istá chyba?! A znova? Do tretice ten istý výsledok? To už nebude náhoda! Kde sme teda urobili chybu? Veď náš postup musel byť správny.

Nech t_0 je čas, v ktorom sme začali brzdiť a mali sme vtedy rýchlosť v dolu kopcom. Predpokladajme teraz ale, že aj pred časom t_0 sme brzdili rovnako, takže všetky zrýchlenia boli aj vtedy rovnaké. V takom prípade nám záporná brzdná dráha hovorí, že nulovú rýchlosť sme mali v nejakom čase $t < t_0$, čiže vyššie na svahu. Jediné rozumné vysvetlenie je, že aj napriek brzdeniu stále zrýchľujeme. Poďme to overiť.

Uvažujme, že sa na svahu posunieme o malú vzdialenosť d. Brzdy na tejto dráhe vykonajú prácu $\delta W = Fd$. Potenciálna energia zatiaľ klesne o $\delta U = mgd \sin \alpha$. To znamená, že kinetická energia sa musí zmeniť o $\delta T = \delta U - \delta W = (mg \sin \alpha - F)\, d$. Aby kinetická energia klesala, musí byť $\delta T < 0$, teda $F > mg \sin \alpha$. Využijúc (1) dostávame

$$\sin \alpha < \frac{v^2}{2sg}. \tag{6}$$

Pre dané numerické hodnoty to vychádza $\alpha < 30°$, lenže sklon svahu je až $\alpha \doteq 32{,}75°$, takže nech sa akokoľvek snažíme, len s prednou funkčnou brzdou sa zrážke nevyhneme.

Komentár k riešeniam

Ukázalo sa, že táto úloha spôsobila o čosi väčšie problémy, než by sa čakalo. Často sa objavovali nasledovné dve chyby.

Prvou z nich bolo, že ste za os otáčania brali bod kontaktu predného kolesa so zemou. To samozrejme môžete, lenže potom by bicykel nevykonával translačný pohyb len v smere svahu. Predstavte si, že z papiera vystrihneme bicykel a položíme ho na nakreslenú priamku predstavujúcu povrch zeme. Teraz spodok predného kolesa prišpendlíme na tú priamku a bicykel otočíme. Časť predného kolesa by sa dostala pod túto priamku, takže vidíme, že prevracanie bicykla nemožno modelovať transláciou v smere svahu a rotáciou okolo bodu dotyku kolesa so zemou. Ak však za bod rotácie zvolíme os otáčania predného kolesa, tento problém nenastane.

Omnoho väčšou chybou bolo, že ste sa rozhodli riešiť úlohu v neinerciálnej sústave, a potom ste zabúdali na jeden moment sily. Voľba vzťažnej sústavy pohybujúcej sa spolu s bicyklom sa javila ako dobrý nápad. Veď v nej je predsa bicykel v pokoji, takže sa stačí zamerať na otáčanie. Správne ste pridali neinerciálnu zotrvačnú silu, a následne ste porovnávali jej moment s momentom tiažovej sily. Ale moment! Nezabudli ste na niečo? Rovnice zapísané v nejakej vzťažnej sústave popisujú, ako daný fyzikálny systém vidíme v tejto sústave. Predpokladajme, že váš popis pomocou momentov zotrvačnej a tiažovej sily je správny. Ďalej predpokladajme, že sa bicykel prevracia, čiže podľa tohto matematického popisu musí byť moment zotrvačnej sily väčší než moment tiažovej sily. Prejdime teraz späť do inerciálnej sústavy. V matematickom popise sa to prejaví tak, že odstránime neinerciálnu zotrvačnú silu. To ale znamená, že jediný moment, ktorý zostane, je moment tiažovej sily, a teda v inerciálnej sústave by sme mali pozorovať, že sa bicykel neprevracia. Je toto správne? No zrejme nie. Tak kde sa stala chyba? Zabudli ste totiž na to, že i v neinerciálnej sústave sa na bicykli točia kolesá, takže keď zovrieme čeľuste bŕzd, tak predné koleso bude na brzdy (a tým pádom na bicykel) pôsobiť trecou silou, ktorá má nenulový moment a snaží sa bicykel prevrátiť. Aké z toho plynie ponaučenie? Neinerciálne vzťažné sústavy sú fuj a treba sa im vyhnúť, pokiaľ to je možné.

Práve uvedené chyby väčšinou nespôsobovali veľké chyby v odhadoch. Pri bodovaní sme boli benevolentní a ak ste sa aj dopustili niektorej z nich, no dostali ste rozumné odhady a správne ste ich zdôvodnili, tak ste stále mohli dostať plný počet bodov. Rozpätie vašich odhadov bolo skutočne široké – od 0° až po vyše 70°.

3.6 Železný plátypus

vzorák **Fero**, opravoval **Fero**

V prvom rade si musíme vyjasniť, ako funguje bežné rezanie. Napríklad, prečo možno krájať nôžom? Ak pohybujeme nožom v materiáli, dochádza k treniu. Vďaka nemu sa kontaktné plochy zahrejú a ukradnú nám energiu. Keďže nožík je tenký, je táto energia aplikovaná len v tenkej vrstve atómov v materiáli a v nožíku.

Keďže atómy v noži sú silno viazané, väčšinou ostanú na svojich miestach[9]. Avšak atómy v rezanom materiáli väčšinou dodanie energie neprežijú a ich väzby sa rozpadnú. Pri rezaní je ešte fajn si premyslieť, že energiu nedodá materiálu žiadna tajomná trecia sila, ale elektrická sila medzi časticami nožíka a časticami materiálu, ktorá sa prejaví pri ich dostatočnom priblížení. Pri pohybe nožíka sa v jej dôsledku rozkmitajú atómy materiálu, takže sa im odovzdá energia.[10]

Pre nás je dôležitý fakt, že keď chceme rozrezať niečo na dve časti, musíme molekulám v reze dodať dostatok energie na to, aby sa rozpadli ich väzby. Je už jedno, či to urobíme šibrinkovaním nožom, laserom, vŕtačkou alebo vodným prúdom, ktorý nás zaujíma. V takomto prípade častice vody narazia na materiál a pri zbrzdení mu odovzdajú svoju kinetickú energiu.

Teraz k samotným odhadom. Je asi nekonečné množstvo spôsobov, ako odhadnúť potrebný tlak – napríklad si zistíme, koľko energie musíme vynaložiť na rozloženie jedného molu látky. Potom odhadneme čas, ktorý nám bude rezanie materiálu trvať a spočítame energiu dodanú materiálu. My sa tu ale skúsime vydať iným smerom.

Inžinieri používajú veličinu zvanú *specific cutting energy*, ktorá mám hovorí, koľko energie musíme dodať 1 kg materiálu, aby sme ho vedeli rozrezať na kúsky. Majme prúd vody s prierezom S_w, striekaný pod tlakom p_w a s hustotou ρ_w a nech rezanie bude trvať čas t. Ďalej predpokladajme, že pri ústi trysky má voda iba tlakovú energiu, a naopak po dotyku s materiálom už iba kinetickú. Z Bernoulliho rovnice vieme, že

$$p_w = \frac{1}{2}\rho_w v^2.$$

Predpokladajme, že častice pri náraze odovzdajú materiálu všetku svoju energiu. Za čas t potom

$$\frac{1}{2}\rho_w S_w v t v^2 = S_w t p_w^{3/2}\frac{2^{1/2}}{\rho_w^{1/2}}. \tag{7}$$

Pravú časť rovnice sme dostali iba dosadením rýchlosti z Bernoulliho rovnice do ľavej strany. Nech sa táto energia použije na rozbitie materiálu. Ak využijeme tabuľkovú hodnotu špecifickej energie na kilogram C_s, energia potrebná na odrezanie kvádru o objeme V je $E = C_s V = C_s S_c d_c$:

$$p_w = \left(\frac{\rho_w}{2}\right)^{1/3}\left(\frac{C_s\rho_t S_c d_c}{S_w t}\right)^{2/3}.$$

Teraz urobíme pár odhadov. Nech prúd vody má prierez $S_c = 1\,\mathrm{mm}^2$ a rezanie trvá $t = 5\,\mathrm{s}$. Nech náš rez má tvar obdĺžnika a jeho hĺbka je $d = 0{,}02\,\mathrm{m}$. Ďalej nech jeho plocha je $S_c = 50\,\mathrm{mm}^2$. Naším materiálom bude titán s hustotou $\rho_t = 4500\,\mathrm{kgm^{-3}}$. Jeho špecifická energia rezania je $C_s = 1000\,\mathrm{kJkg^{-1}}$[11]. Prečo práve takéto rozmery a prečo titán? Inšpirovali sme sa z videí na youtube, kde môžeme vidieť priemyselné vodné rezačky v akcii, aby sme vedeli posúdiť správnosť našich modelov.

Po dosadení do rovnice (7) dostávame približný výsledok $p_w = 5\cdot 10^7\,\mathrm{Pa}$. Skutočný potrebný tlak je však približne sedemkrát väčší.[12] Veľkosť reálne v praxi používaného tlaku je približne $p = 3{,}5\cdot 10^8\,\mathrm{Pa}$.

Musíme si priznať, že náš odhad má viacero chýb. Najmä čas potrebný na prerezanie a aj rozmery sme odhadli pomerne nepresne. Môže nás ale tešiť, že sa aspoň rádovo približujeme k správnemu výsledku. Skúsme sa

[9] Ale skúste prerezať železo – všetci vieme, ako to dopadne.

[10] Áno, rozumiete správne, práve vysvetľujeme pôvod trecej sily. Práve elektrické sily sú pôvodcom trecích síl.

[11] http://web.mit.edu/2.813/www/readings/Mfg%20Ch%206.pdf, strana 17

[12] https://www.youtube.com/watch?v=04Avb2lRJec. Iskry, ktoré vidíme na videu, sú spôsobené tuhými (abrazívnymi) časticami vo vode. Často sa aj umýselne pridávajú do vodnej rezačky kvôli lepšiemu výkonu.

zamyslieť, čo je najväčší problém modelu. Hovorí nám, že aj veľmi malý tlak je schopný prerezať plát, iba mu to bude trvať nekonečne dlho. Z praxe ale vieme, že nič také v reálnom svete nepozorujeme.

Jedným z hlavných dôvodov je vedenie tepla. Totižto častice si prostredníctvom vzájomných interakcií odovzdávajú energiu. Štatisticky, ak má nejaká častica prebytok energie voči svojim susedom, veľmi pravdepodobne sa s nimi o tento prebytok podelí, tí zasa so svojimi susedmi, atď… Takto dochádza k vedeniu energie.[13]

Problém nastáva v momente, keď sa energia odvádza rýchlejšie ako ju dodávame, vtedy nikdy žiadnu väzbu nezrušíme. Názornou analógiou je napúšťanie suda vodou. Predstavme si, že sud má na dne diery. Ak začne vytekať rovnako veľa vody, ako vteká, nikdy sud nenaplníme. Dokonca má naša analógia ešte aj hlbší súvis. Menovite, čím je vyššia hladina, tým rýchlejšie voda vyteká. Analogicky je to s energiou (teplom) – čím jej máme väčší prebytok, tým rýchlejšie vyteká von.

Vcelku dobrým, ale matematicky zložitým zlepšením modelu by bolo vyriešenie rovnice vedenia tepla pre nekonečnú dosku, ktorej spodná a vrchná strana je držaná na konštantnej teplote (kvôli obtekaniu vodou) a v jednom bode na povrchu je zvonku dodávaná energia.

Iným prístupom by sme si vedeli odhadnúť typické energie väzieb v nejakom peknom kockatom kryštáli, spočítať, koľko väzieb treba zničiť a nakoniec by sme našli súvis s tlakom. Ak však prídeme ku kryštálom so zložitou štruktúrou a viacerými druhmi väzieb[14], problémom bude, že náš model je príliš jednoduchý. Mohli by sme ho postaviť na tom, že máme kryštál soli s krásnou štruktúrou, a potom naškálovať konštanty na železo alebo niečo podobné.

My skúsime urobiť jeden odhad, založený na podobnej myšlienke. Pokiaľ máme peknú kubickú mriežku, vieme odhadnúť počet väzieb N v typickej elementárnej bunke mriežky materiálu. Nech sú atómy v kocke od seba vzdialené d. Ak energia potrebá na zničenie väzby je δE, celková energia je $N\,\delta E$. Kebyže väzby ničíme len spôsobom, že na ne tlačíme tak silno, až sa rozdrvia, potom vykonaná práca je

$$W = Fd = pSd,$$

kde p je tlak, $S = d^2$ plocha rezu a d je typická vzdialenosť atómov mriežky. Potom

$$p = \frac{\delta E\, N}{d^3}.$$

Keďže nám ide o veľmi rádový odhad, vykašleme sa na hocijaké škálovanie počtom väzieb, a povieme, že $N = 1$. Je to síce veľmi odvážne, ale chyba takéhoto odhadu je približne jeden rád, s čím sa radi zmierime. Energiu δE pre kryštály železa získame z wikipédie: $E_t = 2500\ \mathrm{kJ\,mol^{-1}}$.

Odtiaľ $\delta E \approx 30$ eV a vzdialenosť $d = 0{,}2856$ nm. Dostávame

$$p \approx 210\ \mathrm{GPa}.$$

Ale pozor! Tlak, ktorý sme teraz vypočítali, je tlak, ktorý spôsobuje dopadajúci prúd vody na dosku. Nie je to tlak p_w, pod ktorým je prúd vody vystrekovaný z trysky, ktorý sme našli v prvom odhade. Ak chceme tieto dva odhady porovnať, musíme nájsť vzťah medzi týmito tlakmi.

Uvažujme rovnaký rez, ako pri prvom odhade. Nech je prierez dopadajúceho prúdu vody S_w. Potom spôsobuje tlakovú silu $F = pS_w$. Táto sila nie je nič iné, než zmena hybnosti dopadajúceho prúdu vody za čas $F \approx \frac{\Delta q}{\Delta t}$. Δt je

[13] Všimnite si, že z takýchto jednoduchých modelov získame náhľad o tom, ako dobre materiál vedie teplo. Totižto, ak sú atómy v materiáli tesne pri sebe, prebytok energie nejakého atómu sa prejaví ako jeho kmitavý pohyb. Čím sú iné atómy pri ňom bližšie, tým rýchlejšie do nich narazí a rýchlešie ich rozkmitá. Preto sú väčšinou kovy dobrými vodičmi tepla a plyny dobrými izolantmi.

[14] Kovy majú väzbu, ktorá je zmiešaninou kovalentnej a iónovej.

čas, za ktorý sa prúdu vody podarí rozbiť jednu elementárnu bunku kryštálovej mriežky, a nie celkové trvanie rezania t. Potrebujeme teda odhadnúť, koľko buniek mriežky potrebujeme pri rezaní rozbiť. Nech je celková plocha rezu S_c a jeho hĺbka d_c. Potom sa vo vyrezanom objeme nachádza približne $n \approx \frac{S_c d_c}{d^3}$ elementárnych buniek.

Na rozbitie jednej z nich teda pripadá čas $\Delta t \approx \frac{t}{n} \approx \frac{td^3}{S_c d_c}$. Teraz sa vráťme k 2. Newtonovmu zákonu. Postupnými úpravami dostaneme

$$\Delta q \approx F\,\Delta t \approx pS_w \frac{td^3}{S_c d_c} \approx \frac{\delta E}{d^3} S_w \frac{td^3}{S_c d_c} = \frac{S_w\,\delta E\,t}{S_c d_c}.$$

Za čas Δt dopadne na dosku voda s objemom $V = S_w v \Delta t$. Predpokladajme, že pri dopade odovzdá doske všetku svoju hybnosť, teda

$$\Delta q = S_w v \Delta t \rho_w v \approx S_w \rho_w v^2 \frac{td^3}{S_c d_c}.$$

Porovnaním nájdených vyjadrení pre zmenu hybnosti dopadajúcej vody dostávame $\delta E \approx \rho_w v^2 d^3$. Pripomeňme, že z Bernoulliho rovnice poznáme súvis medzi tlakom, pod ktorým je prúd vody striekaný, a rýchlosťou tejto vody, takže konečne získavame pre hľadaný tlak

$$p_w \approx \frac{1}{2}\rho_w v^2 \approx \frac{1}{2}\frac{\delta E}{d^3} \approx \frac{1}{2}p.$$

Dostali sme, že tlak v tryske je porovnateľný s tlakom, ktorý spôsobuje dopadajúca voda na dosku $p_w \approx p$. To dáva celkom zmysel. Očakávali by sme predsa, že tlak, ktorý vodu urýchlil, je porovnateľný s tým, ktorý voda vyvolala svojim nárazom na nehybnú prekážku. Navyše to ani neodporuje energetickej bilancii. Vypočítali sme, že na rozbitie jednej elementárnej bunky kryštálovej mriežky je potrebná energia $\delta E \approx pd^3$. Ak voda chce rozbiť bunku mriežky, môžeme predpokladať, že zaplní jej miesto, teda na rozbitie mriežky sa spotrebuje zhruba voda s objemom rádovo d^3. Na tlak v tryske sa môžeme pozerať ako na hustotu energie, teda celkové dodané množstvo energie je približne $p_w d^3$, čiže naozaj $p_w \approx p$.

Tento odhad je strašne nepresný – vidíme, že hodnota sa od reálnej hodnoty odlišuje asi o tri rády. Rovnako ani nezávisí na čase, čo nie je správne (premyslite si prečo). Je to niečo podobné, ako keby sme chceli rozpíliť drevo len tým, že budeme tlačiť na pílu. Proste ide to aj jednoduchšie. Pekné je ale na tomto odhade to, že výsledný tlak je rovný Youngovmu modulu pružnosti. Môžeme aspoň povedať, že sme odhadli hornú hranicu potrebného tlaku.

Na záver si skúste premyslieť, prečo sa v praxi využíva rezanie vodou.[15]

3.7 Estancía Crudero

vzorák **Adam**, opravoval **Adam**

Na začiatok je vhodné uvedomiť si a následne využiť fakt, že bratia Cruderovci sa v premise postavenej zadaním hýbu po Zemi výhradne po kružniciach na nej ležiacich. To prvé by človek majúci základné vedomosti z geografie a jazyka, v ktorom sa mu zadanie dostalo do rúk, mal mať v tejto chvíli zvládnuté. To druhé ihneď rozoberieme.

Poludníky a rovnobežky zaujímajú výsostné miesto spomedzi kriviek na zemeguli kvôli tomu, že pri pohybe po nich sa mení len zemepisná šírka, respektíve dĺžka. Pokúsme sa teraz posuny zo zadania v kilometroch preložiť do reči, zemepisných súradníc. Keďže všetky poludníky sú hlavné kružnice (pre puristov polkružnice), pričom hlavná kružnica je v krátkosti na zemeguli kružnica najpoprednejšia v dlhosti.

[15] Hint: Jeden z dôvodov súvisí práve s vedením tepla a ochladzovaním kovu vodou.

To značí, že všetky poludníky majú rovnaký polomer, a to polomer Zeme. Táto nuansa nám umožňuje preklad do zemepisných (sférických) súradníc takmer spakruky, ako $\delta s = \frac{r}{R}$, kde δs je zmena zemepisnej šírky (zo zatiaľ ešte málo zjavných dôvodov v radiánoch), r je dĺžka našej cesty smerom na sever (50 km) a R je polomer Zeme.

Po vyriešení poludníkov sa nám síce hlavné kružnice neminuli, ale veselou (vďaka tomu má tento príklad zmysel) správou je, že z rovnobežiek je hlavnou kružnicou len rovník. Bez ďalšieho otáľania vyjavíme, že polomer rovnobežky je $\rho = R\cos s$, kde s je príslušná zemepisná šírka. A teda aj preklad obyčajnej vzdialenosti v západo-východnom smere na zemepisnú dĺžku je krivočiarejší, i keď analogický: $\delta d = \frac{r}{R\cos s} = \frac{\delta s}{\cos s}$.

Teraz už môžeme presuny, presnejšie konečné lokácie Juana a Jorgeho uviesť v sférických súradniciach. Pre Juana je to ľahšie, zemepisná šírka mu vzrástla o už vyššie uvedené δs a zemepisná dĺžka o už vyššie uvedené $\delta d = \frac{\delta s}{\cos s}$, kde s je nami hľadaná zemepisná šírka. Jorge taktiež zvýšil svoju zemepisnú šírku o δs, ale zemepisnú dĺžku už o $\delta d' = \frac{\delta s}{|\cos(s+\delta s)|}$, keďže sa hýbal po inej rovnobežke (absolútna hodnota pribudla kvôli možnému prechodu cez severný pól, čo nám zadanie explicitne nezakazuje. Takto nebude mať nová rovnobežka záporný polomer).

Zadanie nám dáva podmienku riešenia: na konci bol Juan od Jorgeho jeden kilometer, a naopak. Čo to znamená? Že kružnicový úsek vytýčený bratstvom na hlavnej kružnici udanej nimi dvoma je dlhý práve jeden kilometer. To je ekvivalentné s podmienkou, že veľkosť uhla Juan–stred Zeme–Jorge je práve $\frac{r/50}{R} = \frac{\delta s}{50}$. Ako ale získame tento uhol zo zemepisných súradníc? Teraz si treba uvedomiť, že z pozície bratov sme schopní vytvoriť jednotkové vektory s počiatkom v strede Zeme, a teda zo skalárneho súčinu týchto dvoch vektorov v karteziánskych súradniciach dostaneme kosínus požadovaného uhla.

$$\vec{r}_{\text{Juan}} = \begin{pmatrix} \cos(s+\delta s)\cos\delta d \\ \cos(s+\delta s)\sin\delta d \\ \sin(s+\delta s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(s+\delta s)\cos\frac{\delta s}{\cos s} \\ \cos(s+\delta s)\sin\frac{\delta s}{\cos s} \\ \sin(s+\delta s) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

$$\vec{r}_{\text{Jorge}} = \begin{pmatrix} \cos(s+\delta s)\cos\delta d' \\ \cos(s+\delta s)\sin\delta d' \\ \sin(s+\delta s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(s+\delta s)\cos\frac{\delta s}{|\cos(s+\delta s)|} \\ \cos(s+\delta s)\sin\frac{\delta s}{|\cos(s+\delta s)|} \\ \sin(s+\delta s) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Po vykonaní skalárneho súčinu:

$$\cos^2(s+\delta s)\left(\cos\frac{\delta s}{\cos s}\cos\frac{\delta s}{|\cos(s+\delta s)|} + \sin\frac{\delta s}{\cos s}\sin\frac{\delta s}{|\cos(s+\delta s)|}\right) + \sin^2(s+\delta s) = \cos\frac{\delta s}{50}.$$

Tu treba povedať, že by sme mohli aj skončiť analýzu, a začať hľadať riešenie numericky. Mne ale nedá, a pokúsim sa prinajmenšom tento výsledok trochu poľudštiť. Ako si môžeme cvičeným okom všimnúť, v tej dlhočiznej zátvorke je jedna strana súčtového vzorca pre $\cos(a-b)$. Teda:

$$\cos^2(s+\delta s)\cos\left(\delta s\left(\frac{1}{\cos s} - \frac{1}{|\cos(s+\delta s)|}\right)\right) + \sin^2(s+\delta s) = \cos\frac{\delta s}{50}.$$

To vieme ešte trocha upraviť:

$$\cos^2(s+\delta s)\cos\left(\delta s\,\frac{|\cos(s+\delta s)| - \cos s}{|\cos(s+\delta s)|\cos s}\right) + \sin^2(s+\delta s) = \cos\frac{\delta s}{50}.$$

Toto je, úprimne verím, najhumánnejšia podoba našej rovnice, k akej sa dá dopracovať. Teraz už je ozaj riešením numerika. Nepeknou vlastnosťou úlohy je jej citlivosť na jemnosti. Ak si našu rovnicu upravíme na funkciu s jednou nulovou stranou, zodpovedajúce šírky (v radiánoch) hľadáme ako priesečníky s x-ovou osou. Ak tak spravíme, všimneme si nespočet riešení okolo pólov, ktoré sa ale líšia o pomerne malé čísla. Tu je už na riešiteľovi, čo si zvolí za rôzne riešenia (t. j. na akú presnosť chce byť schopný určiť polohu estancíe Crudero). Ak nám stačí vedieť polohu s presnosťou na ~ 1 km, vieme si ľahko vypočítať, že šírka nás zaujíma maximálne na desaťtisíciny. Takáto mentálna akrobacia nebola predvádzaná náhodou, keďže potom si možno všimnúť, že nespočet polárnych riešení sa nám zhrkne prakticky do intervalu. A teda estancía Crudero môže ležať približne v nasledujúcich šírkach (po prepočte na stupne) v $\langle -89{,}94°; -68{,}60° \rangle$; $\langle 68{,}54°; 89{,}51° \rangle$.

Človeka majúceho vedomosť, že $\delta s \ll 1$, môže pochytiť túžba vyriešiť rovnicu s použitím nejakých aproximácií. Netreba sa ale rozkokošiť, celá úloha sa deje v malých hodnotách, a teda aproximácia nám môže zabiť nejaké/všetky/možnosť riešenia. Tu sa predvedie elegantná cesta k dvom nepolárnym riešeniam, ale priam s prekvapivou presnosťou a ľahším výpočtom. Použime na najdlhší kosínus aproximáciu $\cos s \approx 1 - \frac{x^2}{2}$.

$$\cos^2(s+\delta s)\left(1-\frac{1}{2}\left(\delta s\,\frac{\cos(s+\delta s)-\cos s}{\cos(s+\delta s)\cos s}\right)^2\right)+\sin^2(s+\delta s)=\cos\frac{\delta s}{50}.$$

Upravujeme:

$$1-\frac{1}{2}\cos^2(s+\delta s)\left(\delta s\,\frac{\cos(s+\delta s)-\cos s}{\cos(s+\delta s)\cos s}\right)^2=\cos\frac{\delta s}{50},$$

$$1-\frac{1}{2}\left(\delta s\,\frac{\cos(s+\delta s)-\cos s}{\cos s}\right)^2=\cos\frac{\delta s}{50},$$

$$\cos\left(\delta s\,\frac{\cos(s+\delta s)-\cos s}{\cos s}\right)=\cos\frac{\delta s}{50}.$$

A keďže kosínus je párna funkcia, musí platiť

$$\delta s\,\frac{\cos(s+\delta s)-\cos s}{\cos s}=\pm\frac{\delta s}{50},$$

$$\frac{\cos(s+\delta s)-\cos s}{\cos s}=\pm 0{,}02.$$

Aby sme sa dostali k riešeniu, treba nám ešte rozseparovať s a δs cez súčtový vzorec.

$$\cos s\cos\delta s-\sin s\sin\delta s-\cos s=\pm 0{,}02\cos s$$

Ak $\cos s \neq 0$, čo zo zadania vieme vytušiť, pretože ináč by bolo nezmyselné, dostaneme sa k

$$\cos\delta s-\tan s\sin\delta s-1=\pm 0{,}02,$$

$$\tan s=\frac{\cos\delta s-(1\pm 0{,}02)}{\sin\delta s},$$

$$s=\arctan\left(\frac{\cos\delta s-(1\pm 0{,}02)}{\sin\delta s}\right).$$

Ak si dáte námahu vyčísliť si tieto riešenia, uvidíte, že sme ich dostali dosť presne na naše (aspoň moje) nároky.