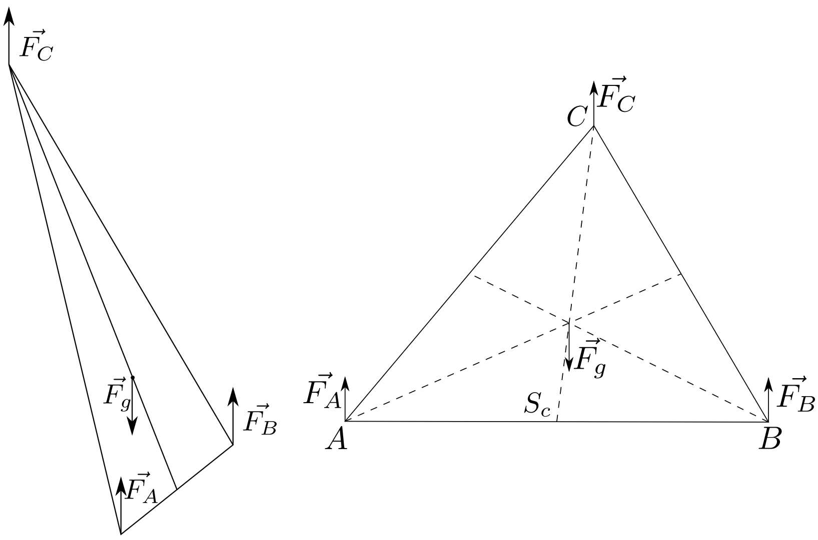
Fyzikálny korešpondenčný seminár
XXXII. ročník, 2016/2017
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 2. kola letnej časti

2.1 Dekoratívna úloha

vzorák **Enka**, opravovala **Majka**

Poďme toho najprv zo zadania vydolovať čo najviac. Zadanie nám tvrdí, že všetky Čajkine sily sú zvislé. Aj tiažová sila, ktorá pôsobí v ťažisku trojuholníka, má zvislý smer. Zistili sme teda, že všetky sily pôsobice na trojuholník sú rovnobežné. Ďalšou dôležitou informáciou je podmienka, že trojuholník musí byť statický. Čo to znamená? No predsa chceme, aby sa trojuholník neposúval a ani neotáčal (odbornejšie nekonal translačný a rotačný pohyb). Ak sa trojuholník nemá posúvať, výsledná sila pôsobiaca na trojuholník musí byť nulová, a ak sa nemá otáčať, potom výsledný moment sily tiež musí byť nulový. A načo nám je informácia, že spodná strana trojuholníka je vo vodorovnej polohe? To sa hádam dozvieme neskôr.



Obrázok 1: *Sily pôsobiace na trojuholník. Vľavo pohľad na trojuholník zboku a vpravo pohľad spredu*

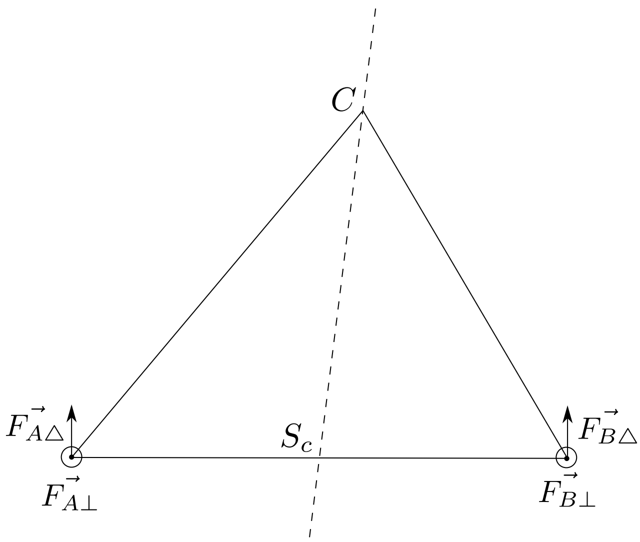
Vráťme sa teraz k pojmu momentu sily. V škole ste sa určite učili, že moment sily je možné určiť vzhľadom k ľubovoľnej osi, ktorú si sami zvolíme (nemusí to byť os otáčania).[1] Veľkosť momentu sily vypočítame ako súčin sily a ramena sily $M = F \cdot a$[2] (rameno sily a je kolmá vzdialenosť vektorovej priamky sily od osi otáčania). Pri výpočte môžeme hľadať spomínanú vzdialenosť, avšak v takom prípade môžeme naraziť na zložitú geometriu. Častokrát je jednoduchšie si vektor rozložiť na dve zložky, pričom jedna z nich na teleso nemá otáčavý účinok (jej rameno je nulové a teda jej moment sily je tiež nulový).

Akú os si zvolíme v Čajkinom trojuholníku? Ak táto os bude prechádzať cez pôsobisko dvoch síl, ich moment sily vzhľadom na túto os bude nulový. Za os je teda rozumné si vybrať buď stranu trojuholníka alebo jeho ťažnicu. My si zvolíme ťažnicu, ale rovnako by sme sa dopracovali k výsledku aj so stranami trojuholníka (skúste si to rozmyslieť).

[1] V skutočnosti, aby sa teleso neotáčalo, musia byť momenty síl nulové nielen vzhľadom na jednu os, ale na každú jednu z troch na seba kolmých osí. Tieto osi dokonca nemusia byť na seba kolmé, stačí, keď budú lineárne nezávislé. V našom príklade je ale jasné, že trojuholník sa nebude otáčať okolo osi kolmej na rovinu trojuholníka.

[2] Vzdelanejší zápis je $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, ale tomu budete rozumieť, až keď sa naučíte, čo je vektorový súčin.

Vyberme si napríklad ťažnicu na stranu c. Sila z vrchola C a tiažová sila F_g majú nulový moment sily. Sily pôsobiace vo vrchole A a B si rozložíme na zložku, ktorá je kolmá na rovinu trojuholníka (označme $F_{A\perp}$ a $F_{B\perp}$), a na zložku, ktorá leží v rovine trojuholníka (označme $F_{A\triangle}$ a $F_{B\triangle}$).



Obrázok 2: *Pohľad na trojuholník, ktorý leží v rovine papiera*

Sily ležiace v rovine trojuholníka F_A a F_B nemajú otáčavý účinok voči ťažnici (dobre si to rozmyslite). Keďže ťažnica prechádza stredom strany c (bod S_c), ramená kolmých zložiek síl budú rovnako veľké. Výsledný moment sily má byť nulový a tak platí:

$$M = F_{\mathrm{A}\perp} \cdot a \; - F_{\mathrm{B}\perp} \cdot a \; = 0,$$

$$F_{\mathrm{A}\perp} = F_{\mathrm{B}\perp}.$$

Keďže pôvodné sily F_A, F_B boli navzájom rovnobežné, pri rozklade sa ich pomer veľkostí nezmenil. Teda aj $F_A = F_B$.

Ak by sme za os zvolili ostatné ťažnice, rovnakou úvahou by sme dospeli k výsledku $F_A = F_B = F_C$. Výsledná sila musí byť tiež nulová teda platí: $F = F_A + F_B + F_C - F_g = 0$, z čoho vyplýva

$$F_A = F_B = F_C = \frac{F_g}{3}.$$

Využili sme v našom riešení, že spodná strana trojuholníka je vo vodorovnej polohe? Nie. Táto informácia nám nakoniec bola nanič :-)

2.2 Hustý objekt podruhé

vzorák **Adam**, opravoval **MaťoG**

Prvým krokom k rozsudku o korektnosti grafu je identifikácia, čoho graf to vlastne je. Sila, ktorou treba teleso ťahať je rozdielom gravitačnej sily (ktorá sa s povytiahnutím telesa prakticky nemení, a teda v grafe predstavuje len nezaujímavý posun krivky) a sily vztlakovej (tá je už zaujímavejšia). Zadanie hovorí o pomalom vyťahovaní, čo nám umožňuje neuvažovať odporové vplyvy prostredia. Jednoduchou záležitosťou je taktiež nájdenie súvisu medzi dĺžkou povytiahnutej šnúrky a polohou telesa pod hladinou, a preto ju necháme ako rozcvičku pre prípadného čitateľa. Na prehľadnú analýzu vztlakovej sily sa nám hodí vykonať isté zjednodušenia, ktoré ale neuškodia všeobecnosti.

Ponorené teleso si predstavme ako valec alebo kváder s osou symetrie v zvislom smere. Vztlaková sila je potom úmerná len rozdielu tlakov na dolnú a hornú podstavu. Zapojením Pascalovho zákona do celej tejto úvahy zistíme, že rozdiel tlakov závisí len od vzdialenosti podstáv. Ak by sme materiál valca nahradili materiálom okolia, nijak sa to nelíši od zmesi bez valca, a teda na takýto „falošný" valec musí pôsobiť rovnako veľká vztlaková sila, ako veľká naň pôsobí tiažová sila. Ak by sa valec nachádzal v nehomogénnom prostredí, na to, aby bola výsledná sila pôsobiaca na valec nulová, musí byť hustota materiálu rovná priemernej hustote prostredia.

Nech je súčasťou zmesi hocičo, veríme (a máme na to dobré dôvody) že sa to správa tak ako iné, ľudstvom už preskúmané zmesi, a teda bude platiť, že hustejšie veci budú pod redšími. Takže priemerná hustota bočného okolia musí byť menšia alebo rovná hustote vrstvy, v ktorej sa nachádza dolná podstava a väčšia alebo nanajvýš rovná hustote vrstvy pri hornej podstave[3]. Ako sme už povedali, pri ťahaní valca nahor sa jeho spodná podstava bude presúvať stále do prostredia s menšou, nanajvýš rovnakou hustotou. A teda vztlaková sila sa bude môcť len zmenšovať, nanajvýš nemeniť.

To kladie na závislosť zobrazenú na grafe podmienku neklesajúcosti. Keďže to náš graf očividne nespĺňa, môžeme ho právom vyhlásiť za nesprávny.

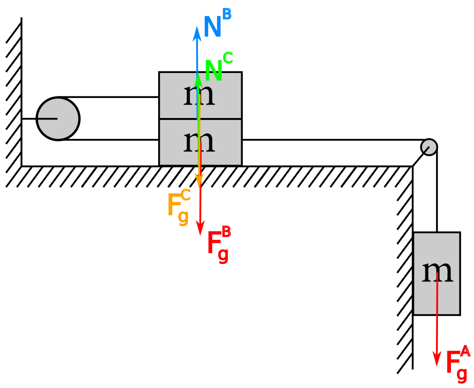
2.3 Zabudnutá sústava

vzorák **Matúš**, opravoval **Pľyš**

Najskôr si zhrňme, čo o sústave vieme:

Zo zadania poznáme koeficient šmykového trenia f, hmotnosti zavaží m a vieme, že medzi kladkami a lanami trenie nie je. O lanách budeme predpokladať, že sú dokonale pevné. Na telesá samozrejme pôsobí tiažová sila. Predpokladáme, že poznáme tiažové zrýchlenie g.

3Úlohou je vypočítať celkové zrýchlenie sústavy. Skúsme si teda nakresliť sily, ktoré pôsobia vo vertikálnom smere. V obrázku označíme telesá písmenami A, B a C.

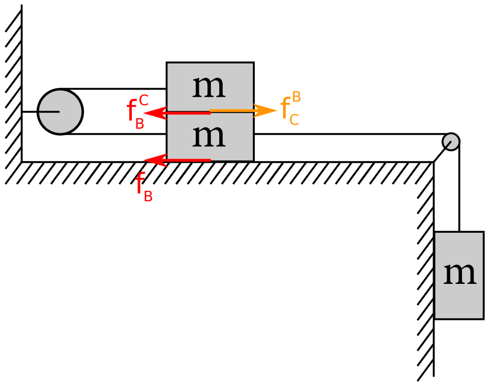


Obrázok 3: *Obrázok 1*

Keďže všetky telesá majú rovnakú hmotnosť m, pôsobí na ne, čo do veľkosti, rovnaká tiažová sila F_g. Keďže trecie sily sú úmerné normálovým silám, zostáva nám len určiť, aké sú veľkosti normálových síl pôsobiacich na jednotlivé telesá.

Teleso C tlačí na teleso B len svojou tiažou, odtiaľ vieme, že normálová sila pôsobiaca na teleso C na styku s telesom B je rovná F_g. Avšak trecia sila prislúchajúca tejto normálovej sile, pôsobí aj na horný a aj na dolný kváder, čiže na teleso C aj B. Okrem toho pôsobí na teleso B normálová sila od podložky veľkosti $F_{AB} + F_g = 2F_g$. K nej prisluchajúca trecia sila pôsobí len na teleso B. Pôsobenie trecích síl vidíme na ďalšom obrázku.

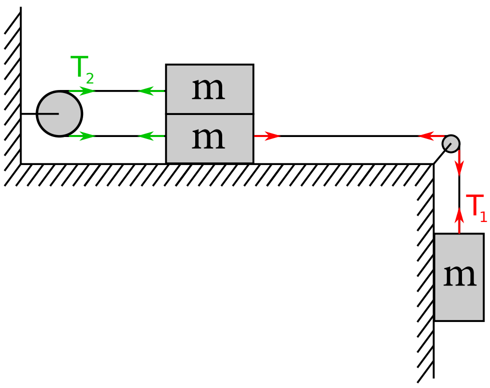
[3]Toto je pomerne intuitívne, ale aj tak sa oplatí uvedomiť si, že to vyplýva z vlastností váženého priemeru, pomocou ktorého počítame priemernú hustotu prostredia medzi podstavami



Obrázok 4: *Obrázok 2*

Teraz sa pozrieme na laná, ktoré sme zatiaľ skoro vôbec neuvažovali. Laná sú, ako sme už spomenuli, dokonale pevné. Čo to ale znamená? Dokonalou pevnosťou lana rozumieme to, že sa nepredlžuje ani neskracuje pôsobením vonkajších síl. Teda každá častica lana je v vzhľadom na ostatné v pokoji. Dôsledok toho celého je, že ak na koniec lana pôsobíme silou F, na každú časticu, teda aj na druhý koniec, pôsobí sila rovná F. Ak je druhý koniec niekde upevnený, bude na lano pôsobiť silou F na bod upevnenia. To je všetko, čo potrebujeme vedieť o lanách na vyriešenie tejto úlohy.

Zakreslime si ťahové sily v lanách do obrázku. Budeme ich označovať T_1 a T_2.



Obrázok 5: *Obrázok 3*

Teraz si už iba stačí napísať pohybové rovnice pre jednotlivé telesá A, B a C, tie sú nasledovné:

$$ma = F_g - T_1,$$
$$ma = T_1 - T_2 - f \cdot 2 \cdot F_g - f \cdot F_g,$$
$$ma = T_2 - f \cdot F_g.$$

Máme tri rovnice o troch neznámych, teda ich stačí už len vyriešiť. Tak získame riešenie

$$a = \frac{(1-4f)}{3} g.$$

Nakoniec sa ešte letmo pozrieme na limitný prípad $f = 0$ a uvedomíme si, že naše riešenie platí len za podmienky $f \leq \frac{1}{4}$ – inak sa samozrejme sústava hýbať nebude.

Komentár opravovateľa

Najčastejšiu chybu ste robili hneď na začiatku, keď ste nenakreslili všetky sily. 90 % z vás zabudlo na tú úbohú tretiu silu, ktorou pôsobí teleso C na teleso B. Zrejme vás mätie, že by to predsa mala byť tá istá sila ako tá, ktorou pôsobí B na C, ale to nie je pravda. Sily sa definujú veľkosťou, smerom a telesom, na ktoré pôsobia. V tomto prípade je veľkosť rovnaká, smer opačný a teleso pôsobenia iné.

Nakoniec som body udeľovala podľa Kvíkovho druhého postulátu, „vždy pri kontrole riešenia uvažuj limitné prípady". Tým z vás, ktorým aspoň vyšlo, že pre $f = 0$ je $a = \frac{g}{3}$ som udelila bodov viac. V duchu tohoto užitočného postulátu vám odporúčam kontrolovať si po sebe vaše ďalšie výsledky aj v budúcnosti.

2.4 Vedecké strasti

vzorák **Jaro**, opravoval **SamoŠ**

Prv než sa pustíme do riešenia, zodpovedzme si najskôr na otázku, čo je to to perpetuum mobile. Wikipédia nám dáva nasledovnú odpoveď:[4]

Perpetuum mobile je:

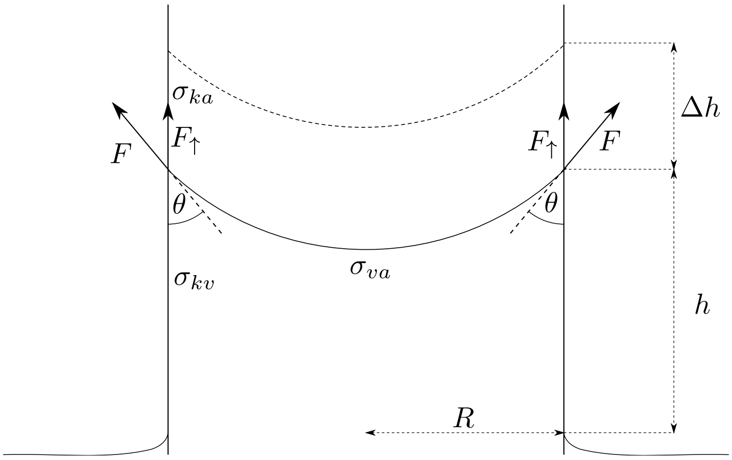
- hypotetické zariadenie, ktoré by trvalo vykonávalo prácu bez dodávania energie (perpetuum mobile prvého druhu);
- hypotetický periodicky pracujúci stroj, ktorý by všetko teplo odobraté zo zdroja premieňal na prácu (perpetuum mobile druhého druhu). Hneď nám je jasné, že nás bude zaujímať perpetuum mobile prvého druhu. Maťovmu zariadeniu totiž nemusíme dodávať žiadnu energiu a podľa jeho predstáv by mala voda pretekať do vyššie položenej nádoby, t. j. jej potenciálna energia by mala rásť.

Rozoberme si Maťove zariadenie na drobné. Vieme identifikovať štyri hlavné body, v ktorých by mohol nastať problém:

1. vzlínanie vody kapilárou;
2. pretečenie vody zakrivenou časťou kapiláry;
3. prúdenie vody kapilárou nadol;
4. odkvapkávanie vody z kapiláry. Postupne sa pozrieme na jednotlivé body a pokúsime sa identifikovať problém.

Začnime so vzlínaním. Hneď na úvod si vyjasnime, že atmosférický tlak nezohráva žiadnu úlohu, pretože rovnaký tlak je na hladine vody v nádobe i v kapiláre. Toto samozrejme bude platiť, aj keď voda v kapiláre bude v jej zakrivenej časti, resp. až za ňou, takže neskôr sa už k tomuto vracať nebudeme. Zostáva teda jediná možnosť – povrchové napätie. V škole nás naučili, čo je to povrchové napätie, takže sa tu nebudeme zaoberať fundamentálnymi poznatkami. Poznamenajme len, že existujú minimálne tri jednoduché prístupy, ako vysvetliť vzlínanie, ktoré si v krátkosti predstavíme.

[4] https://sk.wikipedia.org/wiki/Perpetuum_mobile



Obrázok 6: *Voda v kapiláre*

Asi najštandardnejší prístup je pomocou síl. Na kontakte kapiláry, vody a vzduchu spôsobuje povrchové napätie silu veľkosti F pôsobiacu v dotyčnicovom smere ku kvapaline, ktorá „vyťahuje vodu do kapiláry“.[5] Vertikálna zložka tejto sily má veľkosť $F_\uparrow = F\cos\theta$, kde θ je styčný uhol. Voda bude v kapiláre stúpať dovtedy, kým sa tiaž vodného stĺpca v kapiláre nevyrovná sile $F_\uparrow$.

Druhý prístup[6] využíva skutočnosť, že pod zakrivenou kvapalinou vzniká dodatočný kapilárny tlak. Tento dodatočný tlak spôsobí, že na hladinu vody v kapiláre bude pôsobiť tlaková sila nahor, a tá vyvolá vzlínanie. Popritom ale bude rásť hydrostatický tlak, ktorý sa prejaví tlakovou silou pôsobiacou na hladinu nadol. Vzlínanie sa ukončí, keď bude výsledná tlaková sila nulová, teda keď sa bude kapilárny tlak rovnať hydrostatickému.

Nás však bude najviac zaujímať tretí prístup, pretože ten využíva priamo energiu, no a energia je to, čo nás pri perpetuu mobile zaujíma. Vieme, že povrchová energia rozhrania dvoch prostredí je úmerná ploche tohto rozhrania. Koeficientom úmernosti je práve povrchové napätie daného rozhrania – matematicky vyjadrené $E_{\text{pov}} = \sigma S$.

Tu si musíme uvedomiť, že nielen rozhranie voda-vzduch (budeme označovať *va*) má nejaké povrchové napätie, ale rovnako i rozhrania kapilára-voda (*kv*) a kapilára-vzduch (*ka*) majú svoje povrchové napätia. Pre ďalšie úvahy budeme potrebovať porovnanie povrchových napätí σ_{kv} a σ_{ka}, preto urobme nasledovnú úvahu. Je všeobecne známe, že fyzikálna sústava sa snaží nadobudnúť taký stav, aby mala čo najmenšiu energiu. Dôsledkom toho je zakrivenie hladiny v kapiláre. Vidíme, že kapilára „sa radšej dotýka vody než vzduchu“, t. j. voda zmáča kapiláru. V kontexte s tým, čo sme práve povedali o energii, môžeme prehlásiť, že rozhranie *kv* má menšiu povrchovú energiu než rozhranie *ka*, teda $\sigma_{kv} < \sigma_{ka}$.

Teraz sa môžeme vrátiť k tretiemu prístupu. Čo sa deje s jednotlivými energiami, keď kvapalina v kapiláre vystúpi o Δh? V prvom rade si uvedomme, že je to z energetického hľadiska rovnaká situácia, ako keby sme z voľnej hladiny v nádobe zobrali trochu vody a položili ju na vrch vodného stĺpca v kapiláre. Musíme ju vyzdvihnúť do výšky h,[7] Teda i potenciálna energia sa zvýši o

$$\Delta E_{\text{pot}} = \Delta m\, gh = \pi r^2 \rho g h \,\Delta h\,,$$

[5] V skutočnosti to, či ju vyťahuje alebo vytláča, závisí od toho, či kvapalina zmáča alebo nezmáča steny kapiláry. V našom prípade budeme uvažovať, že voda zmáča steny kapiláry, teda styčný uhol θ je ostrý.

[6] V skutočnosti to ani nie je druhý prístup, len iný pohľad na ten predchádzajúci.

[7] Predpokladáme, že voľná hladina je ďaleko väčšia než plocha prierezu kapiláry, takže výška hladiny v nádobe sa prakticky nezmení.

kde r je polomer kapiláry. Zároveň sa však na úseku kapiláry o dĺžke Δh zmení typ rozhrania z ka na kv, teda povrchová energia sa zmení o

$$\Delta E_{\text{pov}} = \sigma_{kv} S - \sigma_{ka} S = \left(\sigma_{kv} - \sigma_{ka}\right) 2\pi r \,\Delta h < 0,$$

keďže $\sigma_{kv} < \sigma_{ka}$.

Na úvod sme sa zhodli, že Maťo navrhuje perpetuum mobile prvého druhu, teda také, ktorému netreba dodávať žiadnu energiu. To znamená, že možno uvažovať jednoducho zákon zachovania energie. Odtiaľ už nie je problém dopočítať, do akej maximálnej výšky vie voda vystúpať. To nás však teraz nezaujíma. Pre nás je dôležité len to, pomocou akého mechanizmu vie do tejto mednej výšky vystúpať. No a to sme už zodpovedali. Voda môže zvyšovať svoju potenciálnu energiu na úkor toho, že klesá celková povrchová energia systému.

Tým sme uzavreli bod 1 a môžeme ísť ďalej. Tu už budeme podstatne stručnejší. Pokiaľ uvažujeme, že kapilára v mieste zahnutia je stále dostatočne tenká a zahnutie nie je veľmi ostré, voda bude stále upnutá i na horný okraj kapiláry, a teda kvalitatívne[8] možno použiť rovnakú úvahu, čiže voda bude ďalej „cestovať“ kapilárou aj cez ohyb na úkor zníženia povrchovej energie. Nič sa nemení ani v prípade zostupu vody dolu kapilárou za ohybom.

Zostáva nám už len bod 4. Čo sa stane, keď voda dosiahne dolný koniec kapiláry? Okamžite vidíme, že náš model tu už prestáva fungovať, pretože ďalší postup nadol by si vyžadoval zväčšenie rozhrania kv na úkor ka. To už ale nie je kam rozšíriť. Navyše hneď na úvod sme si vyjasnili, že atmosférický tlak nezohráva žiadnu úlohu. Existuje ešte nejaká sila, ktorá by mohla donútiť vodu odkvapnúť z kapiláry? Snáď len gravitácia nám núka pomocnú ruku, lenže aj tú môžeme rýchlo zavrhnúť. Stačí si uvedomiť, že voda je prakticky nestlačiteľná, preto sa v kapiláre správa ako také homogénne lanko prehodené cez kladku, a to sa nikdy nebude pohybovať v smere kratšieho konca. Ak ešte chvíľu zostaneme v tejto analógii, môžeme sa pýtať, prečo sa teda nepohybuje v smere dlhšieho konca. No pretože za kratší koniec ťahá sila od povrchového napätia, ktorá ho drží v rovnováhe.

Maťov model teda zlyhal v jeho záverečnej fáze. Nie je možné, aby v prípade takto postaveného zariadenia voda odkvapkávala z kapiláry. Všimnime si ale, že v opačnom smere takéto zariadenie na prečerpávanie vody fungovať bude. V tomto prípade si totiž môžeme dovoliť predĺžiť otvorený koniec kapiláry pod úroveň toho ponoreného v hornej nádobe, takže odkvapkávanie bude možné (viď analógia s lankom). Samozrejme, že takto ale žiadnu energiu nezískame, naopak, časť strácame pri dopade kvapiek do dolnej nádoby, teda o perpetuu mobile v tomto prípade nemôže byť ani reči.

Poznámka o odkvapkávaní

Keď sme povedali, že voda z kapiláry nebude odkvapkávať, mysleli sme tým trvalé odkvapkávanie. Ukážeme si, že je teoreticky možné, aby pár kvapiek predsa len odkvaplo.

Vychádzali sme z energetickej bilancie. Povedali sme, že voda vystúpi do takej výšky, že pokles povrchovej energie je rovný nárastu potenciálnej energie. My však máme kapiláru presne určenej dĺžky. To znamená, že je presne daný pokles povrchovej a nárast potenciálnej energie, keď voda dosiahne horný koniec kapiláry.

Pre jednoduchosť uvažujme rovnú kapiláru dĺžky H. Zaveďme funkciu

$$\delta E\left(r\right) = -\left(\Delta E_{\text{pov}} + \Delta E_{\text{pot}}\right) = \left[2\left(\sigma_{ka} - \sigma_{kv}\right) - \frac{1}{2} r\rho g H\right] \pi r H,$$

ktorá udáva energiu získanú pri vystúpení vody až po horný koniec rovnej kapiláry. Vidíme, že táto energia závisí okrem iného aj na jej polomere.

[8] Pozor, nie kvantitatívne, pretože tu už kapilára nemá lokálne tvar valca ale torusu.

Vieme zvoliť taký polomer r_0, aby voda vystúpila práve po horný koniec, teda $\delta E\left(r_0\right) = 0$. Uvažujme teraz kapiláru s polomerom $r < r_0$. V takom prípade $\delta E\left(r\right) > 0$, teda nejakú energiu získame. Čo je to za energia?

V našich doterajších úvahách sme uvažovali statickú počiatočnú i konečnú situáciu. Neuvažovali sme pritom, že voda v kapiláre aj prúdi, teda má nejakú kinetickú energiu. Na záver však už žiadnu kinetickú energiu nemá. Kde sa teda stratila?

Vráťme sa naspäť k ohnutej kapiláre. Úvaha o kinetickej energii kvalitatívne platí aj v tomto prípade. Náš model elevácie samozrejme zostáva v platnosti, no musíme modifikovať záverečnú fázu. Predpokladajme, že voda dosiahne horný koniec kapiláry, no stále má nejakú kinetickú energiu. Čo sa teda bude diať? Voda bude pokračovať v pohybe. V prípade, že je kapilára dostatočne tenká, teda voda v nej stúpa dostatočne rýchlo, začne voda z horného konca kapiláry predsa len vystupovať.[9]

Začne sa tam formovať kvapôčka. Tým ale rastie povrch kvapaliny, a teda aj povrchová energia. V dôsledku toho bude kinetická energia vody v kapiláre klesať a vzlínanie vody bude ustávať. Ak kvapôčka dosiahne dostatočnú veľkosť, odkvapne. Takto môže odkvapnúť aj niekoľko kvapôčok, kým voda v kapiláre úplne nezastane. Dôležité však je, že táto prechodná fáza trvá len obmedzenú dobu a v konečnom čase skončí. Nijako pritom neporušuje zákon zachovania energie.

2.5 Kancelárske šantenie

vzorák **Vladko**, opravoval **Vladko**

Zuzka sa nám neodráža nohami! Hrôza, čo teraz? Nuž, nič strašného sa nedeje. Na sústavu Zuzka + stolička nepôsobí vonkajšia sila, lebo tiažová sila sa vyruší so silou od podložky – zeme. Teda podľa jedného z Newtonových zákonov platí $\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = 0$, vektor sily sa rovná časovej zmene vektora hybnosti. Takže sa nemení hybnosť sústavy a jej ťažisko zotrváva v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe. To nám nevadí, my nepotrebujeme, aby Zuzka s kreslom niekam docestovala a pri rotácií ťažisko pokojne môže stáť.

Čo nám opisuje rotáciu sústavy? Jej moment hybnosti. Ekvivalentná rotačná rovnica k spomenutej je $\vec{M} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$. $\vec{M}$ je moment sily, fyzikálna veličina opisujúca ako dobre sila niečo otáča. Platí $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, kde $\vec{r}$ je najkratší vektor od osi otáčania ku pôsobisku sily.

Pre nás, čo sa nekamarátime s vektorovým súčinom stačí poznať, že veľkosť otáčavého účinku sily je vzdialenosť od osi krát zložka sily, ktorá roztáča objekt. Napríklad pre dvere vieme, že ľahšie sa otáčajú ak tlačíme ďalej od pántov (zväčšujeme $\vec{r}$) a takisto ak pôsobíme kolmo na ne (ak by ste ťahali pozdĺž dverí – snažili sa ich vytrhnúť z pántov, tak by ste ich veľmi neotáčali). A čo nám uvedená rovnica hovorí? Tento otáčavý účinok spôsobuje zmenu vektora momentu hybnosti $\vec{L}$, ktorý sa dá vypočítať ako $\vec{L} = I\vec{\omega}$[10]. Takže napríklad ak $\vec{p} = m\vec{v}$ pomocou slovníka preložím na $\vec{L} = I\vec{\omega}$. Nakoniec, ešte pár slov k momentu zotrvačnosti I. Vyjadruje ako je rozložená hmota okolo osi otáčania. Ak je hmota ďaleko (ťažko ju roztočiť), I je veľké. Naopak, ak je hmota blízko osi otáčania, tak sa ľahšie roztočí a I je malé.

Všetky sily na Zuzku pôsobiace (tiažová a normálová od podložky) pôsobia v jej ťažisku. Rotácia, po ktorej Zuzka túži, bude okolo osi prechádzajúcej ťažiskom. To znamená, že pôsobiace sily majú nulový moment sily, a teda podľa našej rovnice, moment hybnosti L sa v čase nemení! Na začiatku Zuzka nerotuje, platí $\vec{L} = 0$, takže ak začne napríklad otáčať vystretou rukou doprava, jej telo aj s kreslom sa začnú otáčať doľava, aby moment hybnosti zostal nulový. Nuž, ale Zuzka začne byť smutná, lebo vie otočiť vystretú ruku asi len okolo 180° a potom zábava skončila.

[9] Treba si uvedomiť, že toto je dosť problematické. Rýchlosť stúpania je značne limitovaná viskozitou kvapaliny. Je pravda, že pri tenkých kapilárach je vzlínanie výraznejšie, ale práve tu sa o to viac prejavuje aj trenie kvapaliny o kapiláru, ktoré bráni rýchlemu stúpaniu.

[10] Poznámka o rotačných vzorčekoch: keď si na ne nevieme spomenúť, tak vezmeme vzorce pre neotáčavú mechaniku a prekladový slovník. Prekladový slovník z nerotovanej fyziky do rotovanej fyziky: hmotnosť m je moment zotrvačnosti I, sila $\vec{F}$ je moment sily $\vec{M}$, rýchlosť $\vec{v}$ je uhlová rýchlosť $\vec{\omega}$, hybnosť $\vec{p}$ je moment hybnosti $\vec{L}$…

Vieme však použiť trik a ruku priložiť k telu, tým zmenšiť moment zotrvačnosti I, priloženú ruku otočiť späť, vystrieť ruku, tým zväčšiť moment zotrvačnosti I, a otočiť ju zasa v opačnom smere ako si želáme točiť kreslom. Pri spätnom pohybe síce trošku uberieme z $\vec{L}$, ale vďaka meneniu momentu zotrvačnosti pri pohybe s vystretou rukou získame viac rotácie ako stratíme pri spätnom pohybe.

Video o tom, ako sa s úlohou popasovali vedúci FKS, nájdete na https://youtu.be/A8pU0zExSPc.

Komentár k riešeniam

Najčastejšie sme museli strhávať body za absenciu videa, ktorého sme sa dožadovali. Z fyzikálneho hľadiska najčastejšou chyba bolo, keď ste argumentovali otáčanie trecou silou. Trecie sily sú vonkajšie sily a my predsa hľadáme spôsob, ktorý by fungoval aj bez vonkajších síl, teda napríklad v otvorenom vesmíre. Ďalší opísaný spôsob sa opieral o zmenu ťažiska. Tá mala byť spôsobená buď odrazením od okraja stoličky a dopadom na druhú stranu alebo istým neurčitým hmýrením tela. Pri odraze by sme pootočili stoličku do strany opačnej, ako sa odrážame a následne by sme dopadom zrušili akékoľvek získané pootočenie. Takisto podobne pri hmýrení tela by sme otočenie nezískali, pokiaľ by sme nevyužívali už popísaný zákon zachovania momentu hybnosti.

Príjemne nás prekvapili niektoré pekné videá, kde riešitelia roztáčali nad hlavou hmotný objekt, teda stolička musela kvôli momentu hybnosti sa točiť opačne. Najextravagantnejšie riešenie bolo vypúšťanie hasiaceho prístroja, ktorý dodal potrebný impulz na otočenie. Pokúsime vybrať najzaujímavejšie videá a uverejniť kompiláciu na našej stránke na Facebooku.

2.6 Vladkove kvetináče

vzorák **Arthur**, opravoval **Arthur**

Pri riešení tejto úlohy budeme vychádzať z Bernoulliho rovnice v tvare

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gh = \text{konštanta}.$$

Môžeme uvažovať, že rozdiel atmosférických tlakov je zanedbateľný a vyjadríme si v_1 z rovnice kontinuity,

$$vS = \text{konštanta}.$$

Toto dosadíme naspäť do Bernoulliho rovnice a vyjadríme z nej v_2

$$gh = \frac{1}{2}v_2^2\left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right),$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{r_2^4}{r_1^4}}}.$$

Polomer kvetináča je oveľa väčší než polomer dierky, takže zložku obsahujúcu v_1 zanedbáme a dostávame $v_2 = \sqrt{2gh}$. Zo vzťahu pre v_2 už vieme zbadať, že voda bude z kužeľa vytekať priemerne väčšou rýchlosťou ako z valca, keďže zrezaný kužeľ má viac objemu v hornej polovici, no stále ešte nevieme, za aký čas budú prázdne. Potrebný čas zrátame pomocou nejakého výpočtového programu.

Venujme sa najprv valcu. Zapíšme rozmery kvetináča, teda polomer/priemer kvetináča, výšku vodnej hladiny a polomer dierky, ktorou voda vyteká. Stanovme si nejaké $\mathrm{d}t$, ktorým označíme krátky časový úsek. Vytvorme cyklus, pomocou ktorého zistíme výšku v čase $t + \mathrm{d}t$. Z $h(t)$ poznáme $v(t) = \sqrt{2gh(t)}$, z ktorého vyrátame $\mathrm{d}V$, označujúce objem, ktorý vytečie z nádoby od t po $t + \mathrm{d}t$. Získavame $\mathrm{d}V(t) = v(t)S_d\mathrm{d}t$, kde S_d je plocha dierky. Z vytečeného objemu následne zrátame výšku hladiny v $t + \mathrm{d}t$

$$h(t + \mathrm{d}t) = h(t) - \frac{\mathrm{d}V(t)}{S_p}.$$

Riešime analogicky pre zrezaný kužeľ až po $\mathrm{d}V(t)$. Pokles bude rozdielny, keďže s výškou hladiny sa mení aj jej polomer. Vypočítame ho z podobnosti trojuholníkov. Označme si x výšku nezrezanej časti kužeľa, potom platí

$$\frac{r(t)}{h(t) + x} = \frac{r_p}{x} = \frac{r(0)}{h(0) + x}.$$

Vyjadríme x:

$$x = \frac{r_p h(0)}{r(0) - r_p}.$$

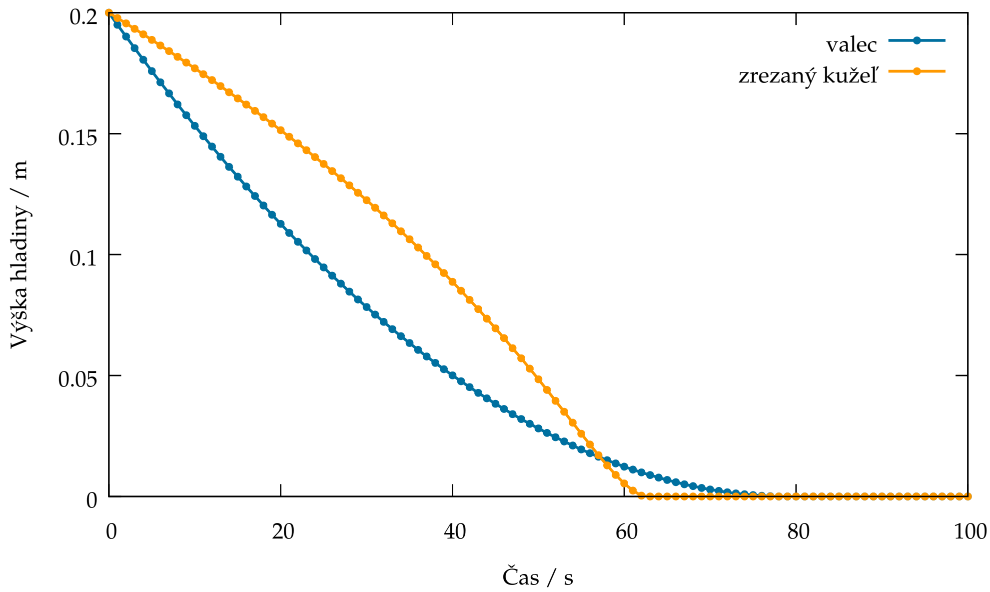
A následne $r(t)$:

$$r(t) = \frac{h(t)}{h(0)}(r(0) - r_p) + r_p.$$

Z $r(t)$ vypočítame $S(t)$, ktoré dosadíme do

$$h(t + \mathrm{d}t) = h(t) - \frac{\mathrm{d}V(t)}{S(t)}.$$

Už len zadáme vzorce do tabuľkového procesora a potiahneme tabuľky dole, až dostaneme $h(t) \leq 0$ alebo napríklad v Pythone do `while (h > 0)` funkcie, ktorá zráta, kedy všetka voda vytečie. Úlohu sme teda vyriešili a môžeme vytvoriť grafy z vypočítaných údajov.



Obrázok 7: *Porovnanie hladín dvoch kvetináčov*

Modrou je na grafe označený valcový kvetináč ($r_p = 0{,}1\,\mathrm{m}$, $r_d = 0{,}005\,\mathrm{m}$, $h(0) = 0{,}2\,\mathrm{m}$, $\mathrm{d}t = 1\,\mathrm{s}$), ktorý vytečie približne za 78 sekúnd a oranžovou kvetináč v tvare zrezaného kužeľa ($r(0) = 0{,}15\,\mathrm{m}$, $r_p = 0{,}05\,\mathrm{m}$, $r_d = 0{,}005\,\mathrm{m}$,

$h(0) = 0{,}2\,\mathrm{m}$, $\mathrm{d}t = 1\,\mathrm{s}$), ktorý vytečie za 63 sekúnd. Vidíme, že aj keď je v kužeľovom kvetináči dlhodobejšie hladina vyššie, tak hladina vody vo valci klesá časom pomalšie a hladina vody v zrezanom kužeľi rýchlejšie, až v 57. sekunde bude vyššia hladina pre zmenu vo valci.

Programy v Exceli a v Pythone sa nachádzajú tu.

2.7 Kvíkove vesmírne gule

vzorák **Kvík**, opravoval **Kvík**

Úloha nie je nijak matematicky náročná, je však dôležité správne poskladať všetky známe fakty a nenechať sa odlákať k integrálom a diferenciálnym rovniciam skôr, než ju detailne pochopíme.

Zároveň treba spraviť niekoľko rozumných predpokladov, aby sme to zvládli dopočítať. Napríklad že

- veľkosť gúľ je omnoho väčšia, ako vlnová dĺžka dopadajúceho svetla,
- ich hmotnosť je rovnaká a zanedbateľná oproti hmotnosti hviezdy,
- ich vzájomné gravitačné pôsobenie je zanedbateľné,
- hviezdu môžeme považovať za bodový zdroj,
- a napokon to, že gule nemajú vlastný zdroj pohonu.

Samozrejme, ak ste to dokázali bez nich, plný počet bodov vás neminul. A teraz už poďme rozmýšľať.

V prvom rade by sme mali mať na pamäti, že pokiaľ sú hmotnosti telies zanedbateľné voči hmotnosti centrálneho telesa, nebude na nich vôbec záležať. Toto je zjavne náš prípad, takže rôzne dráhy gúľ teda musia byť spôsobené niečím iným, než rôznymi hmotnosťami. Avšak aj keď zadanie explicitne nehovorí, že hmotnosť gúľ je rovnaká, je to dôležité. Ak by napríklad jedna z gúľ mala veľmi malú hustotu, gravitačné pôsobenie by bolo slabšie, ale sila žiarenia by ostala rovnaká a guľa by hneď uletela, pretože by ju žiarenie odtlačilo. Toto je takisto dôvod, prečo musia byť solárne plachetnice vyrobené z extrémne tenkej fólie.

Teda jediné, čím sa gule od seba líšia, sú ich rozličné farby, alebo presnejšie povedané, rozličná odrazivosť. Hviezda intenzívne žiari a teda vysiela veľké množstvo fotónov, ktoré pri zrážkach s guľami môžu odovzdať svoju hybnosť a tak meniť ich pohybový stav. Pre reálnu hviezdu je tento tlak veľmi malý[11], v našom prípade sa ale ukáže, že to tak veru nebude. Ako sa teda budú prejavovať jednotlivé materiály?

Priesvitná guľa

Priesvitná guľa bude fotóny veselo ignorovať a poletí tak, ako jej káže Newtonov gravitačný zákon. S touto znalosťou vieme vypočítať jej rýchlosť, a teda aj pôvodnú rýchlosť ostatných gúľ na začiatku pohybu. Napríklad tak, že vieme, že našou dostredivou silou je gravitačná. Položíme teda známe vyjadrenia do rovnosti:

$$\frac{GMm}{q^2} = \frac{mv^2}{q},$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{q}},$$

kde M je hmotnosť hviezdy a m hmotnosť gule za predpokladu, že $M \gg m$.

Čierna guľa

Čierna guľa absorbuje každý fotón, ktorý sa s ňou stretne. S trochou zamyslenia a následného integrovania by sme možno vedeli spočítať priemernú intenzitu a tok žiarenia… skúsime si však vystačiť bez tejto informácie. Uvedomíme si len, že celková sila, ktorá ju odtláča od hviezdy, musí mať presne takú veľkosť a smer, že keď sa

[11] napríklad pre Slnko je to vo vzdialenosti Zeme približne 4,5 µPa

zloží s gravitačnou silou, ťahajúcou guľu ku hviezde, musí vo výsledku viesť k parabolickej dráhe. Zo symetrie gule vzhľadom na os smerujúcu do hviezdy je zrejmé, že zložky kolmé na túto os sa navzájom vyrušia a ostane iba výsledná sila smerujúca radiálne od hviezdy. Ostáva nám určiť jej veľkosť.

Tu si pripomenieme divne vyzerajúci predpoklad z prvého odseku. Že vraj gule nemajú vlastný zdroj pohonu? A prečo by akože mali mať? No veru že mať môžu – konkrétne čierna guľa fotóny *absorbuje*, čiže pohlcuje ich energiu. Po krátkom čase by sa zohriala a začala vyžarovať vlastné *žiarenie dokonale čierneho telesa*. Ak však nie je dokonale tepelne vodivá a nedajbože ešte rotuje, fotóny nebudú vyžiarené do všetkých smerov rovnako, a výsledkom bude ďalšia nezanedbateľná sila. Pre skutočné asteroidy je táto sila veľmi dôležitá, aj keď je veľmi malá.[12] Budeme teda predpokladať, že naša guľa sa zohrieva rovnomerne a vyžaruje do všetkých smerov rovnako, takže výsledný efekt je nulový.

Ako teda určíme veľkosť? Sila žiarenia pôsobí proti gravitačnej sile a teda výsledné správanie sa gule bude také, ako keby sme gravitačnú silu zmenšili – teda naša „efektívna" hodnota G, ktorú si označíme G', bude o niečo menšia. Zároveň ale platí, že aj gravitačná sila, aj sila od fotónov, klesá s druhou mocninou vzdialenosti. Takže ak guľa odletí do vzdialenosti $k \cdot q$, obe sily budú k^2-krát menšie. To ale znamená, že ich vzájomný pomer ostane rovnaký! Potom musí platiť, že $G' = \alpha G$, kde α je nejaká konštanta.

Pre parabolickú dráhu platí, že rýchlosť telesa v nekonečne je nulová – inými slovami, že súčet kinetickej a potenciálnej energie voči nekonečnu je v každom okamihu, aj v $t = 0$, rovný nule. Takže si obe energie zapíšeme, berúc novú hodnotu $G' = \alpha G$:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{\alpha GMm}{q} = 0,$$

$$v^2 = \frac{2\alpha GM}{q}.$$

Pôvodnú rýchlosť v ale už poznáme vďaka priehľadnej guli, takže ju sem môžeme dosadiť:

$$\frac{GM}{q} = \frac{2\alpha GM}{q},$$

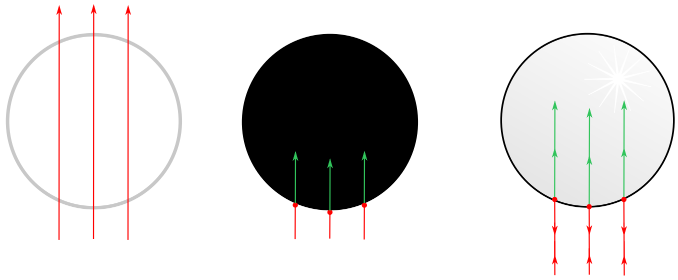
$$\alpha = \frac{1}{2}.$$

Takže v prípade čiernej gule musí byť sila pochádzajúca od fotónov polovičná oproti gravitačnej. A keď ich vektorovo sčítame (čiže odčítame veľkosti, keďže pôsobia proti sebe), vidíme, že výsledná sila bude takisto polovičná.

Guľa s odrazkami

Tretia guľa je ešte vyšší level od čiernej – nielenže pohltí hybnosť každého fotónu, ale navyše ešte vyšle ďalší fotón späť. Odrazka, akú mávame napríklad na bicykli, totiž v ideálnom prípade každý fotón pošle presne tam, odkiaľ prišiel. Radiálne zložky síl síce budú stále prítomné, ale opäť sa vyrušia, takže odrazené fotóny takisto vytvárajú výslednú silu v smere od hviezdy. Všetko si to zhrnieme v obrázku:

[12] Nazýva sa to Jarkovského efekt, `https://en.wikipedia.org/wiki/Yarkovsky_effect`.



Obrázok 8: *Interakcia fotónov s Kvíkovými vesmírnymi guľami*

Takže na tretiu guľu pôsobí každý fotón dvakrát silnejšie, ako na čiernu a teda aj celková sila bude dvojnásobná. Pôvodná sila za absorbované fotóny nám znížila efektívne G o polovicu, nová sila ho znovu zníži ešte o ďalšiu polovicu pôvodnej hodnoty. Výsledné efektívne G je teda nulové a guľa sa bude pohybovať rovnomerne priamočiaro v rovnakom smere, v akom ju Kvík hodil.

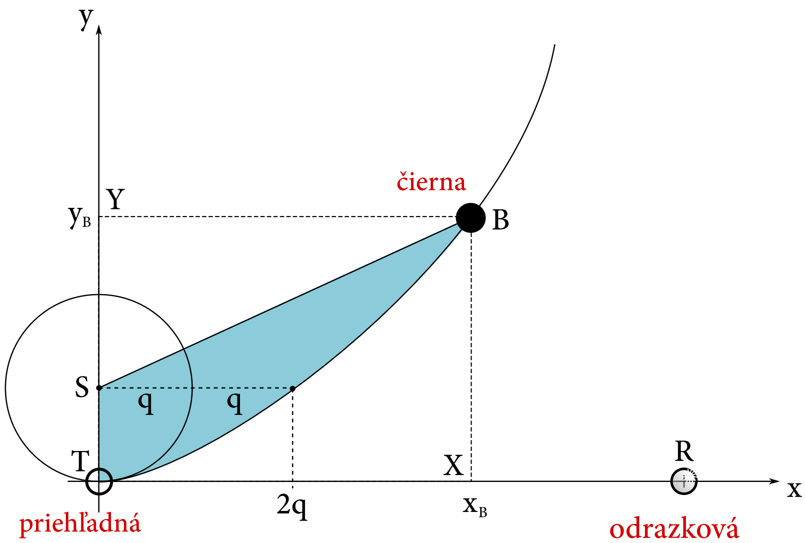
Všetko spolu

Nakoniec si to všetko zhrnieme a zodpovieme na otázku. Po jednom obehu sa priehľadná guľa samozrejme vráti na svoje pôvodné miesto, takže jej výsledný posun bude nulový. Guľa s odrazkami zatiaľ letí konštantnou rýchlosťou po priamke, takže za rovnaký čas preletí dráhu $2\pi q$. Hneď vidíme, že hľadaná vzdialenosť je jednoducho $2\pi q$.

Bonus

Bonusová otázka už takto ľahko vyriešiť nejde, budeme musieť použiť nejaké mocnejšie nástroje. Vhodnou kombináciou je druhý Keplerov zákon (teda zákon zachovania momentu hybnosti) a určitý integrál, alebo pre pokročilejších nebeských mechanikov Barkerova rovnica. Ukážeme si prvý postup.

Keďže na začiatku pohybu je rýchlosť aj poloha všetkých troch gúľ rovnaká, musí byť rovnaký aj ich špecifický moment hybnosti $C = r^2\dot{\varphi}$. Čiže plošná rýchlosť, ktorou rovinu dráhy zametá sprievodič každej gule, je takisto konštantná a pre všetky gule rovnaká… a z toho vyplýva, že aj po jednom obehu priehľadnej gule budú musieť byť zametené plochy, zodpovedajúce jednotlivým guliam, rovnaké:



Obrázok 9: *Plochy zametené sprievodičmi gúľ počas prvého obehu priehľadnej gule*

Už vieme, že plocha opísaná sprievodičom priehľadnej gule je plochou kružnice s polomerom q, čiže πq^2. Plocha opísaná sprievodičom gule s odrazkami je rovná ploche pravouhlého trojuholníka STR s odvesnami q a $2\pi q$, čiže opäť πq^2.

Čo však s čiernou guľou? Zorientujme si našu sústavu tak, aby jej dráha bola popísateľná rovnicou paraboly $y = kx^2$ pre nejakú konštantu k. V takejto sústave guľa doletí do bodu so súradnicami x_B a y_B. Plocha opísaná sprievodičom bude je rozdielom plochy obdĺžnika $BXTY$ so stranami x_B a y_B, plochy trojuholníka BYS a plochy pod parabolou medzi bodmi 0 a x_B.

Poďme najprv určiť rozmery paraboly. Jej rovnica v polárnych súradniciach je $r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$, pričom uhol budeme merať od smeru proti osi y. Odtiaľ by sme mali vidieť, že pre $\varphi = 90°$, teda v smere rovnobežnom s osou x, musí byť $r = p = 2q$, takže parabola prechádza bodom $[2q, q]$. S touto znalosťou už vieme určiť konštantu $k = \frac{1}{4q}$, a teda rovnica našej paraboly bude

$$y = \frac{x^2}{4q}$$

a pre súradnice x_B, y_B bude platiť

$$y_\mathrm{B} = \frac{x_\mathrm{B}^2}{4q}.$$

Teraz už vieme spočítať plochu obdĺžnika ako

$$S_\mathrm{B} = x_\mathrm{B} \cdot y_\mathrm{B} = \frac{x_\mathrm{B}^3}{4q}$$

a plochu trojuholníka ako

$$S_1 = \frac{x_\mathrm{B} \cdot (y_\mathrm{B} - q)}{2} = \frac{x_\mathrm{B}^3}{8q} - \frac{q x_\mathrm{B}}{2}.$$

Plochu pod parabolou nájdeme ako určitý integrál

$$S_2 = \int_0^{x_\mathrm{B}} \frac{x^2}{4q}\,\mathrm{d}x = \frac{x_\mathrm{B}^3}{12q}.$$

No a keď to všetko zložíme dokopy, dostaneme vyjadrenie plochy zametenej sprievodičom, o ktorej už vieme, že musí byť rovná ploche kružnice prislúchajúcej priehľadnej guli:

$$S_\mathrm{B} - S_1 - S_2 = \frac{x_\mathrm{B}^3}{4q} - \frac{x_\mathrm{B}^3}{8q} + \frac{q x_\mathrm{B}}{2} - \frac{x_\mathrm{B}^3}{12q} \stackrel{!}{=} \pi q^2.$$

Jednoduchými úpravami môžeme túto rovnicu prepísať do tvaru

$$\left(\frac{x_\mathrm{B}}{q}\right)^3 + 12\left(\frac{x_\mathrm{B}}{q}\right) - 24\pi = 0,$$

s ktorým si už Wolfram|Alpha vie poradiť. Keď vypočítame aj y_B, zistíme, že výsledná poloha čiernej gule v našich súradniciach je $x_\mathrm{B} = 3{,}297\ q$ a $y_\mathrm{B} = 2{,}717\ q$. Z Pytagorovej vety ľahko dopočítame vzdialenosti k priehľadnej guli $d_t \doteq 4{,}272\ q$ a k odrazkovej $d_r \doteq 4{,}038\ q$.

Komentár k riešeniam

Poradili ste si s tým celkom pekne, najmä sa mi páčilo, ako ste si uvedomovali, čo treba zanedbať (hlavne Dvojka by solídne zapadol do ľubovoľnej krčmovej diskusie). Viacerí ste písali o hyperbolických dráhach gule s odrazkami. Istým spôsobom to je pravda, ale tá priamka je len riadne zdegenerovaná hyperbola (s nekonečnou excentricitou).

Bonus si zjavne zaslúžil iba dve kompletné riešenia: numerickú simuláciu od Legolasa, ktorý pekne upravil riešenie minuloročnej úlohy; a večnú česť a slávu za úplné a správne analytické riešenie pomocou Barkerovej rovnice získava Myšel :-)