Riešenia 1. kola letnej časti

1.1 Plytvanie

vzorák **Fero**, opravovala **Katka**

V prvom rade si musíme uvedomiť, čo od nás zadanie chce. Máme zistiť, koľko elektrickej energie, respektíve paliva, ušetríme. Tieto hodnoty vyjadríme v jednotkách energie. Ak vás tento úvod zmiatol, neprepadajte panike a pokračujte. Všetko sa vyjasní.

Ako to teda bude so žiarovkou? Veľmi jednoducho, lebo tento údaj nám prezrádza výrobca. Povedzme, že máme 60 W žiarovku. To nám hovorí, že za 1 sekundu spotrebuje 60 J. Za hodinu potom spotrebuje 3600-krát viac, čiže 216 kJ.

S autom je to podobne jednoduché[1]. Predpokladajme, že naše auto váži jednu tonu. Enka ako správna mestská pirátka jazdí na hranici zákona, čiže $50\,\mathrm{km/h} \doteq 13{,}888\,\mathrm{m/s}$. Kinetická energia takéhoto auta je potom $E = \frac{1}{2}mv^2 \doteq 96{,}45\,\mathrm{kJ}$. Pri zastavení a následnom rozbehnutí teda vyplytváme 96,45 kJ.

Avšak teraz príde vec, na ktorú sa nás snažili navnadiť úvodné vety. Reálne totiž minieme oveľa viac energie, za ktorú budeme musieť zaplatiť – konkrétne benzín. Účinnosť spaľovacích motorov sa pohybuje okolo hodnoty 30 %. Preto v skutočnosti minieme až 321,5 kJ.

Na záver najťažší oriešok – chladnička. Pri nej sa vieme zaoberať niekoľkými drsnými modelmi. Na internete[2] sme si našli minimálny a maximálny výkon chladničky. Predpokladajme, že pri otvorených chladnička naozaj dosahuje svoj maximálny výkon, menovite 400 W.

Pri zavretých dverách je to kúsok ťažšie. Chladnička vtedy prepína medzi režimami: najprv ochladzuje veci vnútri, a keď ich dostatočne ochladí, tak chladiť prestane a „oddychuje“. My si situáciu zjednodušíme a budeme predpokladať, že vnútri chladničky je konštantná teplota. A teplo z nej priebežne uniká. Toto unikanie tepla popíšeme jednoduchým modelom vedenia tepla[3].

Tento model dáva do súvisu množstvo tepla, ktoré sa prenesie[4] medzi dvoma objektmi s rôznou teplotou, dotýkajúcich sa plochou S, oddelených „izolačnou“ vrstvou, za čas τ, pričom teplota týchto objektov sa v dôsledku tepelných strát nezmení.

$$Q = \lambda S \frac{\Delta T}{d} \tau,$$

kde ΔT je rozdiel teplôt a λ je konštanta charakterizujúca izolačnú vrstvu.

Pokúsime sa odhadnúť jednotlivé parametre:

- povrch chladničky je približne $5\,\mathrm{m}^2$,
- rozdiel teplôt je cca 20 °C,
- hrúbka stien je $d = 0{,}05\,\mathrm{cm}$.

[1] Pokiaľ nie sme sadomasochisti a nechceme si komplikovať život – auto pri brzdení časť energie premieňa na elektrickú energiu, ktorou dobíja batérie v aute, budeme sa ale tváriť, že je to zanedbateľná hodnota.

[2] https://www.daftlogic.com/information-appliance-power-consumption.htm

[3] https://sk.wikipedia.org/wiki/S%C3%BA%C4%8Dinite%C4%BE_tepelnej_vodivosti

[4] Keďže teplo je iba práca konaná na molekulárnej úrovni (molekuly do seba narážajú a odovzdávajú si energiu), správne by sme mali povedať, že teplo sa koná a nie že sa prenáša.

Najťažšie je to s koeficientom tepelnej vodivosti pre chladničku, ale $\lambda = 0{,}01\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$ je dobrý odhad. Čas zostáva jedna hodina. Ak to celé dáme dokopy, vyjde nám $Q = 72\,\mathrm{kJ}$. To ale treba prenásobiť účinnosťou chladničky, povedzme, že to bude 50 %. Za hodinu teda vyplytváme $E = 400\,\mathrm{W} \cdot 3600\,\mathrm{s} - 144\,\mathrm{kJ} = 1260\,\mathrm{kJ}$.

A aké poučenie teda vyplýva z tohoto príkladu? Nezastavujte na červenú!

1.2 Časticový psychológ

vzorák **Jaro**, opravovala **:Denda**

To, že sa molekuly hýbu z miest s vyššou koncentráciou do miest s nižšou koncentráciou, je známy fakt, ktorý nám býva predostrený v škole. Dôvod, prečo to tak je, sa však väčšinou zamlčí. A pritom nejde o nič zložité. Zamyslime sa nad tým, čo sa v takom roztoku deje.

V prvom rade je rozumné predpokladať, že molekuly nemajú slobodnú vôľu, a teda sa nemôžu rozhodovať, kam pôjdu. Pravdepodobne za tým nebude ani ich autizmus a snaha izolovať sa od okolia. V takom prípade nám zostávajú snáď len fyzikálne zákony. A v duchu Occamovej britvy poďme hľadať hneď to najjednoduchšie riešenie. No a čo môže byť jednoduchšie, než náhodný pohyb?

Vieme, že molekuly kvapalín vykonávajú chaotický pohyb. Počas toho narážajú aj do molekúl prímesi, ktorých pohyb je jednoznačne determinovaný pohybovými rovnicami. Nájsť ich riešenie je však vzhľadom na množstvo interagujúcich molekúl nemožné. Preto treba problém uchopiť štatisticky.

Uvažujme nejakú nádobu, pre jednoduchosť s jednozložkovým roztokom, pričom koncentrácia prímesi nie je v celom objeme konštantná. Rozdeľme nádobu na myslené kocôčky s dĺžkou hrany a. Veľkosť kocôčok volíme tak, aby sa koncentrácia v jednotlivých kocôčkach dala považovať za konštantnú. Ďalej uvažujme kratučký časový úsek τ. Aký krátky má byť? Zhruba taký, aby zodpovedal dobe medzi dvomi nasledujúcimi zrážkami jednej konkrétnej molekuly.

Nech P označuje pravdepodobnosť, že keď do niektorej kocôčky náhodne umiestnime jednu molekulu prímesi, tá za čas τ túto kocôčku opustí. Uvedomme si, že pravdepodobnosť P závisí len od strednej rýchlosti molekúl, a teda od teploty. Ak je však teplota v celom objeme rovnaká, táto pravdepodobnosť je spoločná pre všetky kocôčky.

Pozrime sa teraz na dvojicu susedných kocôčiek s koncentráciami n_1 a n_2. V kocôčke „1“ je $N_1 = n_1 a^3$ molekúl. V priemere ju preto za čas τ opustí $N_1^{out} = P n_1 a^3$ molekúl a z toho do kocôčky „2“ sa dostane v priemere $N_{12} = \frac{1}{6} P n_1 a^3$. Keď použijeme rovnakú úvahu aj pre kocôčku „2“, dostaneme $N_{21} = \frac{1}{6} P n_2 a^3$.

V kocôčke „1“ sa počet molekúl prechodom cez jedinú spoločnú stenu zmení o $\Delta N_1 = \frac{1}{6} P \left(n_2 - n_1\right) a^3$ a v kocôčke „2“ o $\Delta N_2 = \frac{1}{6} P \left(n_1 - n_2\right) a^3$. Predpokladajme, že pôvodne bola vyššia koncentrácia v kocôčke „1“, teda $n_1 > n_2$. Potom $\Delta N_1 < 0$ a $\Delta N_2 > 0$. Vidíme teda, že v kocôčke s vyššou koncentráciou počet molekúl prímesi poklesol, zatiaľ čo v kocôčke s nižšou koncentráciou vzrástol, teda rozdiel v koncentráciách sa znížil.[5] Tento proces bude pokračovať až dovtedy, kým sa koncentrácie v oboch kocôčkach nevyrovnajú.

Náš model s náhodným pohybom dal presne ten výsledok, ktorý pozorujeme experimentálne. Molekuly roztoku prechádzajú z miest s vyššou koncentráciou do miest s nižšou koncentráciou a tá sa vyrovnáva. Ak ste našli iné riešenie, pokojne ho zahoďte, lebo podľa Occama je správne to naše. Na záver si všimnime, že koncový stav systému je taký, ktorý má najvyššiu možnú mieru neusporiadanosti, tzv. entropiu. Je to v súlade s tým, že pri všetkých termodynamických pochodoch entropia izolovaného systému neklesá.

[5] Nezabúdajme, že našu úvahu robíme len pre jednu dvojicu kociek. V skutočnosti treba urobiť túto úvahu pre všetky dvojice susediacich kociek v celom objeme.

1.3 Mladý vynálezca

vzorák **Jaro**, opravoval **Pľyš**

Uvažujme nejaký všeobecný tvar prelievacích hodín určený závislosťou $S(h)$, čo nie je nič iné ako plocha prierezu hodín vo vodorovnom smere, pričom h meriame vo zvislom smere od zúženia prelievacích hodín. Nech má toto zúženie prierez $S(h = 0) = S_0$. Predpokladajme, že hladina je vo výške h. Potom výtoková rýchlosť a rýchlosť klesania hladiny je jednoznačne určená tvarom hodín a touto výškou. Označme výtokovú rýchlosť prislúchajúcu výške h $v(h)$ a rýchlosť klesania hladiny $u(h)$.

Pre vodu v prelievacích hodinách zrejme platí zákon zachovania mechanickej energie. Uvažujme malé množstvo vody s hmotnosťou Δm, ktoré je v povrchovej vrstve. Celková mechanická energia tohto kúsku vody je $E = \Delta m gh + \frac{1}{2}\Delta m u^2(h)$. Pozrime sa na hodiny o kúsok neskôr – vtedy, keď ich hrdlom pretečie práve množstvo Δm vody. Pozorujeme, že nami uvažovaná povrchová vrstva vody „zmizla“ a rovnaké množstvo preteká hrdlom rýchlosťou $v(h)$, takže jeho mechanická energia je $E' = \frac{1}{2}\Delta m v^2(h)$. Zo zákona zachovania mechanickej energie platí

$$\Delta m gh + \frac{1}{2}\Delta m u^2(h) = \frac{1}{2}\Delta m v^2(h).$$

V hodinách nám žiadna voda nevzniká ani nemizne, preto musí platiť zákon zachovania hmotnosti. Ak považujeme vodu za nestlačiteľnú, je to ekvivalentné zachovaniu objemu, čo vyjadruje rovnica kontinuity. Pre nás zaujímavé sú prierezy hrdlom hodín a voľnou hladinou. Rovnica kontinuity zapísaná pre tieto dva prierezy dáva

$$S_0 v(h) = S(h)u(h).$$

Keďže o výtokovej rýchlosti nemáme žiadnu informáciu, vylúčme ju z rovníc. Pre rýchlosť klesania hladiny dostávame vyjadrenie

$$u(h) = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{S^2(h)}{S_0^2} - 1}} \stackrel{!}{=} \text{konšt.} \stackrel{\text{ozn.}}{=} u_0.$$

Odtiaľ už vieme vyjadriť hľadanú závislosť

$$S(h) = S_0\sqrt{1 + \frac{2g}{u_0^2}h}.$$

Uvažujme rotačne symetrické hodiny okolo zvislej osi. V takom prípade $S(h) = \pi r^2(h)$. Dosaďme to do predchádzajúceho výrazu. Lepšiu predstavu o tvare hodín dostaneme, keď nájdeme inverzné vyjadrenie

$$h(r) = \frac{u_0^2}{2g}\left(\frac{r^4}{r_0^4} - 1\right).$$

Matematici znalí analytickej geometrie okamžitie šípia, že povrch hodín tvorí tzv. kvartická plocha, teda vertikálnym rezom prechádzajúcim osou hodín dostaneme krivku štvrtého stupňa.

1.4 Hustý objekt poprvé

vzorák **Adam**, opravoval **Adam**

Ako paranoidnejší riešiteľ mohol vytušiť zo zadania, ambíciou úlohy bolo dotlačiť vás k inému výpočtu (priemernej) hustoty telesa než bezprostredným využitím definitorického $\rho = \frac{m}{V}$. K dispozícii máme neforemnú nádobu, rovnoramenné váhy a závažia. Na naše veľké potešenie a na úžitok nášho riešenia sme stále schopný a túto schopnosť využívajúci zistiť hmotnosť nami zvoleného telesa (pomocou rovnoramenných váh a závaží), označme ju m ($m = V\rho$). Tvar nádoby síce ovplyvňuje našu ochotu, schopnosť a možnosť merať objem, avšak

Archimedov zákon v nej funguje rovnako dobre. Uvažujme teleso hustoty vyššej než voda (hustota vody je v kontexte príkladu považovaná za známu, keďže je známa všeobecne). Ak odvážime naše teleso tak, že celé bude ponorené vo vode, nameriame „nadľahčenú hmotnosť“ $m' = V(\rho - \rho_0)$, kde ρ_0 je hustota vody. Máme teda dve rovnice o dvoch neznámych (z ktorých nás dokonca zaujíma len jedna), a teda hustotu telesa máme ako na podnose. A teda:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \frac{m'}{m}}$$

Ako bolo zľahka naznačené, problém nastáva ak je hustota meraného telesa nižšia než hustota vody. Avšak ani technické peripetie spojené s týmto nie sú neprekonateľné, stačí teleso dostatočne zaťažiť niečím, čoho „nadľahčenú hmotnosť“ poznáme, a tú následne odpočítať od výslednej. V tom prípade bude naša „nadľahčená hmotnosť“ záporná, čo ale nie je žiaden problém, keďže nás výpočet funguje rovnako dobre (je namieste overiť si, že v tom prípade bude vypočítaná hustota nižšia od hustoty vody, presne podľa očakávania). Ešte je nutné podotknúť že postup doteraz načrtnutý predpokladá (v mnohých prípadoch rozumne) zanedbateľnosť misky/hocčoho na čom vážime v porovnaní s meraným telesom.

Bolo by vhodné k meraniam aspoň odhadnúť aj ich chybu. Jediný vstup do chyby (okrem dosadenej hustoty vody, ale tá nie je výsledkom nášho merania, a teda ju v odhade vynecháme) je nepresnosť merania hmotnosti. Používali sme najmenšie päťgramové závažia, a teda nepresnosť merania δm je asi dva a pol gramu. Trochu si upravme vzorec z ktorého počítame hustotu:

$$\rho = \frac{m}{m - m'}\rho_0$$

Sčítavaním absolútnych (pre $m - m'$ dostaneme odchýlku) a relatívnych odchýlok sa vieme dopracovať k vzťahu:

$$\delta\rho = \left(\frac{2\delta m}{m - m'} + \frac{\delta m}{m}\right)\rho$$

teleso	m/g	m'/g	$\rho/\mathrm{gcm^{-3}}$	$\delta\rho/\mathrm{gcm^{-3}}$
sklenený pohár	305	185	2,54	0,13
oceľové guľočky	35	30	7,00	7,5
jablko	95	−75	0,56	0,03

Tabuľka 1: namerané hmotnosti a vypočítané hustoty

Ak sa pozrieme na odchýlky, badáme nepríjemnú nedôveryhodnosť merania pre oceľové guľočky. To však nie je až také prekvapivé, keďže oceľ má v porovnaní s husotou priveľkú hustotu na to, aby ponorenie do vody malo spoľahlivo merateľný efekt na „hmotnosť“ telesa.

Samozrejme, tento postup nie je jediný možný, ale ostatné sú len nejakou variáciou zdieľajúcou princípy s týmto postupom.

1.5 Zase sústava

vzorák **MaťoB**, opravoval **MaťoB**

Riešenie tejto úlohy si rozdelíme do niekoľkých úvah, tak, aby každá z nich bola jednoduchá. Napriek tomu celok môže vyzerať komplikovane, aj keď to tak nie je ;-). Čo týmto celým chce autor vzoráku povedať? Že neradno preskakovať jeho časti a nad každou úvahou sa oplatí na chvíľku zastať a rozmyslieť si ju.

Úvaha prvá: ťažisková vzťažná sústava

Na začiatok pouvažujme, aké sily pôsobia na jednotlivé telieska spojené pružinkou. Okrem sily od pružinky sú to aj tiažové sily, tie sú však kompenzované normálovými silami. Keďže v zadaní sa spomína akási dokonale navoskovaná podložka, môžeme si v našich úvahách odpustiť aj trecie sily (ak by sme ich uvažovali, nevedeli by sme už len s pomocou papiera a pera dostať celú závislosť pohybu teliesok v čase). Jediné, čo nám teda zostalo, je zatiaľ neznáma sila od pružinky, ktorá pôsobí na každé teliesko a konštantná sila F, ktorou napr. pravé teliesko ťaháme.

Prvý trik je nasledovný. Skúsme si predstaviť pomyselnú krabicu, ktorá obsahuje dve závažia hmotnosti m spojené pružinkou. Jediná sila, ktorá pôsobí na takúto krabicu, je konštantná sila F (sila od pružinky je už z hľadiska krabice vnútorná sila, čiže ak študujeme pohyb krabice ako celku, nevidíme jej prejavy). Ťažisko krabice (s hmotnosťou $2m$) sa teda bude hýbať iba pod vplyvom konštantnej sily F, pôjde teda o priamočiary rovnomernerne zrýchlený pohyb so zrýchlením $\frac{F}{2m}$. Keďže pružinky na začiatku stáli, tak aj počiatočná rýchlosť ťažiska je nulová. Ak si na opis pohybu teliesok zvolíme takú sústavu, pri ktorej je počiatočná pozícia ťažiska nulová (pre jednoduchosť, nič to nemení na výsledku), pozíciu ťažiska $x_\mathrm{T}(t)$ v čase vieme zapísať ako

$$x_\mathrm{T}(t) = \frac{1}{2}\frac{F}{2m}t^2.$$

Ostáva nám už len vyriešiť, ako sa hýbu telieska vzhľadom na ťažisko. Kvôli tomu na chvíľu sústavu spojenú s ťažiskom opustíme. Znalí riešitelia fyzikálnych úloh by mohli nasledujúcu úvahu preskočiť, lebo si uvedomia, že aj v sústave spojenej so zrýchľujúcim ťažiskom platí zákon zachovania hybnosti. Ťažisko teda stojí na mieste (v sústave spojenej so zrýchľúcim ťažiskom), a teda keď je teliesko na pravo vzdialené od ťažiska o χ, tak aj teliesko naľavo je od ťažiska vzdialené o χ, len opačným smerom a rovno napíšu pohybovú rovnice pre telieska vyjadrené cez $x_\mathrm{T}(t)$ a χ.

Úvaha druhá: pohyb teliesok v laboratórnej sústave

Tí z Vás, ktorí si tento trik nevšimli, nemusia zúfať, stačí sa len na telieska pozrieť v laboratórnej sústave. Označme pozíciu pravého telieska $x_2(t)$ a polohu ľavého telieska $x_1(t)$. Keďže majú rovnaké hmotnosti, pre ťažisko platí

$$x_\mathrm{T}(t) = \frac{x_1(t) + x_2(t)}{2}.$$

Analogický vzťah musí platiť[6] aj pre zrýchlenia ťažiska a jednotlivých teliesok,

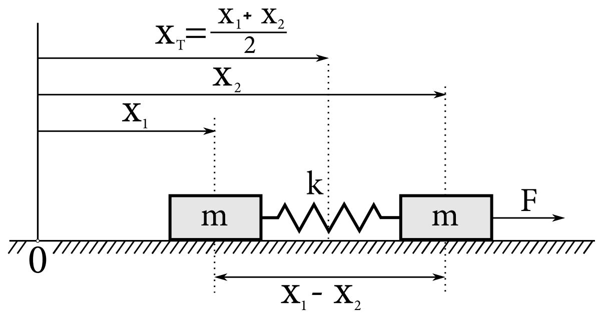
$$a_\mathrm{T}(t) = \frac{a_1(t) + a_2(t)}{2}.$$

Skúsme si teraz napísať pohybové rovnice. Na druhé teliesko pôsobí sila F smerom doprava a sila $k(x_2 - x_1 - l)$ doľava. $x_2 - x_1 - l$ je totiž predĺženie pružinky voči pokojovej dĺžke l. Na prvé telesko pôsobí len sila od pružinky $k(x_2 - x_1 - l)$, ale opačným smerom:

$$ma_1 = k(x_2 - x_1 - l),$$

$$ma_2 = F - k(x_2 - x_1 - l).$$

[6] Drtiči si dokážu derivovaním, ostatní si uvedomia, že keď má rovnosť pre pozície platiť v každom čase, tak musí platiť aj pre rýchlosti a aj pre zrýchlenia.



Obrázok 1: *Pozície teliesok*

Ak by sme tieto rovnice sčítali a predelili dvomi, dostaneme práve pohybovú rovnicu pre pohyb ťažiska (skúste si to sami urobiť). Čo teda môžeme ešte s rovnicami urobiť? Skúsme ich od seba odčítať a predeliť dvomi. Výraz $\frac{x_2-x_1}{2}$ bude potom práve už spomínané χ, t. j. pozícia druhého telieska voči ťažisku. Označme teda

$$\chi(t) \equiv \frac{x_2(t) - x_1(t)}{2}$$

a príslušný rozdiel zrýchlení ako

$$a_\chi(t) \equiv \frac{a_2(t) - a_1(t)}{2}.$$

Odčítaním rovníc a predelením dvomi získame

$$m\frac{(a_2 - a_1)}{2} = \frac{F}{2} - 2k\left(\frac{x_2 - x_1}{2} - \frac{l}{2}\right).$$

Čiže inak povedané

$$a_\chi(t) = \frac{F}{2m} - \frac{2k}{m}\left(\chi(t) - \frac{l}{2}\right).$$

Zabudnime teraz na chvíľku, že máme nejaké dve telieska, v tejto rovnici máme už iba jednu pozíciu v čase $\chi(t)$ a zodpovedajúce zrýchlenie $a_\chi(t)$, prislúchajúce napr. nejakému pomyselnému telieska. Ak by sme vedeli túto pohybovú rovnicu pre vzdialenosť teliesok voči ťažisku $\chi(t)$ vyriešiť, tak už poznáme aj pohyb teliesok, keďže platí (skúste podumať alebo sa pozrieť na obrázok):

$$x_1(t) = x_T(t) - \chi(t),$$

$$x_2(t) = x_T(t) + \chi(t).$$

Úvaha tretia: pohyb teliesok voči ťažisku

Pustime sa do riešenia

$$a_\chi(t) = \frac{F}{2m} - \frac{2k}{m}\left(\chi(t) - \frac{l}{2}\right).$$

Čo nám to pripomína? Rovnicu jednoduchého harmonického oscilátora. Čo nám tam ale vadí? Konštantná sila. Podumajme, ako to vyzerá na začiatku. Na začiatku sú obidve telieska v pokoji a pružinka má svoju pokojovú dĺžku l. Obidve telieska majú rovnakú hmotnosť, takže sú obidve od ťažiska vzdialené o $l/2$, preto je na začiatku $\chi(t) = l/2$. Taktiež aj rýchlosti obidvoch teliesok sú nulové, aj voči ťažisku, a preto rýchlosť prislúchajúca $\chi(t)$ je tiež rovná nule, $v_\chi(t) = 0$. Rovnovážna dĺžka pružinky je $l/2$.

Začneme teliesko ťahať. Čo sa stane? Okamžite sa zmení rovnovážna poloha pružinky. Prečo? Skúsme si predstaviť pokojne visiacu pružinku v gravitačnom poli a zavesme na ňu pomaličky závažie. Pružinka sa predĺži, no nebude kmitať (kvôli tlmeniu). Ak do pružinky drgneme, bude kmitať už okolo tejto novej polohy.

Ak teda na pružinku začne pôsobiť konštantná sila, rovnovážna poloha sa posunie. (Ako to môžeme vidieť inak v rovnici? Člen so silou F môžeme strčiť do zátvorky opisujúce predĺženie pružiny, stačí ho len rozšíriť a vydeliť vhodným výrazom). Teda nová pokojová dĺžka bude $\frac{l}{2}+\frac{F}{4k}$.

$$a_\chi(t) = -\frac{2k}{m}\left(\chi(t) - \left(\frac{l}{2}+\frac{F}{4k}\right)\right).$$

V tomto by sme už mali vidieť rovnicu jednoduchého harmonického oscilátora s $\omega^2 = \frac{2k}{m}$, ktorý kmitá okolo rovnovážnej polohy $\frac{l}{2}+\frac{F}{4k}$. Ako zistíme aká je nová rovnovážna poloha? Rovnovážna poloha je definovaná ako poloha, kedy na závažie pôsobí nulové zrýchlenie. Stačí sa teda pozerať, kedy je $a_\chi(t) = 0$.

Keďže už poznáme frekvenciu harmonického oscilátora a rovnovážnu polohu, tak už vieme, že $\chi(t)$ bude vyzerať nejako ako

$$\chi(t) = \left(\frac{l}{2}+\frac{F}{4k}\right) + A\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t+\varphi\right),$$

kde A je amplitúda a φ je počiatočná fáza. Zostáva už teda určiť iba tieto dve veličiny. Na to sa pozrieme na tzv. počiatočné podmienky, t.j. to ako vyzerala vzdielnosť medzi telieskami (χ) a ich vzájomná rýchlosť (v_χ) v okamihu ako začneme ťahať jedno teliesko silou F.

Na začiatku pohybu obidve telieska pokojne stoja na podložke (v laboratórnej sústave), dôležitá je ich však rýchlosť (v_χ) v ťažiskovej sústave . Keďže však ťažisko na začiatku pohybu voči laboratórnej sústave stojí, tak a telieska sú v nej v pokoji, tak aj na základe zdravého sedliackeho rozumu, tušíme, že vzájomná rýchlosť teliesok je nulová. Taktiež vieme, že na začiatku sú telieska vzdialené od ťažiska o $\chi = l/2$. Teraz si už len stačí uvedomiť, že teliesko na pružinke má nulovú rýchlosť v pozícii, ktorá zodpovedá maximálnemu natiahnutiu resp. stlačeniu pružinky.

Odtiaľ teda vieme, že amplitúda pohybu, t.j. ako ďaleko sa teliesko dostane od rovnovážnej polohy počas svojho pohybu je

$$\left|l/2 - \left(\frac{l}{2}+\frac{F}{4k}\right)\right| = \frac{F}{4k}.$$

Už stačí len zistiť počiatočnú fázu *phi*, na to si uvedomíme, že na začiatku pohybu sme v stave, kedy nulovú rýchlosť) a výchylku od rovnovážnej polohy $-\frac{F}{4k} = \frac{l}{2} - \left(\frac{l}{2}+\frac{F}{4k}\right)$. Stav oscilátora s nulovou rýchlosťou zodpovedá maximálnej výchylke, preto bude amplitúda kmitov práve $\frac{F}{4k}$. Pozícia kyvadla bude mať tendenciu narastať, odtiaľ teda určíme počiatočnú fázu kyvadla (počiatočná pozícia je záporná, preto narastá) ako $\varphi = 3\pi/2$

Preto pre $\chi(t)$ môžeme napísať

$$\chi(t) = \left(\frac{l}{2}+\frac{F}{4k}\right) + \frac{F}{4k}\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t+\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{l}{2}+\frac{F}{4k}\left(1-\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right)\right).$$

Pre pozície teliesok potom platí

$$x_1(t) = x_\mathrm{T}(t) - \chi(t) = \frac{1}{2}\frac{F}{2m}t^2 - \frac{l}{2} - \frac{F}{4k}\left(1-\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right)\right),$$

$$x_2(t) = x_\mathrm{T}(t) + \chi(t) = \frac{1}{2}\frac{F}{2m}t^2 + \frac{l}{2} + \frac{F}{4k}\left(1-\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right)\right).$$

1.6 Rozladené kyvadlo

vzorák **Jaro**, opravoval **Jaro**

Takže poďme na to! Ako prvé si musíme vyjasniť, prečo by sa vôbec malo rotujúce kyvadlo oneskorovať. Pozrime sa naň vo vzťažnej sústave spojenej so sklenenými doskami, takže trajektórie oboch kyvadiel vyzerajú navlas rovnako, akurát časový priebeh polohy závažia kyvadla na tejto trajektórii je v jednotlivých prípadoch odlišný. V čom sa rotujúce kyvadlo líši od obyčajného? V ničom… lenže ho popisujeme v neinerciálnej vzťažnej sústave, preto naň pôsobí okrem tiažovej i neinerciálna odstredivá sila. Pozrime sa, ako sa to prejaví na pohybe kyvadla.

Aby sme mali referenčné výsledky, popíšme v krátkosti správanie nerotujúceho kyvadla. Podrobnú analýzu tu nebudeme robiť, pretože predpokladáme, že problematika obyčajného matematického kyvadla je všeobecne známa.[7] Po vychýlení kyvadla z rovnovážnej polohy naň pôsobí tiažová sila nenulovým momentom, ktorý sa ho snaží vrátiť do rovnovážnej polohy. V priblížení malých výchyliek koná kyvadlo harmonický pohyb s uhlovou frekvenciou $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, a teda perióda obyčajného matematického kyvadla je

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Teraz môžeme pristúpiť k analýze rotujúceho kyvadla. Budeme vychádzať z druhej vety impulzovej, ktorá hovorí, že časová zmena momentu hybnosti je rovná celkovému pôsobiacemu momentu síl.[8] Matematicky vyjadrené

$$\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = \vec{M}.$$

V zmysle analógie s translačným pohybom[9] $\left|\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}\right| = J\varepsilon$. Nech je kyvadlo vychýlené o uhol φ z rovnovážnej polohy, napríklad v kladnom zmysle. Potom naň pôsobí tiažová sila momentom veľkosti

$$\left|\vec{M_G}\right| = \left|\vec{r_G} \times \vec{F_G}\right| = r_{G\perp} mg = mgl\sin\varphi.$$

Priradíme mu znamienko „-“, pretože sa snaží vrátiť kyvadlo do rovnovážnej polohy, t. j. pôsobí v zápornom zmysle. Toto zatiaľ platí aj pre nerotujúce kyvadlo. Lenže v prípade rotácie roviny kmitania uhlovou rýchlosťou Ω pôsobí aj odstredivá sila svojím momentom veľkosti

$$\left|\vec{M_o}\right| = \left|\vec{r_o} \times \vec{F_o}\right| = r_{o\perp} \cdot m\Omega^2\rho = l\cos\varphi \cdot m\Omega^2 l\sin\varphi = \frac{1}{2}ml^2\Omega^2\sin\left(2\varphi\right).$$

Odstredivá sila „odtláča“ kyvadlo od rovnovážnej polohy, t. j. jej moment pôsobí v kladnom zmysle, preto mu priradíme znamienko „+“. Moment ťahovej sily lanka je nulový. Teraz už môžeme sformulovať pohybovú rovnicu rotujúceho matematického kyvadla

$$J\varepsilon = -mgl\sin\varphi + \frac{1}{2}ml^2\Omega^2\sin\left(2\varphi\right).$$

V priblížení malých uhlov platí $\sin x \approx x$. Matematické kyvadlo predstavuje hmotný bod na nehmotnom závese, preto $J = ml^2$. Aplikovaním týchto vzťahov dostávame

$$\varepsilon + \left(\frac{g}{l} - \Omega^2\right)\varphi = 0.$$

[7] Ak nie je: výpočet je rovnaký ako pre „rotujúce“ matematické kyvadlo s nulovou uhlovou rýchlosťou, t. j. bez odstredivej sily.

[8] Pri analýze rotačného pohybu je dobré uvedomiť si analógiu s translačným pohybom. Príslušné pohybové rovnice dostaneme formálnou zámenou zodpovedajúcich si veličín: hybnosť – moment hybnosti, sila – moment sily, hmotnosť – moment zotrvačnosti, zrýchlenie – uhlové zrýchlenie…

[9] $\left|\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}\right| = ma$

Za predpokladu, že $g > l\Omega^2$, v tom spoznávame rovnicu harmonického oscilátora s uhlovou frekvenciou $\omega = \sqrt{g/l - \Omega^2}$. Perióda kmitania rotujúceho matematického kyvadla je teda

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g - l\Omega^2}} > T_0.$$

Zadanie sa nás pýta na čas τ, za ktorý sa rotujúce kyvadlo oneskorí o polperiódu oproti obyčajnému matematickému kyvadlu. Znamená to, že za tento čas rotujúce kyvadlo prekmitne n-krát, teda $\tau = nT$, zatiaľ čo obyčajné kyvadlo prekmitne $\left(n + \frac{1}{2}\right)$-krát, čiže $\tau = \left(n + \frac{1}{2}\right) T_0$. Dajme tieto vyjadrenia do rovnosti a dosaďme periódy. Jednoduchými matematickými úpravami dostaneme:

$$2\pi n\sqrt{\frac{l}{g - l\Omega^2}} \overset{!}{=} 2\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$n^2 - \frac{g - l\Omega^2}{l\Omega^2}n - \frac{g - l\Omega^2}{4l\Omega^2} = 0$$

$$n = \frac{\sqrt{g - l\Omega^2}}{2l\Omega^2}\left(\sqrt{g - l\Omega^2} \pm \sqrt{g}\right)$$

Z vyjadrenia n v tomto tvare vidíme, že kladný počet prekmitnutí dostaneme pre „+“, čomu zodpovedá čas

$$\tau = nT = \frac{\pi}{\Omega^2}\left(\sqrt{\frac{g}{l} - \Omega^2} + \sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Poznámka pre náročných

V tomto momente sme sa dopracovali k výsledku, takže môžeme byť spokojní. Alebo žeby nie? V priebehu výpočtu sme narazili na situáciu, v ktorej sme predpokladali, že $g > l\Omega^2$.

Čo by sa ale stalo, keby kyvadlo rotovalo tak rýchlo, že by táto podmienka nebola splnená? V takom prípade by riešenie pohybovej rovnice kyvadla neviedlo na harmonické kmity, ale na exponenciálny nárast výchylky. Znamená to, že by kyvadlo začalo šialene rotovať? Nie, pretože nami odvodená linearizovaná pohybová rovnica platí len pre malé výchylky.

Tak čo sa teda deje v prípade vysokej uhlovej rýchlosti otáčania? Aby sme to vedeli rozhodnúť, pozrime sa na to, ako sa mení celkový moment sily pôsobiaci na kyvadlo v závislosti od výchylky

$$M = -mgl\sin\varphi + ml^2\Omega^2\sin\varphi\cos\varphi = ml\sin\varphi\left(l\Omega^2\cos\varphi - g\right).$$

Kyvadlo je v rovnovážnej polohe, keď naň pôsobí nulový moment sily. Hneď vidíme, že poloha $\varphi_0 = 0$ je rovnovážnou polohou za každých okolností. Ako však naša analýza ukázala, je stabilná, t. j. umožňuje harmonické kmitanie, len kým $\Omega < \sqrt{\frac{g}{l}}$, a potom sa stáva nestabilnou. Avšak pri prekročení tejto uhlovej rýchlosti sa objavuje nová rovnovážna poloha $\varphi_0 = \arccos\frac{g}{l\Omega^2}$,[10] ktorá je stabilnou, takže kyvadlo prejde do tejto novej polohy a bude okolo nej kmitať.

Ako bonus si skúste spočítať, že takéto kmitanie je naozaj možné. Na prvý pohľad sa to môže zdať ako totálny humus, ale je to naozaj spočítateľné. Hint: postup je úplne rovnaký, akurát výchylku tentokrát merajte od rovnovážnej polohy φ_0.

[10] Táto rovnovážna poloha sa objavuje, až keď $g \leq l\Omega^2$, pretože argument funkcie arccos nemôže byť väčší než 1.

Komentár k riešeniam

Pri opravovaní som nenarazil na žiadnu chybu, ktorá by sa hromadne vyskytovala, preto by som tu chcel uviesť len dve poznámky.

Väčšina z vás na rozdiel od vzoráku riešila túto úlohu pomocou síl. Tento postup vás doviedol k správnemu výsledku, pretože sa jednalo o matematické kyvadlo. V prípade fyzikálneho kyvadla by ste sa však momentom síl a druhej vete impulzovej nevyhli. Preto odporúčam osvojiť si postup použitý vo vzoráku.

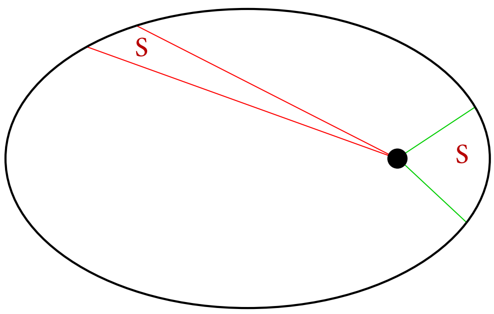
Po druhé by som vás chcel vyzvať, aby ste upravovali výsledky do ľudskejšej podoby. Isteže, výraz, ktorý je vďaka zloženým zlomkom na papieri vyšší než dlhší, s početnými odmocninami môže mať svoje čaro. Nechcem si ale predstaviť, ako ho nahadzujete do kalkulačky, keby ste chceli numerický výsledok. Týmto chcem pochváliť Legolasa, ktorý ako jediný myslel na opravovateľa a výsledok uviedol v stráviteľnom tvare.

1.7 Vesmírne prázdniny

vzorák **Kvík**, opravoval **Kvík**

Základom bolo sa tejto úlohy nezľaknúť. Na prvý pohľad možno vyzerá celkom desivo[11], veď pohyb po elipse v centrálnom poli je nepravidelný, rýchlosť sa neustále mení a výsledné riešenie pohybových rovníc je hnusne komplikované. Pravdaže, integrovaním sa dá vyriešiť mnoho vážnych životných problémov a toto náhodou je jeden z nich. Hlbšie zamyslenie však rýchlo ukáže, že sa dá vyriešiť rýchlo a priamočiaro. Ukážeme si, ako použiť nejaké kladivo, ktoré poznáme[12]. Napríklad druhý Keplerov zákon.

Ctený kolega Kepler svojho času analyzoval veľmi presné a detailné pozorovania pohybov planét. Pri dôkladnom prežúvaní dát prišiel na to, že planéty sa pohybujú po elipsách a že plošná rýchlosť, ktorou sprievodič planéty „zametá“ plochu dráhy, je konštantná. Sprievodičom sa rozumie úsečka spájajúca bod, do ktorého nás sila ťahá (teda v našom prípade Slnko) s telesom. Teda keď sa na planétu pozrieme v dvoch rôznych okamihoch, vzdialených v čase ΔT, zametená plocha bude vždy rovnaká, nezávisle na čase a presnej polohe telesa.

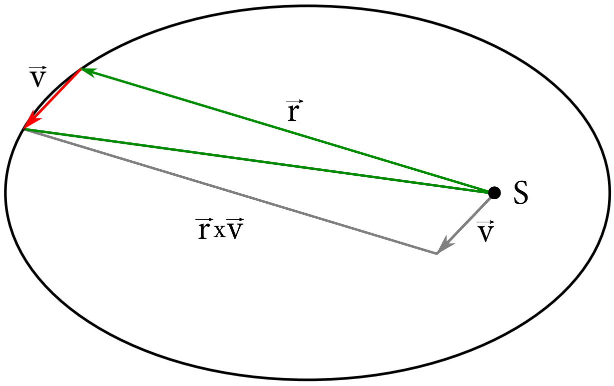


Obrázok 2: *Plochy zametené sprievodičom za rovnaký čas* ΔT

Na dôkladnejšie vysvetlenie, *prečo* to tak je, však prišiel až občan Newton. Druhý Keplerov zákon je v skutočnosti iba dôsledkom zákona zachovania momentu hybnosti. Centrálna sila, teda v našom prípade gravitačná, totiž moment hybnosti meniť nemôže – jej zložka, kolmá na polohový vektor, je predsa nulová. Lepšie to uvidíme, keď si nakreslíme maličký úsek dráhy:

[11] Popravde sa medzičasom skutočne vyskytla na skúške na Matfyze :-)

[12] Alebo by sme ho určite poznať mali.



Obrázok 3: *Plocha zametená sprievodičom za zanedbateľne krátky čas dt*

Plocha trojuholníka zameteného za malý čas dt je zjavne rovná polovici plochy rovnobežníka, ktorého plochu vieme vyjadriť vektorovým súčinom $\vec{r} \times \vec{v}$. No a moment hybnosti je – až na konštantu $m/2$ – vyjadrený zjavne tým istým výrazom:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{r} \times \vec{v},$$

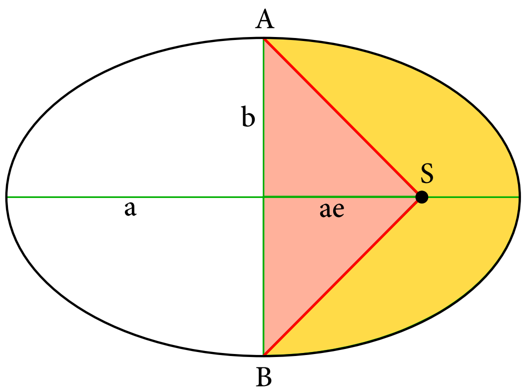
takže oba zákony tu popisujú tú istú skutočnosť.

No a teraz k úlohe. Najprv si dôkladne zanalyzujeme elipsu a zamyslíme sa, čo o nej vieme zistiť. Vzdialenosť ohniska od geometrického stredu elipsy udáva *lineárna excentricita ae*, kde a je dĺžka jej hlavnej (dlhšej) polosi. e je numerická excentricita, spomenutá v zadaní, teda bezrozmerné číslo, ktoré udáva, ako veľmi je elipsa sploštená. Napríklad pre $e = 0$ dostávame kružnicu. Plocha celej elipsy je πab, kde b je dĺžka vedľajšej (kratšej) polosi. Nakoniec si ešte povieme, že medzi tromi spomenutými hodnotami platí vzťah

$$b = a\sqrt{1 - e^2},$$

ale ako neskôr zistíme, nebudeme ho vôbec potrebovať poznať.

Teraz si dráhu nakreslíme znovu, aj s označením význačných bodov:



Obrázok 4: *Obežná dráha uzimenej planétky*

A ďalej to už pôjde rýchlo. Z druhého Keplerovho zákona vyplýva, že pomer doby strávenej v teplejšej polovici dráhy k celej perióde obehu je rovnaký, ako pomer plochy sivej eliptickej výseče ASB k ploche celej elipsy. Plochu výseče vieme spočítať ľahko, je to rozdiel plochy polovice elipsy a trojuholníka ASB, čiže

$$\frac{\pi ab}{2} - 2\frac{ae \cdot b}{2} = ab\left(\frac{\pi}{2} - e\right).$$

To už iba dáme do pomeru s plochou celej elipsy a hľa, máme výsledok:

$$\frac{ab\left(\frac{\pi}{2}-e\right)}{\pi ab}=\frac{\frac{\pi}{2}-e}{\pi}=\frac{1}{2}-\frac{e}{\pi}.$$

Na záver si ukážeme jednoduchú, ale zaujímavú vec: totiž, že tento pomer nikdy neklesne pod určitú nenulovú konštantu. Na prvý pohľad by sme mali vidieť, že najväčší bude vtedy, keď sa excentricita bude blížiť k 1, teda dráha bude veľmi „pretiahnutá“[13]. Pre hraničný prípad $e=1$ dostávame nezvyklé číslo $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}=\frac{\pi-2}{2\pi}\doteq 0{,}1817$. Toto by už síce bola parabola, nič nám však nebráni zobrať ľubovoľné číslo o trošku menšie od 1.

Takže každá planéta musí v slnečnejšej polovici svojej dráhy stráviť najmenej 18,17 % času – o niečo viac, než šestinu svojej obežnej doby.

Komentár k riešeniam

Jedinou a najhoršou chybou, ktorú ste tu mohli spraviť, bolo úlohu neriešiť, pretože na sedmičku bola skutočne neobvykle ľahká[14]. Prakticky všetky riešenia boli správne a okrem jedného v podstate identické so vzorákom, navyše v drvivej väčšine aj deväťbodové. Z plného počtu som všetkým dokopy strhol len tri body, všetko za drobné numerické nezrovnalosti.

Večnú česť a slávu získava Matúš Kopunec, ktorý ako jediný na problém vytiahol najťažší kanón a správne riešenie doslova vymlátil cez polárne súradnice a excentrickú anomáliu. Nuž, keď hrubá sila nepomáha, je to len príznak, že jej nepoužívate dosť.

[13] Samozrejme, pre väčšie hodnoty excentricity e sa toto číslo ešte zmenší, ale dráhou bude parabola alebo hyperbola – teda otvorené krivky, kde sa nedá hovoriť o bližšej polovici dráhy.

[14] A čo si budeme hovoriť – veľmi dobre sa opravovala ;-)