Fyzikálny korešpondenčný seminár
XXXII. ročník, 2016/2017
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 3. kola zimnej časti

3.1 Energická prechádzka

vzorák **Denda**, opravovala **Denda**

Áno, prvý Newtonov zákon nám hovorí o tom, že teleso sa pohybuje rovnomerným priamočiarym pohybom, pokiaľ nie je vonkajšími silami nútené tento pohybový stav zmeniť.[1] Spomeňme si však na situácie, v ktorých sme ho používali. Išlo buď o hmotný bod alebo o kvádrik kĺzajúci sa po podložke, či kotúľajúcu sa loptičku… jednoducho o čokoľvek s jednotným pohybom, čo sme pri zadaní úlohy vedeli aproximovať hmotným bodom. Predstavte si však kráčajúceho človeka. Je možné vnímať tento pohyb jednoducho iba ako rovnomerný priamočiary pohyb ťažiska? Dúfam, že po krátkom zamyslení si každý z vás povedal „nie“.

Ľudské kráčanie je samo o sebe veľmi komplexný problém. Môžete si všímať, ktoré svaly pri ňom používate, ako sa napínajú a uvoľnujú. Každý z týchto pohybov je navyše vyvolaný rýchlymi nervovými signálmi, pričom sa v tele dejú všelijaké biochemické a fyzikálne procesy. Zahľaďme sa však na tento problém očami vonkajšieho pozorovateľa. Ten vidí ako prešľapujeme z jednej nohy na druhú, pričom v momente ako jednu nohu pokladáme, druhú už zdvíhame. Cez položenú nohu sa ako inverzné kyvadlo prehupujeme opäť na druhú, ktorá z momentu pokoja, kedy sme sa ňou prehupovali, musela počas prehupovania sa cez druhú nohu predbehnúť naše telo, kde sa opäť zastavila a začala ju predbiehať druhá.

Každá z nôh teda polovicu nášho pohybu stojí. Ak sa pohybujeme rýchlosťou v dopredu, každá z nôh musí mať počas svojho pohybu priemernú rýchlosť $2v$. Jej pohyb však nie je rovnomerný, môžete si všimnúť, že väčšinu času zrýchľuje a potom sa veľmi rýchlo a hladko zastaví. Vidíme tu, že pohybový stav nôh sa neustále mení a teda na ne musíme pôsobiť nejakou silou.[2]. Tu prichádza na svet otázka: „Súvisí sila s energiou?“.

Kľúčovým slovom v tomto momente je práca W. Ak pôsobíme na teleso silou F na nejakej dráhe s, povieme, že konáme prácu $W = F \cdot s$. A práca už úzko súvisí s energiou. Pri konaní práce totižto energiu strácame. Často teda v rôznych materiáloch nájdete vzťah $\Delta W = \Delta E$. Ako sme si už napísali, počas celého nášho pohybu nohy buď zrýchľujú, alebo spomaľujú.

Pôsobíme na ne silou a strácame pri tom energiu. Závisí to však od rýchlosti chôdze? Správna odpoveď je „áno“ a dôvodom nie je nič iné ako to, že čím rýchlejšia chôdza, tým väčšie zrýchlenie/spomalenie je potrebné docieliť, čo znamená, že musíme pôsobiť väčšou silou. Úbytok energie je priamo úmerný sile a teda čím rýchlejšia chôdza, tým viac strácame energie.

Nohy však nie sú jediné, čo urýchľujeme. Pri chôdzi taktiež hýbeme rukami, ramenami, prsnými svalmi, bokmi, … Všetky tieto pohyby veľmi hrubo pripomínajú pohyb kyvadla. Na jednej strane zastavíš, aby si mohol zmeniť smer na opačný. Každý z týchto pohybov si teda tiež vyžaduje nejakú prácu. Čo je však najdôležitejšie, ani samotné naše ťažisko sa nepohybuje rovnomerným priamočiarym pohybom, ale skôr po akejsi sínusoide. Tento fakt som chcela naznačiť už aj samotným prirovnaním ku kyvadlu. Pri kráčaní teda neustále kmitáme ako pružinka medzi stavom s najvyššou potenciálnou energiou a najnižšou potenciálnou energiou, pričom sa zároveň pohybujeme dopredu rýchlosťou v.

[1] Zotrvávanie v pokoji je špeciálnym prípadom, kedy $v = 0$.
[2] Tú musí samozrejme vyvolať samotné naše telo

3.2 Záhadná baterka
vzorák **Samo T.**, opravovala **Katka**

Prvá vec, čo si musíme uvedomiť, je to, ako funguje batéria. Batériu tvoria dve elektródy, katóda a anóda, ktoré sú obklopené elektrolytmi, čiže roztokmi, ktoré vedú elektrický prúd. Medzi elektródami a elektrolytom dochádza k chemickej reakcii, ktorá vytvára rozdiel elektrických potenciálov.

Čo je to vlastne ten elektrický potenciál? Je to fyzikálna veličina, ktorá udáva, koľko energie spotrebujeme na prenos častice s nábojom jeden Coulomb pri presune z miesta s nižším potenciálom do miesta s vyšším potenciálom (v gravitačnom poli by analógiu bola častica s hmotnosťou jeden kilogram). Ide teda v princípe len o potenciálnu energiu predelenú veľkosťou náboja.

Rozdiel potenciálov nazývame elektrické napätie. Pozrime sa teraz na dve batérie, keď priložíme k sebe ich elektródy.

Pokiaľ sú zhodné (obe sú katódy alebo sú obe anódy), častice získavajú energiu pri prechode prvou batériou, a potom strácajú energiu pri pohybe cez druhú batériu. Keďže máme batérie s rovnakým potenciálovým rozdielom (napätím), častice prechodom cez takúto sústavu nezískavajú žiadnu energiu. Navyše na spojení dvoch elektród musia prekonať potenciálovú bariéru, a na to potrebujú mať dostatočnú energiu.

Keďže batérie v izbe majú konštantnú a nenulovú teplotu, vnútri batérie sa nachádzajú častice, ktoré majú dostatočnú energiu na to, aby tento potenciálový rozdiel prekonali. Podobne aj sa aj v plyne nachádzajú veľmi pomalé, ale aj veľmi rýchle molekuly. Je ich však strašne málo a v stave tepelnej rovnováhy platí, že rovnako veľa častíc, ako prechádza z prvej batérie do druhej, prechádza aj z druhej do prvej. Celkovo tak netečie medzi batériami žiadny makroskopický prúd (namerali by sme maximálne nejaký šum) daný práve spomínaným mikroskopickým pohybom častíc.

Čo sa stane, keď priložíme k sebe opačné elektródy, teda ako je zadané? Častice budú naberať energiu pri prechode prvou batériou a pri prechode druhou batériou naberú ešte raz toľko energie.

Presunú sa však častice v elektrolyte z jedného konca samovoľne na druhý? Nie, pretože, ak by boli koncentrované iba na jednom mieste potom, by na ne pôsobili veľké odpudivé sily v dôsledku čoho by prirodzene prešli do miest s nižšou koncentráciou, teda tam, kde je náboja menej. Takže v batériách sa prirodzene vytvorí nejaké rozloženie častíc v elektrolyte, ale samotné častice sa (až na tepelný pohyb) od jednej elektródy k druhej nepremiestňujú. Výsledné napätie, ktoré takáto batéria vie produkovať, je však väčšie, pretože častica získa energiu danú dvomi potenciálovými rozdielmi.

A čo sa stane, keď batérie spojíme aj kúskom vodiča? Nastane skrat, t. j. vodivé prepojenie katódy a anódy – ale pozor, katóda a anóda musia mať potenciálový rozdiel. Teraz však častice prechádzajú cez kúsok vodiča, ktorý má veľmi malý odpor. Vďaka tomu tečie cez drôtik naozaj veľmi veľký prúd. Rovnako ale prúd tečie aj cez batériu, takže teraz sa už naozaj veľké množstvo častíc v batérii presúva od jednej elektródy k druhej. Na to je však potrebné veľké množstvo energie ("veľký prúd = veľa častíc"), ktorá sa nemá čím nahrádzať, takže dôjde k rýchlemu opotrebovaniu batérie.

3.3 Párty na Mlynoch
vzorák **Jaro**, opravoval **Arthur**

Predpokladajme, že pri pohybe mlynu naň nepôsobia žiadne trecie sily (trenie na osi otáčania, odpor vzduchu). V takom prípade musí nevyhnutne platiť zákon zachovania energie. Aby sme vedeli efektívne počítať s potenciálnou energiou, potrebujeme nájsť polohu ťažiska mlynu. Uvažujme, že ramená mlynu sú nehmotné. V takom prípade je jeho ťažisko určené len štvoricou závaží na koncoch ramien.

Zaveďme súradnicovú sústavu s počiatkom na osi otáčania mlynu a so štandardne orientovanými osami. Múdre knihy hovoria, že x-ovú súradnicu ťažiska nájdeme podľa vzťahu[3]

$$x_0 = \frac{\sum\limits_i m_i x_i}{\sum\limits_i m_i}.$$

Pre zjednodušenie zápisov zaveďme označenie $\sum\limits_i m_i \overset{ozn}{=} M$, čo nie je nič iné než celková hmotnosť mlynu $M = 10\,\mathrm{kg}$. Ale späť k ťažisku! Po dosadení číselných hodnôt dostávame $x_0 = -6\,\mathrm{cm}$. Úplne analogicky pre y-ovú súradnicu ťažiska platí

$$y_0 = \frac{\sum\limits_i m_i y_i}{M} = 6\,\mathrm{cm}.$$

Ťažisko mlynu je teda od osi otáčania vzdialené o $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 6\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$.

Zadanie hovorí, že ak mlyn uvoľníme, roztočí sa. Ale prečo sa tak vlastne stane? Odpoveď na to je jednoduchá. Tiažová sila pôsobí v ťažisku,[4] a to je v x-ovom smere vzdialené od osi otáčania o x_0, teda tiažová sila má nenulový moment $\tau = Mgx_0$, ktorý spôsobuje roztáčanie mlynu proti smeru pohybu hodinových ručičiek.

Ako sa mlyn začne roztáčať, jeho ťažisko klesá, čím klesá aj potenciálna energia mlynu. Zároveň však rastie jeho kinetická energia. Na základe zákona zachovania energie musí platiť, o koľko klesne potenciálna energia, presne o toľko musí kinetická energia vzrásť, keďže sme predpokladali nulové straty energie. Je zrejmé, že mlyn dosiahne najnižšiu potenciálnu energiu v momente, keď sa jeho ťažisko nachádza presne pod osou otáčania. V takom prípade je pokles potenciálnej energie oproti počiatočnému stavu

$$\Delta E_{\mathrm{pot}} = Mg\Delta h = Mg\left(y_0 + r\right).$$

Už sme uviedli, že potenciálna energie sa postupne premieňa na kinetickú a naopak. Lenže akú kinetickú energiu má mlyn, keď sa otáča? Má len rotačnú energiu? Alebo má aj nejakú translačnú energiu? Alebo žeby len translačnú energiu? To závisí od toho, ako sa na to pozrieme.

Úplne najprirodzenejší pohľad je, že mlyn sa otáča okolo osi otáčania. V takom prípade má rotačnú energiu $E_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}J\omega^2$, kde J je moment zotrvačnosti mlynu okolo osi otáčania a ω je uhlová rýchlosť. Moment zotrvačnosti je definovaný ako $J = \sum\limits_i m_i r_i^2$, kde m_i je hmotnosť i-tého hmotného bodu a r_i je jeho vzdialenosť od osi otáčania. V našom prípade $r_i = a$ pre všetky možné hodnoty i, čo je dĺžka ramena mlynu. V takom prípade $J = \sum\limits_i m_i a^2 = Ma^2$ a potom

$$E_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}Ma^2\omega^2.$$

Rovnako dobre však môžeme uvažovať, že závažia sa pohybujú po kružnici s polomerom a obvodovou rýchlosťou $v = a\omega$. V takom prípade majú translačnú kinetickú energiu

$$E_{\mathrm{tran}} = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i v^2 = \frac{1}{2}Mv^2.$$

To však nie je všetko. Predstavme si, že mlyn sa otočí o 180°. V takom prípade, keď sa pozrieme na jednotlivé závažia, čísla na nich budú otočené takpovediac *upside-down*. To však nejde dosiahnuť len čisto translačným

[3] Symbol $\sum\limits_i$ značí súčet výrazu, čo stojí za ním, cez všetky možné hodnoty i. V našom prípade $\sum\limits_i m_i x_i = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4$.

[4] Presnejšie, pôsobí v každom hmotnom bode telesa, ale ak všetky elementárne sily pôsobiace na jednotlivé hmotné body presunieme do ťažiska, bude to mať na teleso rovnaký pohybový účinok.

pohybom, ale súčasne treba uvažovať aj nejakú rotáciu. Konkrétne každé zo závaží ešte rotuje okolo svojho ťažiska uhlovou rýchlosťou ω, aby sa pretočilo práve raz, kým obehne jedno koliečko. To ale znamená, že by malo mať aj nejakú rotačnú kinetickú energiu. Ako sme už uviedli, rotačnú energiu počítame podľa vzťahu $E_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}J\omega^2$, kde $J = \sum\limits_i m_i r_i^2$. Lenže v prípade závažia tvoreného jediným hmotným bodom $J = \sum\limits_i m_i r_i^2 = m_1 r_1^2$ a vzdialenosť tohto hmotného bodu od osi otáčania (ťažiska závažia) je $r_1 = 0$, teda $J = 0$ a $E_{\mathrm{rot}} = 0$.

Dvomi rôznymi pohľadmi na ten istý pohyb sme sa dostali k dvom vyjadreniam kinetickej energie. Jednak je to rotačná energia $E_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}Ma^2\omega^2$ a dvak translačná energia $E_{\mathrm{tran}} = \frac{1}{2}Mv^2$. Keď si uvedomíme, že $v = a\omega$, vidíme, že sa dopracujeme k rovnakej hodnote, takže oba prístupy sú si naozaj ekvivalentné.

Vráťme sa teraz k zákonu zachovania energie. V momente uvoľnenia má mlyn nulovú kinetickú energiu. Nech v najnižšom bode dosiahne maximálnu rýchlosť v. Potom nárast jeho kinetickej energie je

$$\Delta E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}Mv^2$$

a zo zákona zachovania energie $\Delta E_{\mathrm{kin}} \stackrel{!}{=} \Delta E_{\mathrm{pot}}$. Po dosadení nájdených zmien energií dostávame $\frac{1}{2}Mv^2 = Mg\left(y_0 + r\right)$, odkiaľ

$$v = \sqrt{2g\left(y_0 + r\right)} \doteq 1{,}69\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Komentár opravovateľa

Počas opravovania som narazil na viaceré chyby, ale jedna sa diala až príliš často. Spravila ju približne až tretina z vás a spočívala v tom, že ste vypočítali kinetickú energiu ťažiska, vyrátali ste z toho rýchlosť ťažiska a potom ste ju premenili na rýchlosť závaží.

Tu sa ale objavuje taká otázka: kinetická energia ťažiska je $\frac{1}{2}Mv^2$ (kde M je hmotnosť všetkých závaží dokopy), ale čo ak by sme to rátali pomocou kinetickej energie závaží? To je tiež $\frac{1}{2}Mv^2$. Ako to teda vlastne je s energiou ťažiska? Pozrime sa na to cez rotačné energie. Rotačná energia mlynu je $\frac{1}{2}J\omega^2$, kde $J = Ma^2$. Rotačná energia ťažiska je ale tiež $\frac{1}{2}J\omega^2$ a vieme, že ω je v oboch rovnaká. Takisto bude aj J, keďže sa v oboch prípadoch otáča ten istý mlyn.

Z toho ale dostávame, že kinetická energia ťažiska je rovnaká ako kinetická energia závaží. To znamená, že v kinetickej energii ťažiska vlastne nevystupuje rýchlosť ťažiska, ale rýchlosť závaží.

V riešeniach som ale narazil aj na veci, ktoré sa mi páčili, a tým bolo riešenie od Elišky Macákovej, v ktorom vôbec nebolo treba zistiť, kde sa nachádza ťažisko. Vyjadrila si potenciálnu energiu ako funkciu v závislosti od uhla vychýlenia, odsimulovala to v tabuľkovom kalkulátore a ľahko našla minimum.

Pre tých, ktorí napísali, že mlyn má minimálnu potenciálnu energiu, keď je najťažšie závažie dole: na videu od Terky Prokopovej si môžete pozrieť, že to tak nebude:

https://drive.google.com/file/d/0B_H19OdYZEpLSTBCRjJYZUhFZms/view

3.4 Čaj o šiestej

vzorák **Kvík**, opravoval **Dušan**

Vyhrážky z minulého roka sa nám teda naplnili a úloha je tu zas, tentokrát v experimentálnom formáte. No, ľahká pomoc, veď predsa zoberiem čajník, dám variť vodu, zalejem čaj, párkrát odmeriam pokles hladiny a mám to vybavené. Deväť bodov zadarmo. Alebo možno ani nie.

Takže dáme variť vodu a zatiaľ si povieme niečo o tom, čo, ako a prečo budeme robiť. Zadanie je natoľko milosrdné, že nám hovorí, že ide najmä teplotnú rozťažnosť samotnej vody a jej ochotu vyparovať sa do okolitého priestoru počas toho, ako chladne. Dôkladné teoretické zdôvodnenie a aké-také výpočty okolo celého javu ste už svojmu utrápenému svedomiu poskytli sami v minuloročnej úlohe *Čaj o piatej*[5], takže sa mu detailne nebudeme venovať.

Postup merania

Dočítané? Takže, keď už sme dostatočne teoreticky nabúšení, môžeme pristúpiť k samotnému meraniu. Najprv si rozmyslíme, že miesto čajníka je lepšie použiť voľáku pravidelnú a uzatvárateľnú nádobu, napríklad rodinný krištáľ nadobudnutý počas výletu do IKEA alebo valcovitý zaváraninový pohár zdedený po prababičke. Zaváraninový pohár má navyše výhodu, že je bežne dodávaný aj s viečkom, s pomocou ktorého sa dá ľahko vykonať prvá časť merania. Ak viečko nemáme, pomôžeme si napríklad priesvitnou fóliou, ktorú pre istotu ešte stiahneme okolo deravého konca pohára gumičkou.

Snáď je každému jasné, že ak pohár dobre uzavrieme, hmotnosť – a teda skutočné množstvo, čiže počet častíc – čaju v ňom sa meniť nemôže, takže za akúkoľvek zmenu objemu musia byť zodpovedné iné javy. Ak vylúčime vplyv smädných mimozemšťanov zo štvrtého rozmeru, ktorí svoje sosáky dostanú dovnútra pohára aj bez porušenia skla, za zmenou objemu bude teraz musieť byť práve tepelná rozťažnosť samotného čaju.

Okrem nádob však potrebujeme ešte ďalšiu profesionálnu výbavu. Po prvé sa nám hodí nejaké sofistikované zariadenie na ohrev vody, napríklad rýchlovarná kanvica alebo plynový sporák. Po druhé budeme niečím potrebovať odmerať počiatočnú hmotnosť vody, takže použijeme kuchynské, prípadne v kultúrnejšom prostredí laboratórne váhy, resp. digitálnu mikrováhu. No a po tretie by sa hodil teplomer, či už liehový, alebo digitálny. V každom prípade by mal vydržať teplotu aspoň 100 °C.

Samozrejme by sme niečím chceli merať objem. To sa dá viacerými spôsobmi, napríklad pomocou odmerného valca, striekačiek, poctivým premeraním nádoby a následným integrovaním prierezu cez celú jej výšku… keďže však máme tak či tak poruke váhu, môžeme využiť aj tú, prosto odmeriame hmotnosť vody pri známej izbovej teplote a podľa tabuľkovej hodnoty hustoty ju prepočítame na objem.

V neposlednom rade si uvedomíme, že teplotu nemusíme merať pre rôzne počiatočné teploty, ale môžeme si povedať, že každé meranie teploty bude počiatkom nového merania *priebehu* v závislosti od počiatočnej teploty. Takto ušetríme veľké množstvo elektriny, času a predovšetkým vlastných nervov.[6]

Úplne na začiatku si odmeriame hmotnosti prázdnych suchých pohárov, vrátane všetkých viečok, krytov a gumičiek. Táto hmotnosť pre nás nie je zaujímavá a na naše veľké šťastie sa s časom nemení, môžeme ju teda bez ďalších škrupúľ rovno odčítať od hodnôt, ktoré nám ukazuje váha. Prípadne, ak máme trochu chytrejšiu váhu, môžeme ju s prázdnym pohárom *tarovať*, teda nastaviť ako referenčnú hodnotu práve hmotnosť prázdneho pohára. Do tabuľky si potom zaznačujeme už redukované, tarované hodnoty. Ak však chytrú váhu nemáme, do poznámok určite patria „surové" hodnoty, všetky opravy zásadne robíme až v pokoji pri spisovaní protokolu, nie v horiacom a čmudiacom laboratóriu a už vôbec nie z hlavy!

Teraz do pohára nalejeme do fixnej výšky (napríklad po značku alebo horný okraj) vriacu vodu a opatrne ho premiestnime na váhu. Rozstrapkaným koncom ruky uchopíme teplomer a jeho akčnú časť (teda nádržku s liehom alebo senzor) vložíme do vody a počkáme, kým sa hodnota neustáli. Je možné, že teplota bude tesne pod bodom varu rýchlo klesať, pretože si voda vymieňa energiu nie len so vzduchom, ale aj s relatívne chladným pohárom. To ale nevadí, nikde nie je napísané, že musíme začať merať pri bode varu. Dokonca je lepšie krátku chvíľu počkať, aby sa už teplota až tak rýchlo nemenila.

[5] A ak aj náhodou nie, máte jedinečnú príležitosť pohrabať sa v archíve vzorákov, keďže za mňa už všetku špinavú robotu urobil Jaro (za čo mu na tomto mieste čo najsrdečnejšie ďakujem).

[6] Špeciálne, ak experimentálku robíme večer v deň termínu. Neviem, ako Vy, ale ja som vysmiaty, lebo vzorák píšem načas.

Meranie

Celé meranie sme vykonali dvakrát s dvomi rôznymi pohármi, zaváraninovým a obyčajným. Ako sme si sľúbili, najprv sme odvážili prázdne poháre, otvorené (m_o) aj zatvorené (m_z). Ich hmotnosti budeme odčítavať od celkových nameraných hmotností. Potom váhu zakaždým zatarujeme, neuzavreté poháre naplníme vodou izbovej teploty a znovu odvážime. Takto získame hmotnosť vody m_v a tú premeníme na objem pohára. Ani s hodnotou $\rho = 1000\,\mathrm{kg m^{-3}}$ sa nedopustíme veľkej chyby.

pohár	m_o/kg	m_z/kg	m_v/kg	V/cm^3
IKEA	416,2	418,8	418,2	418,2
zaváraninový	227,1	236,5	476,3	476,3

Tabuľka 1: namerané hmotnosti pohárov a vypočítané objemy

V prvej časti sme odmerali pokles objemu spôsobený čisto tepelnou rozťažnosťou: oba poháre sme naplnili čerstvo zovretou vodou až po hornú hranu, opatrne ich zavreli (resp. zafóliovali) a odvážili. Potom sme ich nechali niekoľko hodín (cez noc) stáť. Do rána mali obidva izbovú teplotu 22 °C.

Obrázok 1: *Experimentálny pohár, uzavretý plastovou fóliou*

Následne sme poháre otvorili a doliali odstátou vodou rovnakej teploty po vrch. Znovu sme poháre odvážili a zaznamenaný rozdiel premenili na objem ΔV. Nakoniec sme vyjadrili objemovú teplotnú rozťažnosť pre ΔT, $\beta = 1 - \frac{\Delta V}{V}$.

pohár	V_0/cm^3	$\Delta V/\mathrm{cm}^3$	$\Delta T/\mathrm{K}$	$\beta/1$
IKEA	418,2	17,5	76	0,039
zaváraninový	476,3	18,4	76	0,041

Tabuľka 2: objem a teplotná rozťažnosť vody

Obe merania nám ukazujú, že približne 4 % objemu vody v čajníku sa stratí v dôsledku ochladnutia.

V druhej časti sme nechali poháre odkryté. Znovu sme ich naplnili horúcou vodou a odmerali sme teplotu a hmotnosť celého pohára a zaznačili si údaje do tabuľky. Túto procedúru sme následne opakovali v určitých časových okamihoch, až kým voda neochladla na izbovú teplotu.

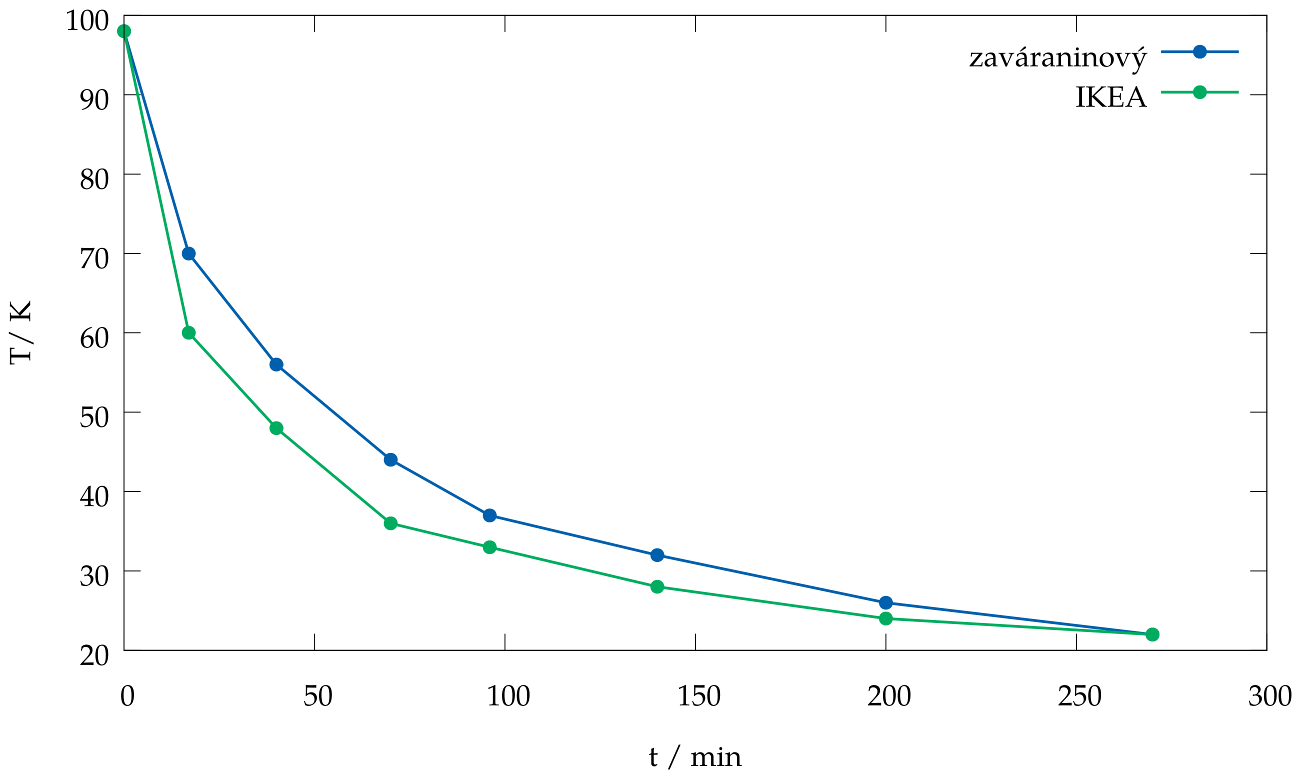
Obrázok 2: *Experimentálna aparatúra: pohár s vodou a digitálna váha. Teplota vody je práve meraná digitálnym teplomerom*

Celú druhú časť merania by sme ideálne mali zopakovať viackrát. Nám sa to kvôli meniacim sa podmienkam, najmä veľkej zmene vlhkosti v miestnosti, nepodarilo. Presnosť teplomera uvažujeme na úrovni 1 °C. Veličiny τ_{zav} a τ_{IKEA} vyjadrujú relatívnu hmotnosť voči prvému meraniu – do grafov vynášame tú, pretože na skutočnej veľkosti pohára nám nezáleží.

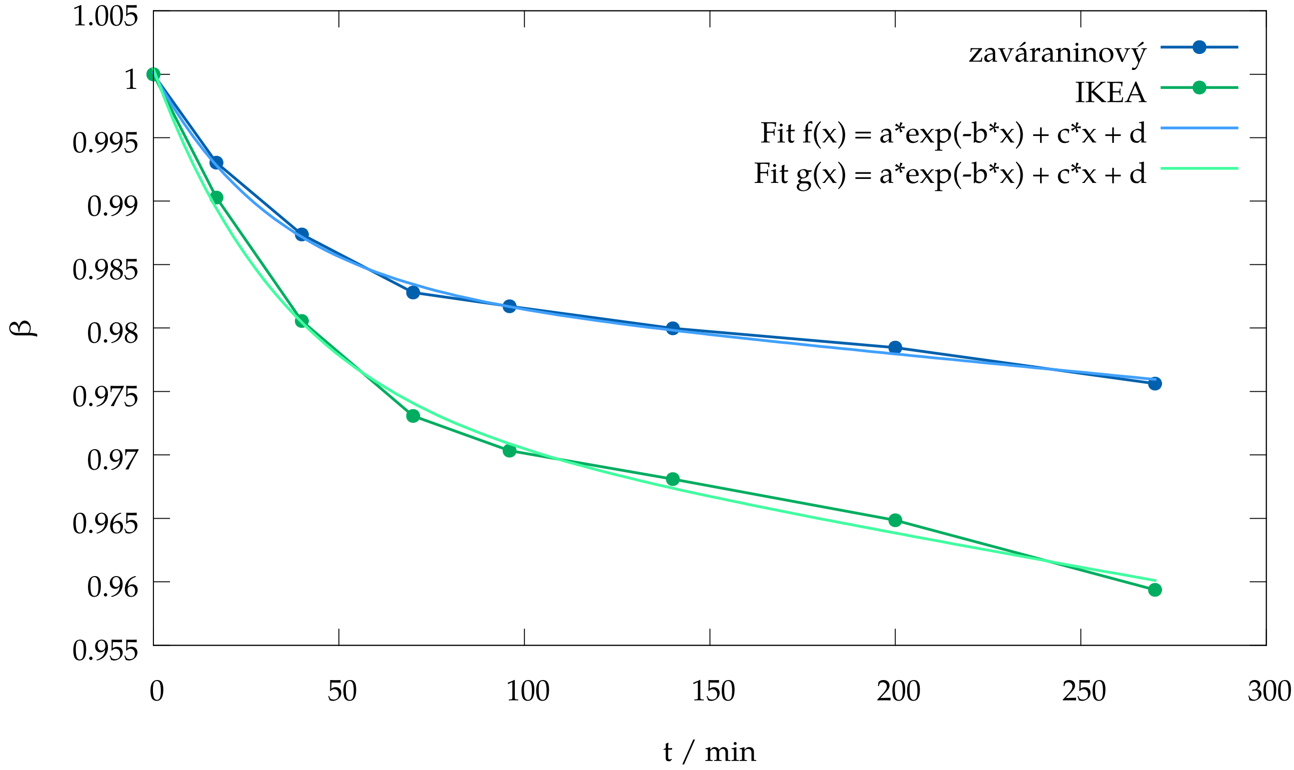
t/min	T_{zav}/°C	m_{zav}/g	τ_{zav}	T_{IKEA}/°C	m_{IKEA}/g	τ_{IKEA}
0	98	459,5	1,000 000	98	401,2	1,000 000
17	70	456,3	0,993 036	60	397,3	0,990 279
40	56	453,7	0,987 378	48	393,4	0,980 558
70	44	451,6	0,982 807	36	390,4	0,973 081
96	37	451,1	0,981 719	33	389,3	0,970 339
140	32	450,3	0,979 978	28	388,4	0,968 096
200	26	449,6	0,978 455	24	387,1	0,964 855
270	22	448,3	0,975 626	22	384,9	0,959 372

Tabuľka 3: priebeh poklesu hmotnosti vody v oboch pohároch

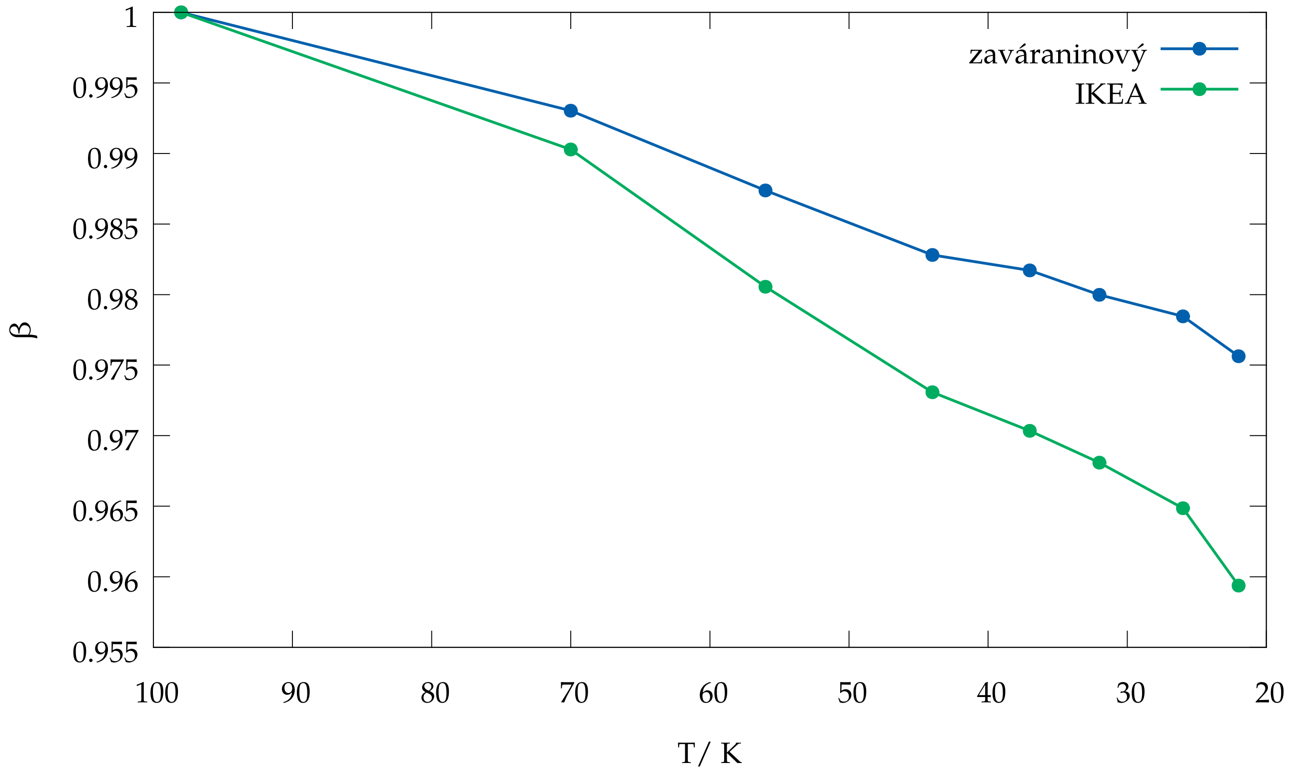
Nakoniec si dáta vizualizujeme v dvoch grafoch. V prvom vynesieme závislosť hmotnosti od uplynutého času, v druhom od aktuálnej teploty. Pre úplnosť ešte v „nultom" grafe ukážeme, ako sa teplota menila s časom.



Obrázok 3: *Závislosť teploty vody T od uplynulého času*



Obrázok 4: *Graf závislosti relatívnej hmotnosti vody τ od uplynulého času*



Obrázok 5: *Závislosť relatívnej hmotnosti vody τ od teploty*

Časová závislosť poklesu hmotnosti je na prvý pohľad exponenciálna, druhá vyzerá byť veľmi približne lineárna. Úplne to tak ale byť nemôže, pretože aj po dosiahnutí izbovej teploty sa voda naďalej odparuje. Navyše omnoho lepší fit prvej závislosti dosiahneme pomocou funkcie v tvare $f(x) = ae^{-bx} + cx + d$, teda exponenciálny plus lineárny pokles (*viz* graf).

Takže môžeme naše výsledky zhrnúť: počas chladnutia na izbovú teplotu sme v dôsledku odparenia stratili približne 2,5 %, resp. 4 % vody. Porovnaním hodnôt $1 - \tau$ a β pre oba poháre vidíme, že oba efekty prispievajú k úbytku zhruba rovnakým dielom. Rozdielna rýchlosť poklesu je podľa nás spôsobená najmä veľkým rozdielom veľkosti voľných hladín. Zaváraninový pohár je navrchu zúžený, naopak obyčajný pohár sa rozširuje, takže plocha, z ktorej sa voda môže odparovať, je väčšia.

Chyby merania

Hoci sme samozrejme všetci úplne úžasní, ani nám sa nevyhnú určité fyzikálne nepríjemnosti. Napríklad sme sa mohli na horúcom pohári popáliť, pustiť ho aj s vodou na stôl a časť vody rozliať.[7] V takom prípade nám ale nezostáva nič iné, než celé meranie opakovať. Avšak ak sme aj nič nerozliali ani inak neznehodnotili, určitým systematickým chybám sme sa vyhnúť nevedeli.

V prvom rade nám napadla tepelnú rozťažnosť samotného pohára, ktorá pri našej presnosti takisto nemusí byť úplne zanedbateľná, najmä preto, že objem rastie až s treťou mocninou dĺžky. Sklo sa však s meniacou sa teplotou rozťahuje omnoho menej, než voda. Ak by sme však mali posuvné meradlo, s opravou tejto chyby by to nemuselo byť až také beznádejné. Tvar pohára ešte takisto môže ovplyvniť veľkosť voľnej hladiny čaju – samozrejme, čím je voľný povrch väčší, tým rýchlejšie bude odparovanie prebiehať.

Veľmi dôležitým parametrom, ktorý sa však veľmi zle kontrolovane mení[8], je vlhkosť vzduchu v miestnosti. Ak by bol vzduch úplne nasýtený vodnou parou, voda v pohári by dosiahla tzv. *dynamickú rovnováhu* – z kvapaliny by sa uvoľňovalo rovnako veľa molekúl, ako by v nej náhodnými mikroskopickými pohybmi vzduchu zase pristávalo. Naopak v suchom vzduchu by sa uvoľnené molekuly rozptyľovali veľmi ochotne, a keby sme ich navyše nejakým spôsobom z miestnosti odstraňovali (napríklad vetraním), voda by z pohára mizla pomerne rýchlo.

Pozor však na to, že to platí iba po tom, ako sa teplota zníži k teplote miestnosti! Totiž, kým je pohár teplý, prehrieva aj okolitý vzduch. Množstvo vodnej pary, ktoré je vzduch schopný poňať, však s teplotou prudko rastie, takže teplý vzduch blízko pohára by bol schopný zjesť viac vody, ako okolitý studený (aj v prípade, že by studený vzduch v miestnosti bol už nasýtený). Tento teplý vzduch sa následne rýchlo schladí a premieša s okolitým studeným vzduchom, takže vodná para sa už naspäť do pohára nevráti.

V poslednom rade môžeme spomenúť veci, ktoré v domácich podmienkach veľmi nemáme ani ako odmerať, ani veľmi zmysluplne ovplyvniť – napríklad množstvo a druh rozpustených minerálov vo vode (teda jej tvrdosť), rýchlosť prúdenia vzduchu v miestnosti a tak podobne. Pri našej presnosti však ich vplyvy budú tak či onak zanedbateľné.

Záver

Vidíme, že naše teoretické oddelenie sa tentokrát mýlilo a oba efekty sú približne rovnaké. Z pohára stratíme približne 3–4 % vody (objemu aj hmotnosti) odparením a rovnako približne 4 % objemu čaj stratí kvôli tomu, že ochladne. Tu ale môžeme byť pokojní, keďže na na skutočné množstvo, teda hmotnosť čaju to nemá vplyv.

[7] Viem, o čom hovorím.
[8] Preto sme ho od vás ani nevyžadovali.

3.5 Nabitá volejbalistka

vzorák **Jarka**, opravoval **Maťo G**

Toto je príklad v ktorom nebolo potrebné nič vypočítať, ale bolo treba sa dobre zamyslieť nad danými vzorcami a nájsť v nich chyby. Preto, ale toto ani zďaleka nie je jediné správne riešenie – možností bolo neúrekom. Tak, už by sme mohli začať.

Rozmerová analýza

Prvá vec, ktorá nám napadne pri kontrolovaní výsledkov, je rozmerová analýza. Intenzita elektrického poľa je sila na náboj, čiže každý zo vzorcov by mal byť v tvare:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2},$$

alebo slovne:

$$E\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\text{coulomb}}{\text{meter}^2}.$$

Rýchlym pohľadom zisťujeme, že toto spĺňajú všetky vťahy okrem prvého, ktorý má namiesto Coulomba v menovateli súčin dvoch nábojov, čiže Coulomb^2. Výsledok 1 teda môžeme vylúčiť.

Podozrivé výrazy: kvalitatívne závislosti na parametroch

Pozrime sa na výsledok 6. Sú tam zlomky so spoločným menovateľom! To znamená, že ich môžme sčítať a čo dostateneme je:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2},$$

čo je výsledok ktorý nezávisí na náboji Q_2. Toto je evidentne zle, takže výsledok 6 môžme tiež škrtnúť.

Ďalší podozrivý výsledok vyzerá byť 7., kôli logaritmu na konci. Logaritmus je funkcia, ktorá vracia nulu, keď je jej argument 1. Čiže pre $r = 2R$ dostávame nulové elektrické pole. Avšak v tejto vzdialenosti je stále celý elektrický náboj na jedej strane, a teda nie je ničím kompenzovaný a elektrická intenzita by mala byť nenulová. Toto je spor, a preto je 7. výsledok nesprávny.

Posledný na prvý pohľad podozrivý vzorec je 9., lebo v menovateli sa nenachádza vzdialenosť od stredu, ale polomer lopty. Avšak ak sme od lopty dostatočne ďaleko, mala by sa nám javiť len ako náboj, čiže elektrické pole by malo so vzdialenosťou klesať. Výsledok 9 je teda taktiež zle.

Hodnoty nedávajúce zmysel

Ďalej sa poďme pozrieť, či nemáme nejaké vzorce, ktoré dávajú nelogické hodnoty. Intenzita elektrického poľa je síce vektorová veličina, no Terku zaujíma len veľkosť elektrického poľa, ktorá by nemala byť záporná.[9]

Pozrime sa teda na to, ktoré výsledky môžu vracať záporné alebo nulové hodnoty intenzity. V prvom rade je to výsledok 2, v ktorom v prípade, že náboje majú opačné znamienka vo vnútri odmocniny získavame záporné číslo. Tí ktorí viete, odmocnina zo záporného čísla je komplexné číslo (to sú čísla, ktoré tvoria nadmnožinu množiny reálnych čísel). A to rozhodnie nie je to, čo očakávame pre intenzitu. Ak komplexné čísla nepoznáte, viete, že odmocnina zo záporného čísla nie je definovaná. V každom prípade výsledok 2 tiež nedáva zmysel pre konkrétne prípady, a preto je nesprávny.

[9] Ak by ste chceli namietať, že toto nebolo jasné zo zadania tak to, čo bolo jasné zo zadania bolo, že Terka hľadala skalárnu veličinu pre E. Prečo táto nemôže mať zápornú hodnotu? Položte si otázku, ako by ste definovali znamienko v prípade, že by elektrická intenzita smerovala kolmo ku spojnici so stredom gule.

Podobná situácia ako v predchádzajúcom odseku sa naskytá v 4. výsledku – ak oba náboje budú záporné, výsledná intenzita je záporná. Preto aj 4. je nesprávny.

A v neposlednom rade, výsledok 10 obsahujúci kladný výraz vynásobený sínusom nemôže byť správny, lebo sínus naberá kladné aj záporné hodnoty.

Dosadzovanie konkrétnych hodnôt

Zostávajú nám výsledky 3, 5 a 8. Skúsme do každého z nich dosadiť prípad $Q = Q_1 = Q_2$. Pre výsledky dostávame intenzity

$$E_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2},$$

$$E_5 = 0,$$

$$E_8 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

Okamžite vidíme, že výsledok E_5 nie je správny. Môžeme však niečo povedať aj o zvyšných dvoch výsledokoch? Predstavme si, že polomer lopty budeme zmenšovať, až bude blízky 0 – toto si môžme dovoliť, lebo výsledok nezávisí od R. Vtedy efektívne dostávame bodový náboj, ktorého elektrické pole poznáme! Jedinú vec, na ktorú nesmieme zabudnúť je fakt, že náboje na oboch polsférach sa sčítajú, a teda budeme mať bodový náboj s veľkosťou $2Q$. Ten má elektrické pole

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{r^2},$$

čo nám ale nesedí ani s jedným s našich výsledkov a teda aj 3. a 8. výsledok sú nesprávne.

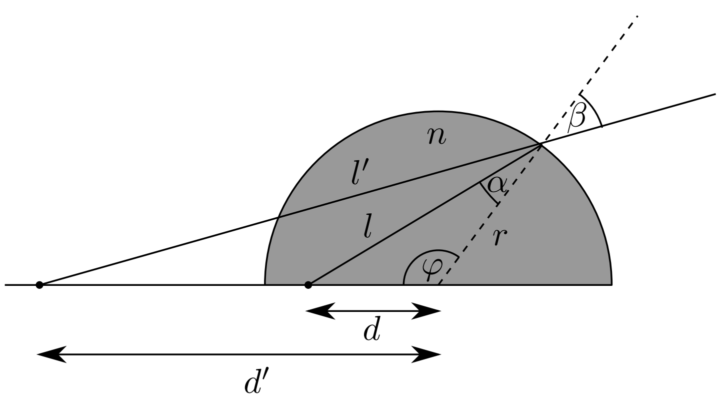
Iná možnosť bola dosadiť prípad $Q_1 = -Q_2 = 0$. Pre tento prípad, by sme mali dostať pole elektrického dipólu, ktoré klesá ako $1/r^3$.

Žiaden z výsledkov teda bohužial nie je správny. My však Terke aj tak stále veríme.

3.6 Dokonalý darček

vzorák **Adam**, opravoval **Adam**

Táto úloha obsahuje pomerne veľké množstvo ciest k výsledku. Opisovať ich všetky by zabralo veľa mentálnej kapacity mňa i čitateľa, ktorý by sa pokúsil ich prelúskať. A tak vzorák obsahuje dve, podľa mňa fyzikálne i matematicky najvýživnejšie a najjednoznačnejšie riešenia.



Obrázok 6: *Náčrt situácie s vyznačenými veličinami*

Zo symetrie systému vieme vyčítať niekoľko obmedzení, ktoré nám ďalší postup nielen uľahčia, ale aj umožnia. Ak vznikne virtuálny zdroj, musí ležať na jednej priamke so skutočným zdrojom a stredom gule (ak je celé zadanie súmerné okolo tejto osi, niet dôvodu na nesúmernosť riešenia). Podobne sa dá argumentovať za dostatočnosť dvojrozmerného riešenia (len osová súmernosť sa zamení za rotačnú).

Predtým než sa pustíme do samotného riešenia, tak si len veľmi krátko ozrejmime, čo je to ten virtuálny zdroj. Naše oči sú zvyknuté na to, že svetlo ide priamo, a preto, ak na guli nastane lom svetelného lúča zo zdroja, náš mozog to nebude interpretovať tak, že svetlo prichádza z vnútra gule, ale ako keby z nejakého miesta za guľou (viď obrázok).

Zo Snellovho zákona a s pomocou pár znalostí geometrie (sínusová a kosínusová veta) sme schopní vyprodukovať nasledujúce rovnice:

$$\sin\beta = n\sin\alpha$$
$$\frac{d}{\sin\alpha} = \frac{l}{\sin\varphi}$$
$$\frac{d'}{\sin\beta} = \frac{l'}{\sin\varphi}$$
$$l^2 = d^2 + r^2 - 2dr\cos\varphi$$
$$l'^2 = d'^2 + r^2 - 2d'r\cos\varphi$$

Použitím prvej sa ďalšie dve rovnice dajú upraviť a spojiť do jednej, čím odstránime z výpočtu nie až tak zaujímavé uhly α a β.

$$\frac{d}{\sin\alpha} = \frac{l}{\sin\varphi}$$
$$\frac{d'}{n\sin\alpha} = \frac{l'}{\sin\varphi}$$
$$\frac{d}{l} = \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}$$
$$\frac{d'}{nl'} = \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}$$
$$\frac{d'}{nl'} = \frac{d}{l}$$
$$d'l = ndl'$$

Týmto výsledkom sme zahnaní do kúta a nezostáva nám žiadna iná cesta z neho než umocniť túto rovnicu na druhú a dosadiť za l a l'.

$$d'^2l^2 = n^2d^2l'^2$$
$$d'^2(d^2 + r^2 - 2dr\cos\varphi) = n^2d^2(d'^2 + r^2 - 2d'r\cos\varphi)$$

Tu je ten pravý čas zamysieť sa, čo od tejto rovnice chceme. Mohli by sme sa pokúsiť vyjariť $d'(d)$, ale prítomnosť voľného parametru φ nám chuť do takéhoto zbrklého počinu rozhodne nedodáva. A tak sa z na pár riadkov nevypovedaného nutkania rozhodneme pozerať sa na rovnicu ako na rovnicu pre φ.

$$d'^2d^2 + d'^2r^2 - 2d'^2dr\cos\varphi = n^2d^2d'^2 + n^2d^2r^2 - 2n^2d^2d'r\cos\varphi$$

$$2d'dr(n^2d - d')\cos\varphi = n^2d^2d'^2 + n^2d^2r^2 - d'^2d^2 - d'^2r^2$$

Skonkrétnime si teraz náš cieľ. Chceme nájsť také d, že pre všetky (v skutočnosti to značí „pre všetky uhly, pre ktoré nami napísané rovnice platia“, tam robí neplechu hlavne Snellov zákon) uhly φ (čo je v kontexte nášho výpočtu ekvivalentné „všetky $\cos\varphi$“) bude existovať univerzálne d' v ktorom sa bude nachádzať zdanlivý zdroj svetla. Teda chceme aby naša posledná rovnica platila pre všetky $(\cos\varphi) \in \langle -1, 1\rangle$. Keďže rovnica je lineárna, pre interval platí práve vtedy keď platí pre všetky reálne čísla. Snáď je očividné, že jediná takáto rovnica je:

$$0 \cdot \cos\varphi = 0$$

Dostávame teda dve podmienky:

$$2d'dr(n^2d - d') = 0$$

$$n^2d^2d'^2 + n^2d^2r^2 - d'^2d^2 - d'^2r^2 = 0$$

Ak sa v tomto momente neuspokojíme s triviálnym riešením $d' = d = 0$, prvá podmienka nadobudne podobu:

$$n^2d - d' = 0$$

$$d' = n^2d$$

Použitím tohoto výsledku v druhej rovnici získavame:

$$n^6d^4 + n^2d^2r^2 - n^4d^4 - n^4d^2r^2 = 0$$

$$n^4d^2 + r^2 - n^2d^2 - n^2r^2 = 0$$

$$n^2(n^2 - 1)d^2 = (n^2 - 1)r^2$$

$$d = \frac{r}{n}$$

A teda:

$$d' = nr$$

3.7 Mare Nubium

vzorák **Maťo G**, opravoval **Maťo G**

Čaute, na začiatok sa uvoľnite a vychutnajte si rozprávku od Jerguša o začiatkoch vzorákov: „Kde bolo, tam bolo, bola raz jedna krajina, kde bolo jednoduché napísať úvod do vzoráku. Nanešťastie sa však zistilo, že táto krajina to nie je, a preto sem píšem takúto blbosť, tak poďme riešiť!“

Prvý pokus

Predpokladajme, že Zem, ideálna guľa, je celá pokrytá dostatočne hlbokým oceánom. Budeme sa pozerať na malý kúsok vody, ktorý sa nachádza na povrchu oceánu. Na neho pôsobia dve sily: tiažová od Zeme a gravitačná od Mesiaca.[10] Keďže hladáme v podstate statické riešenia[11], je potrebné, aby táto sila bola kolmá na povrch (a taktiež, aby smerovala do Zeme, lebo ak by smerovala smerom do vesmíru voda by začala levitovať).

[10] Používame to dva rôzne pojmy na popísanie veľmi podobných síl - tiaž a gravitáciu. Rozdiel je len v tom, že tiaž je gravitačná sila odpočítaná o odstredivú silu ktorú získavame kôli tomu, že Zem rotuje.

[11] Pod statickým myslíme, že aj keď sa Mesiac pohybuje okolo Zeme, a teda prílivové vlny sa posúvajú, tak v každom momente berieme, že voda je v rovnovážnej polohe.

V tomto momente, keď si nakreslíte obrázok už možno niektorý môžte začat tušiť, ako bude vyzerať tvar hladiny. Tento challenge však nechávame nateraz tak (ale naozaj to nie je nič netriviálne) a pozrieme sa na to, ako to vieme naozaj spočítať. Celé to však nevyzerá veľmi prívetivo a smrdí to trochu difkami, tak skúsme zvoliť jemne prefíkanejší spôsob: predstavme si, že by sme zobrali ten kúsok vody a postrčili by sme ho nejakým smerom, tak aby sa kĺzal po povrchu (je to veľmi malý kúsok). Sila, ktorá naň pôsobí je vždy kolmá na jeho pohyb (to sme už povedali v predchodzom paragrafe), takže tá sila na ňom nekoná žiadnu prácu a kúsok vody sa pohybuje konštatnou rýchlosťou. To ale zo zákona zachovania energie [12] znamená, že potenciálna energia toho kúsku je konštantná všade po povrchu! Keďže platí

$$\text{konšt.} = \text{potenciálna energia} = \text{hmotnosť kúsku vody} \cdot \text{potenciál}$$

a hmotnosť kúsku vody je rozhodne konštantná, musí teda platiť, že potenciál je konštantný. Zhrňme si to: povrch hladiny tvorí spojitú plochu v priestore, ktorá má rovnaký potenciál (t.j. je to ekvipotenciálna hladina)! Nemusíme teda riešiť diferenciálne rovnice, ale stačí nám násť potenciál v blízkom okolí Zeme a zistiť ako sa mení od poludníka, kde sa nachádzame.

Poďme ho teda napísať! Označme M_Z, M_M ako hmotnosti Zeme a Mesiaca, r ako vzdialenosť stredu Zeme od stredu Mesiaca, R ako polomer Zeme, h ako výšku hladiny vody, ktorá je na φ-tom poludníku. Inak povedané, hladina vody je vzdialená $R + h(\varphi)$ od stredu Zeme.

Keby sme však napísali výsledné vzťahy plný formy pre výšku hladiny, získame tým ohavnú rovnicu, ktorú ani nejde vyriešiť. Preto sa treba na vec pozrieť fyzikálne a spraviť primerané zanedbania, ktoré nám zjednodušia rovnicu na jej riešiteľný tvar. V prvom rade nám stačí uvažovať príliv na rovníku - inde sa síce bude trochu líšiť, no to ako presne, nechávam na vás (skúste sa na to pozrieť zboku). V druhom rade, vidíme, že $h \ll R$, a teda gravitáčnú silu môžeme považovať za konštantnú. Potom jej potenciál bude len gh.

A v posledom rade, keďže vzdialenosť Mesiaca je oveľa väčšia ako polomer Zeme, tak môžeme zanedbať „vertikálnu“ vzdialenosť bodu na rovníku od Mesiaca spolu s výškou hladiny (lebo je oveľa menšia). Celkovú vzdialenosť potom spočítame len ako

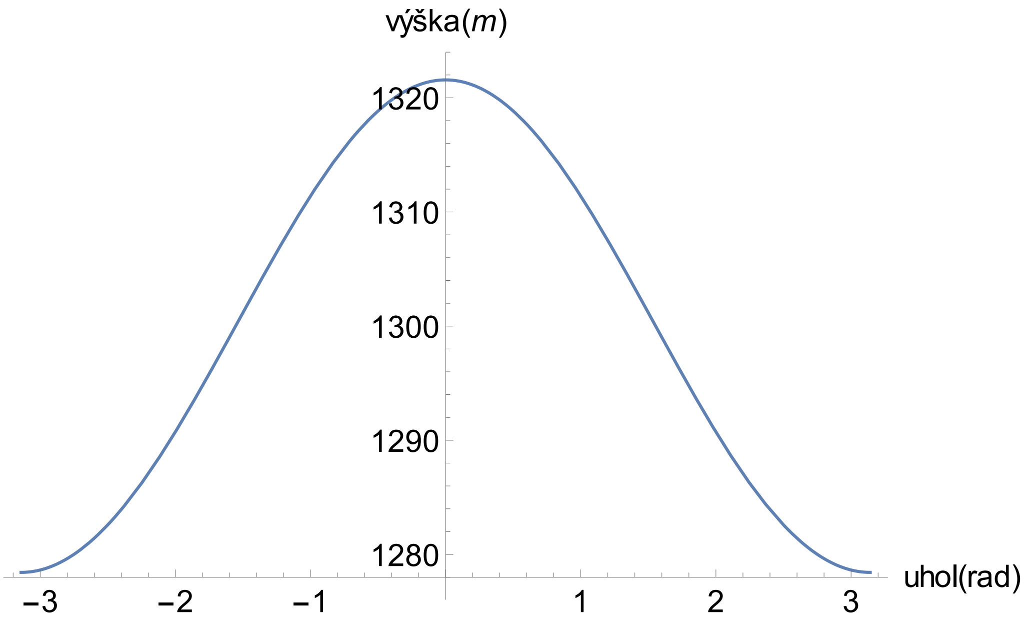
$$\text{vzdialenosť} = r - R\cos\varphi.$$

Celé to napíšeme do rovnice a získavame

$$gh - \frac{GM_M}{r - R\cos\varphi} = \text{konštanta}.$$

Vidíme že celé je to lineárne od h, čiže keď ako konštantu zvolíme hocičo, vždy nám to celý výsledok len posunie o konštantnú hodnotu. Tá nás ale nezaujíma, lebo nás zaujíma len zmena tvaru hladiny oceánu o Δh, a teda ako konštantu si môžme zvoliť hocičo. My si tam rafinovane zvolíme výraz $-\frac{GM_M}{g(r+R)}$, čím bude najnižšia hodnota výšky 0. Je jednoduché si nakresliť graf závislosti Δh od uhlu φ, hľa tu je výsledok.

[12] alebo integrálu sily po dráhe



Obrázok 7: *Graf výšky hladiny ako funkcia pozície na zemeguli.*

Čo však vidíme nás veľmi nenadchýňa; vyzerá to tak, že príliv je naozaj len jeden za 24 hodín :(. Žeby sa predsa len všetci mýlili?

Nie, zabudli sme totiž na podstatnú vec: celé to robíme v rotujúcej sústave, ktorá rotuje okolo ťažiska Zeme a Mesiaca. Preto na všetko ešte pôsobí odstredivá sila, ktorá avšak *má potenciál niečo zmeniť.*

Druhý pokus

Aký je ten potenciál kvantitatívne? Začneme tým, že si odstredivú silu v rotujúcej sústave vyjadríme ako

$$F_o = m\Omega^2 l,$$

kde l je vzdialenosť od stredu otáčania. Tu si stačí všimnúť analógiu s harmonickým oscilátorom ($F = -kx$), pozor znamnieko je dôležité! Prípadne si spomenúť, že zmena energie je rovná práci, čo je plocha pod grafom trouholníka. Pre potenciálnu energiu získavame tvar

$$V = -\frac{1}{2}\Omega^2 l^2$$

Super, Ω získame ako $\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1\,\mathrm{d}}$ už nám stačí získať l. Najprv však potrebujeme vedieť, okolo čoho sa to vlastne otáčame - číže potrebujeme vedieť vzdialenosť ťažiska od stredu Zeme. Tú spočítame z rovnováhy momentov ako:

$$d = \frac{M_M}{M_M + M_Z} r.$$

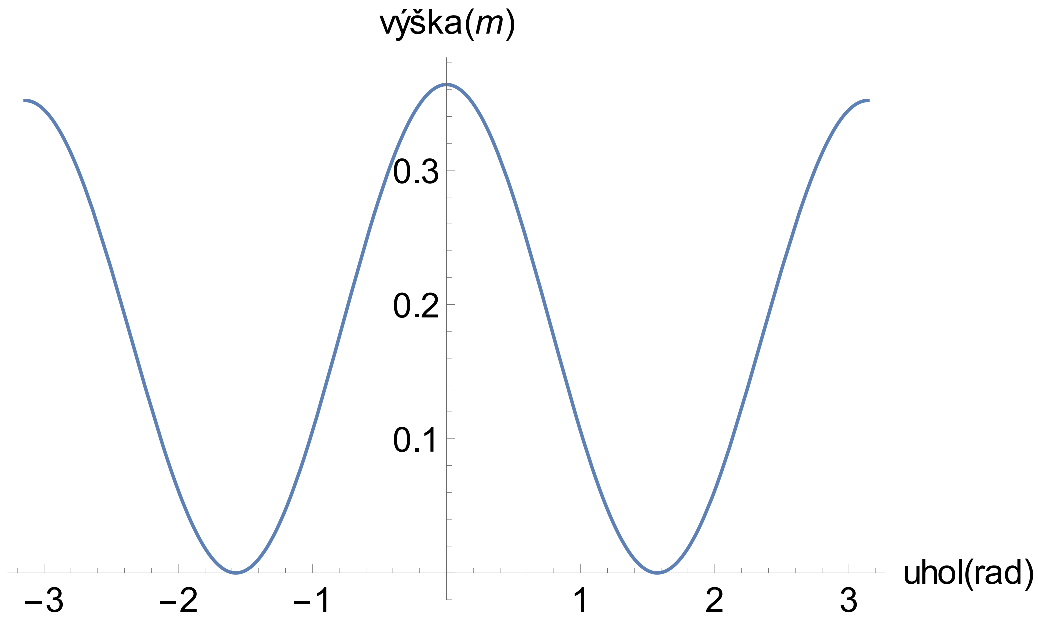
a už nám stačí kosínusovou vetou spočítať vzdialenosť bodu vzdialeného od stredu Zeme o $R + h$, ktorý je pod uhlom φ k spojnici Zem-Mesiac od ťažiska ležiaceho na spojnici vo vzdialenosti d.

Avšak takto zostavená rovnica by nebola ľahko riešiteľná, takže musíme porozmýšľať, ako to vyriešiť. Pozrime sa na hodnotu d. V prípade, že os otáčania je dostatočne ďaleko od povrchu na rovníku, $l \ll h$, a teda h môžeme zanedbať. Poctivý výpočet ukazuje, že $d/R \approx 0.73$, čiže pre rovník je toto zanedbanie opodstatnené.

Celková rovnica pre potenciál teda vyzerá:

$$gh - \frac{GM_M}{r - R\cos\varphi} - \frac{1}{2}\Omega^2\left(R^2 + d^2 - 2dR\cos\varphi\right) = \text{konštanta.}$$

Znova zvolíme konštantu tak rafinovane, aby nám to vyšlo pekne na nulu a získavame graf:



Obrázok 8: *Graf výšky hladiny ako funkcia pozície na zemeguli.*

Omnoho lepšie! Ako vidieť, prílivy sú naozaj dva a dokonca ich amplitúdy nám vyšli rovnaké. Z hodnôt takisto vidíme, že rozdiel prílivu od odlivu je asi pol metra, čo na silné zanedbania a veľmi zjednodušený model dáva celkom dobrý výsledok. Iný spôsob ako sa dopracovať k riešeniu bolo presunúť sa do sústavy, spojenej s padajúcou Zemou na Mesiac, a v tejto sústave urobiť Taylorov rozvoj zotrvačnej a Newtonovej gravitačnej sily.