Riešenia 2. kola zimnej časti

2.1 Mrkvičkový kompas

vzorák **Zuzka**, opravovala **Zuzka**

Kvík si pri varení na intráku všimol zaujímavú vec. Keď ide s hrncom plným polievky po chodbe a zatáča, mrkvičky v polievke vôbec nemenia svoj smer a stále ukazujú na sever. Keď však hrncom hýbe do strán, ochotne sa hýbu s ním, zdanlivo bez akejkoľvek zotrvačnosti. Ako je to možné?

Kľúčom k vyriešeniu tejto záhady je pozrieť sa na obsah hrnca, teda v našom prípade vodu, makroskopickým pohľadom. Častice kvapalín sú medzi sebou pútané slabšími silami ako častice tuhých telies. Prejavom toho je, že nemajú usporiadané polohy a môžu sa relatívne voľne pohybovať v celom objeme kvapalného telesa, ktoré tým pádom nemá stály tvar, ale prispôsobuje sa tvaru nádoby. Interakcie častíc kvapalín predstavujú vzájomné zrážky a trenie, s čím zase súvisí to, ako veľmi sú kvapaliny schopné tiecť. Čím väčšie trenie, tým kvapaliny pomalšie tečú (hovoríme, že sú viskóznejšie).

Zjavne sa musíme pozrieť na to, ako sa prejavuje interakcia hrnca s kvapalinou a následne kvapaliny s mrkvičkami pri otáčavom, resp. priamočiarom pohybe hrnca.

Majme hrniec na jednom mieste a pootočme ním. Častice kvapaliny, ako sme už spomínali, nie sú pevne viazané medzi sebou a zjavne ani o stenu hrnca. Teda jediná vec, čo sa udeje, je to, že vrstva častíc pri stene hrnca sa pootočí v smere pohybu – účinkom vzájomného trenia steny hrnca a okrajových častíc kvapaliny. Steny hrnca so sebou nejakú časť kvapaliny „strhnú". Tento pohyb je však z druhej strany brzdený vnútornejšími vrstvami kvapaliny, ktoré sa tiež trú o tie vonkajšie. Voda, na rozdiel od napríklad medu, má malú viskozitu, takže táto interakcia bude smerom do stredu hrnca relatívne rýchlo slabnúť. Na častice kvapaliny v strede hrnca potom už prakticky nemá čo pôsobiť a ani tie nemajú ako pôsobiť na mrkvičky. Mrkvičky sa nehýbu.

Teraz majme hrniec na jednom mieste a posuňme ho priamočiaro jedným smerom. Čo sa udeje s kvapalinou? Môžeme si najprv uviesť taký zmenšený príklad, že keď šťuchneme do kvapky vody, tá sa nám rozpľasne, ale ak šťuchneme do kovovej guľôčky, celá sa posunie. V kvapke sa teda pohla tá skupina častíc, na ktorú sme pôsobili, plus tie, na ktoré mali tieto častice v rámci kvapalného telesa priamy dosah, či už im stáli v ceste a stali sa tak obeťou vzájomných zrážok, alebo stáli príliš blízko a boli strhnuté vnútorným trením v kvapaline. Kovová guľôčka sa pohla celá kvôli charakteru väzieb medzi jej časticami, ktoré sú pevné a častice sú pravidelne usporiadané v mriežkach, takže sa silová interakcia prenáša do celého telesa.

Keď posunieme hrniec, na rozdiel od našej vyššie spomínanej kvapky, zapôsobíme na celú vrstvu častíc, ktorá sa nachádza pri prednej časti hrnca. Táto vrstva potom naráža do ďalšej, tá zas do ďalšej a tak ďalej. Pri tomto pohybe si môžeme všimnúť aj zotrvačnosť, najprv sa nám kvapalina nahromadí v prednej časti hrnca a keď pohyb zastavíme, vlna sa presunie dozadu. Takýmto spôsobom teda rozhýbeme celú kvapalinu a teda aj mrkvičky, na ktoré v tomto prípade má čo pôsobiť.

Celé toto vysvetlenie ale platí len vďaka tomu, že mrkvičky majú veľmi podobnú hustotu ako voda. Keby sme miesto mrkvičiek mali v polievke napríklad kovové guľôčky, pri prudšom pohybe by ich zotrvačnosť nútila stáť na mieste, takže by sa nahrnuli k zadnej strane hrnca. Opačným prípadom je to, kebyže máme v zrýchľujúcom aute (vagóne, čomkoľvek, čo sa vám páči) héliový balónik. Hélium má nižšiu hustotu ako okolitý vzduch, takže keď auto zrýchľuje, skôr sa dozadu natlačí „ťažší" vzduch a balónik bude naopak cestovať dopredu. Naše mrkvičky majú teda o dôvod viac zostávať na mieste.

2.2 Hľadá sa nadir

vzorák **Vladko**, opravoval **Vladko**

Jerguš sa pozerá z helikoptéry, ktorá je v pokoji vzhľadom na Zem a premýšľa, ktorý bod Zeme je „priamo pod ním". Prišiel na tri definície:

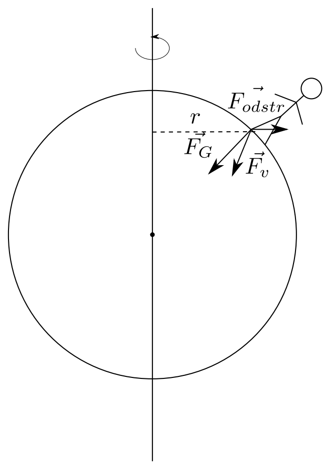
1. *Keby spustil olovnicu, bude to bod na Zemi, ktorého by sa dotkla.*
2. *Keby pustil loptičku z helikoptéry, bod, na ktorý by dopadla.*
3. *Spojnica helikoptéry a stredu Zeme.*

V čom sú rozdielne? Na akých miestach by boli navzájom ekvivalentné?

Určite ste rýchlo prišli na to, čo je príčinou neekvivalencie definícií. Rotácia Zeme okolo svojej osi spôsobuje, že keď skúmame sily a pohyby v sústavách pevne spojených so Zemou, Newtonove zákony neplatia tak, ako sme zvyknutí. Na objekty okrem bežných reálnych síl pôsobia aj zotrvačné, tzv. fiktívne sily. Fiktívne sily sú: postupná zotrvačná, odstredivá (Huygensova), Coriolisova a Eulerova sila. V čisto rotujúcej sústave nepôsobí postupná zotrvačná sila a v sústave, ktorá rotuje konštatným uhlovým zrýchlením, nepôsobí ani Eulerova sila, teda sa budeme venovať len zvyšným dvom.

Začneme odstredivou silou, ktorá zvykne byť známejšia. Objekty na Zemi neustále obiehajú po kružnici, ktorej stred prechádza osou rotácie. Dá sa povedať, že sme neustále „v zákrute" a zotrvačná sila nás z nej „vyhadzuje", ako keď ideme autom. Veľkosť tejto sily je $\frac{m \cdot v^2}{r}$, kde r je polomer kružnice a v je obvodová rýchlosť, ktorou sa pohybujeme po kružnici. Smer sily je von z kružnice, teda keď ju zložíme s gravitačnou silou, ktorá pôsobí smerom do stredu Zeme, vznikne výslednica, tiažová sila, ktorá smeruje trochu iným smerom, než samotná gravitačná sila.

Smer tiažovej sily je totožný so smerom, ktorým ukazuje olovnica. Miesta, kde bude tiažová sila pôsobiť v rovnakom smere ako je smer z vrtuľníka do stredu Zeme, sú všetky body na rovníku a zemské póly. Na rovníku je odstredivá sila opačného smeru ako gravitačná, teda iba zoslabí jej veľkosť, no smer nezmení. S využitím vzťahu medzi obvodovou a uhlovou rýchlosťou $v = \omega r$ vieme prepísať vzťah pre odstredivú rýchlosť ako $m \cdot \omega^2 \cdot r$. Na póloch je vzdialenosť r od osi otáčania nulová, a preto tam odstredivá sila nepôsobí.



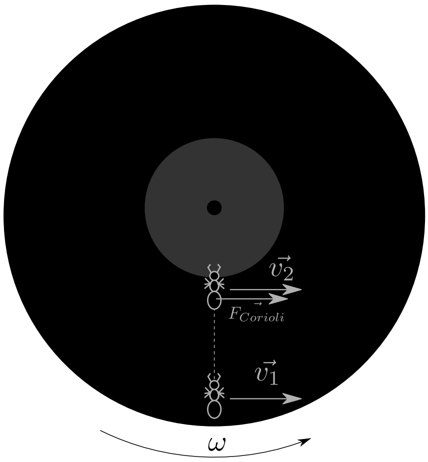
Obrázok 1: *Skladanie odstredivej a gravitačnej sily*

Coriolisova sila vzniká, keď sa objekt pohybuje vzhľadom na rotujúcu vzťažnú sústavu v smere kolmom na os rotácie. Teda aj keď sa napríklad približuje/vzďaluje k/od osi rotácie, ako odpoveď na meniacu sa obehovú rýchlosť.[1]

[1] Presnejšie, „vzniká" kvôli tomu, aby stále platil zákon zachovania momentu hybnosti.

Ilustrujme si ju na mravčekovi Maťkovi idúcom po gramofónovej platni. Keď je Maťko ďalej od stredu platne, jeho obehová rýchlosť je väčšia, lebo pri jednej otáčke platni prejde väčšiu vzdialenosť. Keď sa však blíži ku stredu, jeho obehová rýchlosť sa znižuje, a teda naňho pôsobí zotrvačná sila v smere rovnakom ako Maťko obieha okolo stredu.

Ďalším príkladom je napríklad Sibírska rieka Lena, ktorá tečie v Rusku na sever. Vo väčšej zemepisnej šírke je bližšie k osi rotácie, a teda na ňu pôsobí sila smerom na východ, kde viac vymýva breh. No, vráťme sa z Ruska k našemu protagonistovi – Jergušovi. Keď pustí loptičku, tá sa približuje k osi rotácie, teda na ňu pôsobí Coriolisova sila a posúva ju na východ.[2] Jediné miesta, kde pri páde sa nezmenšuje vzdialenosť od osi rotácie, sú severný a južný pól. Takže póly sú miesta, kde sú všetky tri definície nadiru sú ekvivalentné.

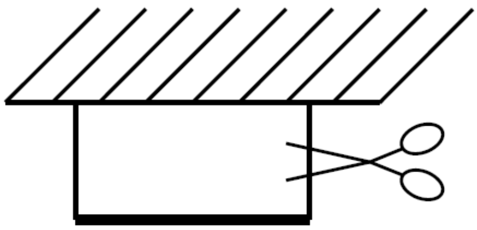


Obrázok 2: *Pôsobenie Coriolisovej sily na mravčeka Maťka na rotujúcej platni*

2.3 Napínavý príbeh

vzorák **Enka**, opravoval **Jimi**

Enka si na dve nitky zavesila paličku[3]. Potom jednu z nitiek prestrihla. Akou silou je v okamihu tesne po prestrihnutí napínaná druhá nitka? Hmotnosť paličky je m a to vám hádam aj stačí…

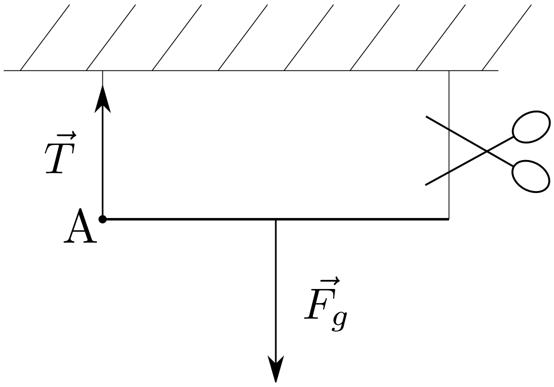


Pred tým, ako sa pustíte do počítania a písania rovníc, skúste si tipnúť, akou silou by podľa vás nitka mala byť napínaná. OK, tipy sa uzatvárajú, poďme sa pustiť do riešenia.

Najprv si ujasnime, aké sily tesne po odstrihnutí jednej z nitiek na paličku pôsobia. V prvom rade je to tiažová sila. Ak by to bola len ona, tak palička by voľne padala smerom nadol. Avšak nenatiahnuteľnosť neodstrihnutej nitky jej to nedovolí. Palička teda ťahá nitku smerom nadol (v dôledku jej tiaže), čo spôsobuje napínanie nitky silou, ktorú si označíme T. Reakciou je ťahanie paličky nitkou smerom nahor taktiež silou T.

[2] V skutočnosti ju posunie aj kúsok smerom na juh, ak nie sme na póle alebo rovníku.
[3] Pozor, nie Andreja! Viď posledný príklad z 2. kola letnej časti z 28. ročníka FKS. Je naozaj poučný :-)

Na paličku budú teda pôsobiť dve sily, ktorých pôsobiská sú zakreslené na obrázku.



Obrázok 3: *Dve sily, ktoré pôsobia na paličku.*

Enka nepoužíva hocijaké šmejdy, takže jej palička je dokonalé tuhé teleso, ktoré môže vykonávať len translačný (posuvný) a otáčavý pohyb.

Pohybová rovnica pre translačný pohyb ťažiska paličky je

$$F_g - T = ma,$$

pričom a je zrýchlenie ťažiska paličky.

Pohybová rovnica pre otáčavý pohyb paličky okolo bodu úchytu (označme ho A)[4] je

$$F_g \cdot \frac{l}{2} = I\,\varepsilon,$$

kde l je jej dĺžka, I je jej moment zotrvačnosti vzhľadom na bod A[5] a ε je jej uhlové zrýchlenie, ktoré ľahko určíme zo zrýchlenia ťažiska vzhľadom na bod A:

$$\varepsilon = \frac{a}{l/2}.$$

Po dosadení I a ε do druhej pohybovej rovnice dostaneme dve rovnice o dvoch neznámych:

$$F_g - T = ma,$$

$$F_g \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{3}ml^2 \cdot \frac{a}{l/2},$$

z ktorých jednoduchými úpravami získame výsledok

$$T = \frac{F_g}{4} = \frac{mg}{4}.$$

To by ste si netipli, však?

[4]Tento bod tesne po prestrihnutí stojí na mieste. Neveríte? Ak by sa bod A hýbal smerom nahor, tak by na paličku nitka nepôsobila žiadnou silou. To sme si však už na začiatku vyjasnili, že to tak nie je. Nemožný pohyb v ostatných smeroch sa pokúste odargumentovať aj sami :)

[5]Ujo Google vám vyhodí vzorček $I = \frac{1}{3}ml^2$, tí šikovnejší si to môžu aj vypočítať škálovaním.

2.4 Naladený čajník

vzorák **Jimi, Fero a Samo T.**, opravovala **Bu**

Filip si prednedávnom uvedomil, že miešanie teplého a studeného kakaa vydáva rôzne zvuky pri dopade lyžičky na dno pohára. Čím teplejšie, tým hlbší tón. Funguje to aj s teplou vodou. Podobne si Kvík všimol, že keď leje vodu z kanvice do čajníka, studená voda znie úplne inak ako vriaca.

Nájdite závislosť frekvencie, ktorú vydá dopadajúca lyžička, od teploty. Prečo si myslíte, že nastáva tento jav? A ako to súvisí s javom, ktorý objavil Kvík?

Našou úlohou je zmerať závislosť frekvencie zvuku v pohári s vodou od teploty. V prvom rade si musíme vyjasniť, čo rozumieme pod pojmom *frekvencia pohára s vodou*. Zvuk šíriaci sa prostredím je v podstate tlaková vlna. Frekvencia zvuku nám popisuje, ako sa tento tlak mení v závislosti od času. Avšak bežné zvuky v prírode sa neskladajú iba z jednej vlny s konkrétnou frekvenciou, ale z nekonečného množstva vĺn s rôznymi frekvenciami a intenzitami (amplitúdami), čiže nemá jedinú presne definovanú frekvenciu. Keď natiahneme strunu a pustíme ju, táto struna začne vibrovať, pričom interakciou so vzduchom rozvibruje aj ten, a vzduchom sa začne šíriť zvuková vlna so spektrom[6] zodpovedajúcim spektru struny.

Vysvetliť, prečo bude spektrum struny práve také, aké bude, nie je úplne jednoduché. V úplne primitívnom modeli si povedzme, že keď struna kmitá, správa sa ako sínus, ktorý je na koncoch nulový, keďže na tomto mieste je struna pripevnená. Tomuto zodpovedajú funkcie z rodiny $\sin \frac{\pi x}{\lambda} \sin \frac{vt}{\lambda}$, kde x je poloha na strune a v rýchlosť zvuku v nej. Keďže sínus musí byť nulový na koncoch struny, pre λ musí platiť $\lambda = \frac{2L}{n}$, kde L je dĺžka struny a n ľubovoľné prirodzené číslo. Odtiaľ vieme frekvenciu vyjadriť ako $f = \frac{nv}{2L}$. Nad celým týmto postupom si nemusíte veľmi lámať hlavu, pretože bol veľmi nepresný, ale poslúžil nám na ilustráciu pre nás dôležitého faktu, že zvuk struny sa skladá iba z násobkov určitých frekvencií. Zastúpenie týchto frekvencií vieme ovplyvňovať napríklad tým, ako silno vybudíme strunu.

Ak našu úvahu zovšeobecníme pre hrnček s vodou, jeho zvukové spektrum bude zložené taktiež iba z určitých frekvencií, ale toto spektrum bude úplne divoké, vzhľadom za zložitý tvar hrnčeka. Vďaka vlastnostiam materiálu a vody budú určité frekvencie šíriace sa naším systémom takmer ihneď po vybudení utlmené,[7] zatiaľ čo iné frekvencie sa zachovajú. Tieto zvyšné frekvencie, ktoré sa neutlmia, nazývame prirodzenými frekvenciami systému, a budú výrazne intenzívnejšie ako iné. Práve tieto frekvencie budú charakteristické pre náš systém a ich závislosť od teploty sa budeme snažiť namerať. Keď sme si objasnili aspoň základný koncept nášho systému, môžeme sa pustiť do merania.

Spektrum sa bude divoko meniť v závislosti na viacerých parametroch. Preto sa budeme snažiť všetky fixovať, samozrejme okrem teploty. Aby sa nám meralo čo najlepšie, je výhodné si zvoliť čo najjednoduchší hrnček. Budiť ho budeme úderom lyžičkou na to isté miesto.[8] My sme si zvolili hrnček takmer valcovitého tvaru. V rýchlovarnej kanvici sme zohriali vodu a naliali do hrnčeka. Od tohoto okamihu sme vodu nepridávali ani neodoberali, iba ju nechali chladnúť, aby sme spolu s objemom vody zbytočne nemenili parameter navyše.

Teplomerom sme zmerali teplotu vody. Použili sme klasický ortuťový teplomer so stupnicou od 0 °C do 100 °C. Pre jednu teplotu sme udreli na hrnček viackrát, a pomocou softvéru Audacity sme zaznamenali zvuk, ktorý hrnček vydal. Samozrejme, teplota sa počas procesu menila, ale keďže celé meranie netrvalo viac ako pár sekúnd, predpokladali sme, že teplota bola konštantná. Potom sme počkali, kým sa voda neochladí o pár stupňov a celý folklór zopakovali.

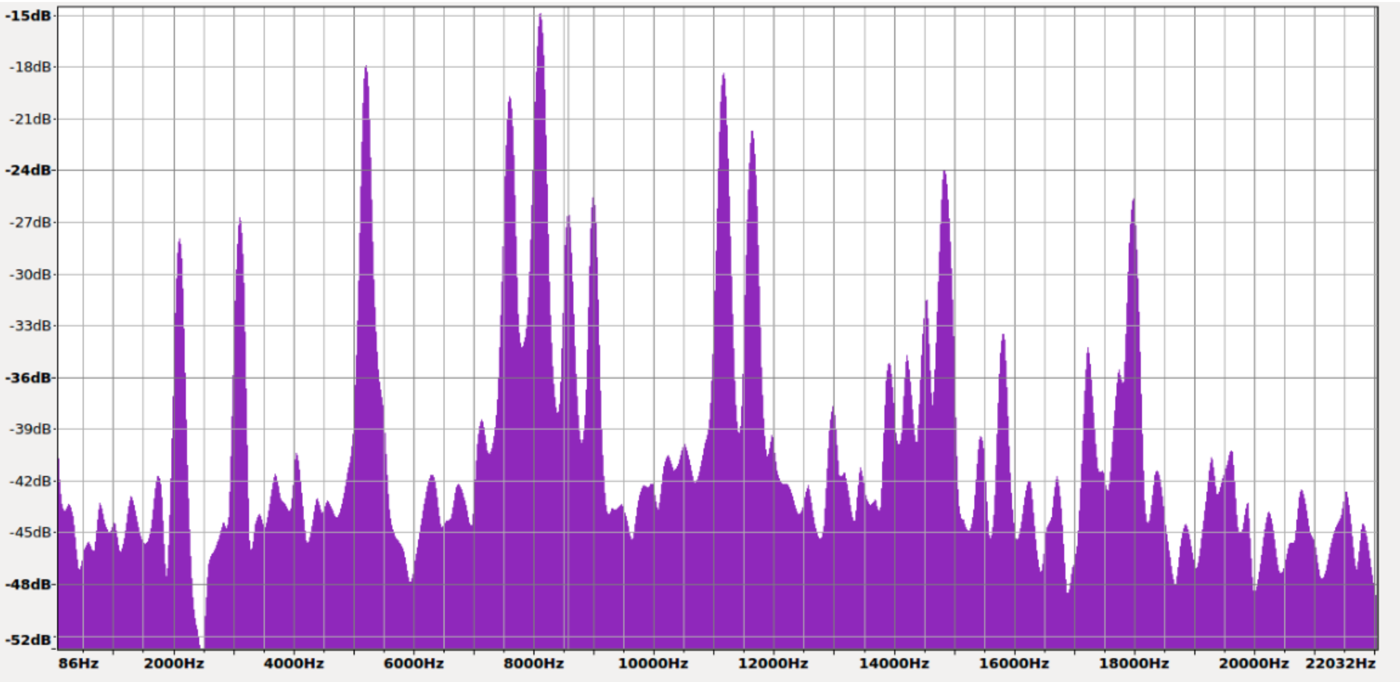
Analýzou zvukových nahrávok v Audacity sme získali frekvenčné spektrá. Z frekvenčných spektier sme určili polohu prvého najvýraznejšieho vrcholu. Vhodné by bolo odčítať najvýraznejší vrchol celkovo, avšak tento sa odčítava oveľa komplikovanejšie, vzhľadom na vysoké nepresnosti nášho merania. Podľa šírky vrcholu vieme približne určiť, ako presne meriame. Je vhodné urobiť čo najviac meraní.

[6] Frekvenčné spektrum vlny nám hovorí, „ako veľmi" je tvorená z jednotlivých frekvencií.

[7] Čarovným slovíčkom je deštruktívna interferencia odrazených vĺn.

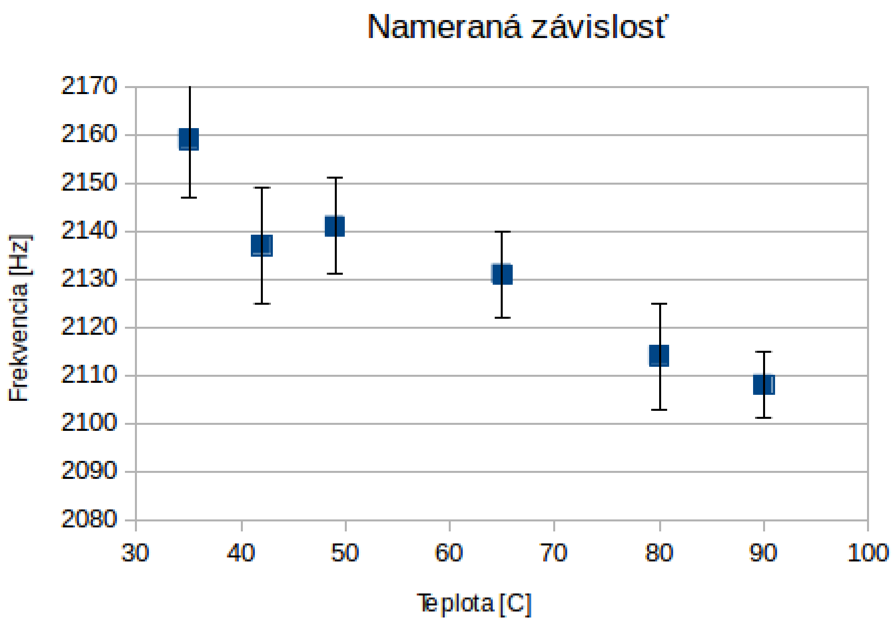
[8] Toto miesto si môžeme označiť napríklad fixkou.

Chyby pri meraní vznikajú v dôsledku nekonštantnej budiacej sily, problematického určenia maxima, odparovania vody, šumu okolia, teplotnej roztiažnosti hrnčeku a vody… taktiež zloženie vody môže byť problém, pretože frekvencia môže závisieť od koncentrácie rozpustených látok.



Obrázok 4: *Spektrum nášho hrnčeka pre 90 stupňov Celzia. Môžeme si všimnúť výrazné maximum pre prirodzené frekvencie systému. Dôvodom, prečo je namerané spektrum spojité, je šum okolia.*

Obrázok 5: *Aparatúra*



Obrázok 6: *Graf závislosti frekvencie od teploty pohára*

Skúsme sa teraz zamyslieť, prečo závislosť, ktorú sme namerali, vyzerá práve takm ako vyzerá. Pre frekvenciu platí

$$f = \frac{v}{\lambda}.$$

Otázkou ostáva, ako sa menia vlnové dĺžky a rýchlosť zvuku vo vode s teplotou. Vo všeobecnosti toto môže závisieť od troch faktorov: hustoty vody, stlačiteľnosti vody a jej teplotnej rozťažnosti. Napríklad v oceli, ktorá je málo stlačiteľná a hustejšia, sa pohybuje zvuk omnoho rýchlejšie ako vo vzduchu, ktorý je ľahko stlačiteľný a redší. Najprv hrubo odhadnime vplyv hustoty a roztiažnosti. Vieme alebo si nájdeme, že rýchlosť zvuku vo vode je úmerná $v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$, kde K je člen zahŕňajúci stlačiteľnosť vody, a ρ je hustota vody. Predpokladajme, že hustota sa mení iba vplyvom teplotnej roztiažnosti. Potom

$$v = \sqrt{\frac{KV}{m}},$$

kde V je objem.

Objem vody sa mení ako $V = V_0\left(1 + \beta\Delta T\right)$. Predpokladajme, že aj vlnová dĺžka sa mení úmerne objemu,

$$\lambda \propto \lambda_0\left(1 + \beta\Delta T\right).$$

Kombináciou týchto vzťahov dostávame

$$f \propto \frac{1}{\sqrt{(1 + \beta\Delta T)}}.$$

Toto súhlasí s našou nameranou závislosťou.

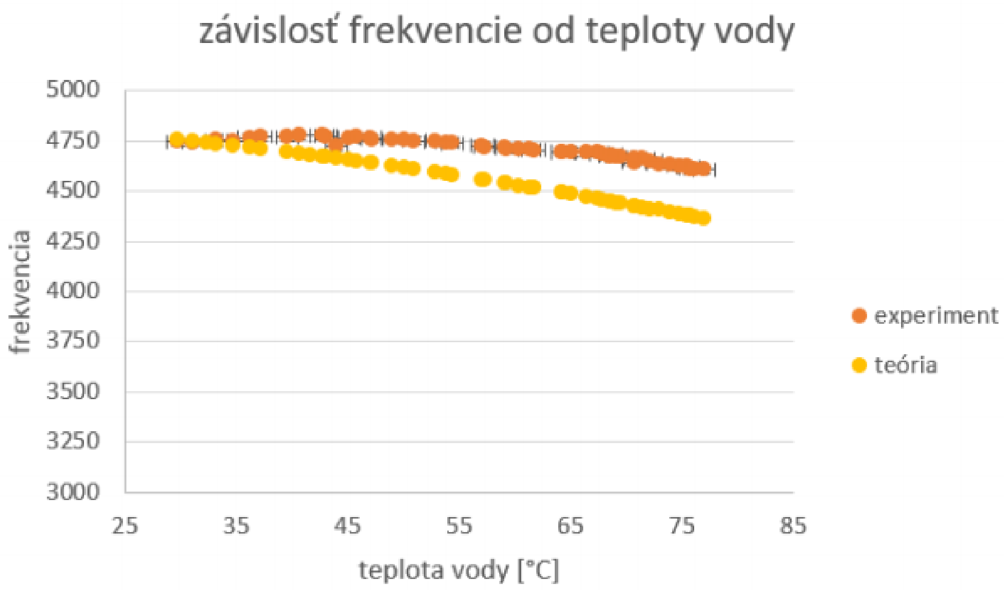
Čo sa týka stlačiteľnosti, nastáva jav nazývaný Hot Chocolate Effect, aj keď pre vodu namiesto čokolády by sa dal nazvať obrátený Hot Chocolate Effect.[9] Pointou je, že rýchlosť zvuku vo vode závisí najmä na dvoch

[9] O tom, ako tento efekt funguje pri horúcej vode, sa môžete dočítať v *F. S. Crawford, The Hot Chocolate Effect. Am. J. Phys. 50, 398 (1982).*

veciach, hustote a stlačiteľnosti.

Hustota s teplotou klesá, a vďaka tomu by mala rýchlosť narastať. Avšak v horúcej vode sa nachádza veľa vzduchových bubliniek. Vdaka týmto bublinkám bude voda oveľa stlačiteľnejšia, a zvukové vlny, ktoré sa šíria stláčaním a rozpínaním vody, sa budú pohybovať pomalšie. Tento jav, teda taktiež podporuje pokles frekvencie.

Na záver prikladáme veľmi pekne nameranú závislosť aj s teoretickou predpoveďou od Mišky Leinwatherovej.



Obrázok 7: *Miškin graf závislosti frekvencie na teplote.*

2.5 Plastelínová terapia

vzorák **Maťo V**, opravoval **Maťo V**

Čajka je občas veľmi nervózna. Našťastie moderná terapeutická psychológia pozná všelijaké relaxačné cviky. Jedným z nich je vyhadzovanie plastelíny. Stačí zobrať poriadny kus plastelíny, vymodelovať z neho veľa rovnakých guľôčok s hmotnosťou m a vyhadzovať ich kolmo hore rýchlosťou v. Čajka vyhodí do vzduchu kúsok plastelíny každých t sekúnd. Kvíka by zaujímalo, kedy sa celá gundža plastelíny, ktorú Čajka povyhadzovala do vzduchu, dotkne naraz zeme a koľko bude vtedy vážiť?

Pri riešení tejto úlohy neváhajte využiť počítač ;-)

Na riešenie tohoto problému môžeme zvoliť dva spôsoby, analytický (rovnice) alebo simuláciu. Na začiatok sa pozrime na to, ako by sa dal tento spletitý problém rozmotať na peknú sadu rovníc. Keď Čajka vyhodí do vzduchu niektorú z neskorších guličiek, daná gulička sa dokonale nepružne zrazí s gučou, ktorá už bola vo vzduchu a pridá sa ku nej. Vieme, že počas žiadnej zrážky sa nezmení poloha ani rýchlosť ťažiska tejto sústavy. Pod danou sústavou myslíme N-tú guličku (prvá gulička bola označená ako nultá) a guču zloženú z prvých N guličiek. Tým pádom sa táto novovzniknutá guča bude hýbať po trajektórii ich ťažiska, až kým nedôjde k ďalšej zrážke.

Ak si teda napíšeme polohu N-tej guličky v závislosti od času a polohu ťažiska guče, s ktorou sa zrazí, vieme určiť čas, kedy k tejto zrážke dôjde, teda kedy sa tieto dve polohy budú rovnať. Trajektóriu ktorejkoľvek guličky si vieme napísať ako

$$x_i = v(t - T_i) - \frac{1}{2}g(t - T_i)^2,$$

kde T_i je čas vyhodenia danej guličky a môžeme ho vyjadriť aj ako $T_i = i\tau$, pričom τ je doba medzi dvoma vyhodeniami. Teda si to vieme rozpísať ako

$$x_i = -v\tau i - \frac{1}{2}g\tau^2 i^2 + (v + g\tau i)t - \frac{1}{2}gt^2,$$

Čo sa týka ťažiska, to si vieme napísať ako[10]

$$y_i = \sum_{j=0}^{i} \frac{x_j}{i+1} = \frac{1}{i+1}\sum_{j=0}^{i} -v\tau j - \frac{1}{2}g\tau^2 j^2 + (v + g\tau j)t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Na vyriešenie tejto dlhej sumy ale vieme použiť známe výsledky. Napríklad vieme, že

$$\sum_{j=0}^{i} j = \frac{i(i+1)}{2},$$

$$\sum_{j=0}^{i} j^2 = \frac{i(i+1)(2i+1)}{6}.$$

Keď si dosadíme tieto výrazy do rovnice pre polohu ťažiska, dostaneme

$$y_i = -\frac{v\,\tau i}{2} - \frac{g\tau^2 i(2i+1)}{12} + \left(v + \frac{g\tau i}{2}\right)t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Pri výpočte polohy ťažiska sme ale použili trik, ktorý treba spomenúť. Pre zjednodušenie matematiky uvažujeme, akoby už všetky guličky, ktoré potrebujeme poznať, boli vo vzduchu od začiatku, avšak začínali niekde v negatívnej výške s veľkou rýchlosťou. A táto rýchlosť a výška sú presne také, aby sa v čase $i\tau$ nachádzali vo výške 0 a mali rýchlosť práve v. Ako sme povedali, v okamihu keď sa polohy guče a guličky rovnajú, dochádza ku zrážke, a teda si môžeme vyjadriť čas zrážky $(i+1)$-tej guličky:

$$x_i = y_i,$$

$$-v\tau i - \frac{1}{2}g\tau^2 i^2 + (v + g\tau i)t - \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{v\,\tau i}{2} - \frac{g\tau^2 i(2i+1)}{12} + \left(v + \frac{g\tau i}{2}\right)t - \frac{1}{2}gt^2,$$

$$t = \frac{v}{g} + \left(i - \frac{2i+1}{6}\right)\tau.$$

Tak sme teda zistili, kedy sa každá z guličiek zrazí s predchádzajúcimi. To síce nie je jedna z otázok, ale pomôže nám zistiť, koľko guličiek Čajka stihne vyhodiť predtým, než to celé dopadne na zem. Keď sa pozrieme na náš výpočet ťažiska a fakt, že sme uvažovali, že všetky guličky sú od začiatku letiace, zistíme, že nám vzniká podmienka, aby sa gulička stretla s gučou, keď už je nad zemou. Ináč povedané, zrážka sa nemohla stať, ak gulička ešte nebola vyhodená. Týmto si vieme zadefinovať podmienku:

$$t = \frac{v}{g} + \left(i - \frac{2i+1}{6}\right) < i\,\tau,$$

[10] Znak $\sum$ tu značí sčítanie cez všetky výrazy rovnakého typu, ktoré sa vyskytujú za týmto znakom. Teda napríklad $\sum_{i=0}^{n} i = 0 + 1 + 2 + \ldots + n$.

$$i < \frac{3v}{g\tau} - \frac{1}{2}.$$

Tak, a práve sme zistili koľko guličiek sa Čajke podarí vyhodiť. Aby sme našli čas, kedy táto guča dopadne, nám už len ostáva dosadiť tento nájdený počet späť do rovnice pre polohu ťažiska a zistiť kedy táto poloha bude rovná 0:

$$y_i = 0$$

$$-\frac{v\tau i}{2} - \frac{g\tau^2 i(2i+1)}{12} + \left(v + \frac{g\tau i}{2}\right) t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

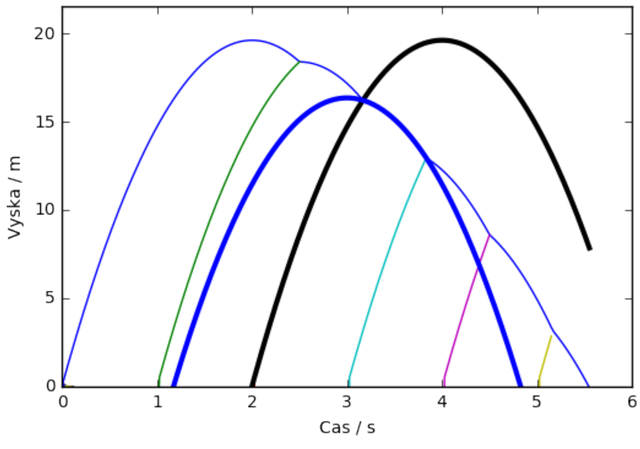
$$t = \frac{2v + g\tau i + \sqrt{(2v + g\tau i)^2 - 4g\left(\frac{g\tau^2 i(2i+1)}{6} + v\,\tau i\right)}}{2g}$$

$$t = \frac{1 + i + \sqrt{(1+i)^2 - \frac{2i(2i+1)}{3} - 2i}}{2}$$

$$t = \frac{1 + i + \sqrt{1 + 2i + i^2 - \frac{4i^2+2i}{3} - 2i}}{2}$$

Ako zaujímavosť pre čitateľa poznamenávame, že keď $\tau \to 0$, tak $t \to \frac{3v}{g}$. Toto je pekný výsledok, keďže je to presne o polovicu viac, ako by trvalo proste dopadnúť prvému kúsku. Druhý pekný špeciálny prípad je $v = \frac{g\tau}{2}$. Vtedy prvá gulička dopadne akurát vtedy, keď Čajka vyhodí druhú.

Aby ste porozumeli numerickému spôsobu riešenia, pozrite si kód tu.



Obrázok 8: *Grafický výstup numerickej simulácie. Jednotlivé čiary predstavujú dráhy guličiek. Hrubá modrá čiara je predĺžením dráhy guče po druhej zrážke, tenká modrá ukazuje výšku guče v závislosti od času.*

2.6 Severní vítr je krutý...

vzorák **MaťoB**, opravoval **MaťoB**

Adam[11] nemá veľmi dobré spomienky na to, keď fúka a je zima… naposledy vtedy prenášal meter štvorcový hliníkového plechu a ten teda poriadne zväčšil povrch, cez ktorý unikalo z Adama teplo… ale späť k veci.

[11] Ten, čo spieva nádherne britskú hymnu…

Počas pokojného chladného zimného dňa s úplnym bezvetrím[12]*, keď sa ortuť na teplomeroch šplhá na príjemných* $-5\,°C$*, ľudia, a medzi nimi aj Adam, subjektívne pociťujú* $5\,°C$*. Predpokladajme, že počas toho istého dňa sa náhle zmení počasie, následkom čoho začne byť celkom veterno, no na ortuťovom stĺpci nebadať žiadnu zmenu.*

Odhadnite novú subjektívnu pocitovú teplotu, ktorú pocíti Adam, keď začne fúkať. Inak povedané, nájdite takú hodnotu teploty, ktorú by musel mať pokojný stojaci vzduch, aby sa Adam cítil rovnako, ako počas veterného dňa, keď je vonku $-5\,°C$*.*

Predpokladajte, že priemerná teplota Adamovej kože je $37\,°C$*.*

Pri riešení tejto úlohy sa mohlo vyskytnúť isté zmätenie. Týmto zmätením si prešli aj všetci vedúci, ktorí sa s touto úlohou stretli na istej súťaži. Nanešťastie Vás musíme sklamať, táto úloha je naozaj riešiteľná a nie je vôbec ťažká. Vyžaduje si však poriadnu dávku zamyslenia a dôsledné čítanie zadania ;-)

Na začiatok si musíme uvedomiť, že do hry vstupujú dva subjektívne faktory. To, ako pociťuje teplotu človek vs. to, ako meria teplotu teplomer, a potom rozdiel medzi pociťovaním teploty v bezvetrí a vo veternom počasí.

Človek pociťuje chlad alebo teplo podľa toho, aké veľké sú teplotné straty resp. príjmy cez pokožku. Naše bunky nevnímajú absolútnu hodnotu teploty, ale sú citlivé na výkon tepelných strát. Preto je napríklad sedenie na drevenej lavičke príjemnejšie ako sedenie na kovovej, hoci majú rovnakú teplotu. V tomto vzoráku sa teda budeme rozprávať o tepelných stratách, a to stratách spôsobených hlavne vedením a prúdením tepla.[13]

V prípade bezvetria sa v okolí pokožky vytvorí nad vrstvou kože tenučká vrstva vzduchu, ktorá kvôli viskozite stojí na mieste, a tak tepelne izoluje našu pokožku. Môže to znieť paradoxne, ale práve táto vzduchová vrstva spôsobuje, že nepociťujeme pocit chladu[14]. Keď začne fúkať, o túto tenučkú izolačnú vrstvu vzduchu prídeme a tepelné straty cez pokožku sú potom väčšie, čo všetci vnímame ako pocit chladu.

Musíme si uvedomiť, že k rovnakému efektu dochádza aj pri teplomeroch! Tam sa však výrobcovia snažia minimalizovať tento efekt tým, že používajú materiály, ktoré majú veľmi dobrú tepelnú vodivosť (všimnite si, že špička teplomerov je kovová) a samotný teplomer sa snažia prispôsobiť tak, aby mal aj malú tepelnú kapacitu[15]. Zabezpečia tak, že teplomer vie pomerne rýchlo reagovať na zmeny teploty a teplota, ktorú ukazuje teplomer má veľmi blízko skutočnej teplote.

Pre riešenie úlohy je kľúčová informácia zo zadania, že **po tom, čo začalo fúkať sa teplota, ktorú ukazuje teplomer, nezmenila**! To ľudskou rečou znamená, že napriek tomu, že sa odstránila aj tenučká vrstva vzduchu okolo teplomera, tak sa nezmenila tepelná rovnováha medzi teplomerom a okolím, a teda nutne ani výkon tepelných strát, ktoré unikajú z teplomera do okolia (v ustálenom stave sú nulové). Táto skutočnosť nie je úplne triviálna, keďže to, ako dobre odvádza vzduch teplo závisí od rýchlosti pohybu molekúl.

Rýchlosť pohybu molekúl nie je určená iba kinetickou energiou mikroskopického pohybu (teplota) ale aj kinetickou energiou makroskopického pohybu (vietor). Preto v princípe môže aj teplomer ukázať nižšiu hodnotu po tom, ako začne fúkať, napriek tomu, že sa nezmenila kinetická energia mikroskopického pohybu molekúl (def. teploty vzduchu). Tento efekt sa volá *wind chill*[16]. Informácia zo zadania nám vraví, že k tomuto efektu však nedochádza! A jediný efekt, ktorý nastáva, je iba strata tenkej izolačnej vrstvy vzduchu nad pokožkou (a aj špičkou teplomera).

Pre účely zvyšného riešenia úlohy budeme teda za objektívnu považovať teplotu, ktorú nám ukáže teplomer. Pustime sa teda konečne do riešenia! Situácia vyzerá nejako takto:

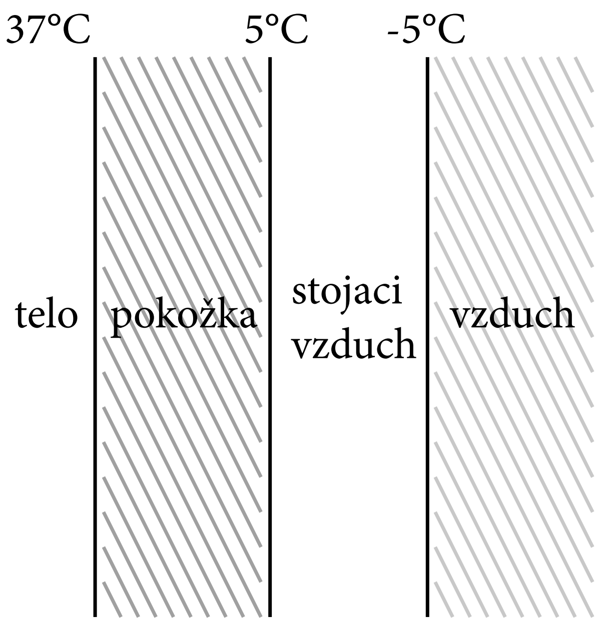
[12] Zatiaľ, na Adamovo šťastie…

[13] Vedenie tepla je prenos tepla mikroskopickým pohybom molekúl vzduchu. Prúdenie tepla je zase prenos tepla makroskopickým prúdením vzduchu – t. j. také, ktoré si môžeme všimnúť aj našimi očami.

[14] Vzduch, ak mu totiž zakážeme prúdiť v makroskopickom zmysle, má perfektné izolačné vlastnosti. Preto sa napríklad polystyrén používa na zatepľovanie domov, keďže obsahuje veľké množstvo vzduchu, ktorý však nemôže prúdiť.

[15] Pri ortuťových teplomeroch sa to dá ľahko postrehnúť – kapilára s ortuťou je naozaj veľmi malá.

[16] `https://en.wikipedia.org/wiki/Wind_chill`



Obrázok 9: *Vrstvy vzduchu a pokožky rôznych teplôt.*

V ustálenom stave je výkon tepelných strát, ktoré pripadajú na jednotku plochy úmerný rozdielu teplôt a konštante závisiacej na materiáli. Pozrime sa najprv na situáciu v bezvetrí.

Ak budeme uvažovať vrstvu kože s teplotou $T_{\text{telo}} = 37\,°\text{C}$, stojaci vzduch nad vrstvou kože s teplotou $T_{\text{pocit}} = 5\,°\text{C}$[17] a okolitý vzduch s teplotou $T_{\text{okolie}} = -5\,°\text{C}$, tak v ustálenom stave, kedy sa už nemení teplota stojacej vrstvy vzduchu musí platiť rovnosť tepelných výkonov medzi vnútrom tela a najvrchnejšou časťou pokožky – P_1 a tepelnými stratami cez tenučkú stojacu vrstvu vzduchu P_2,

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \alpha S \left(T_{\text{telo}} - T_{\text{pocit}}\right), \\
P_2 &= \beta S \left(T_{\text{pocit}} - T_{\text{okolie}}\right), \\
P_1 &= P_2,
\end{aligned}
$$

kde α je koeficient vyjadrujúce tepelné vlastnosti kože, β je koeficient vyjadrujúci tepelné vlastnosti vzduchu a S je plocha rozhrania medzi kožou a vzduchom.

V prípade, keď začne fúkať, a teda prestane existovať tenučká vrstva stojaceho vzduchu, je celkový výkon tepelných strát jednoducho

$$P' = \alpha S \left(T_{\text{telo}} - T_{\text{okolie}}\right).$$

Podľa zadania chceme nájsť takú teplotu vzduchu, ktorú by musela mať vonkajšia vrstva pokojného stojaceho vzduchu, tak aby Adam pociťoval rovnaké tepelné straty, ako keď fúka. Celkový výkon tepelných strát sme určili už o kúsok vyššie, a teda

$$P'_1 = \alpha S \left(T_{\text{telo}} - T_{\text{okolie}}\right),$$

potom, pre rozhranie izolačnej vrstvy a vonkajsieho vzduchu musí platiť

$$P'_2 = \beta S \left(T'_{\text{pocit}} - T_{\text{okolie}}\right),$$

[17] Pocitovú teplotu berieme v našom modeli ako tú teplotu, ktorú by musel mať vzduchu, ak by tam nebola tenká stojaca vrstva vzduchu a subjektívne by sme vnímali rovnaký tepelný výkon.

kde T'_{pocit} je teplota, ktorú by musel mať vonkajší vzduch, a teda teplota na ktorú sa pýta zadanie. Pozor, vo vzorci nezabudneme vymeniť poradie teplôt, keďže očakávame, že $T'_{\text{pocit}} < T_{\text{okolie}}$.

Teraz sme získali dve rovnice (prvú, keď nefúka a druhú ,keď fúka)

$$\alpha S\ \left(T_{\text{telo}} - T_{\text{pocit}}\right) = \beta S\ \left(T_{\text{pocit}} - T_{\text{okolie}}\right)\ ,$$
$$\alpha S\ \left(T_{\text{telo}} - T_{\text{okolie}}\right) = \beta S\ \left(T_{\text{okolie}} - T'_{\text{pocit}}\right)\ .$$

Koeficienty α a β síce nepoznáme, ale vieme sa ich jednoducho zbaviť tak, že rovnice medzi sebou predelíme a následne z nich vyjadríme T'_{pocit}.

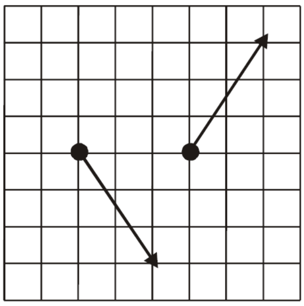
$$T'_{\text{pocit}} = T_{\text{okolie}} - \frac{\left(T_{\text{telo}} - T_{\text{okolie}}\right)}{\left(T_{\text{telo}} - T_{\text{pocit}}\right)}\left(T_{\text{pocit}} - T_{\text{okolie}}\right) \approx -18\,^{\circ}\mathrm{C}\,.$$

2.7 Hviezdne tango

vzorák **MaťoB**, opravoval **MaťoB**

Vladko sa dočítal, že to bol práve Kepler, kto objavil tri zákony pohybu planét. Avšak tak, ako ich poznal on, sa dajú použiť iba vtedy, keď je obežnica (planéta, mesiac, atď.) omnoho ľahšia ako centrálne teleso (hviezda, planéta, atď.).

Vladko však dostal od Peťa na úlohu z mechaniky vypočítať periódu obehu dvojhviezdy okolo spoločného ťažiska. Peťova dvojhviezda sa skladá z hviezd s podobnými hmotnosťami M (vľavo na obrázku) a $2M$ (vpravo na obrázku). Vyriešte túto úlohu za pomoci Keplerových zákonov a elementárnej fyziky. Dĺžka jedného dielika je l, rýchlosti hviezd v jednom okamihu sú také ako na obrázku (jeden dielik zodpovedá rýchlosti v). Peťo Vladkovi prezradil, že navyše platí $GM = 24lv^2$, kde G je gravitačná konštanta.



Pozrime sa na najprv na tri Keplerove zákony, ktoré – ako vieme zo zadania – objavil už aj Vladko:

1. Planéty obiehajú okolo Slnka po eliptických trajektóriách s malou výstrednosťou, pričom Slnko sa nachádza v jednom spoločnom ohnisku.
2. Sprievodič (spojnica Slnka a planéty) opíše za rovnaký čas vždy rovnakú plochu (prakticky zákon zachovania momentu hybnosti).
3. Druhé mocniny obežných dôb planét pri ich obiehaní okolo Slnka sú úmerné tretím mocninám hlavných poloosí ich eliptických dráh.

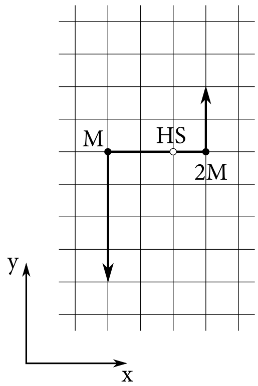
Kepler predpokladal, že stred Slnka je totožný s hmotným stredom slnečnej sústavy a ten sa nehýbe. To nás vedie k tomu, aby sme sa venovali najprv hmotnému stredu našej dvojhviezdy. Označme rýchlosť hviezdy naľavo v obrázku v zadaní $\vec{v_1}$ a hviezdy napravo $\vec{v_2}$. Keďže jednému dieliku prislúcha podľa zadania veľkosť rýchlosti v, po zavedení vhodnej súradnicovej sústavy (x-ová súradnica v smere zľava doprava, y-ová súradnica v smere zdola hore) vieme určiť vektory $\vec{v_1} = (2v, -3v)$ a $\vec{v_2} = (2v, 3v)$.

Rýchlosť hmotného stredu $\vec{v_t}$ určíme zo zákona zachovania hybnosti,

$$M\vec{v_1} + 2M\vec{v_2} = (M + 2M)\vec{v_t},$$
$$\vec{v_t} = \frac{M}{3M}(\vec{v_1} + 2\vec{v_2}) = (2v, v).$$

Vidíme, že hmotný stred sústavy sa pohybuje, ale tento problém vieme ľahko vyriešiť tak, že sa presunieme do inerciálnej sústavy, kde hmotný stred sústavy stojí. Potom pre rýchlosti hviezd dostávame $\vec{v_1}' = \vec{v_1} - \vec{v_t} = (0, -4v)$ a $\vec{v_2}' = \vec{v_2} - \vec{v_t} = (0, 2v)$. Ľahký výpočet prezradí, že hmotný stred sa nachádza v dvoch tretinách vzdialenosti medzi hviezdami od hviezdy naľavo.

Situácia teraz v sústave spojenej s hmotným stredom vyzerá nejako takto:



Obrázok 10: *Situácia v sústave spojenej s hmotným stredom (HS).*

Na obe hviezdy pôsobí gravitačná sila veľkosti $F_g = G\frac{2M^2}{(3l)^2}$, kde $3l$ je vzájomná vzdialenosť medzi hviezdami a G je gravitačná konštanta. Keďže úlohu chceme vyriešiť za pomoci Keplerových zákonov, a tie možno použiť iba v prípade, ak jeden z objektov je rádovo ťažší ako druhý, a teda sa vplyvom gravitačnej sily prakticky nehýbe, musíme situáciu znovu transformovať. Oba objekty teraz obiehajú okolo spoločného hmotného stredu. Hmotný stred sa nemôže hýbať inak ako rovnomerným priamočiarym pohybom, ale takýto pohyb sme už zakázali presunutím sa do vhodnej sústavy.

Ďalej si všimnime, že gravitačná sila, ktorá pôsobí na hviezdu napravo, spôsobená silou naľavo, má veľkosť

$$F_g = G\frac{2M^2}{r^2},$$

kde G je gravitačná konštanta a r je vzájomná vzdialenosť medzi hviezdami. Vzájomná vzdialenosť medzi hviezdami sa môže meniť, ale pozícia hmotného stredu je už v našej sústave fixovaná. To inak povedané znamená, že nech je vzájomná vzdialenosť hviezd r akákoľvek, hmotný stred bude vždy ležať na spojnici hviezd, v tretine ich vzdialenosti od ťažšej hviezdy.

Urobme preto teraz nasledujúci myšlienkový experiment. Odstráňme zo systému hviezdu naľavo a nahraďme ju virtuálnou hviezdou ležiacou na pozícii hmotného stredu pôvodonej dvojhviezdy s takou hmotnosťou m, aby gravitačný účinok virtuálnej hviezdy na hviezdu napravo bol rovnaký, ako od pôvodnej hviezdy naľavo. Ak zvolíme $m = M/9$, ľahko sa presvedčíme, že dostaneme rovnakú silu, nech je r akékoľvek.

$$F_g = G\frac{2M(M/9)}{(r/3)^2} = G\frac{2M^2}{r^2}.$$

Ak teraz umelo zafixujeme virtuálnu hviezdu na tomto mieste, gravitačná sila od virtuálnej hviezdy bude mať vždy správny smer aj veľkosť, ako od pôvodnej hviezdy naľavo. Ak sa obmedzíme iba na štúdium pohybu hviezdy napravo, môžeme smelo používať Keplerove zákony a nájsť periódu obehu ťažšej hviezdy okolo spoločného hmotného stredu oboch hviezd.

Pred tým, než sa pustíme do riešenia, si iba v krátkosti vysvetlime, prečo je spomínaný krok legálny. Hviezda napravo „netuší", čo spôsobuje silu, ktorá na ňu pôsobí. Ak však zabezpečíme, že je presne rovnaká (veľkosťou aj smerom), ako keby tam boli obe hviezdy, hviezda napravo sa musí nutne hýbať rovnako, ako keby tam tie hviezdy boli obe. Newtonove zákony jednoznačne určujú budúcnosť systému na základe počiatočných podmienok a tie sú rovnaké, takže aj časový vývoj polohy hviezdy napravo musí byť rovnaký. Poznamenajme, že virtuálnej hviezde sme zakázali pohyb a našou konštrukciou nenarušíme zákon zachovania energie (ten musí byť splnený, lebo máme správnu silu) a aj zákon zachovania momentu hybnosti (v našom prípade sa zachováva aj moment hybnosti každej hviezdy samostatne. Rozmyslite si prečo.)

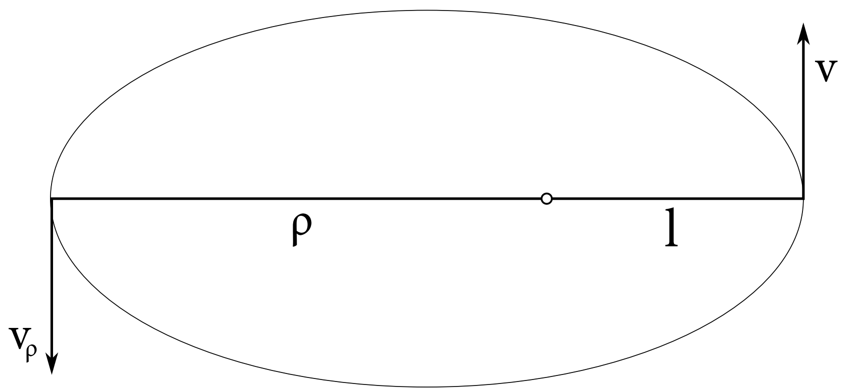
Teraz môžeme smelo používať všetky finty, ktoré už dávno poznáme, stačí ak budeme študovať len pohyb ťažšej hviezdy v poli virtuálnej hviezdy s $m = M/9$, ktorá vždy stojí na mieste.

Periódu obehu ľahko zistíme z tretieho Keplerovho zákona, ak budeme poznať dĺžku hlavnej polosi elipsy, po ktorej obieha ťažšia hviezda okolo spoločného hmotného stredu hviezd. Z úvahy vyššie vieme, že v jednom z ohnísk bude ležať nehybná virtuálna hviezda. Dĺžku hlavnej polosi ľahko určíme zo zákona zachovania mechanickej energie a zákona zachovania momentu hybnosti (čo je druhý Keplerov zákon až na nejakú tú polovicu). Celková mechanická energia sústavy E_0 je súčtom potenciálnej a kinetickej energie v hociktorom čase (takže napríklad aj vo východzej situácii). Nulový potenciál gravitačného poľa virtuálnej hviezdy môžeme voliť v nekonečne, a dostávame

$$E_0 = \frac{1}{2}2M(v_2')^2 - G\frac{2M(m/9)}{(r/3)} = 4Mv^2 - G\frac{2M^2}{9l} = -\frac{4}{3}Mv^2,$$

kde sme využili vzťah zo zadania $GM = 24lv^2$.

Z obrázka vidno, že aktuálny smer rýchlosti je kolmý na spojnicu hviezd. Takáto situácia môže nastať iba v pericentre alebo apocentre. Súčet vzdialeností medzi ťažšou hviezdou a virtuálnou hviezdou v pericentre a apocentre je rovný presne dvojnásobku hlavnej poloosi elipsy, po ktorej ťažšia hviezda obieha.



V prípade pericentra vieme, že $r = l$ a $|\vec{v}_2'^2| = 2v$, v apocentre si označíme vzdialenosť ako ρ a rýchlosť ako v_ρ. Z druhého Keplerovho zákona

$$2M \cdot 2v \cdot l = 2M \cdot \rho \cdot v_\rho \implies v_\rho = 2vl/\rho.$$

Dosadením do zákona zachovania energie dostaneme rovnicu

$$\frac{1}{2}2M{v_\rho}^2 - G\frac{2M^2}{9\rho} = E_0,$$

do tejto rovnice môžeme vložiť následne vypočítanú hodnotu E_0, za v_ρ dosadíme hodnotu z vypočítanú z 2. Keplerovho zákona a nakoniec využitím $GM = 24lv^2$ získame rovnicu

$$(\rho - l)(\rho - 3l) = 0.$$

Riešenie $\rho = l$ je pericentrom a zodpovedá počiatočnému stavu v nami skonštruovanej sústave. Riešenie $\rho = 3l$ je apocentrom. Odtiaľto už vidíme, že dĺžka hlavnej polosi je $(l + 3l)/2 = 2l$.

Využitím tretieho Keplerovho zákona (ten môžeme použiť, lebo predpokladáme, že virtuálna hviezda počas celého pohybu stojí),

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{Gm} = \frac{4\pi^2(2l)^3}{G(M/9)} = \frac{4\pi^2 \cdot 72l^3}{24lv^2} \implies T = 2\pi\frac{\sqrt{3}l}{v}.$$

Dostaneme periódu T obehu ťažšej hviezdy okolo spoločného hmotného stredu. Keďže hmotný stred sa nemôže hýbať, perióda obehu ľahšej hviezdy okolo hmotného stredu musí byť rovnaká.