Fyzikálny korešpondenčný seminár
XXXII. ročník, 2016/2017
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

# Riešenia 1. kola zimnej časti

## 1.1 Odvážne sa odvážme

vzorák **Zuzka**, opravovala **Zuzka**

Začneme od poslednej otázky, ktorá je kľúčovou a zároveň najťažšou. Čo sa stane s pružinou, keď ju budeme veľa naťahovať a stláčať? Ťažko povedať. Pri stláčaní pružiny jej dodávame energiu, a časť tejto energie sa spotrebuje na vykonanie zmien v jej vnútornej štruktúre… Určiť na základe takýchto a im podobných úvah, či bude pružina po tisícom stlačení ťažšia alebo ľahšia, nie je vôbec jednoduchá záležitosť. Keďže málokto z nás naťahoval a stláčal pružinu 1000-krát za sebou a skúmal jej pevnosť, nevieme si dobre predstaviť, ako to s tou našou pružinou bude.

Hmm… naozaj nevieme? Spomeňme si na autá. V tlmičoch áut sú pružiny, ktoré sa pri každej nerovnosti cesty stláčajú a rozťahujú. A ako sa správa naše auto, keď máme staré pružiny? Predsa cítime každú jednu jamu, ako keby auto žiadne pružiny nemalo. Môžeme si pogratulovať, týmto elementárnym pozorovaním sme zistili, že stará pružina bude tvrdšia, a to aj bez púštania sa do náročných úvah. (Za predpokladu, že pružina vo váhe je podobná tej v aute.) [1]

Po tisícom natiahnutí a stlačení nám teda pružina pri rovnakom vychýlení bude klásť väčší odpor ako na začiatku. Teda bude proti nám pôsobiť väčšou silou $F = kx$, kde $x$ je vzdialenosť, o ktorú sme pružinu vychýlili a $k$ je tuhosť pružiny.

Teraz si vysvetlíme odpoveď na zvyšnú otázku. Ako iste viete, váha funguje nasledovne: Keď položíme objekt na váhu, pružina v nej sa pôsobením tiaže objektu $F_G = mg$ stlačí, pretože túto silu musí vykompenzovať vlastnou silou pružnosti $F = kx$. Ciferník následne ukáže hmotnosť $m = \frac{k}{g}x$ v závislosti od skrátenia celkovej dĺžky pružiny $x$. Prevod medzi ciferníkom a pružinou je z výroby nakalibrovaný na počiatočnú tuhosť pružiny $k$.

Ak sa však používaním váhy tuhosť našej pružiny zvačší, bude sa musieť pri tom istom objekte zmenšiť $x$, lebo sila musí pôsobiť stále tá istá. Síce je jasné, že v dôsledku opotrebovania pružiny dôjde ku posunutiu nulového bodu, avšak váha, ktorá reflektuje len predĺženie, má dojem, že na váhe stojí ľahší predmet a ukáže teda menšiu hmotnosť.

## 1.2 Wir schaffen das!

vzorák **Denda**, opravovala **Denda**

Hádam každý vie, že najkratšia dráha spájajúca dva body je úsečka[2]. Správny stratég Baklažchánovho vojska by to mal vedieť tiež. Je si však vedomý aj vytrvalých a pracovitých dedinčanov, ktorí im pôvodnú najkratšiu cestu – spojnicu dediny a pôvodnej polohy vojska – znemožnili.

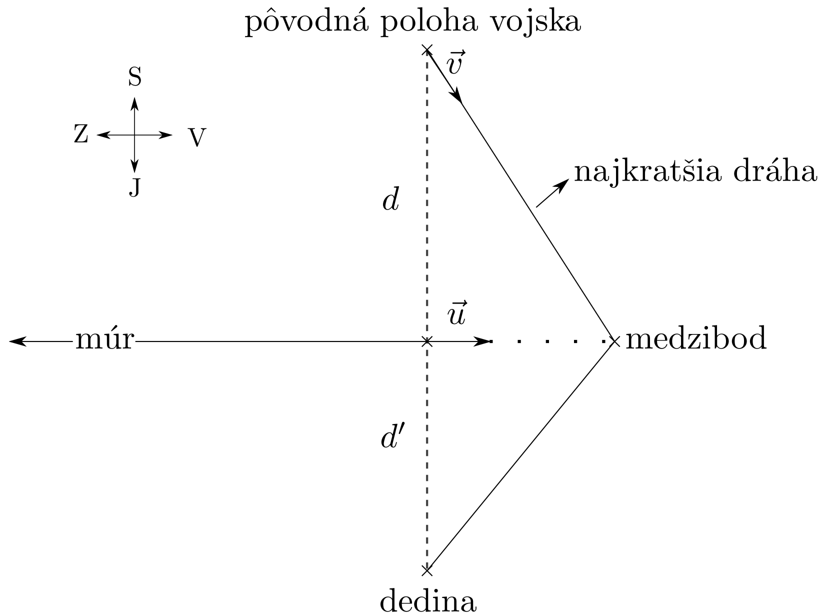
Na najkratšiu cestu má však v tomto prípade vplyv aj čas.[3] Vojakom teraz nezostáva iná možnosť, než samotný múr obísť. Pri plánovaní svojej cesty si musia k trase pridať medzibod, ktorým by mal byť okraj múru práve v

[1] Najznámejší príklad tuhnutia materiálov je tzv. tvárnenie za studena (work hardening). Princíp spočíva v tom, že po prekročení medze pevnosti dôjde k presúvaniu a vytváraniu zlomov a nepravidelností v štruktúre materiálu, dôsledkom čoho je stvrdnutie materiálu. V našom prípade síce nedochádza ku prekročeniu medze pružnosti, ale nie je ťažké si predstaviť, že podobné procesy môžu vzniknúť v materiáli, ktorý je tisíckrát deformovaný.

[2] Ak tomu neveríte, kľudne si nakreslite úsečku a dráhu, o ktorej si myslíte, že je kratšia a odmerajte napríklad špagátovou metódou.

[3] Najkratšia cesta je tá, ktorú armáda prejde za najkratší čas.

čase, keď sú k nemu schopní prísť. Ten sa pohybuje rýchlosťou $\vec{u}$ na východ. Vojaci k nemu svojou rýchlosťou $\vec{v}$ musia prísť za čo najkratší čas. Poďme sa s týmto problémom popasovať.




Obrázok 1: *schéma riešeného problému*

K bodu stretnutia vojakov s okrajom múru musia vojaci a dedinčania stavbári prísť v tom istom čase $t_1$. Keď tento fakt spojíme s Pytagorovou vetou, dostaneme rovnicu

$$v^2 t_1^2 = u^2 t_1^2 + d^2,$$

z ktorej jednoducho dostaneme čas, za ktorý Baklažchánove vojsko dorazí k okraju múru

$$t_1 = \frac{d}{\sqrt{v^2 - u^2}}.$$

Teraz sa nachvíľu pozastavíme a všimneme si, že z výsledku vyplýva očakávaný fakt a to, že aby bol výsledok v obore reálnych čísel, musí platiť nerovnosť $v > u$. Veď predsa na to, aby sa s murármi stretli, musí byť už vôbec iba zložka $\vec{v}$ v smere na východ rovná $\vec{u}$. V zadaní sa nás však pýtajú na najkratší celkový čas (tzn. až do dediny). Potrebujeme teda zistiť aj čas $t_2$, za ktorý prejde vojsko úsek medzibod – dedina. Tu si uvedomíme, že dĺžku spoločnej hrany trojuholníkov, čiže dĺžku múru, už poznáme. Je to $ut_1$. Opäť si spomenieme na Pythagorovu vetu a dostávame

$$v^2 t_2^2 = u^2 t_1^2 + d'^2.$$

Po dosadení $t_1$ a pár drobných úpravách dostame hodnotu $t_2$:

$$t_2 = \sqrt{\frac{u^2}{v^2} \cdot \frac{d^2 - d'^2}{v^2 - u^2} + \frac{d'^2}{v^2 - u^2}}.$$

Celkový čas už dostaneme jednoducho iba súčtom $t_1$ a $t_2$:

$$t_{\mathrm{celk}} = \frac{d}{\sqrt{v^2 - u^2}} + \sqrt{\frac{u^2}{v^2} \cdot \frac{d^2 - d'^2}{v^2 - u^2} + \frac{d'^2}{v^2 - u^2}}.$$

**Komentár opravovateľky**

Mnohí ste mali nutkanie vyjadriť dráhu aj pomocou uhla. Označme teda uhol, ktorý zviera kolmica k múru so smerom pohybu Baklažchánovho vojska $\alpha$. Najjednoduchší spôsob, akým sa dá zistiť jeho hodnota, je použitie goniometrickej funkcie $\sin x$ a k nej inverznej funkcie $\arcsin x$.

$$\sin\alpha = \frac{ut_1}{vt_1} = \frac{u}{v},$$

$$\alpha = \arcsin\frac{u}{v}.$$

Toto samozrejme platí pri zrejmom predpoklade, ktorý je úlohou vyžadovaný, a to $v > u$ a dáva to rozumné výsledky:

- ak $v >> u$, potom uhol $\alpha$ je malý,
- ak sa $u$ blíži k hodnote $v$, uhol je veľký.[4]

Podobným spôsobom, aj keď trochu komplikovanejšie, sa dal vyjadriť uhol, pod ktorým mali smerovať od múru k dedine.

Ďalším milým prekvapením pre mňa bola poznámka, že múr na západ nemusí byť nekonečne dlhý. Označme jeho pôvodnú dĺžku $x$. Ak platí nerovnosť $x < ut_1$, vojakom sa viac než na juhovýchod oplatí ísť na juhozápad, a celkový čas potom bude

$$t_{\mathrm{celk}} = \frac{\sqrt{d^2 + x^2} + \sqrt{d'^2 + x^2}}{v}.$$

## 1.3 Pomocné kolieska

vzorák **Jaro a Kvík**, opravoval **Jaro**

Táto úloha sa ukázala ako skutočne divotvorná, hoci otvorene vyhlasujeme, že nebola ťažká. Primitívnym a pritom dobrým riešením bolo proste zobrať bicykel a skúsiť to – aj menej bystrý riešiteľ tak mohol prísť na to, že sa bicykel pohne dozadu.[5] I tak by sa však patrilo k tomu dopísať niekoľko teplých slov a fyzikálne to zdôvodniť. Teoretici však bicykle z princípu nemajú, takže si museli vystačiť s úvahou. Ani tá však nebola nijak ťažká.

Takže sa pozrime najskôr na to, aké vonkajšie sily na náš bicykel pôsobia. Vo vertikálnom smere sú to tiažová sila a normálové sily od podložky pôsobiace na kolesá bicykla, ktoré kompenzujú práve tiaž bicykla. Je teda zjavné, že vo zvislom smere sa nič zaujímavé diať nebude. Koľké to prekvapenie.

[4] Ďakujem Jakubovi Hluškovi za veľmi peknú formuláciu tohoto rozboru :).

[5] A tým hneď získať zo tri body. Prekvapivo nesprávnych odpovedí bolo viac, než správnych… a pritom ťahať bicykel za šnúrku zvládne aj orangutan.

Čiže budeme skúmať len horizontálny smer. Tam je to sila $\vec{F}$, ktorou ťaháme za pedál smerom dozadu a trecie sily medzi kolesami a podložkou. Trecie sily pôsobia vždy proti smeru pohybu. V prípade, že kolesá neprešmykujú, pre ich veľkosti platí $F_t \leq \mu_s N$, kde $N$ je veľkosť normálovej sily medzi kolesom a podložkou.

Teraz potiahnime pedál dozadu nejakou silou, dostatočne malou na to, aby koleso nezačalo prešmykovať, a zamyslime sa nad tým, čo sa stane. Keby sme zadné koleso nadvihli tak, aby sa nedotýkalo podložky, potom by sme jasne videli, že sa roztočí tým istým smerom, ako pedál. Preto intuitívne očakávame, že keby bol bicykel položený na podložke, mal by sa pohybovať smerom dopredu. No nerobme unáhlené závery.

Najprv si predstavme, že pôsobisko sily $\vec{F}$ je nekonečne blízko k osi otáčania pedálu. Moment tejto sily je v limite rovný nule. To ale znamená, že nespôsobuje otáčanie pedálom, a teda výsledný efekt je taký, ako keď ťaháme priamo za bicykel, čiže bicykel pôjde dozadu.[6]

Na druhej strane uvažujme veľmi dlhý pedál.[7] V takom prípade aj malá sila dokáže vyvinúť dostatočne veľký krútiaci moment, takže dominantné bude práve roztáčanie pedála a bicykel sa bude pohybovať smerom dopredu.

Už by ste mali tušiť, že pre nejakú dĺžku pedála bude bicykel stáť na mieste. Otázne je, či reálna dĺžka pedála je kratšia alebo dlhšia ako hraničná dĺžka, a teda či bicykel pôjde dozadu alebo dopredu. Pre reálny hmotný bicykel sa k odpovedi žiadnou jednoduchou úvahou nedopracujeme, budeme musieť počítať. Ak si ale povieme, že kolesá, reťaz, šnúrka a ostatné príslušenstvo sú ľahké, úloha sa redukuje na jednoduché páky. Ďalej zatiaľ uvažujme vysoké trenie, teda že nám zadné koleso nebude prešmykovať.

Takže si teda relevantné rozmery zakreslime. Zistíme, že stačí vziať do pomeru dĺžku pedálu $r$, polomer kolesa $R$ a počty zubov na pastorkoch vpredu a vzadu, $k_1$ a $k_2$. Vyjde nám, že sila, ktorou zadné koleso poháňa bicykel vpred, je $F(rk_2)/(Rk_1)$. Označme si tento koeficient $\gamma$. Čiže máme silu $F$, ktorá ťahá bicykel dozadu, a silu $\gamma F$, ktorá sa ho snaží hnať vpred. Odčítame ich a bude nám hneď jasné, že bicykel tlačí dopredu celková sila $F(\gamma - 1)$. Takže ak

- $\gamma < 1$, bicykel bude chcieť ísť dozadu,
- $\gamma = 1$, bicykel sa nepohne,
- $\gamma > 1$, bicykel pôjde dopredu.

Ako sme si povedali, pre neakademické bicykle je pomer $r/R < 1$, reálna hodnota je okolo 0,5. Pomer počtu zubov sa zas zvykne pohybovať rádovo okolo jednej.[8] Dokonca úplne stačilo považovať počty zubov za rovnaké, u bicykla s pomocnými kolieskami je to jedno. Potom ostane iba pomer dĺžky pedála a polomeru kolesa a na tom vidno krásne. Skutočné zrýchlenie bicykla však nijak jednoducho nenájdeme, závisí totiž od mnohých ďalších parametrov.[9]

**Úvaha nad cykloidami**

Iným spôsobom riešenie je uvedomiť si, aké sú všetky možné pohyby pedálu. Pekne spracovanú názornú ukážku môžete nájsť tu: https://www.youtube.com/watch?v=aJhiY70KY5o.

[6] Komu sa toto máli, môže si predstaviť, že ťahá na šnúrke vozík. Alebo kačičku. Alebo lokomotívu…

[7] Ide čisto len o akademickú úvahu, pretože je jasné, že bicykel s ľubovoľne dlhým pedálom by bol nepoužiteľný, nakoľko by ním zavadil o podložku. Môžeme si však predstaviť, že bicykel ťaháme po úzkej doske nad úrovňou podložky.

[8] Zhruba medzi 0,6 a 5. Kvíkov horský bicykel má napríklad na najsilnejšom prevode 22 a 34 zubov.

[9] To tu robiť nebudeme, nakoľko to značne presahuje zamýšľanú náročnosť tejto úlohy. Na druhej strane je to ale veľmi zaujímavé, preto odporúčam si ho vyskúšať. V prípade záujmu mi pošlite mail na jaro@fks.sk a ja vám poskytnem rozšírenú verziu vzoráku.

Vidíme, že ak bicykel neprešmykuje, koniec pedála je v sústave Zeme viazaný na krivku zvanú cykloida.[10] Pohybovať sa smie iba dopredu-dozadu po nej a nikdy inak. Pohybové rovnice stále platia, ale silu pôsobiacu na pedál musíme najprv kolmo premietnuť do smeru dotyčnice k tejto krivke – kolmé zložky majú smolu, väzba ich proste zruší.

No a teraz by už malo byť jasné, že podľa toho, aký je pomer $\gamma$, rozoznáme tri prípady:

- *skrátená cykloida*: $\gamma < 1$, bicykel pôjde dozadu,
- *prostá cykloida*: $\gamma = 1$, bicykel sa nepohne, lebo zo zadania sa pedál nachádza práve naspodku krivky,
- *predĺžená cykloida*: $\gamma > 1$, bicykel sa pohne vpred (ale iba do momentu, kým nedosiahne najľavejšiu časť slučky).

Z videa taktiež vidno, že ak by sme lankom neťahali rovno dozadu, ale šikmo, kolmý priemet sily do tejto cykloidy môže niekedy smerovať smerom dopredu, dokonca aj v prípade reálneho bicykla s $\gamma < 1$. A naozaj, ak dáme pedál šikmo dozadu dolu a ťaháme šikmo dozadu hore, bicykel sa zrazu ochotne šinie vpred v ústrety svetlým zajtrajškom.

**Prešmykovanie**

Nakoniec sa zamyslime nad tým, čo sa stane, ak budeme zväčšovať silu, ktorou za pedál ťaháme. Od istého momentu sa koleso nebude stíhať roztáčať, a začne prešmykovať. V tomto novom prípade presne poznáme veľkosť trecej sily $F_t = \mu_d N$. V hrubom priblížení možno povedať, že smer pohybu bude potom dozadu, aj keď v skutočnosti výpočet nás dovedie ku komplexnejšiemu vzťahu, kde sa ukáže závislosť na parametroch bicykla.

**Komentár k riešeniam**

Bol som dosť prekvapený, aké ťažkosti dokázala táto úloha vyrobiť, či už medzi vami alebo vedúcimi – naozaj sme sa dlho nevedeli zhodnúť, ako to vlastne v skutočnosti je. Našťastie skutočný bicykel spory rýchlo rozhodol a pekné hĺbkové vysvetlenie s cykloidami sa dalo nájsť vo videu na YouTube. Jaro vytvoril detailnú analýzu pre hmotný bicykel, ktorá však silne prekračovala očakávanú úroveň obtiažnosti.

Za správnu odpoveď „dozadu" boli spravidla obratom udelené tri body, za dobré vysvetlenie zvyšných šesť, prípadne nejaká pomerná časť za väčšie nezrovnalosti. Za drobné nepresnosti nešlo dolu zväčša nič, maximálne som si trochu súkromne zagrúlil a následne napísal deviatku. Ale neznamená to, že si na tom do budúcna nemáte dať záležať.

Špeciálne pekné riešenia prišli od Elišky Macákovej (premiestnenie pedálu na os zadného kolesa, kde odpoveď vidno okamžite), Katky Dančejovej, Dávida Mišiaka a Martina Števka.

## 1.4 Hodina plávania

vzorák **Adam**, opravoval **Adam**

Pred samotným vyhotovením experimentu a získavaním dát je vhodné zamyslieť sa, či by sme vedeli a boli ochotní vysloviť nejaký teoretický predpoklad alebo odhad. Okrem iného je to vhodné i takým spôsobom, že ak tušíme, ako by mal výsledok experimentu vyzerať, vieme si samotný experiment lepšie navrhnúť, napríklad vyvarovať sa meraniu závislostí na málo zaujímavých intervaloch parametrov (na Štrbskom plese, Zlatých pieskoch a pri

[10] https://sk.wikipedia.org/wiki/Cykloida

Kaspickom mori), zvoliť vhodný tvar nádob i oscilátora samého (hruška v karafe). Takisto môžeme porovnať naše výsledky s predpokladom, a tým zistiť, či sme niečo zmrvili, čosi opomenuli, alebo zistíme, že náš model je zlý.

Majme objekt zatiaľ pokojne právajúci vo vode. Z jeho krotkosti vieme vyčítať, že je v rovnováhe nielen duševnej, ale i dynamickej (t. j. silovej). Pretože časť predmetu trčí nad vodou, na situáciu sa vieme pozrieť dvomi spôsobmi (v zásade rovnakými, len s mierne odlišnou terminológiou a úrovňou všeobecnosti). Tiažová sila je pre dané teleso v rovnováhe so silou vztlakovou, resp. tlakovou silou na spodok spomínaného marazmu (tu sa patrí podotknúť že za vhodné teleso a nádobu pre teoretickú úvahu aj experiment je rozumné považovať také s vodorovnou podstavou, zvislými bočnými stenami a pre teleso aj ťažiskom nachádzajúcim sa na rovnakej zvislici ako jeho geometrický stred).

Ak vyvediem teleso z rovnováhy čímsi fyzickejším ako nepríjemnou otázkou (napr. ako sa pričiňuje k zníženiu štátneho schodku), pre naše potreby ideálne potlačením do vody, v prvom pohľade sa mi zväčší objem telesa pod hladinou a teda aj vztlaková sila, v druhom spôsobe pohľadu sa mi podstava posunie hlbšie, kde je vyšší tlak, a teda aj tlaková sila na ňu. Podotýkam, tieto veci sú ekvivalentné ak je vršok telesa vždy nad hladinou.

Zaujímavejšia časť teoretického základu tejto úlohy je ale o tom, čo sa stane s vodou vykázanou novopríchodzím objemom telesa. Je odtlačená z cesty telesa, tak na oplátku potlačí iný kus vody, ten zas iný, a takto by to šlo, až kým by sa nejaký do kúta zahnaný kúsok vody nepoddal spoločenskému tlaku a nestlačil sa. Učili nás ale, že voda je ťažko stlačiteľná, a nie je to len taký blud. Skôr ako by sa voda stlačila, vystúpa radšej vyššie, len nech má pokoj. Ak je novopribudnuvší kus telesa objemu $\Delta V$, rovnaký objem vody sa podeje na vrch. Nás zaujíma hlavne taká vec, o koľko sa zvýši hladina vody oproti pôvodnej (v terminológii Archimedovho zákona: aký kus telesa sa mi ešte navyše ponorí do vody, v teminológii tlakov: o koľko sa ešte navyše zvýši tlak na podstavu).

Pretože sme si tak vhodne zvolili tvar telesa i nádoby, smerodajné parametre sú pre nás veľosti ich podstáv ($S_0$, resp. $S$), a výšku o ktorú zme zatlačili teleso hlbšie v porovnaní s jeho pôvodnou polohou si označme $x$. Presunutý objem vody je teda $\Delta V = S_0 x$. Vďaka zvolenej geometrii nám voda na vrchu stúpa v akomsi medzivalcí, a z rovnosti objemov dostávame $S_0 x = y(S - S_0)$. Na tomto mieste si intenzívnejšie začíname písať rovnice:

$$F = -\rho S_0 g(x + y),$$

$$F = -\rho S_0 g\left(1 + \frac{S_0}{S - S_0}\right),$$

$$F = -\rho S_0 g\frac{S}{S - S_0}x.$$

Dostali sme výslednú silu v podobe $F = -kx$ (kde $k = \rho S_0 g\frac{S}{S-S_0}$),a jasáme, keďže pre takúto silu (silu od pružiny) je nám už známy výsledok riešenia rovnice kmitov, a to $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Dosadzujeme:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho S_0 g\frac{S}{S-S_0}}}$$

a upravujeme:

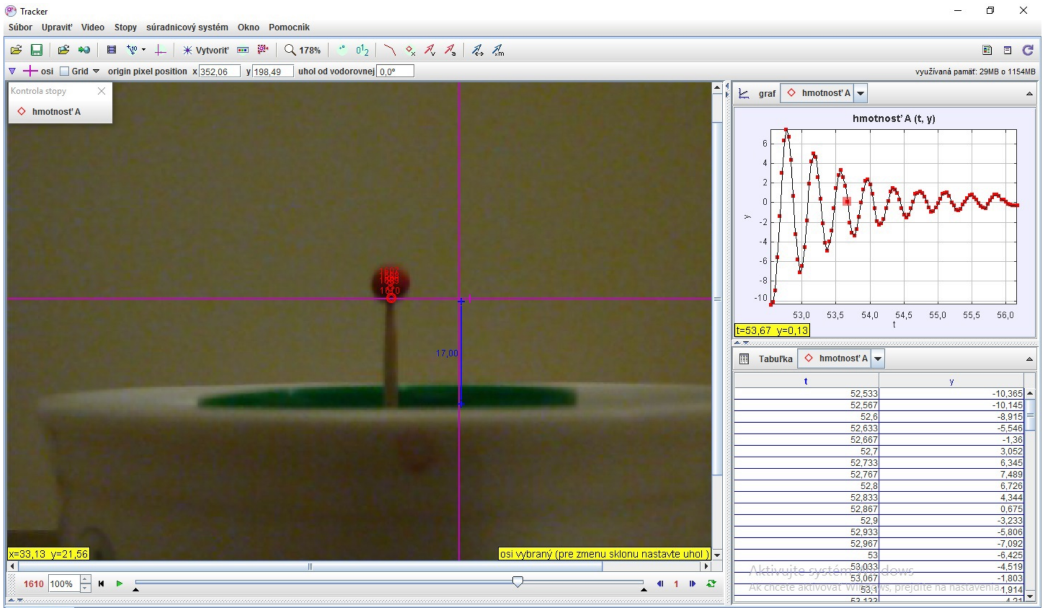
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho S_0 g}}\sqrt{1 - \frac{S_0}{S}}.$$

Takže sme sa dopracovali k jednoduchej predpovedi závislosti periódy na veľkosti nádoby. Je namieste sa zamyslieť, ako veľmi je ale táto predpoveď funkčná. I keď nám dáva dobrý predpoklad pre nekonečnú nádobu (skúste si vypočítať periódu kmitov na nekonečnej hladine, stačí len vhodne vynechávať kroky ukázaného riešenia), voda sa nepreskupuje nekonečne rýchlo, a teda nám vznikajú vlny (čo ste mnohí správne uviedli, ale až na výnimky nikto nevybudoval kauzálny reťazec medzi vlnami a zmenou periódy. Vo všeobecnosti je prudentné uvažovať korelácia ≠ kauzalita, t. j. to že sa veci dejú naraz, ešte nutne neznamená, že jedna je (priamo) príčinou/následkom druhej).

Samozrejme že vlny vznikajú i v malých nádobách, ale tam sú maličké, a teda nespôsobujú takú lokálnu zmenu hydrostatického tlaku, aby pozorovateľne zmenili periódu pohybu. O tlmení v závislosti od veľkosti nádoby zatiaľ nevieme povedať veľa, a tak sa už presuňme na samotný experiment.

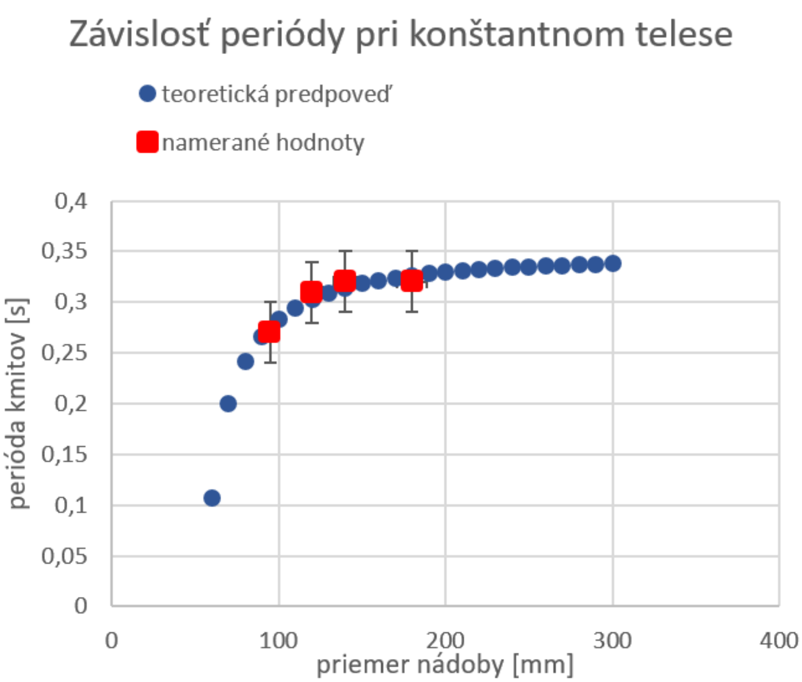
Tvar používaných nádob a telesa na experiment sme priblížili v teoretickom úvode. Teleso aj vieme rozkmitať vo vertikálnom smere, ostáva nám nejak to merať. Poloha oscilátora je časovo silno závislá vec, a teda je nerozumné žmúriť jedným okom na stopky (perióda) a druhým na pravítko (tlmenie prejavujúce sa klesajúcou amplitúdou). Za najvhodnejšie sa dá považovať analýza videozáznamu experimentu. Pohodlným nástrojom na videoanalýzu je program Tracker.

Obrázok 2: *Experimentálna aparatúra*




Obrázok 3: *Screenshot z Trackera*

Spracovanie získaných dát je už podľa ľubovôle, pre názornosť použijeme nejaký tabuľový procesor.




Obrázok 4: *Hľa, Excel*

Ako zistíme periódu kmitov? Perióda je definovaná ako časový rozdiel medzi dvoma po sebe idúcimi miestami rovnakej fázy. Takisto ju budeme zisťovať, t. j. nájdeme si (kvôli väčšej presnosti) niekoľko po sebe idúcich miním a odčítame čas, ktorý ich oddeľuje. Ako zistíme tlmiaci koeficient? Nápoveda v zadaní vyjavila exponenciálny pokles amplitúdy kmitov. Ak si k tomu pohľadáme čosi viac, nájdeme, že amplitúda by mala presnejšie vyzerať ako $A(t) = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}$, kde $A_0$ je počiatočná amplitúda a $\gamma$ je náš hľadaný tlmiaci koeficient. V skutočnosti ho môžeme zistiť napríklad tak, že po odstránení miním a maxím z našich dát ich skúsime (napríklad pomocou nejakej fitovacej funkcie v tabuľkovom procesore) preložiť exponenciálou, a následne z predpisu fitovacej rovnice vyčítať tlmiaci koeficient.

Tabuľka 1: Predpokladaná a nameraná závislosť periódy od priemeru nádoby

| priemer nádoby / mm | predpokladaná perióda / s | nameraná perióda / s | tlmiaci koeficient / 1/s |
|---:|---:|---:|---:|
| 95 | 0,28 | 0,27 | 0,47 |
| 120 | 0,30 | 0,31 | 0,39 |
| 140 | 0,31 | 0,32 | 0,25 |
| 180 | 0,33 | 0,32 | 0,26 |

Ako môžeme vidieť, tlmenie je menej výrazné pri väčších nádobách. Zdôvodniť sa to dá tak, že v menších nádobách mi kmitá väčšiu časť vody pomerne k celku, a teda oscilátor rýchlejšie stráca energiu. Taktiež si môžeme všimnúť, že presnosť experimentu bola výrazne znížená nízkou frekvenciou snímania (len 30 fps).

## 1.5 Sánkovačka

vzorák **MaťoB a Jimi**, opravoval **Jimi**

Najprv si skúsme uvedomiť, aké sily na kváder pôsobia. Budú to tiažová sila $F_g$, normálová sila od podložky $F_n$ a trecia sila $F_t$. Tiažovú silu môžeme rozdeliť na dve zložky – kolmú na naklonenú rovinu (jej účinok je vyrovnaný s účinkom normálovej sily $F_n$) a rovnobežnú s rovinou (v smere najväčšieho poklesu), označíme ju $F_r$. Rozložením síl zistíme, že kolmá zložka má veľkosť $F_n = mg\cos\alpha$ a rovnobežná má veľkosť $F_r = mg\sin\alpha$.

Pre treciu silu platí, že jej veľkosť je $F_t = fF_n$,[11] čo v našom prípade znamená, že $F_t = mg\cos\alpha\tan\alpha = mg\sin\alpha$. Jej smer je proti pohybu kvádra – t. j. proti smeru vektora aktuálnej rýchlosti. Tento výsledok je zaujímavý, lebo zisťujeme, že veľkosť sily $F_t = F_r$.

Teraz už vieme, že na kváder pôsobia dve sily spôsobujúce dvojicu zrýchlení – jedného smerom nadol[12] a jedného proti smeru jeho pohybu. Ako teda spolu pôsobia na sústavu? Pozrime, čo sa udeje za krátky čas $\Delta t$. Zaň stihne trecia sila zmenšiť celkovú rýchlosť $v_c$ kvádra o $\Delta v_c = \frac{F_t}{m}\Delta t$, zatiaľ čo pozdĺžna zložka tiažovej sily zväčší pozdĺžnu časť rýchlosti $v_y$ o $\Delta v_y = \frac{F_y}{m}\Delta t$. Tu si spomeňme, že $|F_r| = |F_t|$. To ľudskou rečou znamená, že o koľko sa zmenší celková rýchlosť kvádra, o toľko sa zvýši pozdĺžna zložka tejto rýchlosti. Matematicky zapísané $v_c + v_y = C$, kde $C$ je konštanta.

V pohode? No nie tak rýchlo! Je tu totiž istá zrada, ktorá si zaslúži nasledujúce úvahy. Na chybu vo vzoráku nás upozornil Filip Čermák, za čo mu na tomto mieste veľmi pekne a úprimne ďakujeme.

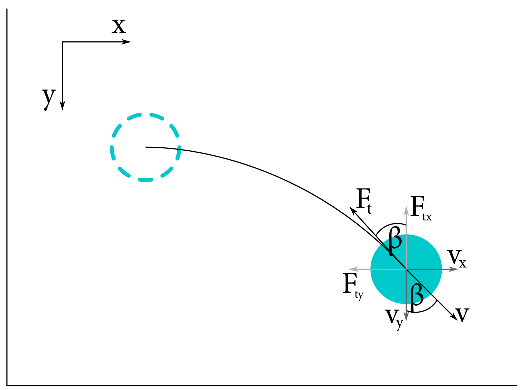
Chyba v tejto úvahe je totiž v tom, že platí síce, že $|F_r| = |F_t|$, ale už nie je pravda, že $\Delta v_c = \frac{F_t}{m}\Delta t$ (Správne to má byť $\Delta v_c = \frac{F_t - F_{rz}}{m}\Delta t$ kde $F_{rz}$ je istá zložka sily $F_t$). Do zmeny celkovej rýchlosti totiž okrem samotnej trecej sily prispieva

[11] Pozor, vo všeobecnosti platí $F_t \leq fF_n$, kde je $f$ je koeficient statického (!) šmykového trenia. V našom prípade je však $f$ nutne (vieme, že kvádrik sa už na začiatku pohybuje) koeficient dynamického trenia, a preto $F_t = fF_n$. Na tento fakt pre istotu upozorňujeme, aby ste sa v budúcnosti nedopúšťali podobných chýb.

[12] v smere najstrmšieho poklesu výšky na naklonenej rovine

aj sila $F_r$, ktorá vždy pôsobí tým istým smerom, ktorý nie je zhodný s $F_t$. Môžete si rozmyslieť, že tvrdenie $v_c + v_y = C$ platí v prvých fázach pohybu, keď je sila $F_t$ kolmá na $v$, no nie je vôbec jasné, že bude platiť vždy. Nerobme preto žiadne unáhlené závery a skúsme naozaj poctivo dokázať, že $v_c + v_y = C$.

Pozrieme sa teraz, čo sa udeje s kvádrom za malý čas $\Delta t$. Napíšme si teda pohybové rovnice pre pohyb kvádra. Celkovú rýchlosť kvádra môžeme rozložiť do spomínaných smerov na zložky $v_x$ a $v_y$. Keďže trecia sila $F_t$ pôsobí proti smeru aktuálnej rýchlosti $v_c$, má zložku v obidvoch smeroch. Veľkosť zložky trecej sily v danom smere je úmerná veľkosti zložky rýchlosti ku celkovej rýchlosti kvádra v danom smere (vyplýva to z jednoduchej geometrie – viď obrázok).




Obrázok 5: *Pohyb Jimiho kvádrika (ktorý má zhodou okolností kruhovú podstavu :P) s príslušným rozkladom do zložiek rýchlostí a síl v našej sústave.*

Preto zložky trecej sily v jednotlivých smeroch sú

$$F_{\text{tx}} = F_t \sin\beta = F\frac{v_x}{v_c},$$

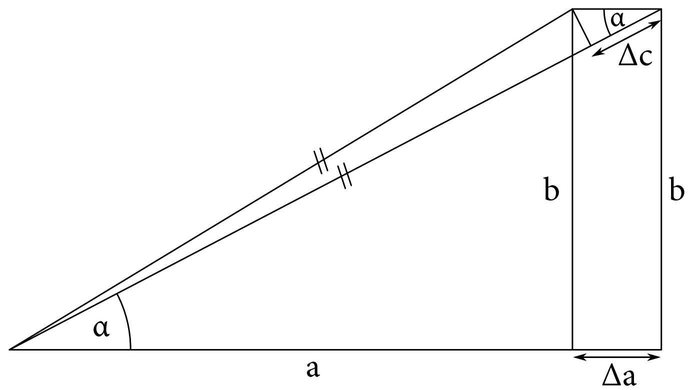
$$F_{\text{ty}} = F_t \cos\beta = F\frac{v_y}{v_c}.$$

Napíšme si teraz pohybové rovnice pre pohyb kvádra v smere najstrmšieho poklesu výšky ($y$) a v kolmom smere naň ($x$).

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -\frac{F_{\text{tx}}}{m} = \frac{F}{m}\left(-\frac{v_x}{v_c}\right),$$

$$a_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{F_r}{m} - \frac{F_{\text{ty}}}{m} = \frac{F}{m}\left(1 - \frac{v_y}{v_c}\right).$$

Skúsme si teraz ešte vypočítať, ako súvisí zmena celkovej rýchlosti $\Delta v_c$ so zmenou jej zložiek v $y$-ovom ($\Delta v_y$) a $x$-ovom smere ($\Delta v_x$). Vieme, že platí $v_c^2 = v_x^2 + v_y^2$. Ide teda o Pytagorovu vetu. Pre lepšiu predstavivovosť sa nám zíde nasledujúca geometrická interpretácia. Predstavme si pravouhlý trojuholník s preponou dĺžky $c$ a odvesnami s dĺžkami $a$ a $b$.




Obrázok 6: *Dve šikmé čiarky naozaj chcú značiť rovnobežnosť. Môžeme si to dovoliť, lebo pri malej zmene $\Delta c$ sa $\alpha$ zmení iba málo.*

Pre pravouhlý trojuholník platí Pytagorova veta $c^2 = a^2 + b^2$. Ak zväčšíme jednu odvesnu o $\Delta a$, odvesna sa zväčší (podobnosť trojuholníkov) o (približne)

$$\Delta c = \Delta a \cos(\alpha) = \frac{a}{c}\Delta a,$$

Pre tých z Vás, ktorý majú radšej výpočty: k rovnakému výsledku sa dopracujeme, ak od $(c + \Delta c)^2$ odpočítame $c^2$ a zanedbáme $(\Delta c)^2$ a $(\Delta a)^2$[13],

$$(c + \Delta c)^2 - c^2 = \left((a + \Delta a)^2 + b^2\right) - (a^2 + b^2),$$

$$c^2 + 2c\Delta c + \Delta c^2 - c^2 = \left(a^2 + 2a\Delta a + \Delta a^2\right) - (a^2 + b^2),$$

$$2c\Delta c \approx 2a\Delta a,$$

$$\Delta c \approx \frac{a}{c}\Delta a.$$

Obe úvahy môžeme rozšíriť aj na druhú odvesnu, a preto

$$\Delta v_c = \frac{v_x}{v_c}\Delta v_x + \frac{v_y}{v_c}\Delta v_y.$$

[13] Ak $\Delta x/x \sim 10^{-3}$, tak $(\Delta x/x)^2 \sim 10^{-6}$, čiže o niekoľko rádov menšie.

Skúsme teraz vypočítať, čomu je rovné $\Delta v_c + \Delta v_y$. Ak nám víde, že je to nula, tak sme vyhrali, lebo potom musí platiť, že súčet $v_y + v_c$ je konštantný.

$$\Delta v_c + \Delta v_y = \left(\frac{v_x}{v_c}\Delta v_x + \frac{v_y}{v_c}\Delta v_y\right) + \Delta v_y = \left(-\left(\frac{v_x}{v_c}\right)^2 \frac{F}{m} + \frac{v_y}{v_c}\left(1 - \frac{v_y}{v_c}\right)\frac{F}{m}\right) + \left(1 - \frac{v_y}{v_c}\right)\frac{F}{m},$$

$$= -\left(\frac{v_x^2}{v_c^2}\right)\frac{F}{m} + \left(1 - \frac{v_y}{v_c}\right)\left(1 + \frac{v_y}{v_c}\right)\frac{F}{m},$$

$$= \left(1 - \frac{v_x^2 + v_y^2}{v_c^2}\right)\frac{F}{m} = 0,$$

keďže $v_x$ a $v_y$ sú iba zložky $v_c$, a teda $v_c^2 = v_x^2 + v_y^2$. Naozaj teda platí $\Delta v_c + \Delta v_y = 0$, a to vo všetkých fázach pohybu! Preto sa súčet $v_c + v_y$ zachováva. Teda matematicky zapísané ($C$ je konštanta):

$$v_c + v_y = C!$$

Na začiatku pohybu je $v_y = 0$ a $v_c = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_x = v$, preto $C = v$. Teraz potom, čo sme si už naozaj poctivo dokázali tvrdenie $v_c + v_y = C$, sa pozrime sa na ustálený stav pohybu kvádra. Ten nastane vtedy, keď sa sily naň pôsobiace vyrovnajú. No, a to sa stane iba v prípade, keď sa kváder bude hýbať v smere najväčšieho poklesu (áno, bude to trvať nekonečne dlho). Vzťah pre rýchlosť $v_c + v_y = v$ bude platiť aj vtedy. Teda platí $v_c = v_y$, lebo $v_c$ má iba zložku v smere najstrmšieho poklesu výšky na naklonenej rovine. Preto môžeme dosadiť $v_y + v_y = 2v_y = C = v$, a teda $v_y$ v ustálenom stave je rovná $v/2$.

Takto sme zistili, že po dlhom čase bude mať rýchlosť rovnaký smer, ako je smer najväčšieho poklesu a jej veľkosť bude $\frac{v}{2}$. Ešte by ste sa mohli spýtať, či by kváder nemohol počas svojho pohybu zastať. Sila $F_r$ však pôsobí neustále, a až keď nastane ustálený stav, jej smer sa vyrovná so silou $F_t$, a preto v každom okamihu urýchľuje kvádrik v smere najstrmšieho poklesu výšky, čím mu bráni v tom, aby sa zastavil.

**Poznámka pre simulantov v Exceli a podobné tvory**

Mnoho z Vás sa numerickou simuláciou dopracovalo k správnemu výsledku. A zistili ste, že v takom prípade, nech je $\alpha$ akékoľvek, výsledok to neovplyvní. V tomto okamihu by ste mali spozornieť, pretože sa tu deje niečo podozrivé. Navyše podozrivá je aj jedna polovica. Odteraz by Vám mala v hlave svietiť kontrolka, že ak je výsledok jednoduchý, je možné, že sa k výsledku dá dopracovať aj s použitím papiera a pera.

**Poznámka pre drtičov, dostatočne skazených deriváciami, integrálmi či diferenciálnymi rovnicami**

Niekedy je riešenie fyzikálneho problému naozaj jednoduché, no vyžaduje si to dostatočnú pozornosť na všetky detaily problému a dôsledné uvedomenie si toho, čo tieto fakty naozaj znamenajú.

## 1.6 Neskoro plakať...

vzorák **MaťoB**, opravoval **MaťoB**

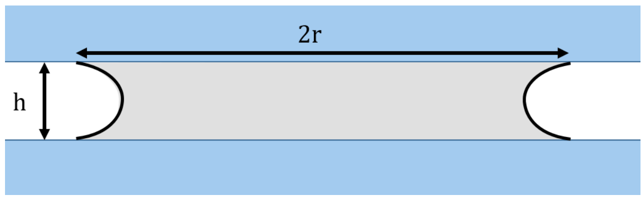
Riešenie tejto úlohy si rozdelíme na dve časti. Najprv sa pokúsime nájsť silu, ktorou musíme dosky od seba oddeľovať, ako funkciu vzdialenosti $h$ medzi nimi. Ak sa nám to podarí, skúsime následne odhadnúť aj prácu, ktorú musíme vykonať na to, aby sme dosky od seba úplne oddelili. Tí z Vás, ktorí všetky tieto veci už zvládli, môžu rovno preskočiť väčšinu vzoráku a prečítať si niečo z okienka pre drtičov. Pustime sa do riešenia!

**Akou silou musíme pôsobiť?**

Ukážeme si dva spôsoby výpočtu. Oba sú niečím poučné. Na začiatok však spomenieme, že rovno zanedbáme tiažovú silu pôsobiacu na mlieko, keďže očakávame, že bude rádovo menšia ako sily povrchového napätia. Kto neverí, nech si odhadne túto silu, a potom ju porovná s výsledkom ;)

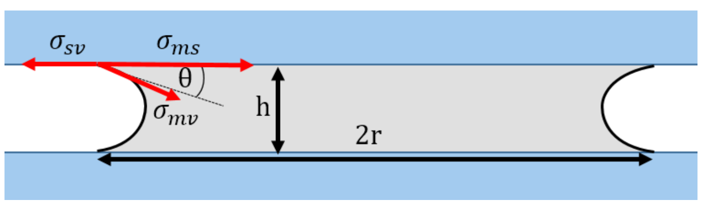
**Spôsob prvý: Výpočet cez sily a tlaky**

Nakreslime si kruhový fľak z profilu. Asi tušíme, že to bude vyzerať nejako takto:




Obrázok 7: *Profil kruhového fľaku*

Ako však presne vyzerá tvar rozhrania medzi mliekom a vzduchom pri pohľade zboku? Je to časť kružnice? No, nie tak úplne. Pre $h << R$ si však pohodlne vystačíme s tým, že to časť kružnice je. Keďže vo fyzike častokrát hľadáme iba približný výsledok, avšak stále zachytávajúci podstatné javy, s takýmto priblížením si bohato vystačíme[14]. Zvedavosť záujemcov, ktorí by chceli vedieť viac, bude uspokojená na konci tohoto vzoráku.

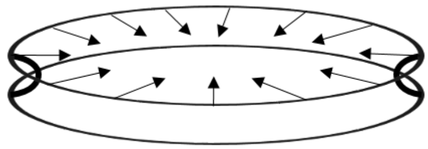



Obrázok 8: *Pôsobiace sily*

Na rozhraní mlieka, sklenenej podložky, a vzduchu pôsobia sily povrchového napätia v smere pozdĺžnom s príslušným rozhraním. Ak označíme povrchové napätie medzi mliekom a vzduchom $\gamma_{\mathrm{mv}}$, mliekom a sklom ako $\gamma_{\mathrm{ms}}$ a medzi sklom a vzduchom $\gamma_{\mathrm{sv}}$, tak na rozhraní musí platiť rovnováha síl, z ktorej dostaneme vzťah $\gamma_{\mathrm{mv}} \cos(\theta) + \gamma_{\mathrm{ms}} - \gamma_{\mathrm{sv}} = 0$[15], kde $\theta$ je kontaktný uhol vyznačený na obrázku.

Keďže si chceme veci čo najviac zjednodušiť, urobíme horný odhad – povieme, že mliečko dokonale zmáča sklo, t. j. že $\theta = 0$. Ďalej predpokladajme, že povrchové napätie medzi sklom a vzduchom je väčšie ako medzi sklom a mliekom[16]. Odteraz teda budeme pracovať iba s jednou hodnotou povrchového napätia $\gamma = \gamma_{\mathrm{mv}}$.

[14] Ak sa takýmto postupom aj k niečomu dopočítame a nebude to úplne odveci, môžeme povedať, že naše priblíženie nebolo od veci.
[15] Táto rovnováha síl v princípe definuje kontaktný uhol.
[16] Ak by sme ho aj uvažovali, len by to zmenilo efektívnu hodnotu $\gamma$, s ktorou počítame ďalej, no nie princíp výpočtu.



Obrázok 9: *Sily povrchového napätia na rozhraní mlieka a skla*

Pri pohľade zhora vytvára mlieko kruhový fľak s polomerom $R$. Na rozhraní medzi mliekom a vzduchom na povrchu skla tak pôsobí celková sila

$$F = \gamma \cdot 2\pi R.$$

Keďže máme dve podložky, sú dve aj rozhrania, a preto je celková sila rovná $2 \cdot \gamma \cdot 2\pi R$. Povedali sme, že mlieko dokonale zmáča povrch skla, takže táto sila sa snaží mlieko rozliať po povrchu, t. j. pri pohľade zhora sa snaží zväčšiť kruhový fľak. Tlak v kvapaline je teda menší ako atmosférický, čo zase vytvára silu, ktorú musíme prekonať, ak chceme podložky od seba oddeliť.

Spomeňme si na základnú školu, kde nás učili o Pascalovom zákone. Ten hovorí, že ak na voľný povrch kvapaliny pôsobíme silou, vo všetkých miestach kvapaliny vzniká rovnaký tlak. Ak chceme zistiť hodnotu tohoto tlaku, musíme vypočítať plochu rozhrania medzi mliekom a vzduchom. Táto plocha je v princípe časť plášťa torusu. Fuj! Drtiči to majú povinne za domácu úlohu[17], my ostatní si vystačíme s tým, že si povieme, že táto plocha nebude (rádovo) väčšia ako plocha plášťa valca s príslušnými rozmermi.

Odtiaľ získame hodnotu rozdielu tlakov medzi vnútrom mlieka a okolím[18],

$$\Delta p = -\frac{\gamma 4\pi R}{2\pi R h} = -\frac{2\gamma}{h}.$$

Tento tlak je rovnaký vo všetkých miestach kvapaliny, a teda sklenená podložka je pritláčaná k druhej podložke silou

$$F = \pi R^2 \cdot \Delta p = \pi R^2 \frac{2\gamma}{h}.$$

Predtým, než si ukážeme druhý spôsob, si rovno skúsme vypočítať, aká veľká táto sila je. Hodnota povrchového napätia pre mlieko je $\gamma \approx 50$ mN/m.[19] Po dosadení hodnôt zo zadania sa dopracujeme k hodnote

$$F \approx 2400 \text{ N}.$$

Čo je teda poriadna sila! Vidíme, že tiaž dosky a aj samotného mlieka je zanedbateľná. No je to daň za to, že pani kuchárky zjavne sklenené podložky dobre vyleštili :)

Uff. Bolo toho celkom dosť, no poďme ďalej a ukážme si druhý spôsob výpočtu.

[17] Dá sa to aj bez integrálov. Návod: https://en.wikipedia.org/wiki/Pappus%27s_centroid_theorem

[18] Záporné znamienko je za to, že tlak v mliečku je menší ako atmosférický tlak okolo.

[19] Ak použijeme hodnotu pre vodu (72 mN/m), nedopustíme sa veľkej chyby. Spomínaná hodnota pochádza z *A. J. Bertsch, Surface tension of whole and skim-milk between 18 and 135 °C; Journal of Dairy Research (1983), 50, 259-26*

**Spôsob druhý: Metóda virtuálnych prác**

Metóda virtuálnych prác nie je práve vec, ktorá by sa učila na strednej škole, no napriek tomu to nie je nič ťažké, čo by ste nezvládli už aj Vy. Je založená na tom, že sa pozrieme na situáciu v stave statickej rovnováhy. Potom si predstavíme, že sa súčasti systému posunú o nejaké maličké $\Delta x$ a spočítame všetky možné práce, ktoré boli na systéme vykonané rôznymi (aktívnymi) silami. Princíp virtuálnych prác potom hovorí, že ak bol systém predtým v rovnováhe, všetky tieto práce rôznych síl musia dať v súčte nulu. Prečo niečo takéto funguje, sa dozviete buď na vysokej škole, alebo na sústredku. O tejto metóde môžete nájsť niečo viac tu[20]. Najlepšie tento princíp pochopíte na príklade, a preto si pomocou neho túto úlohu rovno vyriešime.

Pre jednoduchosť budeme mlieko medzi podložkami modelovať ako valec. Predstavme si, že pôsobíme silou $F$ na hornú podložku, čím ju posunieme o $\Delta h$. Potom vykonáme prácu $F\Delta h$. Zároveň narastie aj výška valca o $\Delta h$. Keďže je valec vyšší, tak plocha plášťa narastie o $2\pi R\Delta h$. Plocha plášťa valca definuje plochu rozhrania medzi mliekom a vzduchom, a teda ovplyvňuje aj energiu povrchového napätia. Takže vieme, že zmena povrchovej energie je $\gamma \cdot 2\pi R\Delta h$.

Položením týchto dvoch energií do rovnosti dospejeme k sile $F = \gamma 2\pi R$. Vidíme, že výsledok je iný ako v predchádzajúcom prípade. Kde nastala chyba? Zabudli sme totiž na to, že objem mlieka medzi podložkami musí zostať konštantný, čo sa prejaví tak, že sa polomer podstavy valca musí zmenšiť o nejaké $\Delta R$. Tento polomer prichádza do hry na rozhraní mlieko–sklo, ktoré má plochu $2 \cdot \pi R^2$.

Objem mlieka sa musí zachovať, preto $2\pi(R + \Delta r)(h + \Delta h) = 2\pi Rh$. Odtiaľ zanedbaním členu s $\Delta r\Delta h$ získame $\Delta r \approx -R\frac{\Delta h}{h}$. Rozdiel plôch rozhrania je medzikružie, teda zmena povrchovej energie na tomto rozhraní bude $\gamma \cdot \pi(R + \Delta r)^2 - \pi R^2 \approx \gamma 2\pi R\Delta R = -\gamma 2\pi R^2 \frac{\Delta h}{h}$.

Položením všetkých príspevkov do rovnosti,

$$F\Delta h + \gamma \cdot 2\pi R\Delta h - \gamma 2\pi R^2 \frac{\Delta h}{h} = 0,$$

získame hodnotu

$$F = \gamma \left(2\pi R + \pi R^2 \frac{2}{h}\right) \approx \pi R^2 \frac{2\gamma}{h},$$

kde sme zanedbali prvý člen, lebo $R/h \gg 1$.[21]

**Akú prácu vykonáme?**

Už vieme, že sila závisí nepriamo úmerne od vzdialenosti $h$ medzi doskami. Poďme odhadnúť prácu.

Jeden spôsob je urobiť horný odhad, a to nasledovne. Vieme, že sila závisí nepriamo úmerne od $h$, zoberme teda veľkosť tejto sily na začiatku a vynásobme ju nejakou *rozumnou* vzdialenosťou $\Delta h$, o ktorú musíme posunúť sklenenú podložku. Za rozumnú vzdialenosť možno napríklad považovať výšku vrstvy mlieka v prípade, že by bolo rozliate iba na jednej podložke. Táto vrstva bude mať najviac niekoľko milimetrov, preto $\Delta h \approx 1$ mm (horný odhad)[22].

[20] https://en.wikipedia.org/wiki/Virtual_work

[21] Tento člen by vystupoval aj vo výsledku získanom prvým spôsobom, ale tam sme ho na jednom mieste potichu zanedbali. Skúste zistiť kde ;)

[22] Postupujeme metódou fyzikálnej intuície. Autor vzoráku si nevie predstaviť, že by mu rozliate mlieko na stole vytvorilo centimetrovú vrstvu, prípadne väčšiu :)

Prvý odhad teda máme,

$$W \approx F(h)\Delta h = 2{,}4\ \mathrm{J}.$$

Ak chceme niečo presnejšie, môžeme postupovať nasledovne. Uvedomíme si, že sila sa mení podľa vzdialenosti, a teda sčítame veľa malých príspevkov typu $F(x)\Delta x$. Keď je $\Delta x$ „nekonečne malé", dostávame integrál. Ďalej výšku vrstvy, keď je mlieko rozliate iba na jednej podložke, vieme zistiť z minimalizácie energie (potenciálna + povrchová)[23]. Z minimalizácie energie vieme odhadnúť výšku vrstvy ako $2\sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \approx 1{,}4\ \mathrm{mm}$. Intuícia nebola mimo.

O niečo lepší odhad teda získame ako

$$W = \int_h^{h+\Delta h} F(x)dx = 2\pi R^2 \gamma \ln\left(1 + \frac{\Delta h}{h}\right) \approx 0{,}07\ \mathrm{J}.$$

Čo je o dosť menej! V skutočnosti to môže byť aj o kúsok viac, pretože ak budeme podložku dvíhať pomaly, je dosť možné, že sa nám podarí mliečko vytiahnuť aj do väčšej výšky ako tej, pri ktorej bude existovať po tom, ako sa sklenená podložka od neho oddelí. Centimetre to však asi nebudú, a keďže táto výška vystupuje pod logaritmom, výsledok sa zmení len o máličko.

Napokon si ešte spomenňme na to, že aj podložka niečo váži. Pri posune sklenenej podložky vážiacej $m = 1\ \mathrm{kg}$ o 1 mm vykonáme ešte navyše prácu

$$W_g = mgh \approx 0{,}01\ \mathrm{J},$$

čo je približne sedemkrát menej ako práca, ktorú vykonáme kvôli povrchovému napätiu. Ďalším poučením je, že práca je síce relatívne malá, ale sklenené podložky sa nám ani tak tak ľahko nepodarí oddeliť.

**Okienko pre drtičov a zopár poznámok**

Tí z Vás, ktorých zaujalo povrchové napätie, si môžu pozrieť prednášku o tejto téme z Akadémie Trojstenu[24]. Tí z Vás, ktorí majú celý tento príklad už v malíčku, si môžu pozrieť niečo o Youngovi a Laplacovi[25]. Tvar mliečka medzi doskami, bude pri zanedbaní jeho tiaže katenoida[26] s dodatočnou podmienkou na fixovaný objem (polomer fľaku a vzdialenosť medzi doskami spolu súvisia). S ňou ste sa mohli stretnúť aj v FX – pohľadajte v archíve. Takéto veci, ako sme riešili v tomto príklade, sa volajú *capillary bridge*.

## 1.7 Pole neorané

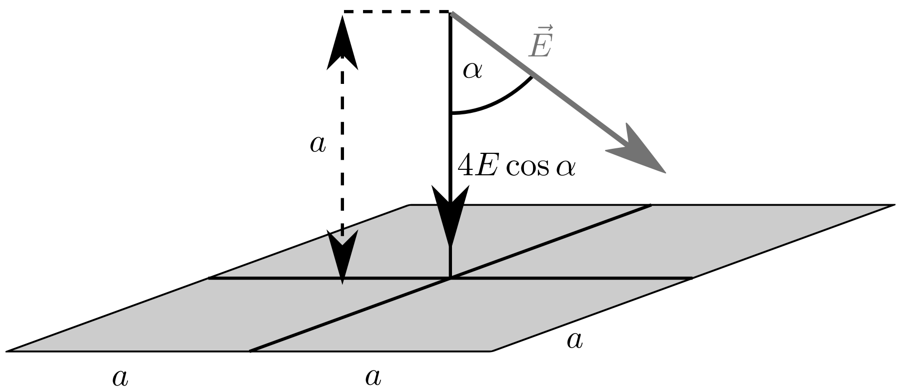
vzorák **Dušan**, opravoval **Dušan**

Na vyriešenie tejto úlohy bolo potrebné využiť dve veci. Princíp superpozície a škálovanie. Vysvetlíme si postupne obe, a to na konkrétnych úlohách.[27]

Začnime tou druhou zo zadania, kde nás zaujíma aká je veľkosť intenzity elektrického poľa nad stredom homogénne nabitej štvorcovej dosky s hranou $2a$ vo výške $a$. Tu využijeme princíp superpozície[28]. Ten hovorí asi

[23] Tí z Vás, ktorí nevedia ako na to, pozrite si v archíve príklad 6 – Mláčka z 1. kola zimnej časti 27. ročníka FKS.
[24] https://youtu.be/vWdCRWlZrQk
[25] https://en.wikipedia.org/wiki/Young%E2%80%93Laplace_equation
[26] V angličtine *catenoid*
[27] Mohli ste si to aj poriadne porátať, no neboli by to najkrajšie integrály… ;-)
[28] Princíp superpozície je založený na linearite. V tomto prípade na linearite intenzity elektrického poľa v takom zmysle, že intenzita elektrického pola v určitom mieste je daná súčtom intenzít elektrických polí generovanými jednotlivými malými nábojmi. Pozor! Princíp superpozície nemožno použiť ak opisovaná veličina nie je v takomto zmysle lineárna.

nasledovné: „Ak máme systémy, ktorých fyzikálne vlastnosti poznáme, a máme aj nejaký iný neznámy systém, ktorý vieme vyskadať pomocou tých známych, tak aj jeho fyzikálne vlastnosti vyskladáme rovnako.“ Na prvé počutie to je ťažko pochopiteľné, no ukážeme si to na našej úlohe. To, čo nás zaujíma, je vlastne výsledná intenzita elektrického poľa nad rohmi nie jednej, ale štyroch dosiek. Intenzitu nad jedným rohom poznáme, tá má veľkosť $E$ a od kolmice na platňu je odchýlená o uhol $\alpha$. No a keďže sú teraz platne štyri, tak výsledná intenzita nad stredom dvojnásobne veľkej dosky bude iba vektorovým súčtom štyroch rovnako veľkých intenzít. Zložky rovnobežné s rovinou dosky sa pobijú a tie kolmé budú mať v súčte hodnotu $E_1 = 4E\cos\alpha$.




Obrázok 10: *skúmaná doska*

A teraz tá prvá úloha. V nej nás zaujíma elektrická intenzita v polovičnej výške, čiže $a/2$, no aj rozmery platne sú polovičné, čiže je to ten istý problém ako pred chvíľou, len je zmenšený.[29] Teraz príde na rad škálovanie[30]. To hovorí o tom, že ak vezmeme dva podobné systémy, tak aj ich fyzikálne vlastnosti budú podobné s takým koeficientom, aký dostaneme zo zákona, ktorý popisuje daný systém. Opäť to najlepšie ukážeme na našom konkrétnom príklade. Snáď už všetci vieme, že veľkosť elektrického poľa popisuje Coulombov zákon. Bežne ho poznáte v tvare pre bodový náboj:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

My však máme platňu, ktorá predstavuje veľa takýchto nábojov umiestnených vedľa seba, takže intenzita elektrického poľa bude daná súčtom veľa príspevkov typu $\frac{Q}{r^2}$, kde $r$ je vzdialenosť náboja na platni od miesta, kde meriame intenzitu elektrického poľa. Keďže náboj na platni je rovnomerne rozmiestnený, znamená to, že jeho plošná hustota $\sigma$ je konštantná. Ak si predstavíme platňu rozsekanú na veľa maličkých štvorčekov dĺžky $\Delta x$, tak každý takýto štvorček nesie náboj $Q_i = \sigma(\Delta x)^2$ a celková intenzita elektrického poľa je daná výrazom typu

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{Q_i}{r_i^2} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{(\Delta x)^2}{r_i^2}.$$

[29]Keďže predpokladáme, že platňa je veľmi tenká, je to prakticky dvojrozmerné teleso, a teda platňa polovičných rozmerov je naozaj tá, na ktorú sa pýtame v prvej otázke.

[30]Pozor, škálovanie možno použiť, iba vtedy ak sa parametre systému vyskytujú v podobe nejakých mocnín. Ak by vystupovali napríklad ako argument kosínusu, tak ho použiť nevieme. Matematicky zapísané je škálovanie založené na myšlienke, že pre isté vhodné funkcie platí $f(\alpha x) = \alpha^n f(x)$.

Teraz sa už iba zamyslime. Vieme, že rozmer platne je $a$, čiže polovičný oproti tomu predchádzajúcemu. Teda celkový náboj na platni klesne na štvrtinu a strana každého štvorčeka $\Delta x$ sa zmenší o polovicu. Rovnako aj vzdialenosť každého štvorčeka od bodu kde meriame intenzitu klesne na polovicu, takže pomer $\frac{(\Delta x)^2}{r^2}$ sa pod $\sum$ nezmení. Keďže sa nezmení ani jeden takýto príspevok, tak sa nezmení ani ich súčet. Z toho by už malo byť všetkým jasné, že tu musí vyjsť rovnaký výsledok ako predtým, čiže $E_2 = E_1 = 4E \cos \alpha$.