

Riešenia 1. kola zimnej časti

1.1 Odvážne sa odvážme

vzorák **Zuzka**, opravovala **Zuzka**

Vedúca Katka sa balila do Nórska naozaj veľmi narychlo. Pri balení zažila menšiu krízu s váhou¹. Ako možno totiž viete, v lietadle je hmotnosť batožiny pre pasažierov limitovaná. Katka má doma starú klasickú osobnú váhu. Váži si na nej kufor do lietadla, keďže je však váha trošku staršia, Katka si nie je istá tým, čo váha ukáže.

Ukáže stará opoužívaná váha väčšiu alebo menšiu hodnotu na svojej stupnici? Prečo? Ako sa časom zmenia vlastnosti pružiny používanej vo váhe?

Ak náhodou neviete, ako fungujú váhy, odporúčame pozrieť si prvý príklad prvého kola zimnej série minulého ročníka.

Začneme od poslednej otázky, ktorá je kľúčovou a zároveň najťažšiou. Čo sa stane s pružinou, keď ju budeme veľa naťahovať a stláčať? Ťažko povedať. Pri stláčaní pružiny jej dodávame energiu, a časť tejto energie sa spotrebuje na vykonanie zmien v jej vnútornej štruktúre... Určiť na základe takýchto a im podobných úvah, či bude pružina po tisícich stlačení ťažšia alebo ľahšia, nie je vôbec jednoduchá záležitosť. Keďže málokto z nás naťahoval a stláčal pružinu 1000-krát za sebou a skúmal jej pevnosť, nevieme si dobre predstaviť, ako to s tou našou pružinou bude.

Hmm... naozaj nevieme? Spomeňme si na autá. V tlmivoch áut sú pružiny, ktoré sa pri každej nerovnosti cesty stláčajú a rozťahujú. A ako sa správa naše auto, keď máme staré pružiny? Predsa cítime každú jednu jamu, ako keby auto žiadne pružiny nemalo. Môžeme si pogratulovať, týmto elementárnym pozorovaním sme zistili, že stará pružina bude tvrdšia, a to aj bez púšťania sa do náročných úvah. (Za predpokladu, že pružina vo váhe je podobná tej v aute.)²

Po tisícich natiahnutí a stlačení nám teda pružina pri rovnakom vychýlení bude klásť väčší odpor ako na začiatku. Teda bude proti nám pôsobiť väčšou silou $F = kx$, kde x je vzdialenosť, o ktorú sme pružinu vychýlili a k je tuhosť pružiny.

Teraz si vysvetlíme odpoveď na zvyšnú otázku. Ako iste viete, váha funguje nasledovne: Keď položíme objekt na váhu, pružina v nej sa pôsobením tiaže objektu $F_G = mg$ stlačí, pretože túto silu musí vykompenzovať vlastnou silou pružnosti $F = kx$. Ciferník následne ukáže hmotnosť $m = \frac{k}{g}x$ v závislosti od skrátenia celkovej dĺžky pružiny x . Prevod medzi ciferníkom a pružinou je z výroby nakalibrovaný na počiatočnú tuhosť pružiny k .

Ak sa však používaním váhy tuhosť našej pružiny zväčší, bude sa musieť pri tom istom objekte zmenšiť x , lebo sila musí pôsobiť stále tá istá. Síce je jasné, že v dôsledku opotrebovania pružiny dôjde ku posunutiu nulového bodu, avšak váha, ktorá reflektuje len predĺženie, má dojem, že na váhe stojí ľahší predmet a ukáže teda menšiu hmotnosť.

¹Nie, neprejedla sa zo stresu až tak, že by pribrala...

²Najznámejší príklad tuhnutia materiálov je tzv. tvárnenie za studena (work hardening). Princíp spočíva v tom, že po prekročení medze pevnosti dôjde k presúvaniu a vytváraniu zlomov a nepravidelností v štruktúre materiálu, dôsledkom čoho je stvrdnutie materiálu. V našom prípade síce nedochádza ku prekročeniu medze pružnosti, ale nie je ťažké si predstaviť, že podobné procesy môžu vzniknúť v materiáli, ktorý je tisíckrát deformovaný.

z ktorej jednoducho dostaneme čas, za ktorý Baklažchánove vojsko dorazí k okraju múru

$$t_1 = \frac{d}{\sqrt{v^2 - u^2}}.$$

Teraz sa nachvíľu pozastavíme a všimneme si, že z výsledku vyplýva očakávaný fakt a to, že aby bol výsledok v obore reálnych čísel, musí platiť nerovnosť $v > u$. Veď predsa na to, aby sa s murármí stretli, musí byť už vôbec iba zložka \vec{v} v smere na východ rovná \vec{u} . V zadaní sa nás však pýtajú na najkratší celkový čas (tzn. až do dediny). Potrebujeme teda zistiť aj čas t_2 , za ktorý prejde vojsko úsek medzi bod – dedina. Tu si uvedomíme, že dĺžku spoločnej hrany trojuholníkov, čiže dĺžku múru, už poznáme. Je to ut_1 . Opäť si spomenieme na Pythagorovu vetu a dostávame

$$v^2 t_2^2 = u^2 t_1^2 + d'^2.$$

Po dosadení t_1 a pár drobných úpravách dostame hodnotu t_2 :

$$t_2 = \sqrt{\frac{u^2}{v^2} \cdot \frac{d^2 - d'^2}{v^2 - u^2} + \frac{d'^2}{v^2 - u^2}}.$$

Celkový čas už dostaneme jednoducho iba súčtom t_1 a t_2 :

$$t_{\text{celk}} = \frac{d}{\sqrt{v^2 - u^2}} + \sqrt{\frac{u^2}{v^2} \cdot \frac{d^2 - d'^2}{v^2 - u^2} + \frac{d'^2}{v^2 - u^2}}.$$

Komentár opravovateľky

Mnohí ste mali nutkanie vyjadriť dráhu aj pomocou uhla. Označme teda uhol, ktorý zvierajú kolmice k múru so smerom pohybu Baklažchánovho vojska α . Najjednoduchší spôsob, akým sa dá zistiť jeho hodnota, je použitie goniometrickej funkcie $\sin x$ a k nej inverznej funkcie $\arcsin x$.

$$\sin \alpha = \frac{ut_1}{vt_1} = \frac{u}{v},$$

$$\alpha = \arcsin \frac{u}{v}.$$

Toto samozrejme platí pri zrejmom predpoklade, ktorý je úlohou vyžadovaný, a to $v > u$ a dáva to rozumné výsledky:

- ak $v \gg u$, potom uhol α je malý,
- ak sa u blíži k hodnote v , uhol je veľký.⁶

Podobným spôsobom, aj keď trochu komplikovanejšie, sa dal vyjadriť uhol, pod ktorým mali smerovať od múru k dedine.

Ďalším milým prekvapením pre mňa bola poznámka, že múr na západ nemusí byť nekonečne dlhý. Označme jeho pôvodnú dĺžku x . Ak platí nerovnosť $x < ut_1$, vojakom sa viac než na juhovýchod oplatí ísť na juhozápad, a celkový čas potom bude

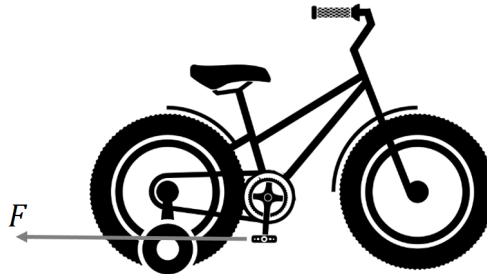
$$t_{\text{celk}} = \frac{\sqrt{d^2 + x^2} + \sqrt{d'^2 + x^2}}{v}.$$

⁶Ďakujem Jakubovi Hluškovi za veľmi peknú formuláciu tohoto rozboru :).

1.3 Pomocné kolieska

vzorák Jaro a Kvík, opravoval Kvík

Vo FKS sme sa nedávno hrali s klasickým detským bicyklom s pomocnými kolieskami (takým, kde brzdíte točením pedálov smerom dozadu). Bicykel stál pokojne na zemi, keď tu prišla Tinka a priviazala o pedál, ktorý sa nachádzal v najnižšej možnej pozícii, lanko. Následne potiahla za koniec lanka smerom dozadu. Ktorým smerom sa bicykel pohol, a prečo?



Táto úloha sa ukázala ako skutočne divotvorná, hoci otvorene vyhlasujeme, že nebola ťažká. Primitívnym a pritom dobrým riešením bolo proste zobrať bicykel a skúsiť to – aj menej bystrý riešiteľ tak mohol prísť na to, že sa bicykel pohne dozadu.⁷ I tak by sa však patrilo k tomu dopísať niekoľko teplých slov a fyzikálne to zdôvodniť. Teoretici však bicykle z princípu nemajú, takže si museli vystačiť s úvahou. Ani tá však nebola nijak ťažká.

Takže sa pozrime najskôr na to, aké vonkajšie sily na náš bicykel pôsobia. Vo vertikálnom smere sú to tiažová sila a normálové sily od podložky pôsobiace na kolesá bicykla, ktoré kompenzujú práve tiaž bicykla. Je teda zjavné, že vo zvislom smere sa nič zaujímavé diať nebude. Kolké to prekvapenie.

Čiže budeme skúmať len horizontálny smer. Tam je to sila \vec{F} , ktorou ťaháme za pedál smerom dozadu a trecie sily medzi kolesami a podložkou. Trecie sily pôsobia vždy proti smeru pohybu. V prípade, že kolesá neprešmykujú, pre ich veľkosti platí $F_t \leq \mu_s N$, kde N je veľkosť normálovej sily medzi kolesom a podložkou.

Teraz potiahneme pedál dozadu nejakou silou, dostatočne malou na to, aby koleso nezačalo prešmykovať, a zamyslime sa nad tým, čo sa stane. Keby sme zadné koleso nadvihli tak, aby sa nedotýkalo podložky, potom by sme jasne videli, že sa roztočí tým istým smerom, ako pedál. Preto intuitívne očakávame, že keby bol bicykel položený na podložke, mal by sa pohybovať smerom dopredu. No nerobme unáhlené závery.

Najprv si predstavme, že pôsobisko sily \vec{F} je nekonečne blízko k osi otáčania pedálu. Moment tejto sily je v limite rovný nule. To ale znamená, že nespôsobuje otáčanie pedálom, a teda výsledný efekt je taký, ako keď ťaháme priamo za bicykel, čiže bicykel pôjde dozadu.⁸

Na druhej strane uvažujme veľmi dlhý pedál.⁹ V takom prípade aj malá sila dokáže vyvinúť dostatočne veľký krútiaci moment, takže dominantné bude práve roztáčanie pedála a bicykel sa bude pohybovať smerom dopredu.

Už by ste mali tušiť, že pre nejakú dĺžku pedála bude bicykel stáť na mieste. Otázne je, či reálna dĺžka pedála je kratšia alebo dlhšia ako hraničná dĺžka, a teda či bicykel pôjde dozadu alebo dopredu. Pre reálny hmotný bicykel sa k odpovedi žiadnou jednoduchou úvahou nedopracujeme, budeme musieť počítať. Ak si ale povieme, že kolesá, reťaz, šnúrka a ostatné príslušenstvo sú ľahké, úloha sa redukuje na jednoduché páky. Ďalej zatiaľ uvažujme vysoké trenie, teda že nám zadné koleso nebude prešmykovať.

⁷ A tým hneď získať zo tri body. Prekvapivo nesprávnych odpovedí bolo viac, než správnych... a pritom ťahať bicykel za šnúrku zvládne aj orangutan.

⁸ Komu sa toto máli, môže si predstaviť, že ťahá na šnúrku vozík. Alebo kačičku. Alebo lokomotívu...

⁹ Ide čisto len o akademickú úvahu, pretože je jasné, že bicykel s ľubovoľne dlhým pedálom by bol nepoužiteľný, nakoľko by ním zavadil o podložku. Môžeme si však predstaviť, že bicykel ťaháme po úzkej doske nad úrovňou podložky.

Takže si teda relevantné rozmery zakreslíme. Zistíme, že stačí vziať do pomeru dĺžku pedálu r , polomer kolesa R a počty zubov na pastorkoch vpred a vzadu, k_1 a k_2 . Vyjde nám, že sila, ktorou zadné koleso poháňa bicykel vpred, je $F(rk_2)/(Rk_1)$. Označme si tento koeficient γ . Čiže máme silu F , ktorá ťahá bicykel dozadu, a silu γF , ktorá sa ho snaží hnať vpred. Odčítame ich a bude nám hneď jasné, že bicykel tlačí dopredu celková sila $F(\gamma - 1)$. Takže ak

- $\gamma < 1$, bicykel bude chcieť ísť dozadu,
- $\gamma = 1$, bicykel sa nepohne,
- $\gamma > 1$, bicykel pôjde dopredu.

Ako sme si povedali, pre neakademické bicykle je pomer $r/R < 1$, reálna hodnota je okolo 0,5. Pomer počtu zubov sa zas zvykne pohybovať rádovo okolo jednej.¹⁰ Dokonca úplne stačilo považovať počty zubov za rovnaké, u bicykla s pomocnými kolieskami je to jedno. Potom ostane iba pomer dĺžky pedála a polomeru kolesa a na tom vidno krásne. Skutočné zrýchlenie bicykla však nijak jednoducho nenájdeme, závisí totiž od mnohých ďalších parametrov.¹¹

Úvaha nad cykloidami

Iným spôsobom riešenie je uvedomiť si, aké sú všetky možné pohyby pedálu. Pekne spracovanú názornú ukážku môžete nájsť tu: <https://www.youtube.com/watch?v=aJhiY70KY5o>.

Vidíme, že ak bicykel neprešmykuje, koniec pedála je v sústave Zeme viazaný na krivku zvanú cykloida.¹² Pohybovať sa smie iba dopredu-dozadu po nej a nikdy inak. Pohybové rovnice stále platia, ale silu pôsobiacu na pedál musíme najprv kolmo premietnuť do smeru dotyčnice k tejto krivke – kolmé zložky majú smolu, väzba ich proste zruší.

No a teraz by už malo byť jasné, že podľa toho, aký je pomer γ , rozoznáme tri prípady:

- *skrátaná cykloida*: $\gamma < 1$, bicykel pôjde dozadu,
- *prostá cykloida*: $\gamma = 1$, bicykel sa nepohne, lebo zo zadania sa pedál nachádza práve naspodku krivky,
- *predĺžená cykloida*: $\gamma > 1$, bicykel sa pohne vpred (ale iba do momentu, kým nedosiahne najľavejšiu časť slučky).

Z videa taktiež vidno, že ak by sme lankom neťahali rovno dozadu, ale šikmo, kolmý priemet sily do tejto cykloidy môže niekedy smerovať smerom dopredu, dokonca aj v prípade reálneho bicykla s $\gamma < 1$. A naozaj, ak dáme pedál šikmo dozadu dolu a ťaháme šikmo dozadu hore, bicykel sa zrazu ochotne šinie vpred v ústrety svetlým zajtrajškom.

Prešmykovanie

Nakoniec sa zamyslime nad tým, čo sa stane, ak budeme zväčšovať silu, ktorou za pedál ťaháme. Od istého momentu sa koleso nebude stíhať roztáčať, a začne prešmykovať. V tomto novom prípade presne poznáme veľkosť trecej sily $F_t = \mu_d N$. V hrubom priblížení možno povedať, že smer pohybu bude potom dozadu, aj keď v skutočnosti výpočet nás dovedie ku komplexnejšiemu vzťahu, kde sa ukáže závislosť na parametroch bicykla.

Komentár k riešeniam

Bol som dosť prekvapený, aké ťažkosti dokázala táto úloha vyrobiť, či už medzi vami alebo vedúcimi – naozaj sme sa dlho nevedeli zhodnúť, ako to vlastne v skutočnosti je. Našťastie skutočný bicykel spory rýchlo rozhodol

¹⁰Zhruba medzi 0,6 a 5. Kvíkov horský bicykel má napríklad na najsilnejšom prevode 22 a 34 zubov.

¹¹To tu robiť nebudeme, nakoľko to značne presahuje zamýšľanú náročnosť tejto úlohy. Na druhej strane je to ale veľmi zaujímavé, preto odporúčam si ho vyskúšať. V prípade záujmu mi pošlite mail na jaro@fks.sk a ja vám poskytnem rozšírenú verziu vzoráku.

¹²<https://sk.wikipedia.org/wiki/Cykloida>

a pekné hĺbkové vysvetlenie s cykloidami sa dalo nájsť vo videu na YouTube. Jaro vytvoril detailnú analýzu pre hmotný bicykel, ktorá však silne prekračovala očakávanú úroveň obtiažnosti.

Za správnu odpoveď „dozadu“ boli spravidla obratom udelené tri body, za dobré vysvetlenie zvyšných šesť, prípadne nejaká pomerná časť za väčšie nezrovnalosti. Za drobné nepresnosti nešlo dolu zväčša nič, maximálne som si trochu súkromne zagrúľil a následne napísal deviatku. Ale neznamená to, že si na tom do budúcnosti nemáte dať záležať.

Špeciálne pekné riešenia prišli od Elišky Macákovej (premiestnenie pedálu na os zadného kolesa, kde odpoveď vidno okamžite), Katky Dančejovej, Dávida Mišiaka a Martina Števka.

1.4 Hodina plávania

vorák Adam, opravoval Adam

Jarovi sa v poslednom čase zapáčili kmity. No veď ešte uvidíte! Predtým však potrebuje vyriešiť iný problém. Aký je rozdiel medzi kmitmi plávajúceho telesa na prakticky otvorenej hladine (more, jazero, vaňa, ...) a na hladine vody nachádzajúcej sa v nádobe (pohár, miska, ...)?

Zoberte si ľubovoľné teleso vhodného tvaru (plávajúce na vode ;-)) a odmerajte periódu malých kmitov a ich tlmenie¹³ na hladine vody, ktorá sa nachádza v nádobách rôznych polomerov (pohár, miska, vaňa, ...). Je medzi meranými veličinami a veľkosťou nádoby nejaký súvis?

Pred samotným vyhotovením experimentu a získavaním dát je vhodné zamyslieť sa, či by sme vedeli a boli ochotní vysloviť nejaký teoretický predpoklad alebo odhad. Okrem iného je to vhodné i takým spôsobom, že ak tušíme, ako by mal výsledok experimentu vyzeráť, vieme si samotný experiment lepšie navrhnuť, napríklad vyvarovať sa meraniu závislostí na málo zaujímavých intervaloch parametrov (na Štrbskom plese, Zlatých pieskoch a pri Kaspickom mori), zvoliť vhodný tvar nádob i oscilátora samého (hruška v karafe). Takisto môžeme porovnať naše výsledky s predpokladom, a tým zistiť, či sme niečo zmrvili, čosi opomenuli, alebo zistíme, že náš model je zlý.

Majme objekt zatiaľ pokojne právajúci vo vode. Z jeho krotkosti vieme vyčítať, že je v rovnováhe nielen duševnej, ale i dynamickej (t. j. silovej). Pretože časť predmetu trčí nad vodou, na situáciu sa vieme pozrieť dvomi spôsobmi (v zásade rovnakými, len s mierne odlišnou terminológiou a úrovňou všeobecnosti). Tiažová sila je pre dané teleso v rovnováhe so silou vztlakovou, resp. tlakovou silou na spodok spomínaného marazmu (tu sa patrí podotknúť že za vhodné teleso a nádobu pre teoretickú úvahu aj experiment je rozumné považovať také s vodorovnou podstavou, zvislými bočnými stenami a pre teleso aj ťažiskom nachádzajúcim sa na rovnakej zvislici ako jeho geometrický stred).

Ak vyvediem teleso z rovnováhy čímisi fyzickejším ako nepríjemnou otázkou (napr. ako sa pričíňuje k zníženiu štátneho schodku), pre naše potreby ideálne potlačením do vody, v prvom pohľade sa mi zväčší objem telesa pod hladinou a teda aj vztlaková sila, v druhom spôsobe pohľadu sa mi podstava posunie hlbšie, kde je vyšší tlak, a teda aj tlaková sila na ňu. Podotýkam, tieto veci sú ekvivalentné ak je vršok telesa vždy nad hladinou.

Zaujímavejšia časť teoretického základu tejto úlohy je ale o tom, čo sa stane s vodou vykázanou novopríchozím objemom telesa. Je odtlačená z cesty telesa, tak na oplátku potlačí iný kus vody, ten zas iný, a takto by to šlo, až kým by sa nejaký do kúta zahnaný kusok vody nepoddal spoločenskému tlaku a nestlačil sa. Učili nás ale, že voda je ťažko stlačiteľná, a nie je to len taký blud. Skôr ako by sa voda stlačila, vystúpa radšej vyššie, len nech má pokoj. Ak je novopribudnovší kus telesa objemu ΔV , rovnaký objem vody sa podeje na vrch. Nás zaujíma hlavne taká vec, o koľko sa zvýši hladina vody oproti pôvodnej (v terminológii Archimedovho zákona: aký kus telesa sa mi ešte navyše ponorí do vody, v terminológii tlakov: o koľko sa ešte navyše zvýši tlak na podstavu).

¹³Neviem ako vy, ale Andrej pred časom objavil, že perióda harmonického oscilátora by mala exponenciálne klesať. Vid' piaty príklad prvého kola zimnej série 29. ročníka ;-)

Pretože sme si tak vhodne zvolili tvar telesa i nádoby, smerodajné parametre sú pre nás veľosti ich podstáv (S_0 , resp. S), a výšku o ktorú zme zatlačili teleso hlbšie v porovnaní s jeho pôvodnou polohou si označme x . Presunutý objem vody je teda $\Delta V = S_0 x$. Vďaka zvolenej geometrii nám voda na vrchu stúpa v akomsi medzivalci, a z rovnosti objemov dostávame $S_0 x = y(S - S_0)$. Na tomto mieste si intenzívnejšie začíname písať rovnice:

$$F = -\rho S_0 g(x + y),$$

$$F = -\rho S_0 g \left(1 + \frac{S_0}{S - S_0} \right) x,$$

$$F = -\rho S_0 g \frac{S}{S - S_0} x.$$

Dostali sme výslednú silu v podobe $F = -kx$ (kde $k = \rho S_0 g \frac{S}{S - S_0}$), a jasáme, keďže pre takúto silu (silu od pružiny) je nám už známy výsledok riešenia rovnice kmitov, a to $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$. Dosadzujeme:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho S_0 g \frac{S}{S - S_0}}}$$

a upravujeme:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho S_0 g}} \sqrt{1 - \frac{S_0}{S}}.$$

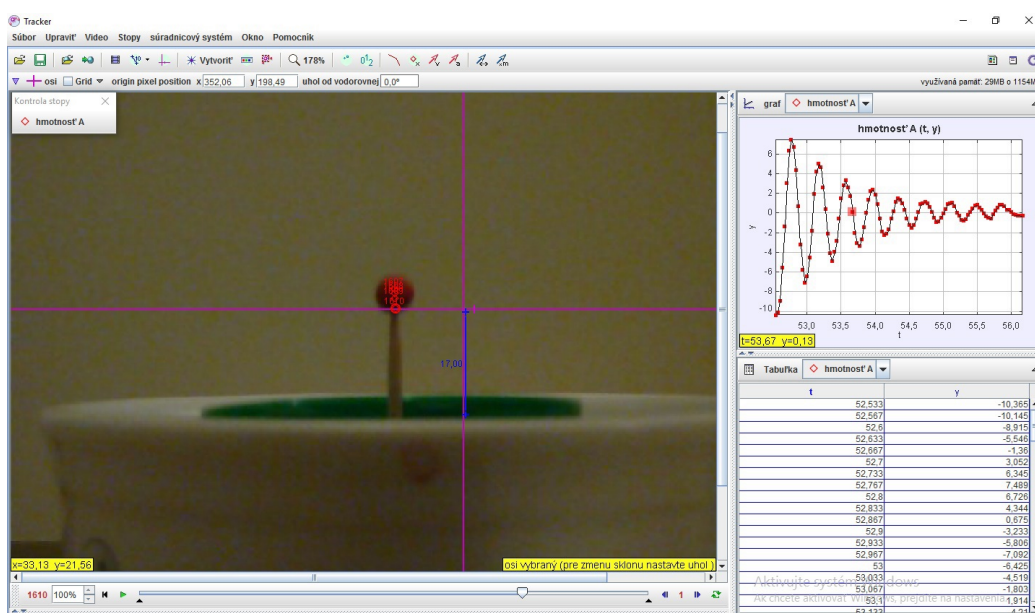
Takže sme sa dopracovali k jednoduchej predpovedi závislosti periódy na veľkosti nádoby. Je namieste sa zamyslieť, ako veľmi je ale táto predpoveď funkčná. I keď nám dáva dobrý predpoklad pre nekonečnú nádobu (skúste si vypočítať periódu kmitov na nekonečnej hladine, stačí len vhodne vynechávať kroky ukázaného riešenia), voda sa nepreskupuje nekonečne rýchlo, a teda nám vznikajú vlny (čo ste mnohí správne uviedli, ale až na výnimky nikto nevybudoval kauzálny reťazec medzi vlnami a zmenou periódy. Vo všeobecnosti je prudentné uvažovať korelácia \neq kauzalita, t. j. to že sa veci dejú naraz, ešte nutne neznamená, že jedna je (priamo) príčinou/následkom druhej).

Samozrejme že vlny vznikajú i v malých nádobách, ale tam sú maličké, a teda nespôsobujú takú lokálnu zmenu hydrostatického tlaku, aby pozorovateľne zmenili periódu pohybu. O tlmení v závislosti od veľkosti nádoby zatiaľ nevieme povedať veľa, a tak sa už presuňme na samotný experiment.

Tvar používaných nádob a telesa na experiment sme priblížili v teoretickom úvode. Teleso aj vieme rozkmitať vo vertikálnom smere, ostáva nám nejak to merať. Poloha oscilátora je časovo silno závislá vec, a teda je nerozumné žmúriť jedným okom na stopky (perióda) a druhým na pravítko (tlmenie prejavujúce sa klesajúcou amplitúdou). Za najvhodnejšie sa dá považovať analýza videozáznamu experimentu. Pohodlným nástrojom na videoanalýzu je program Tracker.



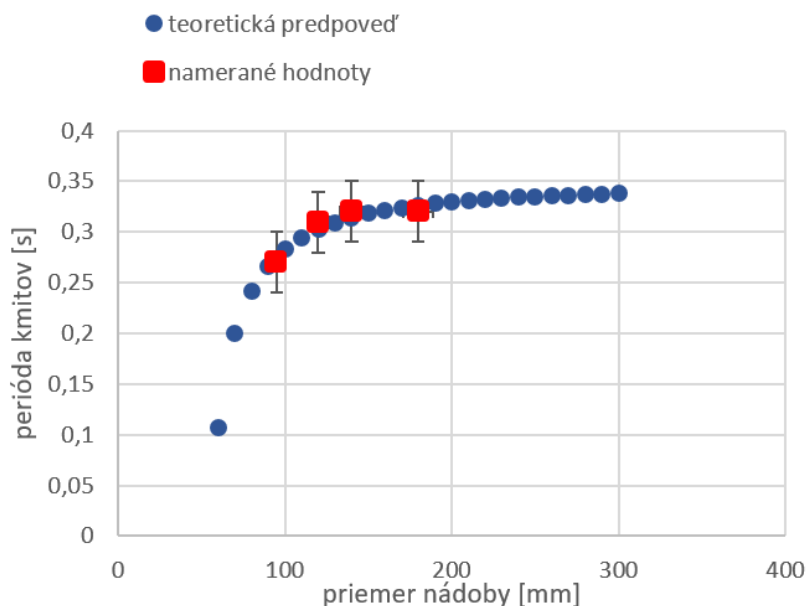
Obrázok 2: Experimentálna aparatura



Obrázok 3: Screenshot z Trackera

Spracovanie získaných dát je už podľa ľubovôle, pre názornosť použijeme nejaký tabuľový procesor.

Závislosť periódy pri konštantnom telese



Obrázok 4: Hľa, Excel

Ako zistíme periódu kmitov? Perióda je definovaná ako časový rozdiel medzi dvoma po sebe idúcimi miestami rovnakej fázy. Takisto ju budeme zisťovať, t. j. nájdeme si (kvôli väčšej presnosti) niekoľko po sebe idúcich miním a odčítame čas, ktorý ich oddeľuje. Ako zistíme tlmiaci koeficient? Nároveň v zadaní vyjavila exponenciálny pokles amplitúdy kmitov. Ak si k tomu pohľadáme čosi viac, nájdeme, že amplitúda by mala presnejšie vyzeráť ako $A(t) = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}$, kde A_0 je počiatočná amplitúda a γ je náš hľadaný tlmiaci koeficient. V skutočnosti ho môžeme zistiť napríklad tak, že po odstránení miním a maxím z našich dát ich skúsime (napríklad pomocou nejakej fitovacej funkcie v tabuľkovom procesore) preložiť exponenciálou, a následne z predpisu fitovacej rovnice vyčítať tlmiaci koeficient.

priemer nádoby / mm	predpokladaná perióda / s	nameraná perióda / s	tlmiaci koeficient / s ⁻¹
95	0,28	0,27	0,47
120	0,30	0,31	0,39
140	0,31	0,32	0,25
180	0,33	0,32	0,26

Tabuľka 1: Predpokladaná a nameraná závislosť periódy od priemeru nádoby

Ako môžeme vidieť, tlmenie je menej výrazné pri väčších nádobách. Zdôvodniť sa to dá tak, že v menších nádobách mi kmitá väčšia časť vody pomerne k celku, a teda oscilátor rýchlejšie stráca energiu. Taktiež si môžeme všimnúť, že presnosť experimentu bola výrazne znížená nízkou frekvenciou snímania (len 30 fps).

1.5 Sánkovačka

vzorák **MaťoB a Jimi**, opravoval **Jimi**

Jimimu sa dostala po roku pod ruku ďalšia fakt kúl sústava. Tá pozostáva z naklonenej roviny so sklonom α a kvádra hmotnosti m . Nuda? No veď počkajte! Naklonená rovina má špeciálne zvolený koeficient šmykového trenia $f = \tan(\alpha)$. Jimi si pre nás všetkých pripravil špeciálny trik. Kvádra udelí rýchlosť v v smere vrstevnice (t. j. v smere kolmom na smer najrýchlejšieho poklesu výšky na naklonenej rovine). Aký bude smer a veľkosť rýchlosti kvádra po dostatočne dlhom čase?

Najprv si skúsme uvedomiť, aké sily na kváder pôsobia. Budú to tiažová sila F_g , normálová sila od podložky F_n a trecia sila F_t . Tiažovú silu môžeme rozdeliť na dve zložky – kolmú na naklonenú rovinu (jej účinok je vyrovnaný s účinkom normálovej sily F_n) a rovnobežnú s rovinou (v smere najväčšieho poklesu), označíme ju F_r . Rozložením síl zistíme, že kolmá zložka má veľkosť $F_n = mg \cos \alpha$ a rovnobežná má veľkosť $F_r = mg \sin \alpha$.

Pre treciu silu platí, že jej veľkosť je $F_t = fF_n$,¹⁴ čo v našom prípade znamená, že $F_t = mg \cos \alpha \tan \alpha = mg \sin \alpha$. Jej smer je proti pohybu kvádra – t. j. proti smeru vektora aktuálnej rýchlosti. Tento výsledok je zaujímavý, lebo zistujeme, že veľkosť sily $F_t = F_r$.

Teraz už vieme, že na kváder pôsobia dve sily spôsobujúce dvojicu zrýchlení – jedného smerom nadol¹⁵ a jedného proti smeru jeho pohybu. Ako teda spolu pôsobia na sústavu? Pozrime, čo sa udeje za krátky čas Δt . Zaň stihne trecia sila zmenšiť celkovú rýchlosť v_c kvádra o $\Delta v_c = \frac{F_t}{m} \Delta t$, zatiaľ čo pozdĺžna zložka tiažovej sily zväčší pozdĺžnu časť rýchlosti v_y o $\Delta v_y = \frac{F_r}{m} \Delta t$. Tu si spomeňme, že $|F_r| = |F_t|$. To ľudskou rečou znamená, že o koľko sa zmenší celková rýchlosť kvádra, o toľko sa zvýši pozdĺžna zložka tejto rýchlosti. Matematicky zapísané $v_c + v_y = C$, kde C je konštanta.

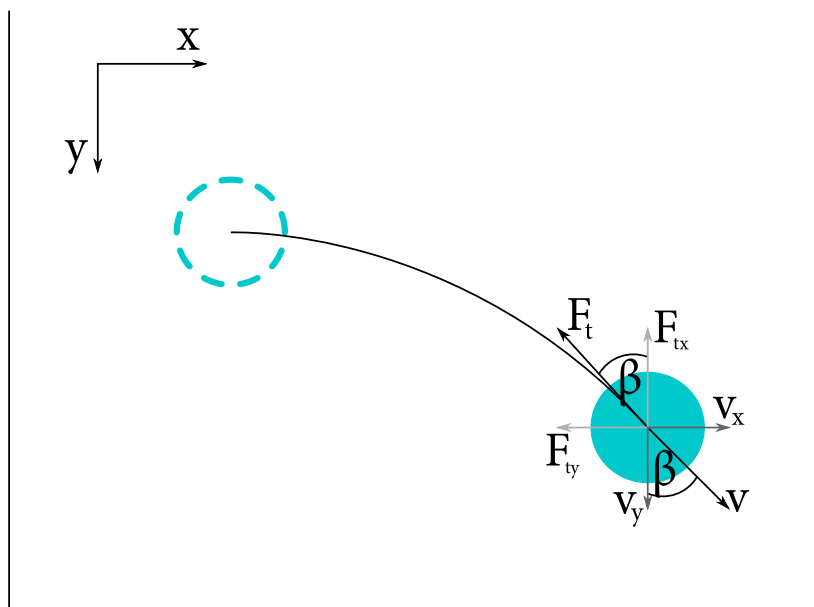
V pohode? No nie tak rýchlo! Je tu totiž istá zrada, ktorá si zaslúži nasledujúce úvahy. Na chybu vo vzoráku nás upozornil Filip Čermák, za čo mu na tomto mieste veľmi pekne a úprimne ďakujeme.

Chyba v tejto úvahe je totiž v tom, že platí síce, že $|F_r| = |F_t|$, ale už nie je pravda, že $\Delta v_c = \frac{F_t}{m} \Delta t$ (Správne to má byť $\Delta v_c = \frac{F_t - F_{tz}}{m} \Delta t$ kde F_{tz} je istá zložka sily F_t). Do zmeny celkovej rýchlosti totiž okrem samotnej trecej sily prispieva aj sila F_r , ktorá vždy pôsobí tým istým smerom, ktorý nie je zhodný s F_t . Môžete si rozmyslieť, že tvrdenie $v_c + v_y = C$ platí v prvých fázach pohybu, keď je sila F_t kolmá na v , no nie je vôbec jasné, že bude platiť vždy. Nerobme preto žiadne unáhlené závery a skúsme naozaj poctivo dokázať, že $v_c + v_y = C$.

Pozrieme sa teraz, čo sa udeje s kvádom za malý čas Δt . Napíšme si teda pohybové rovnice pre pohyb kvádra. Celkovú rýchlosť kvádra môžeme rozložiť do spomínaných smerov na zložky v_x a v_y . Keďže trecia sila F_t pôsobí proti smeru aktuálnej rýchlosti v_c , tak má zložku v oboch smeroch. Veľkosť zložky trecej sily v danom smere je úmerná veľkosti zložky rýchlosti ku celkovej rýchlosti kvádra v danom smere (vyplýva to z jednoduchej geometrie - vid. obrázok).

¹⁴Pozor, vo všeobecnosti platí $F_t \leq fF_n$, kde je f koeficient statického (!) šmykového trenia. V našom prípade je však f nutne (vieme, že kvádr sa už na začiatku pohybuje) koeficient dynamického trenia, a preto $F_t = fF_n$. Na tento fakt pre istotu upozorňujeme, aby ste sa v budúcnosti nedopúšťali podobných chýb.

¹⁵v smere najstrmšieho poklesu výšky na naklonenej rovine



Obrázok 5: Pohyb Jimiho kvádrika (Ktorý má zhodu okolností kruhovú podstavu :P) s príslušným rozkladom do zložiek rýchlostí a síl v našej sústave.

Preto, zložky trecej sily v jednotlivých smeroch sú

$$F_{tx} = F_t \sin \beta = F \frac{v_x}{v_c},$$

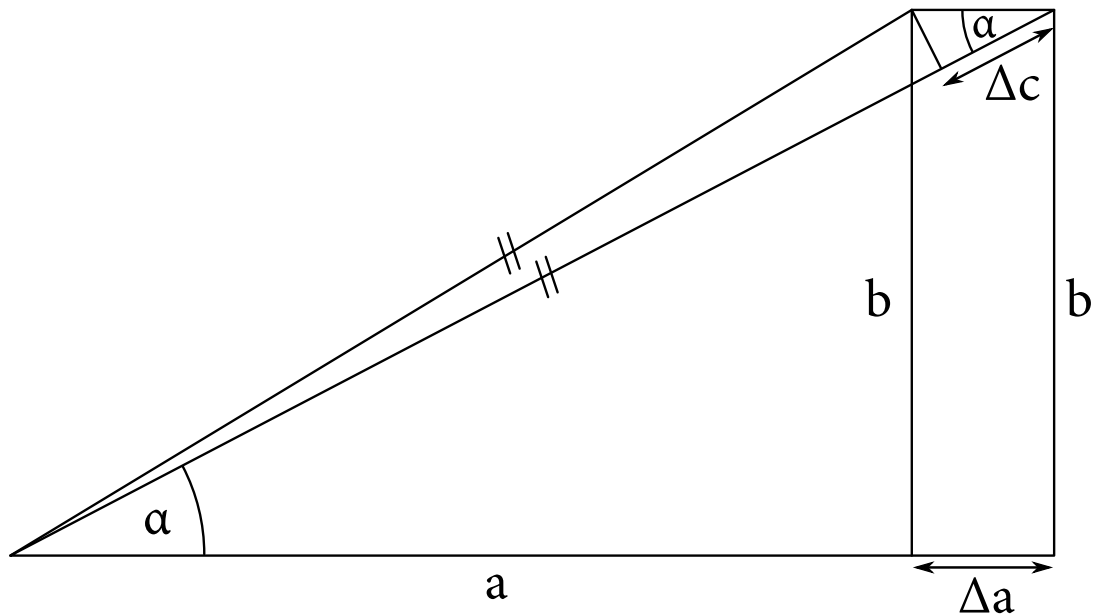
$$F_{ty} = F_t \cos \beta = F \frac{v_y}{v_c}.$$

Napišme si teraz pohybové rovnice pre pohyb kvádra v smere najstrmšieho poklesu výšky (y) a v kolmom smere naň (x).

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -\frac{F_{tx}}{m} = \frac{F}{m} \left(-\frac{v_x}{v_c} \right),$$

$$a_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{F_r}{m} - \frac{F_{ty}}{m} = \frac{F}{m} \left(1 - \frac{v_y}{v_c} \right).$$

Skúsme si teraz ešte vypočítať ako súvisí zmena celkovej rýchlosti Δv_c so zmenou jej zložiek v y -ovom (Δv_y) a x -ovom smere (Δv_x). Vieme, že platí $v_c^2 = v_x^2 + v_y^2$. Ide teda o Pytagorovu vetu. Pre lepšiu predstavivosť sa nám zide nasledujúca geometrická interpretácia. Predstavme si pravouhlý trojuholník s preponou dĺžky c a odvesnami s dĺžkami a a b .



Obrázok 6: Dve šikmé čiarky naozaj chcú značiť rovnobežnosť. Môžeme si to dovoliť, lebo pri malej zmene Δc sa α zmení iba málo.

Pre pravouhlý trojuholník platí Pytagorova veta $c^2 = a^2 + b^2$. Ak zväčšíme jednu odvesnu o Δa , tak sa odvesna zväčší (podobnosť trojuholníkov) o (približne)

$$\Delta c = \Delta a \cos(\alpha) = \frac{a}{c} \Delta a,$$

Tí z Vás, ktorí majú radšej výpočty, tak k rovnakému výsledku sa dopracujeme, ak od $(c + \Delta c)^2$ odpočítame c^2 a zanedbáme $(\Delta c)^2$ a $(\Delta a)^2$ ¹⁶,

$$\begin{aligned} (c + \Delta c)^2 - c^2 &= ((a + \Delta a)^2 + b^2) - (a^2 + b^2), \\ c^2 + 2c\Delta c + \Delta c^2 - c^2 &= (a^2 + 2a\Delta a + \Delta a^2) - (a^2 + b^2), \\ 2c\Delta c &\approx 2a\Delta a, \\ \Delta c &\approx \frac{a}{c} \Delta a. \end{aligned}$$

Obe úvahy môžeme rozšíriť aj na druhú odvesnu, a preto

$$\Delta v_c = \frac{v_x}{v_c} \Delta v_x + \frac{v_y}{v_c} \Delta v_y.$$

Skúsme teraz vypočítať, čomu je rovné $\Delta v_c + \Delta v_y$. Ak nám víde, že je to nula, tak sme vyhrali, lebo potom musí platiť, že súčet $v_y + v_c$ je konštantný.

¹⁶Ak $\Delta x/x \sim 10^{-3}$, tak $(\Delta x/x)^2 \sim 10^{-6}$, čiže o niekoľko rádov menšie.

$$\begin{aligned}\Delta v_c + \Delta v_y &= \left(\frac{v_x}{v_c} \Delta v_x + \frac{v_y}{v_c} \Delta v_y \right) + \Delta v_y = \left(-\left(\frac{v_x}{v_c} \right)^2 \frac{F}{m} + \frac{v_y}{v_c} \left(1 - \frac{v_y}{v_c} \right) \frac{F}{m} \right) + \left(1 - \frac{v_y}{v_c} \right) \frac{F}{m}, \\ &= -\left(\frac{v_x^2}{v_c^2} \right) \frac{F}{m} + \left(1 - \frac{v_y}{v_c} \right) \left(1 + \frac{v_y}{v_c} \right) \frac{F}{m}, \\ &= \left(1 - \frac{v_x^2 + v_y^2}{v_c^2} \right) \frac{F}{m} = 0,\end{aligned}$$

keďže v_x a v_y sú iba zložky v_c , a teda $v_c^2 = v_x^2 + v_y^2$. Naozaj teda platí $\Delta v_c + \Delta v_y = 0$, a to vo všetkých fázach pohybu! Preto sa súčet $v_c + v_y$ zachováva. Teda matematicky zapísané (C je konštanta):

$$v_c + v_y = C!$$

Na začiatku pohybu je $v_y = 0$ a $v_c = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_x = v$, preto $C = v$. Teraz potom, čo sme si už naozaj poctivo dokázali tvrdenie $v_c + v_y = C$, sa pozrime sa na ustálený stav pohybu kvádra. Ten nastane vtedy, keď sa sily naň pôsobiace vyrovnajú. No, a to sa stane iba v prípade, keď sa kváder bude hýbať v smere najväčšieho poklesu (áno, bude to trvať nekonečne dlho). Vzťah pre rýchlosť $v_c + v_y = v$ bude platiť aj vtedy. Teda platí $v_c = v_y$, lebo v_c má iba zložku v smere najstrmšieho poklesu výšky na naklonenej rovine. Preto môžeme dosadiť $v_y + v_y = 2v_y = C = v$, a teda v_y v ustálenom stave je rovná $v/2$.

Takto sme zistili, že po dlhom čase bude mať rýchlosť rovnaký smer, ako je smer najväčšieho poklesu a jej veľkosť bude $\frac{v}{2}$. Ešte by ste sa mohli spýtať, či by kváder nemohol počas svojho pohybu zastať. Sila F_r však pôsobí neustále, a až keď nastane ustálený stav, jej smer sa vyrovná so silou F_t , a preto v každom okamihu urýchľuje kvádrík v smere najstrmšieho poklesu výšky, čím mu bráni v tom, aby sa zastavil.

Poznámka pre simulantov v Exceli a podobné tvory

Mnoho z Vás sa numerickou simuláciou dopracovalo k správne výsledku. A zistili ste, že v takom prípade, nech je α akékoľvek, výsledok to neovplyvní. V tomto okamihu by ste mali spozornieť, pretože sa tu deje niečo podozrivé. Navyše podozrivá je aj jedna polovica. Odteraz by Vám mala v hlave svietiť kontrolka, že ak je výsledok jednoduchý, je možné, že sa k výsledku dá dopracovať aj s použitím papiera a pera.

Poznámka pre drtičov, dostatočne skazených deriváciami, integrálmi či diferenciálnymi rovnicami

Niekedy je riešenie fyzikálneho problému naozaj jednoduché, no vyžaduje si to dostatočnú pozornosť na všetky detaily problému a dôsledné uvedomenie si toho, čo tieto fakty naozaj znamenajú.

1.6 Neskoro plakať...

vzorák **MaťoB**, opravoval **MaťoB**

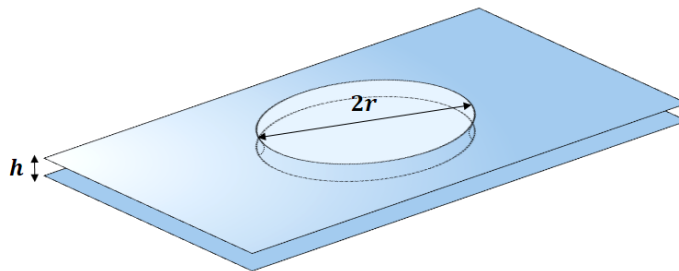
Maťovi sa stala na poslednom sústredku nepríjemná vec. Nalieval si mlieko. Keď usúdil, že má dosť, začal krabicu nakláňať do vertikálnej polohy. Mlieko sa v tom okamihu začalo rytmicky vylievať a pooblievalo celý stôl. To by ešte vôbec nebolo to najhoršie... však ho utrie!

Lenže mlieko zatieklo medzi dve sklenené podložky¹⁷ vzdialené od seba $h = 5 \mu\text{m}$ (sklo je pomerne hladké), vytvoriac tak kruhový flák medzi sklenenými podložkami s polomerom $R = 20 \text{ cm}$. Každá podložka váži $m = 1 \text{ kg}$.

Maťo sa rozhodol, že zdvihne hornú podložku a utrie rozliate mlieko medzi podložkami, no v dôsledku povrchového napätia to išlo akosi ťažko... Akú silu potrebuje Maťo na to, aby od seba oddelil dve sklenené dosky? A akú prácu pri tom vykoná?

¹⁷Pani kuchárky sa zjavne v školách v prírode extrémne snažia, aby sa drahým stolom nič nestalo, takže umiestnili na stôl rovno dve sklenené podložky namiesto jednej.

Chýbajúce potrebné údaje si odmerajte, nájdite na internete alebo ich, ako správni fyzici, odhadnite :-).



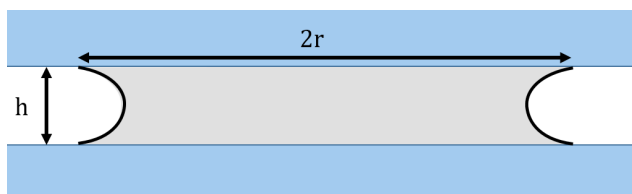
Riešenie tejto úlohy si rozdelíme na dve časti. Najprv sa pokúsime nájsť silu, ktorou musíme dosky od seba oddeľovať, ako funkciu vzdialenosti h medzi nimi. Ak sa nám to podarí, skúsime následne odhadnúť aj prácu, ktorú musíme vykonať na to, aby sme dosky od seba úplne oddelili. Tí z Vás, ktorí všetky tieto veci už zvládli, môžu rovno preskočiť väčšinu vzoráku a prečítať si niečo z okienka pre drtičov. Pustime sa do riešenia!

Akou silou musíme pôsobiť?

Ukážeme si dva spôsoby výpočtu. Oba sú niečím poučné. Na začiatok však spomenieme, že rovno zanedbáme ťažovú silu pôsobiacu na mlieko, keďže očakávame, že bude rádovo menšia ako sily povrchového napätia. Kto neverí, nech si odhadne túto silu, a potom ju porovná s výsledkom ;)

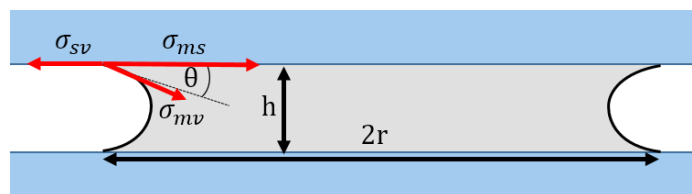
Spôsob prvý: Výpočet cez sily a tlaky

Nakreslime si kruhový flák z profilu. Asi tušíme, že to bude vyzeráť nejako takto:



Obrázok 7: Profil kruhového fláku

Ako však presne vyzerá tvar rozhrania medzi mliekom a vzduchom pri pohľade z boku? Je to časť kružnice? No, nie tak úplne. Pre $h \ll R$ si však pohodlne vystačíme s tým, že to časť kružnice je. Keďže vo fyzike často-krát hľadáme iba približný výsledok, avšak stále zachytávajúci podstatné javy, s takýmto priblížením si bohato vystačíme¹⁸. Zvedavosť záujemcov, ktorí by chceli vedieť viac, bude uspokojená na konci tohoto vzoráku.

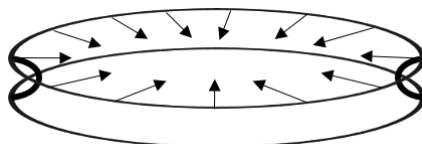


Obrázok 8: Pôsobiace sily

¹⁸Ak sa takýmto postupom aj k niečomu dopočítame a nebude to úplne odveci, môžeme povedať, že naše priblíženie nebolo od veci.

Na rozhraní mlieka, sklenenej podložky, a vzduchu pôsobia sily povrchového napätia v smere pozdĺžnom s príslušným rozhraním. Ak označíme povrchové napätie medzi mliekom a vzduchom γ_{mv} , mliekom a sklom ako γ_{ms} a medzi sklom a vzduchom γ_{sv} , tak na rozhraní musí platiť rovnováha síl, z ktorej dostaneme vzťah $\gamma_{mv} \cos(\theta) + \gamma_{ms} - \gamma_{sv} = 0$ ¹⁹, kde θ je kontaktný uhol vyznačený na obrázku.

Keďže si chceme veci čo najviac zjednodušiť, urobíme horný odhad – povieme, že mliečko dokonale zmáča sklo, t. j. že $\theta = 0$. Ďalej predpokladajme, že povrchové napätie medzi sklom a vzduchom je väčšie ako medzi sklom a mliekom²⁰. Odteraz teda budeme pracovať iba s jednou hodnotou povrchového napätia $\gamma = \gamma_{mv}$.



Obrázok 9: Sily povrchového napätia na rozhraní mlieka a skla

Pri pohľade zhora vytvára mlieko kruhový flak s polomerom R . Na rozhraní medzi mliekom a vzduchom na povrchu skla tak pôsobí celková sila

$$F = \gamma \cdot 2\pi R.$$

Keďže máme dve podložky, sú dve aj rozhrania, a preto je celková sila rovná $2 \cdot \gamma \cdot 2\pi R$. Povedali sme, že mlieko dokonale zmáča povrch skla, takže táto sila sa snaží mlieko rozliať po povrchu, t. j. pri pohľade zhora sa snaží zväčšiť kruhový flak. Tlak v kvapaline je teda menší ako atmosférický, čo zase vytvára silu, ktorú musíme prekonať, ak chceme podložky od seba oddeliť.

Spomeňme si na základnú školu, kde nás učili o Pascalovom zákone. Ten hovorí, že ak na voľný povrch kvapaliny pôsobíme silou, vo všetkých miestach kvapaliny vzniká rovnaký tlak. Ak chceme zistiť hodnotu tohoto tlaku, musíme vypočítať plochu rozhrania medzi mliekom a vzduchom. Táto plocha je v princípe časť pláštá torusu. Fuj! Drtiči to majú povinne za domácu úlohu²¹, my ostatní si vystačíme s tým, že si povieme, že táto plocha nebude (rádovo) väčšia ako plocha pláštá valca s príslušnými rozmermi.

Odtiaľ získame hodnotu rozdielu tlakov medzi vnútrom mlieka a okolím²²,

$$\Delta p = -\frac{\gamma 4\pi R}{2\pi R h} = -\frac{2\gamma}{h}.$$

Tento tlak je rovnaký vo všetkých miestach kvapaliny, a teda sklenená podložka je pritláčaná k druhej podložke silou

$$F = \pi R^2 \cdot \Delta p = \pi R^2 \frac{2\gamma}{h}.$$

Predtým, než si ukážeme druhý spôsob, si rovno skúsme vypočítať, aká veľká táto sila je. Hodnota povrchového napätia pre mlieko je $\gamma \approx 50 \text{ mNm}^{-1}$.²³ Po dosadení hodnôt zo zadania sa dopracujeme k hodnote

$$F \approx 2400 \text{ N}.$$

¹⁹Táto rovnováha síl v princípe definuje kontaktný uhol.

²⁰Ak by sme ho aj uvažovali, len by to zmenilo efektívnu hodnotu γ , s ktorou počítame ďalej, no nie princíp výpočtu.

²¹Dá sa to aj bez integrálov. Návod: https://en.wikipedia.org/wiki/Pappus%27s_centroid_theorem

²²Záporné znamienko je za to, že tlak v mliečku je menší ako atmosférický tlak okolo.

²³Ak použijeme hodnotu pre vodu (72 mNm^{-1}), nedopustíme sa veľkej chyby. Spomínaná hodnota pochádza z A. J. Bertsch, *Surface tension of whole and skim-milk between 18 and 135 °C; Journal of Dairy Research* (1983), 50, 259-26

Čo je teda poriadna sila! Vidíme, že tiaž dosky a aj samotného mlieka je zanedbateľná. No je to daň za to, že pani kuchárky zjavne sklenené podložky dobre vyleštili :)

Uff. Bolo toho celkom dosť, no podme ďalej a ukážme si druhý spôsob výpočtu.

Spôsob druhý: Metóda virtuálnych prác

Metóda virtuálnych prác nie je práve vec, ktorá by sa učila na strednej škole, no napriek tomu to nie je nič ťažké, čo by ste nezvládli už aj Vy. Je založená na tom, že sa pozrieme na situáciu v stave statickej rovnováhy. Potom si predstavíme, že sa súčasti systému posunú o nejaké maličké Δx a spočítame všetky možné práce, ktoré boli na systéme vykonané rôznymi (aktívnymi) silami. Princíp virtuálnych prác potom hovorí, že ak bol systém predtým v rovnováhe, všetky tieto práce rôznych síl musia dať v súčte nulu. Prečo niečo takéto funguje, sa dozvieme buď na vysokej škole, alebo na sústredku. O tejto metóde môžete nájsť niečo viac tu²⁴. Najlepšie tento princíp pochopíte na príklade, a preto si pomocou neho túto úlohu rovno vyriešime.

Pre jednoduchosť budeme mlieko medzi podložkami modelovať ako valec. Predstavme si, že pôsobíme silou F na hornú podložku, čím ju posunieme o Δh . Potom vykonáme prácu $F\Delta h$. Zároveň narastie aj výška valca o Δh . Keďže je valec vyšší, tak plocha plášťa narastie o $2\pi R\Delta h$. Plocha plášťa valca definuje plochu rozhrania medzi mliekom a vzduchom, a teda ovplyvňuje aj energiu povrchového napätia. Takže vieme, že zmena povrchovej energie je $\gamma \cdot 2\pi R\Delta h$.

Položením týchto dvoch energií do rovnosti dospejeme k sile $F = \gamma 2\pi R$. Vidíme, že výsledok je iný ako v predchádzajúcom prípade. Kde nastala chyba? Zabudli sme totiž na to, že objem mlieka medzi podložkami musí zostať konštantný, čo sa prejaví tak, že sa polomer podstavy valca musí zmenšiť o nejaké ΔR . Tento polomer prichádza do hry na rozhraní mlieko–sklo, ktoré má plochu $2 \cdot \pi R^2$.

Objem mlieka sa musí zachovať, preto $2\pi(R + \Delta r)(h + \Delta h) = 2\pi R h$. Odtiaľ zanedbaním členu s $\Delta r \Delta h$ získame $\Delta r \approx -R \frac{\Delta h}{h}$. Rozdiel plôch rozhrania je medzikružie, teda zmena povrchovej energie na tomto rozhraní bude $\gamma \cdot \pi(R + \Delta r)^2 - \pi R^2 \approx \gamma 2\pi R \Delta R = -\gamma 2\pi R^2 \frac{\Delta h}{h}$.

Položením všetkých príspevkov do rovnosti,

$$F\Delta h + \gamma \cdot 2\pi R\Delta h - \gamma 2\pi R^2 \frac{\Delta h}{h} = 0,$$

získame hodnotu

$$F = \gamma \left(2\pi R + \pi R^2 \frac{2}{h} \right) \approx \pi R^2 \frac{2\gamma}{h},$$

kde sme zanedbali prvý člen, lebo $R/h \gg 1$.²⁵

Akú prácu vykonáme?

Už vieme, že sila závisí nepriamo úmerne od vzdialenosti h medzi doskami. Poďme odhadnúť prácu.

Jeden spôsob je urobiť horný odhad, a to nasledovne. Vieme, že sila závisí nepriamo úmerne od h , zoberme teda veľkosť tejto sily na začiatku a vynásobme ju nejakou *rozumnou* vzdialenosťou Δh , o ktorú musíme posunúť sklenenú podložku. Za rozumnú vzdialenosť možno napríklad považovať výšku vrstvy mlieka v prípade, že by bolo rozliate iba na jednej podložke. Táto vrstva bude mať najviac niekoľko milimetrov, preto $\Delta h \approx 1$ mm (horný odhad)²⁶.

²⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Virtual_work

²⁵Tento člen by vystupoval aj vo výsledku získanom prvým spôsobom, ale tam sme ho na jednom mieste potichu zanedbali. Skúste zistiť kde ;)

²⁶Postupujeme metódou fyzikálnej intuície. Autor vzoráku si nevie predstaviť, že by mu rozliate mlieko na stole vytvorilo centimetrovú vrstvu, prípadne väčšiu ;)

Prvý odhad teda máme,

$$W \approx F(h)\Delta h = 2,4 \text{ J.}$$

Ak chceme niečo presnejšie, môžeme postupovať nasledovne. Uvedomíme si, že sila sa mení podľa vzdialenosti, a teda sčítame veľa malých príspevkov typu $F(x)\Delta x$. Keď je Δx „nekonečne malé“, dostávame integrál. Ďalej výšku vrstvy, keď je mlieko rozliate iba na jednej podložke, vieme zistiť z minimalizácie energie (potenciálna + povrchová)²⁷. Z minimalizácie energie vieme odhadnúť výšku vrstvy ako $2\sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \approx 1,4 \text{ mm}$. Intuícia nebola mimo.

O niečo lepší odhad teda získame ako

$$W = \int_h^{h+\Delta h} F(x)dx = 2\pi R^2 \gamma \ln\left(1 + \frac{\Delta h}{h}\right) \approx 0,07 \text{ J.}$$

Čo je o dosť menej! V skutočnosti to môže byť aj o kúsok viac, pretože ak budeme podložku dvíhať pomaly, je dosť možné, že sa nám podarí mliečko vytiahnuť aj do väčšej výšky ako tej, pri ktorej bude existovať po tom, ako sa sklenená podložka od neho oddelí. Centimetre to však asi nebudú, a keďže táto výška vystupuje pod logaritmom, výsledok sa zmení len o máličko.

Napokon si ešte spomenieme na to, že aj podložka niečo váži. Pri posune sklenenej podložky vážiacej $m = 1 \text{ kg}$ o 1 mm vykonáme ešte navyše prácu

$$W_g = mgh \approx 0,01 \text{ J,}$$

čo je približne sedemkrát menej ako práca, ktorú vykonáme kvôli povrchovému napätiu. Ďalším poučením je, že práca je síce relatívne malá, ale sklenené podložky sa nám ani tak ľahko nepodarí oddeliť.

Okienko pre drtičov a zopár poznámok

Tí z Vás, ktorých zaujalo povrchové napätie, si môžu pozrieť prednášku o tejto téme z Akadémie Trojstenu²⁸. Tí z Vás, ktorí majú celý tento príklad už v malíčku, si môžu pozrieť niečo o Youngovi a Laplacovi²⁹. Tvar mliečka medzi doskami, bude pri zanedbaní jeho tiaže katenoida³⁰ s dodatočnou podmienkou na fixovaný objem (polomer flaku a vzdialenosť medzi doskami spolu súvisia). S ňou ste sa mohli stretnúť aj v FX – pohľadajte v archíve. Takéto veci, ako sme riešili v tomto príklade, sa volajú *capillary bridge*.

1.7 Pole neorané

vzorák Dušan, opravoval Dušan

Dušan a Kvík si pred tým, ako sa pustia do riešenia problémov hodných ich kalibru³¹, dávajú každé ráno malú rozvičku, aby po zvyšok dňa počítali ako draci. Aby si to okorenili, vzájomne sa vyzývajú na súboje v rátaní tých najodpornejších príkladov³².

Kvík pri svojich potulkách vesmírom narazil na nasledujúci príklad o obrovskom telese, s rovnomerne rozloženým nábojom vo svojom vnútri, tvaru kvádra so štvorcovou podstavou s hranou a a veľmi malou výškou. „Ha! Toto určite nezrátaš, Dušan!“ vykrikol, a rovno diktoval zadanie Dušanovi:

„Nad rohom štvorcovej podstavy vo výške a vytvára teleso elektrické pole s intenzitou E , jeho smer je však od zvislého odchýlený o uhol α . Akú hodnotu elektrickej intenzity môžeme očakávať nad stredom štvorcovej podstavy vo výške $a/2$?“

²⁷Tí z Vás, ktorí nevedia ako na to, pozrite si v archíve príklad 6 – Mláčka z 1. kola zimnej časti 27. ročníka FKS.

²⁸<https://youtu.be/vWdCRWLzrQk>

²⁹https://en.wikipedia.org/wiki/Young%E2%80%93Laplace_equation

³⁰V angličtine *catenoid*

³¹https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_unsolved_problems_in_physics

³²Demidovič, Irodov, Kapica, Landau, ...

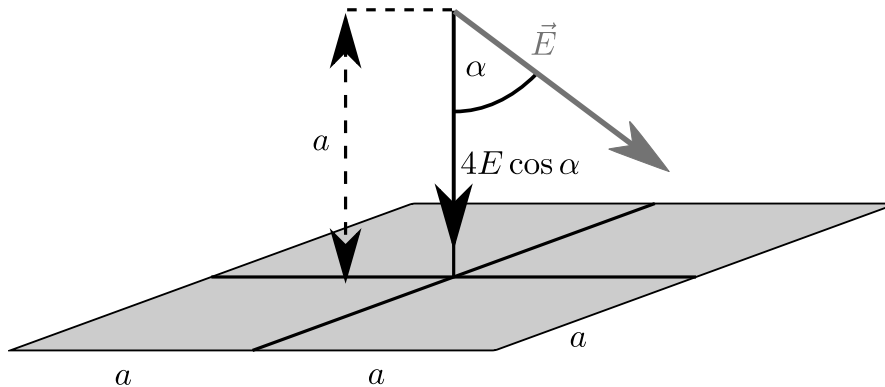
„Ale prosím ťa, to je úplná hračka! To dávajú už dnes aj decká na Náboji...“ a spýtal sa Kvíka ešte nasledujúcu otázku:

„Predstav si, že teleso zväčším v každom smere dvojnásobne. Akú veľkú elektrickú intenzitu nameriam potom nad stredom štvorcovej podstavy vo výške a ?“

Hádam nie ste horší ako Kvík a Dušan... vyriešte obe úlohy!

Na vyriešenie tejto úlohy bolo potrebné využiť dve veci. Princíp superpozície a škálovanie. Vysvetlíme si postupne obe, a to na konkrétnych úlohách.³³

Začnime tou druhou zo zadania, kde nás zaujíma aká je veľkosť intenzity elektrického poľa nad stredom homogénne nabitých štvorcových dosky s hranou $2a$ vo výške a . Tu využijeme princíp superpozície³⁴. Ten hovorí asi nasledovne: „Ak máme systémy, ktorých fyzikálne vlastnosti poznáme, a máme aj nejaký iný neznámy systém, ktorý vieme vyskadať pomocou tých známych, tak aj jeho fyzikálne vlastnosti vyskladáme rovnako.“ Na prvé počutie to je ťažko pochopiteľné, no ukážeme si to na našej úlohe. To, čo nás zaujíma, je vlastne výsledná intenzita elektrického poľa nad rohmi nie jednej, ale štyroch dosiek. Intenzitu nad jedným rohom poznáme, tá má veľkosť E a od kolmice na platňu je odchýlená o uhol α . No a keďže sú teraz platne štyri, tak výsledná intenzita nad stredom dvojnásobne veľkej dosky bude iba vektorovým súčtom štyroch rovnako veľkých intenzít. Zložky rovnobežné s rovinou dosky sa pobijú a tie kolmé budú mať v súčte hodnotu $E_1 = 4E \cos \alpha$.



Obrázok 10: skúmaná doska

A teraz tá prvá úloha. V nej nás zaujíma elektrická intenzita v polovičnej výške, čiže $a/2$, no aj rozmery platne sú polovičné, čiže je to ten istý problém ako pred chvíľou, len je zmenšený.³⁵ Teraz príde na rad škálovanie³⁶. To hovorí o tom, že ak vezmeme dva podobné systémy, tak aj ich fyzikálne vlastnosti budú podobné s takým koeficientom, aký dostaneme zo zákona, ktorý popisuje daný systém. Opäť to najlepšie ukážeme na našom konkrétnom príklade. Snáď už všetci vieme, že veľkosť elektrického poľa popisuje Coulombov zákon. Bežne ho poznáte v tvare pre bodový náboj:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}.$$

³³Mohli ste si to aj poriadne porátať, no neboli by to najkrajšie integrály... ;-)

³⁴Princíp superpozície je založený na linearite. V tomto prípade na linearite intenzity elektrického poľa v takom zmysle, že intenzita elektrického poľa v určitom mieste je daná súčtom intenzít elektrických polí generovaných jednotlivými malými nábojmi. Pozor! Princíp superpozície nemožno použiť ak opisovaná veličina nie je v takomto zmysle lineárna.

³⁵Keďže predpokladáme, že platňa je veľmi tenká, je to prakticky dvojrozmerné teleso, a teda platňa polovičných rozmerov je naozaj tá, na ktorú sa pýtame v prvej otázke.

³⁶Pozor, škálovanie možno použiť, iba vtedy ak sa parametre systému vyskytujú v podobe nejakých mocnín. Ak by vystupovali napríklad ako argument kosínusu, tak ho použiť nevieme. Matematicky zapísané je škálovanie založené na myšlienke, že pre isté vhodné funkcie platí $f(ax) = \alpha^n f(x)$.

My však máme platňu, ktorá predstavuje veľa takýchto nábojov umiestnených vedľa seba, takže intenzita elektrického poľa bude daná súčtom veľa príspevkov typu $\frac{Q}{r^2}$, kde r je vzdialenosť náboja na platni od miesta, kde meriame intenzitu elektrického poľa. Keďže náboj na platni je rovnomerne rozmiestnený, znamená to, že jeho plošná hustota σ je konštantná. Ak si predstavíme platňu rozsekanú na veľa maličkých štvorčekov dĺžky Δx , tak každý takýto štvorček nesie náboj $Q_i = \sigma(\Delta x)^2$ a celková intenzita elektrického poľa je daná výrazom typu

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{r_i^2} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{(\Delta x)^2}{r_i^2}.$$

Teraz sa už iba zamyslime. Vieme, že rozmer platne je a , čiže polovičný oproti tomu predchádzajúcemu. Teda celkový náboj na platni klesne na štvrtinu a strana každého štvorčeka Δx sa zmenší o polovicu. Rovnako aj vzdialenosť každého štvorčeka od bodu kde meriame intenzitu klesne na polovicu, takže pomer $\frac{(\Delta x)^2}{r^2}$ sa pod \sum nezmení. Keďže sa nezmení ani jeden takýto príspevok, tak sa nezmení ani ich súčet. Z toho by už malo byť všetkým jasné, že tu musí vyjsť rovnaký výsledok ako predtým, čiže $E_2 = E_1 = 4E \cos \alpha$.