

Riešenia 2. kola zimnej časti

2.1 Nasledujúca stanica...

vzorák **Martin**, opravoval **Martin**

Vlak sa pohybuje v prostredí vyplnenom vzduchom, ktorý mu v jazde tvorí prekážku. Na otvorenom priestranstve vzduch obteká vlak zvrchu a zo strán. Keď vlak prechádza tunelom, nastáva tzv. „**piestový efekt**“. Keďže plocha prierezu vlaku spravidla nie je výrazne menšia než plocha prierezu tunelu a vlak sa pohybuje pomerne rýchlo, vlak v tuneli pred sebou vytvára oblasť s vyšším tlakom a za sebou oblasť s nižším tlakom. Časť vzduchu je tak z prednej časti tunelu vytlačená a do zadnej časti tunelu je zase nahnaný čerstvý vzduch. Takýmto spôsobom sa však pri prejazde vlaku tunelom nevymení všetok vzduch v tuneli. Medzi vlakom a tunelom je stále priestor, cez ktorý vzduch prechádza. Na rozdiel od situácie, kedy sa vlak pohybuje na otvorenom priestranstve, teraz môže vzduch prechádzať iba priestorom medzi vlakom a tunelom. Tým pádom môže prechádzať menšou plochou, než keď sa pohybuje mimo tunelu. Rovnica kontinuity má tvar

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2,$$

kde S je plocha, ktorou vzduch môže prúdiť, a v je jeho rýchlosť, pričom indexy 1 a 2 označujú situáciu mimo a v tuneli. Z nej vyplýva, že vzduch obtekajúci vlak v tuneli bude mať vyššiu rýchlosť než vzduch obtekajúci vlak mimo tunelu. Následne sa pozrieme na Bernoulliho rovnicu, ktorá má tvar¹

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot v_1^2 \rho = p_2 + \frac{1}{2} \cdot v_2^2 \rho,$$

kde p je tlak, v je rýchlosť a ρ je hustota a indexy opäť označujú prúdenie v a mimo tunela. Z nej vyplýva, že ak sa rýchlosť tekutiny (teda kvapaliny alebo plynu) zvýši, tak sa v nej zníži tlak. Keďže vzduch obtekajúci vlak v tuneli má vyššiu rýchlosť ako vzduch obtekajúci vlak mimo tunela, bude v ňom **nižší** tlak. Po prechode vlaku do tunela sa zníži aj tlak vnútri vlaku, keďže nie je vzduchotesný. Vzhľadom na rýchlosť vlaku bude zmena tlaku vzduchu pomerne rýchla a výrazná, vplyvom čoho cestujúcim zaľahne v ušiach, teda tlak v ich strednom uchu sa nestihne v krátkom čase vyrovnať atmosférickému tlaku.

Tunel je širší a vyšší než vlak preto, aby bola medzi vlakom a tunelom dostatočná medzera pre prúdiaci vzduch a aby tak nebola spôsobená príliš veľká zmena tlaku. Keby bol okrem vlaku v tuneli priestor iba pre trakčné vedenie, vzduch by prechádzal práve iba týmto priestorom a tak by taktiež mohlo dôjsť k poškodeniu vedenia.

2.2 Wingardium leviosa

vzorák **Marek**, opravoval **Marek**

Z obrázka je zrejmé, že priemer kladky $2r$ zodpovedá vzdialenosti háčikov držiacych laná na stole a stredov závaží, o ktoré sú opevnené druhé konce lán. Budeme predpokladať, že všetky kladky visia v rovnakej výške a súčty výšky závažia a dĺžky lana sú vo všetkých prípadoch rovnaké (čo ak by neplatilo, stalo by sa niečo podobné, ako keď má stôl jednu nohu dlhšiu alebo kratšiu ako ostatné, čo by sa Katke určite nepáčilo). Hmotnosť háčikov, kladiiek a lán je vzhľadom na hmotnosť stola zanedbateľná.

¹V tejto rovnici tunel považujeme za vodorovný, a preto v nej nie je člen za potenciálnu energiu tekutiny.

Keďže stôl visí v pokoji, znamená to, že výsledná sila, ktorá naň pôsobí, je nulová. Na stôl pôsobí gravitačná sila

$$F_G = Mg,$$

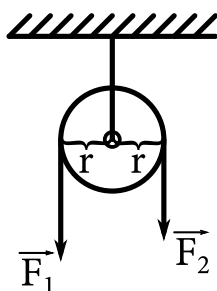
kde M je hmotnosť stola. Na každé zo závaží pôsobí gravitačná sila

$$F_g = mg,$$

kde m je hmotnosť jedného závažia. Z toho vyplýva, že na sústavu zloženú zo stola a štyroch závaží pôsobí gravitačná sila

$$F_{G4g} = F_G + 4F_g = (M + 4m)g.$$

Sila, ktorou pôsobia laná na stôl musí byť rovnako veľká, ale opačného smeru.



Obrázok 2.2.1: Schéma jednej kladky v rovnovážnej polohe

Na pevnú kladku sa dá pozeráť ako na dvojramennú páku s rovnako dlhými ramenami. Aby bola kladka v pokoji, výslednica všetkých síl, ktoré na ňu pôsobia musí byť rovná nule a zároveň súčet momentov síl musí byť nulový. Predpokladajme, že na každú z kladiek pôsobí rovnako veľká sila.

Prvá časť podmienky hovorí o tom, že kladka nevykonáva posuvný pohyb, čo je zrejmé z toho, že Katka kladky pripevnila o strop, takže sila, ktorou laná pôsobia na kladku v smere gravitačného zrýchlenia (dolu) je rovnaká ako sila, ktorou strop pôsobí na kladku v opačnom smere.

Podľa druhej časti podmienky, kladka nekoná otáčavý pohyb. Otáčavý účinok sily opisuje veličina moment sily, ktorej veľkosť je určená ako

$$M = Fr,$$

kde F je sila spôsobujúca otáčavý pohyb a r je rameno sily, t. j. kolmá vzdialenosť vektorovej priamky sily od osi otáčania, čiže vzdialenosť pôsobiska sily od stredu kladky.

Z obrázka je zrejmé, že

$$M_1 = F_1 r$$

a

$$M_2 = F_2 r.$$

Aby bol otáčavý účinok nulový, momenty síl sa musia rovnať:

$$M_1 = M_2,$$

preto

$$F_1 = F_2.$$

Zistili sme, že každé z lán je napínané rovnakou silou. Pretože lán je spolu 8 a každé z nich je napínané rovnako veľkou silou T , musí platiť

$$8T = F_{G4g},$$

čiže každé lano je napínané silou

$$T = \frac{F_{G4g}}{8} = \frac{Mg + 4mg}{8}.$$

Závažia sú v pokoji a na každé z nich pôsobí gravitačná sila F_g v smere gravitačného zrýchlenia (dolu), sila T proti smeru gravitačného zrýchlenia (hore) a tlaková sila stola F_t proti smeru gravitačného zrýchlenia, teda

$$F_g = F_t + T,$$

odkiaľ vypočítame, že stôl tlačí na každé závažie silou

$$F_t = F_g - T = mg - \frac{F_{G4g}}{8} = mg - \frac{Mg + 4mg}{8} = mg - \frac{Mg}{8} - \frac{mg}{2} = \frac{mg}{2} - \frac{Mg}{8}.$$

Aby bola táto sila kladná, teda aby pôsobila v smere, ktorý sme určili a nie naopak, musí naozaj platiť podmienka $M < 4m$ uvedená v zadaní.

Komentár k riešeniam

Častá chyba bola, že sa za silu pnúť považoval súčet veľkostí síl pôsobiacich na každý z koncov lana ($\frac{M+4m}{4}$, označme ju F), čo je ale sila, ktorou je ťahaná jedna kladka. Predstavte si lano priviazané o strom, ktoré ťaháte silou veľkosti F . Rovnako veľkou silou, ale opačného smeru pôsobí aj strom (môžete si teraz namiesto stromu predstaviť kamaráta, ktorý ťahá tiež silou veľkosti F , ale opačne, ako vy, čím sa situácia pre lano ani Vás vôbec nezmenila). Keďže Vy ťaháte lano, z 3. Newtonovho zákona priamo vyplýva, že lano upevnené o strom ťahá Vás rovnako veľkou silou, ale opačného smeru. To je v podstate tá sila, ktorou pôsobí kamarát, resp. strom. Keďže je sústava (teda Vy, lano a strom, resp. kamarát) v pokoji, má nulové zrýchlenie, čiže vektorový súčet pôsobiacich síl je nulový. Keby kamarát pôsobil inou silou ako vy, táto podmienka by neplatila, čo je v rozpore so zadaním úlohy. Keď uvažíme, že každý z 8 koncov lana by na sústavu tvorenú stolom a kladkami pôsobil silou F smerom hore, vo výsledku by bola sústava ťahaná silou veľkosti $2M + 8m$, čo je dvojnásobok tiažovej sily pôsobiacej na stôl v opačnom smere.

2.3 Prvácke upratovanie

vzorák KatkaN, opravovala KatkaN

Pozrime sa, čo sa deje s rebríkmi po tom, čo ich Tömaš pustí. Na každú priečku prvého (rovného, normálneho) rebríka pôsobí v jej ťažisku gravitačná sila smerom nadol. Keď sa najspodnejšia priečka dotkne zeme, okamžite zastaví a zvyšné priečky to nijako neovplyvní – padajú ďalej voľným pádom.

V prípade druhého (šikmého) rebríka je však situácia iná. Rovnako, ako v predošlom prípade, pôsobí na každú priečku v jej ťažisku² gravitačná sila smerom nadol. Rozdiel nastáva až v momente dotyku najspodnej-

²Pričom ťažiská priečok normálneho a šikmého rebríka sú v momente pustenia v rovnakej výške.

jšej priečky so zemou. Keďže je priečka šikmá, zeme sa dotkne najskôr jej spodná časť (resp. spodný roh). Na tento roh začne podložka pôsobiť silou smerom nahor takej veľkosti, že zabránuje priečke prepadať sa pod zem. Keďže táto sila od podložky pôsobí proti gravitačnej, spodná priečka bude urýchľovaná nadol menej ako pred tým. Teda aj spoločné ťažisko *všetkých* priečok rebríka bude nadol urýchľované menej ako v prípade voľného pádu. A to je predsa menšie zrýchlenie ako zažíval normálny rebrík! Ako teda môže rebrík so šikmými priečkami dopadnúť skôr?

Vráťme sa späť k jeho spodnej priečke. Keďže tá sa dotýka zeme len svojím spodným rohom a samotné ťažisko priečky ešte nedopadlo, vznikne pôsobením gravitačnej sily moment sily, pričom os otáčania je práve tá časť priečky, ktorá sa dotýka zeme. Ako už bolo spomenuté, ťažisko priečky bude zrýchľovať nadol menej. Avšak moment gravitačnej sily bude spôsobovať rotáciu priečky, konkrétne jej horný koniec pôjde smerom nadol, čím vznikne v lane ťahová sila smerom nadol. Zvyšok rebríka nad priečkou dotýkajúcou sa zeme tak cíti dve sily – gravitačnú a teraz aj ťahovú silu nadol od lana. Preto je *zvyšok* rebríka urýchľovaný nadol viac ako keby padal voľným pádom. Takýmto spôsobom budú kúsok po kúsku priečky šikmého rebríka urýchľovať všetky ostatné nad sebou, v čoho dôsledku dopadne najvyššia priečka tohto rebríka znateľne skôr, než najvyššia priečka normálneho rovného rebríka.

Dobré by bolo aj zdôvodniť, prečo v tomto prípade neuvažujeme odpor vzduchu ako relevantný dôvod spomaľovania rovného rebríka. Z takej malej výšky, z akej predpokladáme, že Tómas rebríky púšťa, (zhruba meter až dva) je jednoducho odpor vzduchu natolko zanedbateľný, že by rozhodne nedokázal spôsobiť taký rozdiel v časoch pádu, k akému v prípade takýchto dvoch rebríkov dochádza.

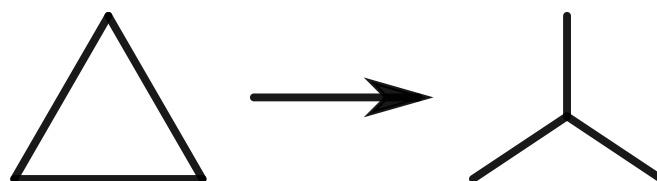
2.4 Cutting-edge odporová sieť

vzorák Péder, opravovala Péder

Na začiatok si treba povedať pár vecí, s ktorými budeme v tomto vzoráku pracovať.

Prvou z nich sú alternatívne zapojenia. V obvode totiž nezáleží na tom, v akom poradí sú rezistory zapojené. Podstatné je len koľko ich je a ako sa vetvia, takže z tých istých rezistorov môžeme vytvoriť viacero obvodov, ktoré vyzerajú inak, ale majú úplne rovnaké vlastnosti. To vidíme aj na vzorčekoch ktoré nám umožňujú spočítať odpor našej súčiastky. Na zopakovanie spomenieme, že pre sériové zapojenie platí, že celkový odpor série rezistorov je rovný súčtu ich odporov a pre paralelné, že prevrátená hodnota celkového odporu je rovná súčtu prevrátených hodnôt odporov jednotlivých vetiev zapojenia. Toto nám bude nápomocné neskôr, keďže vďaka tomu môžeme značne zredukovať počet možných nových obvodov z 36 na 6.

Druhým dôležitým princípom, ktorý sa nám zíde sú transformácie z hviezdy na trojuholník a naopak. Ten v zásade hovorí, že keď máme v obvode tri vrcholy spojené do trojuholníka rezistormi, vieme obvod prekresliť tak, že bude vyzeráť ako hviezda a naopak, viď obrázok 2.4.1. To nám umožní poodstraňovať rôzne priečky a poprepájať každé zapojenie tak, aby sa dalo počítať a vyhli sme sa Kirchoffovým zákonom.



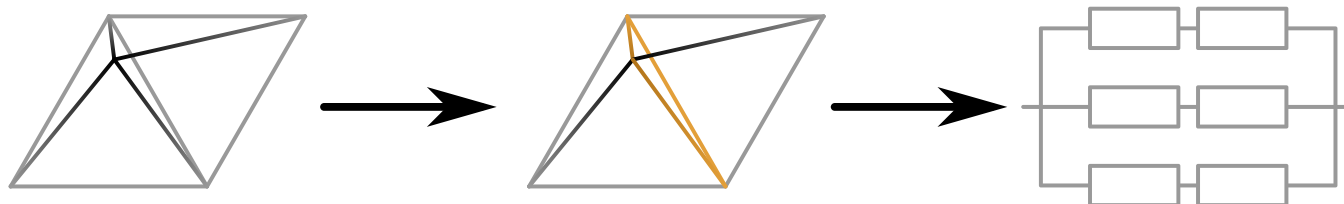
Obrázok 2.4.1: Transformácia hviezda-trojuholník.

Nie je to však celkom jednoduché. Pri takomto prekreslení totiž musíme zmeniť odpory jednotlivých vetiev, aby mal nový obvod rovnaké vlastnosti ako ten starý. Pre účely tohto príkladu to znamená, že nový odpor vetvy pri transformácii z hviezdy na trojuholník bude rovný $3R$ a nový odpor pri transformácii z trojuholníka na hviezdu to bude $\frac{R}{3}$. Viac o tom, ako sa dopracovať k týmto hodnotám a ako a prečo funguje táto transformácia sa dá nájsť [tu](#).

Pôvodný obvod:

Tak si poďme spočítať odpor pôvodného zapojenia. Tu sa nám zide zamyslieť sa nad tým, ktorými vetvami aj reálne tečie nejaký prúd. Vieme totiž, že napätie vyjadruje rozdiel potenciálov medzi dvoma bodmi, takže logicky, ak majú dva body rovnaký potenciál, bude medzi nimi nulové napätie. A kde nie je napätie, nepotečie ani prúd (aj ak sú tie dva body priamo spojené drôtom). No, ale ako teraz zistíme, ktorými drôtmí netečie prúd? Samozrejme by sa to dalo spočítať, ale stačí nám použiť jednoduchý trik ktorý využíva symetriu obvodu. Pretože ak je náš obvod zložený z dvoch úplne identických vetiev (čo sa týka počtu, odporu a uloženia rezistorov), na analogických miestach oboch vetiev bude vždy rovnaké napätie.

No a najjednoduchším prípadom ako vieme spojiť miesta s rovnakým potenciálom v obvode ktorý má tri vetvy je presne zapojenie v zadaní. To znamená, že strednými drôtmí nepotečie žiaden prúd a môžeme si ten obvod prekresliť ako na obrázku [2.4.2](#).



Obrázok 2.4.2: Pôvodný obvod

Pre celkový odpor obvodu R_c tým pádom platí

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R+R} + \frac{1}{R+R} + \frac{1}{R+R} = \frac{3}{2R},$$

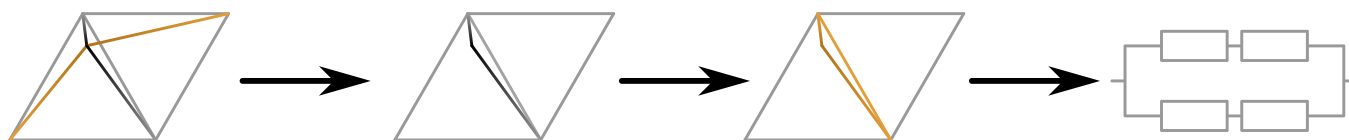
čiže

$$R_c = \frac{2}{3}R.$$

Strihanie:

Tak a teraz sa poďme pozrieť na všetky novovzniknuté obvody po dvoch prestrihnutiach. Čiernou sú značené pôvodné rezistory s odporom R , červenou prestrihnuté rezistory, zelenou rezistory vytvorené transformáciou trojuholník-hviezda, takže majú odpor $\frac{R}{3}$ a modrou tie vytvorené transformáciou z hviezdy na trojuholník s odporom $3R$.

Obvod 1:



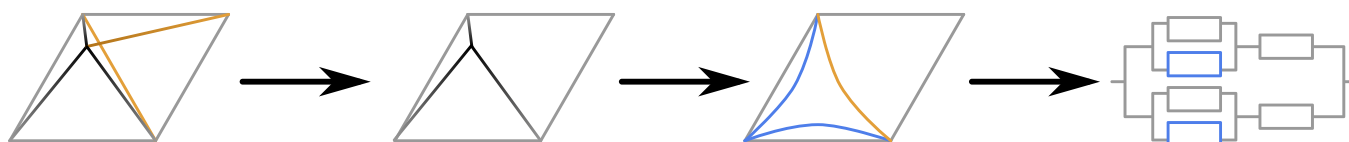
Obrázok 2.4.3: Obvod 1

V tomto prípade sme prestrihli jeden rezistor idúci z bodu A a druhý na neho nadväzujúci rezistor pokračujúci do bodu B. Strednými rezistormi opäť nepotečie žiaden prúd a odpor obvodu bude

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R + R} + \frac{1}{R + R} = \frac{2}{2R} = \frac{1}{R},$$

$$\Rightarrow R_c = R.$$

Obvod 2:



Obrázok 2.4.4: Obvod 2

Tentokrát sme zase prestrihli rezistor idúci z bodu A (alebo B, to je jedno) a stredný rezistor, ktorý naň nenadväzuje. Potom bolo treba použiť jednu transformáciu z hviezdy na trojuholník a prestrihnúť novovzniknutý stredný rezistor, ktorým netiekol prúd. No a výpočty vyzerali nasledovne. Paralelné zapojenie modrého a čierneho rezistora má odpor

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R} + \frac{1}{3R} = \frac{4}{3R},$$

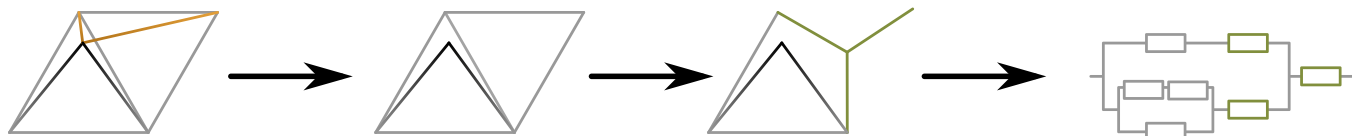
$$\Rightarrow R_p = \frac{3R}{4}.$$

Odpor celého obvodu potom bude

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{\frac{3R}{4} + R} + \frac{1}{\frac{3R}{4} + R} = \frac{4}{7R} + \frac{4}{7R} = \frac{8}{7R},$$

$$\Rightarrow R_c = \frac{7}{8}R.$$

Obvod 3:



Teraz sme opäť prestrihli rezistor idúci z bodu A, ale k tomu pre zmenu nadväzujúci stredný rezistor. Prvá polovica obvodu je celkom fajn a v druhej je pekný trojuholník, z ktorého vieme spraviť hviezdu a získať tým dve paralelné vetvy, z ktorých sa jedna vetví. To malé paralelné zapojenie jedného a dvoch rezistorov s odporom R bude mať odpor

$$\frac{1}{R_{p1}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R},$$

$$\Rightarrow R_{p1} = \frac{2R}{3}.$$

Veľké paralelné zapojenie teda bude

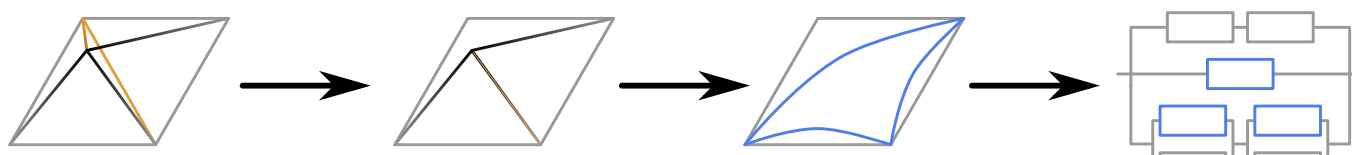
$$\frac{1}{R_{p2}} = \frac{1}{\frac{2R}{3} + \frac{R}{3}} + \frac{1}{R + \frac{R}{3}} = \frac{1}{R} + \frac{3}{4R} = \frac{7}{4R},$$

$$\Rightarrow R_{p2} = \frac{4R}{7}.$$

A celý obvod má teda odpor

$$R_c = \frac{4R}{7} + \frac{R}{3} = \frac{19}{21}R.$$

Obvod 4:

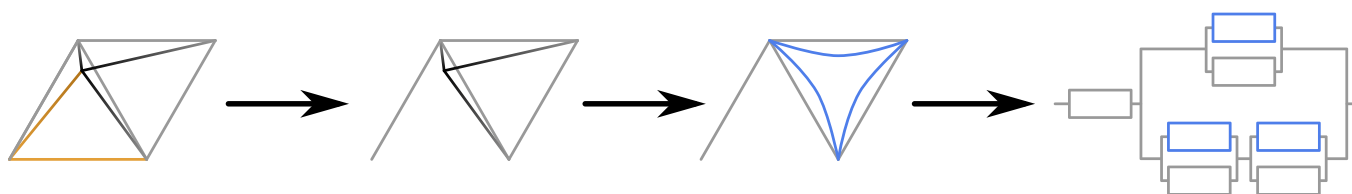


Obrázok 2.4.5: Obvod 4

Tentokrát sme strihali dva stredné rezistory. Tu môžeme pretransformovať strednú hviezdu, ktorá tam vznikla, na trojuholník. No a keďže už vieme aj aký odpor má to malé paralelné zapojenie ($\frac{3}{4}R$), tak môžeme zrátať odpor celého obvodu

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{3R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{\frac{3R}{4} + \frac{3R}{4}} = \frac{1}{3R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{\frac{6R}{4}} = \frac{3}{2R},$$

$$\Rightarrow R_c = \frac{2}{3}R.$$

Obvod 5:


Obrázok 2.4.6: Obvod 5

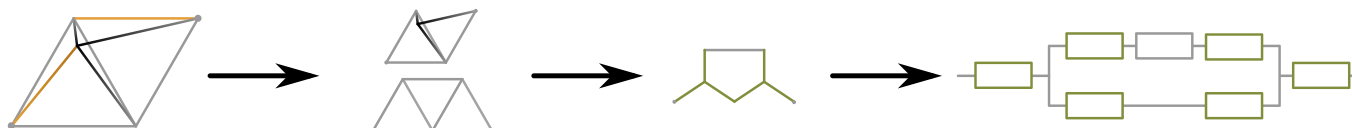
Na vytvorenie piateho obvodu sme prestrihli dva rezistory vychádzajúce z bodu A. Takže nám tu opäť vyšla hviezda, ktorú prekreslíme na trojuholník a už sa to dá spočítať. Malé paralelné zapojenie má odpor $\frac{3}{4}R$, to už sme spočítali dávnejšie. Veľké paralelné zapojenie potom bude mať odpor

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{\frac{3R}{4} + \frac{3R}{4}} + \frac{1}{\frac{3R}{4}} = \frac{4}{6R} + \frac{4}{3R} = \frac{2}{R},$$

$$\Rightarrow R_p = \frac{R}{2}.$$

A celý obvod bude

$$R_c = \frac{R}{2} + R = \frac{3}{2}R.$$

Obvod 6:


Obrázok 2.4.7: Obvod 6

Nakoniec ostalo ešte prestrihnutie jedného rezistora z bodu A a druhého z bodu B tak, aby na seba nenadväzovali. To si vieme prekresliť na takéto trojuholníčky, a potom dva z nich prerobiť na hviezdy, čím získame obvod, s ktorým sa dá počítať. Odpor paralelného zapojenia vypočítame ako

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{\frac{R}{3} + R + \frac{R}{3}} + \frac{1}{\frac{R}{3} + \frac{R}{3}} = \frac{1}{\frac{5R}{3}} + \frac{1}{\frac{2R}{3}} = \frac{21}{10R},$$

$$\Rightarrow R_p = \frac{10}{21}R.$$

A odpor celého obvodu bude

$$R_c = \frac{10R}{21} + \frac{R}{3} + \frac{R}{3} = \frac{10R}{21} + \frac{2R}{3} = \frac{8}{7}R.$$

No, ani to nebolelo a je hotovo.

2.5 Winter is coming

vzorák **MatusH**, opravoval **MatusH**

Matúša budeme v rámci výpočtu uvažovať ako hmotný bod, ktorý sa hojda na húpačke.³ Aj keď celú hmotnosť dáme do jedného bodu, musíme pamätať, že ústa, z ktorých vyplúva kôstka, nie sú v rovnakej vzdialenosti od osi otáčania. Ústa sú pravdepodobne $a = 0,5$ m nad hojdačkou v pokoji a nohy sa tesne nedotýkajú zeme. Jeho ťažisko dáme do stredu jeho výšky keď sedí, a teda $l = 4$ m od osi otáčania.

Na to, aby sme vypočítali let kôstky, potrebujeme poznať Matúšovu rýchlosť v okamihu, keď ju vyplúje. Tú vieme zistiť zo zákona zachovania mechanickej energie. Keď je Matúš vychýlený o maximálny uhol, celá jeho energia je vo forme potenciálnej energie. V iných momentoch to je súčet jeho potenciálnej a kinetickej energie. Ak uvažíme nulovú potenciálnu hladinu v momente, keď je hojdačka najnižšie, dostávame

$$E_c = mgl(1 - \cos 45^\circ) = \frac{1}{2}mu^2 + mgl(1 - \cos \phi), \quad (2.5.1)$$

kde m je Matúšova hmotnosť, u jeho rýchlosť a ϕ jeho aktuálna výchylka. Z tejto rovnosti vieme vyjadriť u ako funkciu ϕ , pričom dostávame

$$u = \sqrt{2gl(\cos \phi - \cos 45^\circ)}. \quad (2.5.2)$$

Takto ale dostávame rýchlosť hmotného bodu, ktorým aproximujeme Matúša. Nás v skutočnosti ale zaujíma rýchlosť jeho úst. Keďže obe tieto veci vykonávajú pohyb po kružnici rovnakou uhlovou rýchlosťou, rýchlosť úst dostaneme, ak rýchlosť hmotného bodu pre násobíme pomerom ich vzdialeností od osi otáčania. Preto počiatočná rýchlosť kôstky (udelená pohybujúcou sa hojdačkou) je

$$w = \sqrt{2gl(\cos \phi - \cos 45^\circ)} \frac{l - a}{l}. \quad (2.5.3)$$

S touto znalosťou už vieme napísať počiatočné podmienky pre kôtku. Hodnoty súradníc x a y sú

$$\begin{aligned} x_0 &= (l - a) \sin \phi, \\ y_0 &= h + l - (l - a) \cos \phi \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

a rýchlosť je

$$\begin{aligned} v_x &= w \cos \phi + v \cos \theta, \\ v_y &= w \sin \phi + v \sin \theta, \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

kde θ je uhol s horizontálou, pod ktorým Matúš vyplúje kôtku.

Keď Matúš kôtku vyplúje, ide o šikmý vrh. Jej okamžitú výšku vieme vypočítať ako:

$$y = y_0 + v_y t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (2.5.6)$$

Zaujíma nás čas, kedy kôstka dopadne na zem, resp. pri akom čase nastane $y = 0$. Tým dostávame kvadratickú rovnicu pre čas t

$$t_d = \frac{-v_y \pm \sqrt{v_y^2 + 2gy_0}}{-g} = \frac{v_y + \sqrt{v_y^2 + 2gy_0}}{g}. \quad (2.5.7)$$

³Presnejšie priblíženie by bolo fyzikálne kyvadlo s nerovnomerne rozloženou hustotou. Keďže zadanie ale neudáva Matúšovu hmotnosť, takýto výpočet nebudeme robiť.

Vyberieme riešenie s mínusom, lebo vieme, že čas má vyjsť kladný.⁴ Teraz už vieme, ako dlho kôstka letela. Vzdialenosť, do ktorej dopadne je preto

$$d = x_0 + v_x t_d. \quad (2.5.8)$$

Môžeme do tohto vzorca začať dosadzovať, no už prvého pohľadu vidíme, že výsledný výraz by bol dlhý. Keďže nás zaujíma len výsledok, tak sa tejto robote vyhneme.

Teraz ostáva už len vypočítať túto vzdialenosť pre rôzne kombinácie uhlov ϕ a θ . Túto prácu prenecháme počítaču. Konkrétne krátkemu skriptu napísanému v jazyku Python, ktorý tieto vzdialenosti vypočíta a nájde medzi nimi tú najväčšiu. Taký skript vyzerá napríklad takto:

```
# importujeme funkcie sin, cos, sqrt a hodnotu pi, aby sme ich mohli použiť
from math import sin, cos, pi, sqrt

# vytvoríme premenné pre zadané konštanty a naše vytvorené konštanty
g, l, v, h, a = 9.81, 4, 1, 0.5, 0.5
# sem budeme ukladať priebežne najväčšiu vzdialenosť a uhol, pri ktorom bola dosiahnutá
max, mphi, mtheta = 0, 0, 0

# prejdeme cez všetky možné kombinácie phi a theta
# (presnosť máme aktuálne 0,1 stupňa, preto ideme až po 451(901) a potom delíme 10)
for phi in range(0, 451):
    for theta in range(0, 901):
        # premeníme ich na radiány, lebo s nimi rátajú naše funkcie sin a cos
        phir, thetar = phi/10/360*2*pi, theta/10/360*2*pi
        # nastavíme počiatočné podmienky
        x0 = (l - a) * sin(phir)
        y0 = h + l - (l - a) * cos(phir)
        w = sqrt(2 * g * l * (cos(phir) - cos(pi/4))) * ((l - a) / l)
        vx = w*cos(phir) + v*cos(thetar)
        vy = w*sin(phir) + v*sin(thetar)

        # vypočítame čas dopadu a vzdialenosť dopadu
        td = (vy + sqrt(vy**2 + 2*g*y0))/(g)
        d = x0 + vx*td

        # skontrolujeme, či nešlo náhodou o novú maximálnu hodnotu,
        # ak áno zapíšeme si ju
        if d > max:
            max = d
            mphi = phi
            mtheta = theta

# po tom, ako pre každú kombináciu vypočítame vzdialenosť, vypíšeme tú maximálnu
print(f"Kôstka doletí najďalej {max:.6f} metra.
V momente, keď ju vyplujeme, hojdačka bude zvierat uhol {mphi/10}° s vertikálou.
Matúš vtedy vypluje kôstku pod uhlom {mtheta/10}° voči horizontále.")

# ak by sme chceli vypísať hodnotu pre konkrétne celočíselné 'phi', 'theta', použijeme
# print(vysledok[phi][theta])
```

⁴Záporné riešenie je, ak by sme išli v čase späť.

Po spustení programu zisťujeme, že najlepšie je kôstku vyplúť, keď je hojdačka vychýlená o uhol 29° a kôstku vyplujeme pod uhlom $32,4^\circ$ voči horizontále.

2.6 Neposedná lyžička

vzorák **Marián Koval'**, opravoval **Matko**

Ako vzorové riešenie sme použili riešenie Majka Koval'a so zopár kozmetickými úpravami.

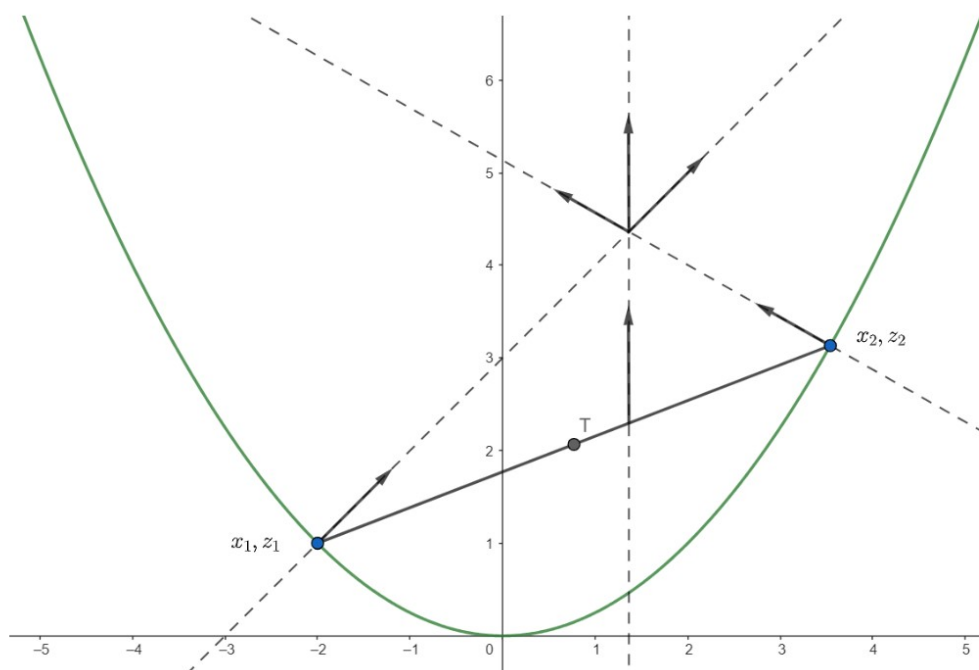
Marián Koval'

Gymnázium Grösslingová 18, Kvinta A

Príklad číslo 6

Keďže lyžička sa po miske hýbe bez trenia, sila je iba kolmá na povrch misky. Miska je rotačne symetrická okolo osi z , horizontálna zložka normálovej sily, ktorou miska pôsobí na lyžičku bude iba v radiálnom smere – do stredu. Ak sa lyžička dotýka misky v dvoch bodoch (čo sa bude vždy, ak nebude vyvážená na jednom konci, čo je jedno z riešení), pôsobia na ňu dve sily v horizontálnom smere – od týchto dvoch bodov. Tieto dve sily sa musia odčítat', a teda musia pôsobiť v presne opačných smeroch. Keďže sila od misky pôsobí vždy presne smerom do stredu, konce lyžičky musia byť na opačných stranách od osi z . Vezmem teda zvislý rez priestorom, ktorý obsahuje lyžičku aj stred misky. Viem, že žiadne sily nebudú vychyľovať lyžičku z tejto roviny, a teda mi stačí úlohu riešiť v 2D prípade, kde $z = \frac{x^2}{2p}$. Lyžička bude v stabilnej polohe, keď výslednica síl aj momentov síl na ňu pôsobiacich bude nulová.

Viem, že ak posuniem sily v smere ich pôsobenia, nezmení sa ich efekt (celková sila ani moment sily). Môžem ich teda presunúť do jedného bodu a tam ich sčítat'. Aby bola celková sila nulová, súčet síl od misky musí byť zvislý a rovný tiaži. Keďže táto sila je zvislá, môžem ju posúvať v zvislom smere. Aby bol moment sily nulový, táto sila by sa mala dať posunúť do ťažiska. To znamená, že aby bola situácia stabilná, musia sa x -ové zložky normály v koncoch lyžičky vynulovať.



Obrázok 2.6.1: Lyžička v miske

Normálové vektory sú kolmé na dotyčnicové vektory, takže ich viem vypočítať vypočítaním dotyčníc (derivácia tvaru nádoby je $\frac{d}{dx} \frac{x^2}{2p} = \frac{x}{p}$) a následným otočením o 90° . Ak sa lyžička dotýka misky v bode s x -ovou súradnicou x_1 , tak dotyčnicový vektor tam je

$$\mathbf{t}_1 = \left(1, \frac{x_1}{p}\right)$$

a normálový teda je

$$\mathbf{n}_1 = \left(-\frac{x_1}{p}, 1\right).$$

V druhom bode dotyku je analogicky⁵

$$\mathbf{t}_2 = \left(1, \frac{x_2}{p}\right),$$

$$\mathbf{n}_2 = \left(-\frac{x_2}{p}, 1\right).$$

Z toho vieme zistiť rovnice priamok, na ktorých ležia normálové sily, konkrétne

$$(x - x_1) = (z - z_1) \left(-\frac{x_1}{p}\right)$$

a

$$(x - x_2) = (z - z_2) \left(-\frac{x_2}{p}\right).$$

Keď vyriešim tieto rovnice pre x a y , pričom x bude rovné $\frac{x_1+x_2}{2}$, znamená to, že tieto sily sa sčítajú do ťažiska. Takže

$$\begin{aligned} x + z \frac{x_1}{p} &= x_1 \left(1 + \frac{z_1}{p}\right), \\ x + z \frac{x_2}{p} &= x_2 \left(1 + \frac{z_2}{p}\right). \end{aligned} \tag{2.6.1}$$

Odčítam druhú rovnicu od prvej

$$z \frac{x_1 - x_2}{p} = x_1 \left(1 + \frac{z_1}{p}\right) - x_2 \left(1 + \frac{z_2}{p}\right)$$

a vyjadrím

$$z = \left[x_1 \left(1 + \frac{z_1}{p}\right) - x_2 \left(1 + \frac{z_2}{p}\right) \right] \frac{p}{x_1 - x_2} = \frac{x_1(p + z_1) - x_2(p + z_2)}{x_1 - x_2}.$$

⁵Môžeme sa uistiť, že toto sú kolmé vektory, stačí nájsť ich skalárny súčin a zistíme, že vyjde 0.

Teraz to dosadíme naspäť do rovnice (2.6.1), čím odstavame

$$x + \frac{x_1(p + z_1) - x_2(p + z_2)}{x_1 - x_2} \frac{x_1}{p} = x_1 \left(1 + \frac{z_1}{p} \right).$$

Vyjadrim

$$\begin{aligned} x &= x_1 \left(1 + \frac{z_1}{p} \right) - \frac{x_1(p + z_1) - x_2(p + z_2)}{x_1 - x_2} \frac{x_1}{p}, \\ &= -\frac{x_1 x_2 (z_1 - z_2)}{p(x_1 - x_2)}, \\ &= -\frac{x_1 x_2 \left(\frac{x_1^2}{2p} - \frac{x_2^2}{2p} \right)}{p(x_1 - x_2)}, \\ &= -\frac{x_1 x_2 (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{2p^2(x_1 - x_2)}, \\ &= -\frac{x_1 x_2 (x_1 + x_2)}{2p^2}. \end{aligned}$$

Na to, aby situácia bola stabilná, x sa musí rovnať $\frac{x_1 + x_2}{2}$. Tak napíšem rovnicu:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{x_1 x_2 (x_1 + x_2)}{2p^2} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ \frac{x_1 x_2}{p^2} &= -1, \\ x_2 &= -\frac{p^2}{x_1}. \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

Teraz sa dá vyjadriť dĺžka lyžičky z x_1 – ja si však vyjadrim namiesto toho jej druhú mocninu, aby som tam nemal odmocniny:

$$l^2 = (x_1 - x_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \left(x_1 + \frac{p^2}{x_1} \right)^2 + \left(\frac{x_1^2}{2p} - \frac{p^2}{2x_1} \right)^2.$$

Po úprave dostaneme

$$l^2 = \frac{(p^2 + x_1^2)^4}{4p^2 x_1^4}.$$

Dĺžka je vždy kladná, teda

$$l = \frac{(p^2 + x_1^2)^2}{2p x_1^2}.$$

Označme si x_1^2 ako k , a vznikne nám kvadratická rovnica

$$2plk = p^4 + 2p^2 k + k^2,$$

ktorej riešením je

$$k = x_1^2 = \frac{2p(l-p) \pm \sqrt{4p^2(p-l)^2 - 4p^4}}{2} = p(l-p \pm \sqrt{(l-p)^2 - p^2}).$$

Odmocnením získame x_1 . Mohli by sme pridať aj $\pm$, ale to tam bude triviálne, keďže situácia je symetrická podľa osi y , takže

$$x_1 = \sqrt{p(l-p \pm \sqrt{(l-p)^2 - p^2})}.$$

Hodnota z_1 je daná rovnicou tvaru misky, čiže poznáme súradnice jedného bodu, kde sa lyžička dotýka misky. Ohľadom druhého bodu, hodnotu x_2 vypočítame z rovnice (2.6.2), a potom z_2 je opäť dané tvarom misky.

Toto je len jedným z riešení. Ďalšie riešenie, ktoré z týchto rovníc nevypadne je, že $x_1 = -x_2 = \frac{l}{2}$, čiže lyžička je vodorovne. Toto riešenie z tohto odvodu nevyplynie preto, že v istom momente som delil $x_1 + x_2$, čo sa teda v takom prípade nedá. Ďalšie riešenie, ktoré popiera predpoklad, že sa dotýka v dvoch bodoch, je riešenie, pri ktorom je lyžička v strede misky vyvážená na jednom svojom konci. Ostatné predpoklady, ktoré som urobil už triviálne vždy platia.

2.7 Trochu praxe nezaškodí

vzorák **Tomáš**, opravoval **Tomáš**

V oboch Ronyho modeloch je súčet hybností guľ pred aj po zrážke rovnaký, pretože na gule síce pôsobia vonkajšie sily – gravitačná a normálová od stola – ale ich súčet je nulový, a teda súčet hybností guľ sa zachováva. Okrem toho, podľa zadania sú zrážky dokonale pružné, čiže kinetická energia guľ sa nemení na iné formy energie, t. j. súčet kinetickej energie guľ sa zachováva.

Ronyho prvý model

Označme v rýchlosť odpálenej guľ pred zrážkou, v_1 rýchlosť odpálenej guľ po zrážke a v_2 rýchlosť pôvodne stojacej po zrážke. Zákon zachovania hybnosti potom je

$$mv + 0 = mv_1 + mv_2$$

a zákon zachovania energie

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2.$$

Po odstránení zbytočných ozdôb typu m a $\frac{1}{2}m$ tak máme sústavu rovníc

$$v = v_1 + v_2 v^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

Z prvej vyjadríme $v_1 = v - v_2$ a po dosadení do druhej dostaneme

$$v^2 = v^2 - 2vv_2 + v_2^2 + v_2^2 \quad \Rightarrow \quad v_2^2 = vv_2.$$

Táto rovnica má riešenia $v_2 = 0$ a $v_2 = v$. Rony zo skúseností vie, že po zrážke sa pôvodne stojaca guľa pohybuje, teda fyzikálne správnym riešením je $v_2 = v$. Zo zákona zachovania hybnosti je potom zjavné, že $v_1 = 0$. V prvom Ronyho modeli teda odpálená guľa po zrážke stojí a pôvodne stojaca ide rýchlosťou v , ktorou Rony prvú guľu odpálil.

Ronyho druhý model

Keďže podľa zadania trenie medzi guľami neuvažujeme, rotačná kinetická energia sa medzi guľami nemala ako preniesť. Teda podobne ako v prvom modeli, tesne po zrážke máme jednu stojacu guľu a jednu guľu idúcu rýchlosťou v . Rozdiel je v tom, že keďže si nechali svoje pôvodné rotačné kinetické energie, tak tesne po zrážke stojaca guľa rotuje a hýbuca sa guľa nerotuje. Obe teda prešmykujú, a teda trecia sila na ne pôsobí dvojako – zrýchľuje/spomaľuje ich posuvný pohyb a moment trecej sily spomaľuje/zrýchľuje ich rotáciu. Trecia sila prestane pôsobiť v momente, keď sa posuvná rýchlosť a obvodová rýchlosť na povrchu gule vyrovnajú. Poďme teda počítať.

Guľa 1 tesne po zrážke stojí a rotuje uhlovou rýchlosťou $\frac{v}{r}$, keďže pred zrážkou sa pohybovala rýchlosťou v . Trecia sila má veľkosť mgf a urýchľuje guľu. Keďže trecia sila pôsobí na povrchu gule, tak jej moment voči stredu gule je $mgfr$ a spomaľuje jej rotáciu. Zrýchlenie gule teda je $\frac{mgf}{m} = gf$ a uhlové zrýchlenie je $\frac{mgfr}{J}$, kde J je moment zotrvačnosti gule. Preto časový vývoj rýchlosti je

$$v_1(t) = gft \quad (2.7.1)$$

a uhlovej rýchlosti je

$$\omega_1(t) = \frac{v}{r} - \frac{mgfr}{J}t. \quad (2.7.2)$$

Trecia sila pôsobí, dokým sa nevyrovná posuvná rýchlosť s obvodovou, čo nastane v nejakom čase t_0 , pre ktorý teda musí platiť

$$v_1(t_0) = \omega_1(t_0)r.$$

Do tejto rovnice dosadíme vyjadrenia pre rýchlosť (2.7.1) a uhlovú rýchlosť (2.7.2) a zistíme, že guľa prestane prešmykovať v čase

$$t_0 = \frac{v}{fg\left(1 + \frac{mr^2}{J}\right)}.$$

Po dosadení t_0 do (2.7.1) dostávame, že posuvná rýchlosť gule sa ustáli na

$$v_1 = \frac{v}{\left(1 + \frac{mr^2}{J}\right)} = \frac{2}{7}v,$$

kde sme dosadili moment zotrvačnosti gule $J = \frac{2}{5}mr^2$.

Pri druhej guli je to veľmi podobné. Tesne po zrážke sa hýbe rýchlosťou v a nerotuje. Veľkosť aj moment trecej sily sú rovnaké ako pri prvej guli, teda teraz máme časový vývoj rýchlosti

$$v_2(t) = v - gft \quad (2.7.3)$$

a uhlovej rýchlosti

$$\omega_2(t) = \frac{mgfr}{J}t.$$

Opäť chceme zistiť, v akom čase nastane $v_2(t_0) = \omega_2(t_0)r$, a aj v tomto prípade to je

$$t_0 = \frac{v}{fg\left(1 + \frac{mr^2}{J}\right)}.$$

Po dosadení t_0 do (2.7.3) a pár úpravách dostaneme, že posuvná rýchlosť gule sa ustáli na

$$v_2 = \frac{v}{\left(1 + \frac{J}{mr^2}\right)} = \frac{5}{7}v.$$

V Ronyho druhom modeli teda guľa, ktorú odpálil rýchlosťou v , sa tesne po zrážke zastaví, ale stále rotuje, vďaka čomu sa rozbehne na $\frac{2}{7}v$, zatiaľ čo pôvodne stojaca guľa ide tesne po zrážke rýchlosťou v , ale nerotuje, vďaka čomu sa zbrzdí na $\frac{5}{7}v$.

2.8 Fyzik prokrastinátor

vzorák **Peter Siebert**, opravovala **KatkaN**

Ako vzorové riešenie uvádzame veľmi pekné riešenie od Petra Sieberta.

Úvod

V prvom rade sa budem zaujímať, čo je to rezonančná frekvencia miestnosti. Pre zjednodušenie sa budem zaoberať prípadom svojej skrine, ktorá má veľmi jednoduchý tvar kvádra, a teda zvukové vlny sa nebudú lámať a nebudú tlmené na iných povrchoch. Zvuk sa šíri ako vlna, pričom vieme, že pri bežnom atmosférickom tlaku je rýchlosť zvuku $c = 344$ m/s.

Každá zvuková frekvencia má svoju špecifickú vlnovú dĺžku. Ak prehráme zvuk v miestnosti s vlnovou dĺžkou rovnakou, ako je jeden z rozmerov miestnosti, tak tento zvuk sa bude odrážať od stien a prekryvať sám seba – bude interferovať. Keď vlny interferujú konštruktívne, tak sa ich amplitúda sčítava, a teda zvuk bude silnejší.

Na meranie som použil softvér *REW*, ten som potom teoreticky overil na základe rozmerov skrine.

Pomôcky

Notebook so softvérom *REW*, vhodná miestnosť na meranie (skriňa), oceľové zvinovacie meradlo (1 dielik = 1 mm).

Postup

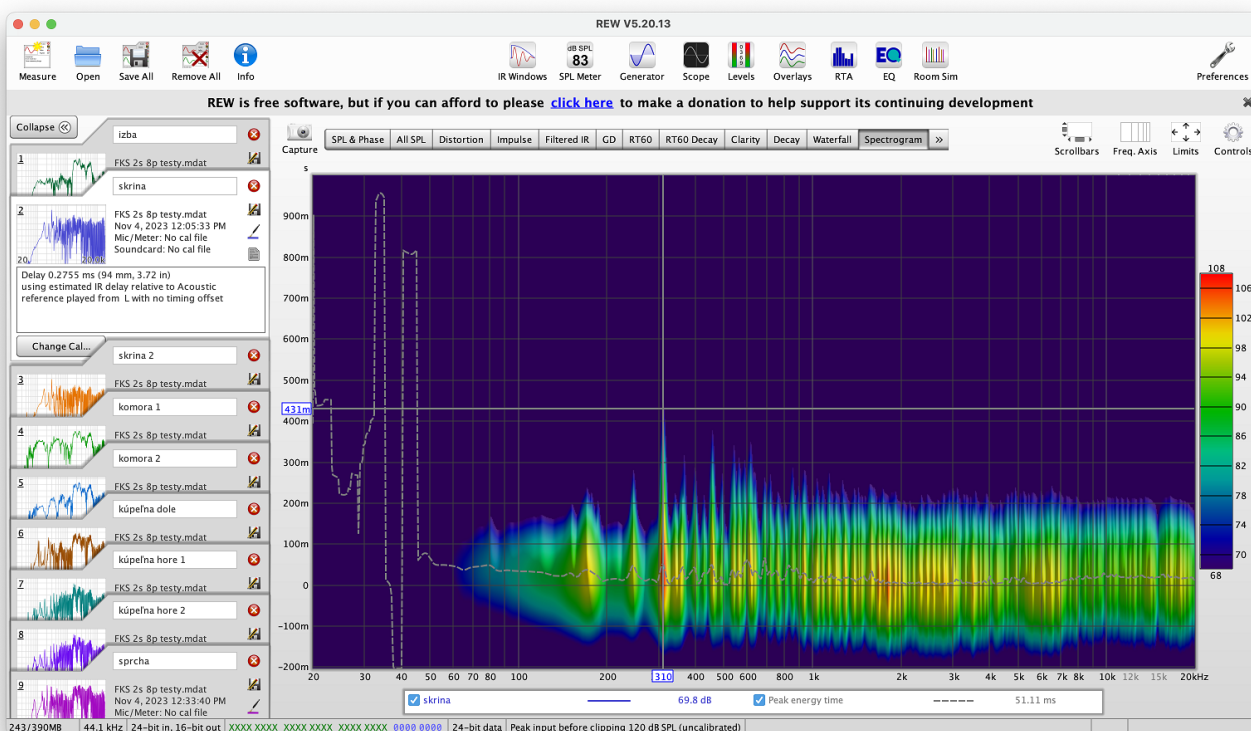
Na zmeranie rezonančnej frekvencie svojej skrine som použil program *REW* vo verzii 5.20.13. Ako píš na [stránke podpory](#), princípom fungovania je, že reproduktor postupne prehráva všetky frekvencie od nízkych po vysoké, a to logaritmicky, teda pri prehrávaní nízkych frekvencií strávi viac času. Počas toho mikrofón zaznamenáva odrazený zvuk a s pomocou FFT (rýchla Fourierova transformácia) vie zistiť, ako moja skriňa vplýva na rôzne frekvencie. Jednotlivé vlny sa môžu aj viackrát odraziť od stien a program to vie zaznamenať.

Program som spustil na notebooku v zavretej skrini. Skriňa je v tvare kvádra a jej rozmery sú $s = 96$ cm, $d = 58$ cm a $v = 114$ cm.

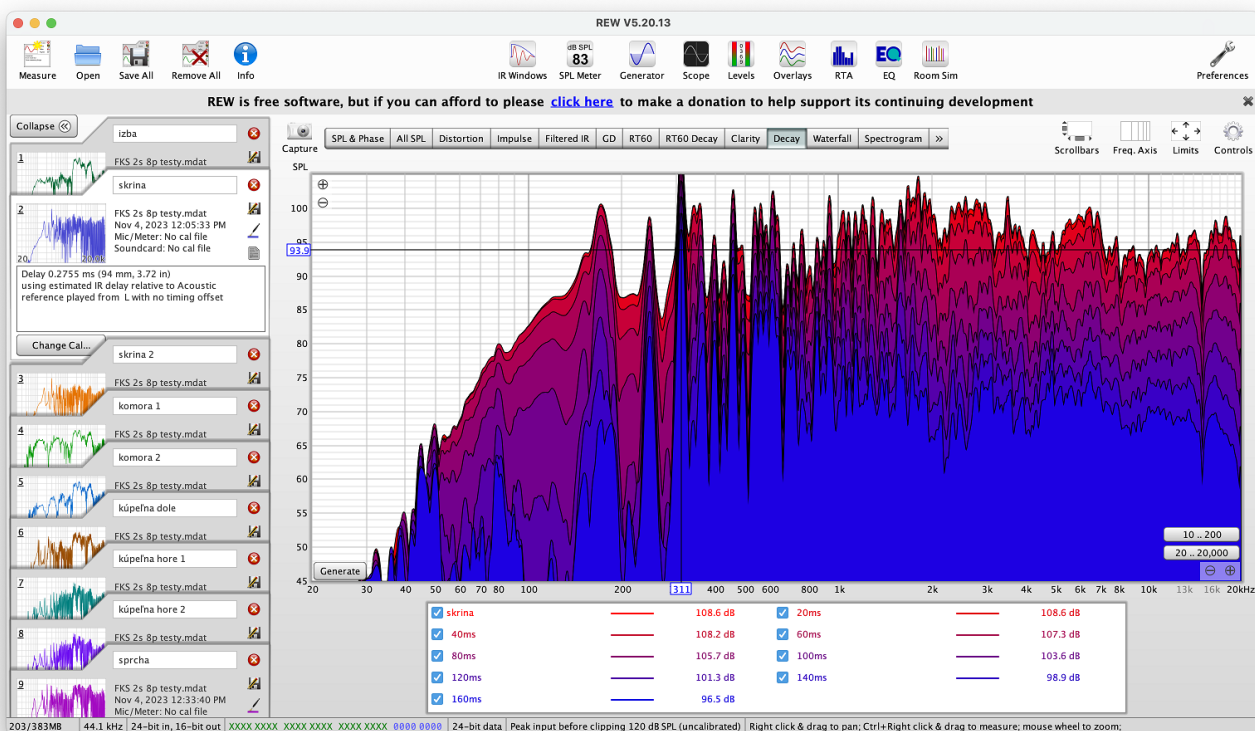


Obrázok 2.8.1: *Moja skriňa, v ktorej som robil merania.*

Pri meraní si program prehral frekvencie a zaznamenal ich odozvu. Následne vygeneroval takýto pekný spektrogram.

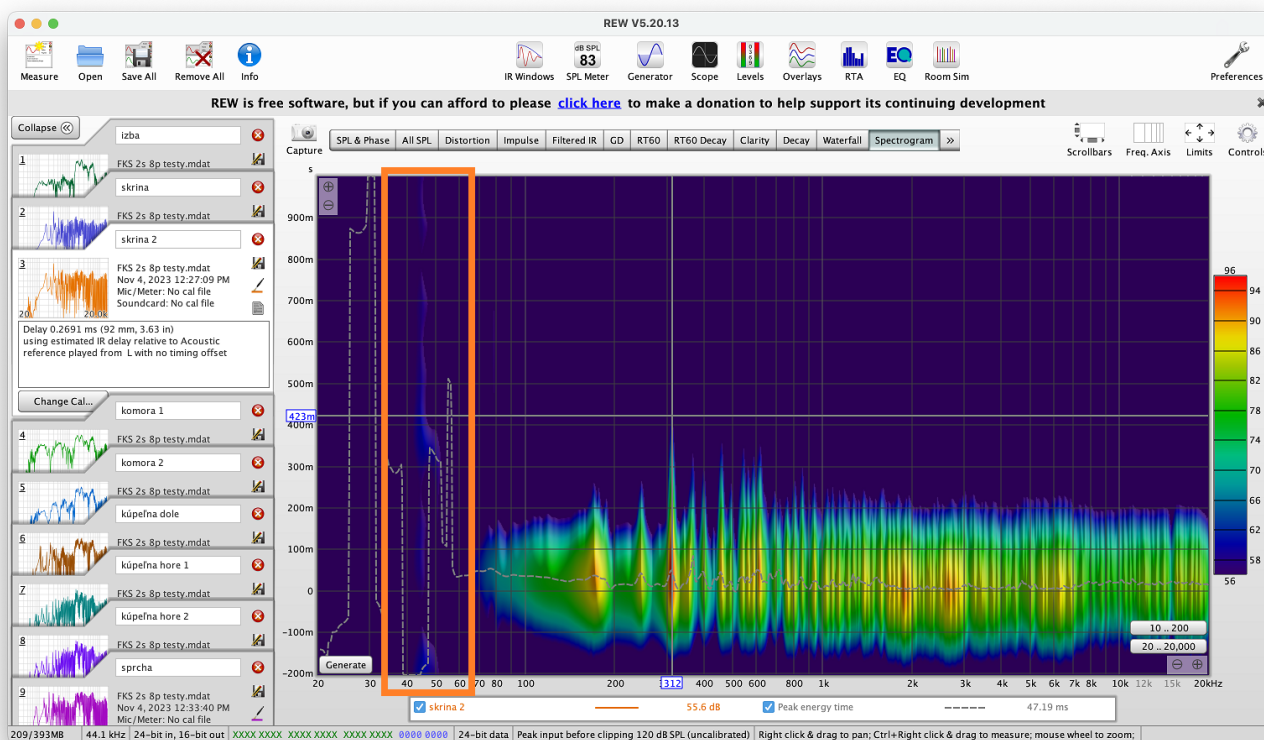


Obrázok 2.8.2: Spektrogram prvého merania.



Obrázok 2.8.3: Intenzita a oneskorenie zvukových vln pri prvom meraní.

Test som zopakoval, takto vyšli merania v spektrograme na druhý pokus.



Obrázok 2.8.4: Spektrogram druhého merania.

Vyhodnotenie nameraných údajov

Najsilnejšiu nameranú frekvenciu nameral program pri obidvoch meraniach na 311 Hz. Všetky namerané rezonančné frekvencie sú 171, 247, 311, 342, 363, 400, 458, 546 a 618 Hz. Zaujímavá časť je zvýraznená v oranžovom obdĺžniku pri druhom meraní medzi frekvenciami 40 Hz a 50 Hz. Najpravdepodobnejšie je to tichý zvuk vetrania a iných systémov v dome, ktoré už ale ušami aj ja viem počuť.

Samozrejme, rezonančných frekvencií je veľmi veľa, všetky už ale budú násobkami základnej. Poďme na teóriu.

Teoretické overenie

Máme vzorec

$$f = \frac{c}{\lambda},$$

kde f je frekvencia zvuku, c je jeho rýchlosť a λ je jeho vlnová dĺžka. Rezonancia nastane, ak zvuk má rovnakú frekvenciu, ako je rezonančná frekvencia skrine. Tú vypočítame veľmi podobne ako

$$f_r = \frac{c}{2\ell},$$

kde ℓ je rozmer skrine – jej šírka, dĺžka či výška. Pri takejto frekvencii sú uzly kmitania na okrajoch skrine a kmitňa je v jej strede. Táto frekvencia sa nazýva základná a pri nej sa do skrine zmestí presne polovica vlnovej dĺžky zvuku. Existujú ale aj ďalšie rezonančné frekvencie (tzv. módy), pri ktorých sú uzly stále na okrajoch skrine, ale zmestí sa do nej celá vlnová dĺžka, alebo jej tri polovice, alebo dve vlnové dĺžky... Preto ďalšie módy majú frekvenciu dvojnásobnú, trojnásobnú, štvornásobnú... Na lepšiu predstavu istotne poslúži [pekná animácia](#). Pre rezonančné frekvencie teda platí

$$f_r = \frac{kc}{2\ell},$$

kde $k \in (1, 2, 3, \dots)$.

Viem, že rozmery skrine sú $s = 96$ cm, $d = 58$ cm a $v = 114$ cm, čo dosadím za ℓ a rýchlosť zvuku je $c = 344$ m/s. Dám si to do tabuľky, kde sú vypočítané rezonančné hodnoty pre všetky rozmery skrine.

Mód k	$\ell = s$	$\ell = d$	$\ell = v$
1	179,2 Hz	296,6 Hz	150,9 Hz
2	358,3 Hz	593,1 Hz	301,8 Hz
3	537,5 Hz	889,7 Hz	452,6 Hz
4	716,7 Hz	1186,2 Hz	603,5 Hz
5	895,8 Hz	1482,8 Hz	754,4 Hz

V tabuľke nižšie som porovnal namerané hodnoty s vypočítanými. Niektoré sú veľmi blízko a približne sedia.

Vypočítané [Hz]	Namerané [Hz]	Rozdiel [Hz]
150,9	–	–
179,2	171	8,2
296,6	247	49,6
301,8	311	–9,2
358,3	363	–4,7
452,6	458	–5,4
537,5	546	–8,5
593,1	–	–
603,5	618	–14,5
716,7	–	–
754,4	–	–
889,7	–	–
895,8	–	–
1186,2	–	–
1482,8	–	–

Diskusia

Je viacero dôvodov, ktoré mohli spôsobiť odchýlku pri nameraných hodnotách od tých vypočítaných. Z hardvérovej stránky som používal vstavaný reproduktor a mikrofón, ktoré neboli špeciálne nalaďené pre použitie s daným programom. Rovnako aj to, že som vložil notebook do skrine znamenalo zmenu jej akustických

vlastností, keďže vlnám zavádzal otvorený displej notebooku. Jeho umiestnenie tiež malo svoj vplyv, ja som ho položil na spodok skrine, no ak by som vedel v budúcnosti umiestniť mikrofón s reproduktorom do stredu skrine, tak by to dávalo opäť iné hodnoty.

Záver

Pri rezonančných frekvenciách sa nezvyšuje iba intenzita zvuku, ale aj sa zvuk dlhšie šíri a odráža v miestnosti. To sa mi podarilo overiť meraním a výpočtom a zistil som, že rezonančné frekvencie mojej skrine sú okolo 171, 247, 311, 342, 363, 400, 458, 546 a 618 Hz. A áno, rozmery miestnosti majú priamy vplyv na rezonančné frekvencie a vďaka tzv. módom je frekvencií viacero.