

Riešenia 3. kola zimnej časti

3.1 Zamračené, miestami dúhy

vzorák Majo, opravoval Majo

Každý z nás už videl dúhu. Za jej vznikom je naozaj zaujímavá fyzika. Pozrime sa na ňu a cestou zodpovieme aj to, či je fotka skutočná.

V krátkosti – slnko svieti na kvapky vody, na ktorých sa svetlo delí na zložky rôznych farieb a súčasne sa na nich odráža do oka pozorovateľa. Ale rozmeňme si to na drobné.

Hlavní účinkujúci sú slnečné lúče a kvapky vody. Začnime vodou. Musí byť niekde v ovzduší. Nesmie jej byť príliš málo (dúha by bola slabá až by sme ju nevideli) ani príliš veľa (to už by bol oblak) – proste tak akurát. Pritom vôbec nemusí padať, vôbec nemusí pršať. Na vznik dúhy stačí aj hmla alebo inak rozptýlená voda v ovzduší.

Tieto kvapky vody musia byť osvetlené slnečnými lúčmi. Na vznik dúhy teda musí svietiť slnko. Nemusí však svietiť na nás, pozorovateľov. Dôležité je len, aby svietilo na samotné kvapky vody.

Na kvapke vody sa stane zaujímavá fyzika. Svetlo sa pri vstupe do kvapky zlomí, od zadnej strany sa odrazí a pri výstupe z kvapky sa opäť zlomí, aby toto svetlo prišlo až k nám¹. Navyše svetlo, ktoré k nám putuje zo Slnka, obsahuje svetlo rôznych vlnových dĺžok. Od vlnovej dĺžky závisí rýchlosť svetla v kvapke vody, a teda aj index lomu svetla. Preto zložky rôznych farieb prejdú kvapkou rôzne a vďaka tomu uvidíme krásnu dúhu².

Tu sa objavuje menší geometrický problém. Na to, aby lúč, ktorý absolvoval procedúru na kvapke, dorazil k nám, musí mať uhol slnko-kvapka-pozorovateľ veľkosť zhruba 42° ³. To dáva obmedzenie, že slnko nemôže byť na oblohe vyššie ako vo výške 42° , inak by sa lúč nevedel odraziť do našich očí⁴. Na druhej strane tento uhol dáva možnosť vzniku dúhy ako oblúky farieb od červenej po fialovú. Pre rôzne vlnové dĺžky je spomínaný uhol mierne iný. Pre červenú farbu je tento uhol väčší⁵, a preto vytvorí horný oblúk dúhy; pre fialovú farbu je to naopak.

Napokon je tu posledná podmienka toho, že vidíme dúhu – lúč idúci k nám nemôže zakryť žiadna prekážka. Tou môže byť budova, naša ruka alebo v kontexte úlohy, ktorú riešime, nejaký oblak.

Aby teda mohla nastať situácia z fotky v zadaní, musí sa stať nasledovné: Slnko zasvieti na kvapky niekde v diaľke (tu slnečným lúčom nesmie brániť žiaden oblak), od ktorých sa lúče odrazia smerom k nám. Keby

¹Toto sa stane iba naozaj malej časti svetla. Väčšina svetla sa od zadnej strany neodrazí alebo sa neodrazí správne tak, aby príslušný lúč dorazil až k nám. Z tej malej časti, ktorej sa to ale podarí trafiť, vznikne potom dúha.

²Síce o farbách hovoríme ako o zložkách, je to mierne zavádzajúce. V svetle sú (až na zopár konkrétnych výnimiek) zastúpené všetky vlnové dĺžky od nejakej hranice po nejakú hranicu (mimo týchto hraníc je už len zanedbateľne málo svetla).

³Ak vás toto nepresvedčí, že číslo 42 je skutočne významné, tak už neviem čo. Možno vzorák úlohy FKS, kde sa tento uhol spočítal: <https://fks.sk/ulohy/riesenia/2064/>.

⁴Preto napríklad neuvidíte dúhu v lete na obed. V zime ju na obed môžete vidieť, ale je to veľmi nepravdepodobné – vhodné vlhký vzduch cez zimu zvyčajne nebýva.

⁵Zhruba o 1° .

na tejto trase nebol žiaden oblak, videli by sme krásnu dúhu. Pokojne nám ale môže časť z lúčov zakryť oblak niekde na polceste. A tak uvidíme iba tú časť dúhy, ktorú nezakrýva oblak. Toto fyzikálne môže nastať, a teda naše fyzikálne ja vyhlasuje, že **fotka je pravá**.

Ešte by sa mohlo ozvať naše meteorologické ja, či vôbec môžu nastať podmienky na fotke. Povieme si, že áno. Najväčší problém by sme mohli mať s tým, že na fotke je viacero úrovní oblačnosti. Toto ale vôbec nie je problém, je to veľmi bežná vec. V rôznych vrstvách atmosféry môžu panovať rôzne podmienky⁶. Rovnako sa tak môžu vyskytovať viaceré vrstvy oblačnosti. A pokojne môže jedna z vrstiev (v tomto prípade tá vyššia) vytvoriť pod sebou dostatočnú vlhkosť na to, aby tam vznikla dúha (hoci na fotke nevidíme, že by niekde pršalo). Takáto súhra okolností je síce pomerne nepravdepodobná⁷, ale môže nastať.

Iný problém, ktorý by mohol niekto namietnuť je, že na fotke predsa vôbec nesvieti slnko. Na prvý pohľad sa môže zdať, že je zamračené, a tak nemáme slnko na to, aby vznikla dúha. Slnka však máme dostatočne veľa na dúhu. Oblačnosť, ktorou sa zdá, že je zatiahnutá obloha, je dosť nesúvislá. Vznikajú v nej malé trhliny, cez ktoré môže zasvietiť slnko. To, že sa tak stalo aj na našej fotke, vidíme čiastočne aj na našej dúhe. Z dúhy totiž vidíme len pomerne malý oblúk. Ak by všade za nami panovalo slnečné počasie, videli by sme z dúhy viac⁸. Na to, že svieti slnko máme aj priamejší dôkaz – oblačnosť v hornej časti fotky je osvetlená.

Fotka tak prežila všetky testy. Naše fyzikálne ja povedalo, že naozaj dokáže oblak prekryť dúhu. Taktiež naše meteorologické ja⁹ zhodnotilo, že môžu nastať podmienky také, že počasie bude presne ako na fotke. Zostáva nám teda konštatovať, že **fotka je skutočná**.

3.2 Zima, chladnejšie, horíš!

vzorák Jaro, opravoval Jaro

Na úvod si popíšme situáciu, ktorú sa budeme snažiť fyzikálne modelovať. Podľa zadania máme uvažovať horúci letný deň. A hoci je už večer, teplota v miestnosti môže pokojne dosahovať 30 °C. Z práčky vyberáme mokré prádlo. Jeho teplota bude zrejme nižšia ako táto teplota vzduchu a to z toho dôvodu, že hoci určite perieme pri vyššej teplote, nakoniec sa prádlo preplácha v studenej vode, takže ho z práčky vyťahujeme schladené. V opačnom prípade by sme sa na ňom pri niektorých prácach programoch oparovali. Zároveň si pod mokrým prádlom treba predstaviť skôr mierne vlhké prádlo než úplne premočené, nakoľko odstredovanie ho pomerne účinne zbaví vody. To je dôležité pri odhadovaní množstva vody v prádle. Vedeli by sme si síce dohľadať, koľko vody dokážu pojať jednotlivé tkaniny, no po odstredení v nich zostane len zlomok tohto množstva.

Vieme, že na odparenie nejakého množstva kvapaliny je potrebné dodať isté množstvo tepla. Začnime úplne najjednoduchším modelom. Uvažujme, že všetko toto teplo pochádza zo vzduchu z miestnosti. Takto dostaneme horný odhad ochladenia vzduchu. Skupenské teplo potrebné na odparenie kvapaliny s hmotnosťou m je $L = lm$, kde l je merné skupenské teplo vyparovania. Pozor, merné skupenské teplo vyparovania je funkciou teploty! Jeho hodnotu pre rôzne teploty si vieme pozrieť napríklad [tu](#). Zároveň na zohriatie/ochladenie látky s hmotnosťou m o teplotu ΔT je potrebné dodať/odobrať teplo $Q = mc\Delta T$, kde c je merná tepelná kapacita látky, ktorá je taktiež závislá na teplote. Navyše v prípade plynov treba rozlišovať medzi mernou tepelnou kapacitou pri stálom objeme a stálom tlaku. Nás bude zrejme zaujímať merná tepelná kapacita pri

⁶Najlepšie to vidno, keď je inverzné počasie – vtedy je v dolinách, vo veľmi nízkych vrstvách atmosféry hmľisto, kým na horách, vo vyšších častiach atmosféry, je veľmi pekné.

⁷Pravdupovediac, neočakávam, že by som niekedy videl naživo situáciu ako na fotke.

⁸Na miestach, kde by sme očakávali zvyšok dúhy by síce navyše musel byť dostatok kvapiek vody, ale horný koniec dúhy zaniká pomerne ostro. Preto je pravdepodobnejší dôvod nepokračovania dúhy to, že tam už nesvieti slnko.

⁹Ktoré je v skutočnosti súčasťou fyzikálneho ja.

stálom tlaku, nakoľko izba zrejme nie je hermeticky uzavretá a vzduch z nej môže unikať napríklad popod dvere, čiže o stálom objeme nemôže byť ani reči.

Podme si ešte odhadnúť potrebné parametre. Ako sme už naznačili, množstvo vody v prádle závisí od množstva prádla a od materiálu, z ktorého je vyrobené. Ak chceme byť precízni, môžeme si pri najbližšom praní odvážiť prádlo pri vkladaní do práčky a pri jeho vyberaní z nej. Rozdiel v hmotnosti zrejme zodpovedá hmotnosti nasatej vody. Pokojne si ale vystačíme aj s rádovým odhadom. Každý sa už zrejme obliat pohárom vody, takže si vie predstaviť, koľko vody je potrebné na namočenie celého trička. Určite to bude aspoň niekoľko centilitrov a určite nanajvýš decilitre. Pri plnej práčke to bude teda aspoň niekoľko decilitrov a nanajvýš jednotky litrov. Dobrým rádovým odhadom teda bude asi liter vody, čiže $m_w \approx 1 \text{ kg}$. Okrem toho ešte potrebujeme poznať množstvo vzduchu v miestnosti. Podlahová plocha internátnej izby môže byť tak do 20 m^2 a pri výške stropov 3 m je objem vzduchu $V_a \approx 60 \text{ m}^3$.

Pre vyššie popísaný model má platiť

$$m_w l_w = V_a \rho_a c_a \Delta T,$$

odkiaľ

$$\Delta T = \frac{m_w l_w}{V_a \rho_a c_a} \approx \frac{1 \text{ kg} \cdot 2,45 \text{ MJ/kg}}{60 \text{ m}^3 \cdot 1,2 \text{ kg/m}^3 \cdot 1 \text{ kJ/(kgK)}} \approx 34 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Vidíme, že podľa tohto modelu by teplota vzduchu mala v miestnosti klesnúť pod nulu, čo sa zjavne nedeje. Musíme teda náš model nejakým spôsobom spresniť.

Kde sa stala chyba? V prvom rade si treba uvedomiť, čo sme to vlastne vypočítali. Uvažovali sme, že sa nám vyparí všetka voda z oblečenia a po istom čase nastane tepelná rovnováha. To by bol rozumný predpoklad, ak by odparovanie vody prebehlo za krátky čas. Sušenie oblečenia však trvá hodiny. Treba si uvedomiť, že samotná izba nie je v ustálenej tepelnej rovnováhe, ale teplota v izbe sa neustále pomaly mení, pričom aktuálne teplota je výsledkom dynamickej rovnováhy. V izbe sa nachádzajú zdroje tepla (ľudia, spotrebiče) a cez steny, okná a dvere dochádza k tepelnej výmene s okolitými miestnosťami a exteriérom, pričom rýchlosť tejto tepelnej výmeny závisí od rozdielu teplôt von a dnu. Cez deň je zrejme von teplejšie ako dnu a zároveň máme dnu aj zdroje tepla, preto cez deň teplota v izbe rastie. V noci je zase von chladnejšie, preto teplota bude dnu oproti dnu klesať. Tepelný tok cez steny vtedy smeruje von, teda teplo z izby unika. Ak by sme však teplotu v izbe náhle znížili, tak by sa tepelný tok cez steny spomalil a ak by bolo toto zníženie teploty dostatočne veľké, mohol by sa dokonca aj otočiť a teplo by do izby vtekalo, až by opäť nastala tepelná rovnováha. V praxi teda nemožno povedať, o koľko poklesla teplota v miestnosti v konečnom dôsledku kvôli sušeniu prádla bez toho, aby sme poznali ostatné parametre miestnosti (zdroje tepla, koeficient prestupu tepla cez steny). Ale aj keby sme ich poznali, tak po dostatočne dlhom čase by bol ten pokles zanedbateľný. A dokonca by sme nemuseli ani uvažovať únik tepla z miestnosti. Izba totiž obsahuje aj iné predmety, ktoré sú v tepelnej rovnováhe. K tepelnej výmene teda dochádza aj s nábytkom a ostatným zariadením izby, či dokonca so samotnými stenami. Merná tepelná kapacita týchto vecí je síce rádovo podobná mernej tepelnej kapacite vzduchu, no ich súhrnná hmotnosť je rádovo väčšia než desiatky kilogramov vzduchu v miestnosti, preto novoodhadnutý teplotný rozdiel by bol rádovo menší od pôvodného odhadu $34 \text{ }^\circ\text{C}$.

Prečo teda po istom čase od vyvešania prádla v miestnosti cítime závan chladu? Odpoveď sa ukrýva v otázke. Kľúčom je slovo závan. Ide totiž o prechodový jav, kým izba ešte nie je v ustálenom stave. Aby sme mu porozumeli, treba si povedať, čo sa deje na molekulovej úrovni. Molekuly vody v kvapaline sa neustále hýbu, pričom tie najrýchlejšie, ak sa nachádzajú blízko hladiny a majú správny smer, z kvapaliny uniknú. Takto postupne kvapalina prichádza o tie najenergetickejšie častice, no a keďže teplota je úmerná priemernej ener-

gii častíc v kvapaline, jej teplota klesá. Ak je kvapalina teplejšia ako okolitý vzduch, latentné teplo pochádza zo samotnej kvapaliny a vyparovanie prebieha na úkor jej chladnutia. Ak je však kvapalina v tepelnej rovnováhe s okolitým vzduchom, t. j. má rovnakú teplotu, mechanizmus vyparovania síce prebieha rovnako, no keďže sa ním teplota kvapaliny zníži, prejde teplo bežnou tepelnou výmenou z okolitého vzduchu do kvapaliny, aby sa ich teploty vyrovnali. V okolí kvapaliny sa preto nachádza vzduch s vyššou koncentráciou vodných pár, čiže vyššou vlhkosťou, a nižšou teplotou. Molekuly vzduchu sa však taktiež neustále hýbu a premiešavajú, preto po istom čase doputujú až k odpočívajúcemu Jarovi, ktorý to vníma ako závan chladu. Tento chladnejší a vlhší vzduch putuje ďalej až sa rozplynie po celej miestnosti a ohrieva sa od stien, nábytku a ďalšieho inventáru izby, pričom k Jarovi stále prúdi vzduch ochladzovaný prebiehajúcim odparovaním.

Odhad poklesu teploty pri závane chladu pre odvážnych

Ak by sme chceli odhadnúť ochladenie pri tomto závane chladu, museli by sme uvažovať kalorimetrickú rovnováhu pre nejaký malý objem vzduchu a započítať aj vlhkosť vzduchu, keďže, ako sme povedali, molekuly vodnej pary sú podstatnou súčasťou tohto závanu. Uvažujme, že vzduch v miestnosti mal na začiatku $T_1 = 30\text{ °C}$ a relatívnu vlhkosť vzduchu $\phi_1 = 50\%$. Nech mal ochladený vzduch v závane teplotu T_2 a relatívnu vlhkosť $\phi_2 = 60\%$. Potom pre nejaký objem vzduchu V podľa kalorimetrickej rovnice zrejme platí

$$\rho V c_a T_1 + \phi_1 \Phi_1 V c_v T_1 + (\phi_2 \Phi_2 - \phi_1 \Phi_1) V c_w T_w - (\phi_2 \Phi_2 - \phi_1 \Phi_1) V l = \rho V c_a T_2 + \phi_2 \Phi_2 V c_v T_2,$$

kde ρ a c_a sú hustota suchého vzduchu a jeho merná tepelná kapacita pri stálom tlaku, $\Phi_{1,2}$ je maximálna absolútna vlhkosť vzduchu pri danej teplote, t. j. aká hmotnosť vody vie byť obsiahnutá vo vzduchu pri danej teplote, $c_v = 1,9\text{ kJ}/(\text{kgK})$ je merná tepelná kapacita vodných pár a c_w , T_w a l sú merné skupenské teplo vody, jej teplota a merné skupenské teplo vyparovania pri tejto teplote. Prvý člen zodpovedá vnútornej energii suchého vzduchu, druhý člen vnútornej energii vodných pár, tretí vnútornej energii vyparenej vody ešte pred jej vyparením a štvrtý skupenskému teplu potrebnému na jej odparenie. Predpokladáme, že teplota sa veľmi nezmení, a vtedy podľa [tabuliek](#) $\Phi_1 \approx \Phi_2 \equiv \Phi = 30\text{ g}/\text{m}^3$. Po pár úpravách dostávame

$$T_2 \approx \frac{\rho c_a + \phi_1 \Phi c_v}{\rho c_a + \phi_2 \Phi c_v} T_1 + \frac{(\phi_2 - \phi_1) \Phi (c_w T_w - l)}{\rho c_a + \phi_2 \Phi c_v}$$

a pre $T_w = 20\text{ °C}$ je hľadaný pokles teploty

$$\Delta T \approx \frac{(\phi_2 - \phi_1) \Phi (c_v T_1 - c_w T_w + l)}{\rho c_a + \phi_2 \Phi c_v} \approx \frac{(0,6 - 0,5) \cdot 30\text{ g}/\text{m}^3 \cdot (1,9\text{ kJ}/(\text{kgK}) \cdot 303,15\text{ K} - 4,18\text{ kJ}/(\text{kgK}) \cdot 293,15\text{ K} + 2,45\text{ kJ})}{1,2\text{ kg}/\text{m}^3 \cdot 1\text{ kJ}/(\text{kgK}) + 0,6 \cdot 30\text{ g}/\text{m}^3 \cdot 1,9\text{ kJ}/(\text{kgK})}$$

3.3 Nízkonákladové chudnutie

vzorák **Jakub**, opravoval **Jakub**

V prvom rade by sme si mohli položiť otázku, prečo by váha mala ukázať iný údaj – je to jednoduché, vstupujú do toho dva efekty.

Prvý je celkom zrejmy a je ním pohyb po zakrivenej dráhe. Iste si spomínate, že keď ste išli autom a prechádzali cez retardér či vrchol stúpania, nadskočili ste¹⁰.

Prečo ste nadskočili? Je to jednoduché, skrátka sedadlo pod vami utieklo smerom dole a vy ste vďaka zotrvačnosti pokračovali v smere nie-dole, preto ste sa odlepili od sedadla. A keby ste sedeli na osobnej váhe, zobrazovaná hodnota by sa zmenila. No a také lietadlo oblietavajúce Zem v podstate tiež pod Terkou uteká

¹⁰nemenovaný vedúci vo fábii menom Plechovka: „No že budem cítiť každý hrb, OK, ale že aj hlavou o strop, to som nečakal.“

smerom dole. Máte právo teraz vyskočiť zo stoličky a kričať (nie príliš nahlas, už je večer, aspoň keď toto píšem) niečo o odstredivej alebo dostredivej sile. Ale áno, ja by som sa s vami nehádal, veď ono je to len iný pohľad na to isté a ak by sme sa snažili z toho, čo je popísané vyššie, vydolovať nejaký vzorec, skončili by sme presne tam. Len je možno trochu názornejšie sa na to pozrieť aj z inej strany ako hneď povedať že „veď kruhový pohyb“.

Druhý efekt je o niečo jednoduchší – gravitačná sila od Zeme (alebo čohokoľvek iného) je závislá na vzájomnej vzdialenosti objektov – no a lietadlo sa od Zeme vzdialilo o desať kilometrov, takže táto príťažlivá sila klesne. Mimochodom, klasický vzťah $F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$ platí pre dva hmotné body a je dôsledkom nie celkom triviálnych úvah, že ho možno použiť i pre guľu s nezanedbateľnými rozmermi, akou je napríklad Zem.

Podme si najprv spočítať, čo ukazuje váha v Libreville. Váha je silomer, a teda ukazuje tiažovú silu pôsobiacu na Terku. Tá váži m_T , nachádza sa vo vzdialenosti $R_Z = 6378$ km od Zeme vážiacej $M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg. Lenže spôsobom, ktorý sme riešili vyššie, váha ukazuje o čosi menej vďaka rotačnému pohybu. Jej uhlová rýchlosť je $\omega_Z = 2\pi/24$ h a pohybuje sa po kruhovej dráhe s polomerom R_Z .

S týmito vedomosťami vieme vyjartiť Terkinu tiažovú silu na Zemi. Mimochodom, v tvare m_T krát zátvorka sa táto zátvorka dá pochopiť aj ako tiažové zrýchlenie.

$$F_{tZ} = \kappa \frac{m_T M_Z}{R_Z^2} - m_T \omega_Z^2 R_Z = m_T \left(\kappa \frac{M_Z}{R_Z^2} - \omega_Z^2 R_Z \right).$$

Veľmi podobne vypočítame, aký údaj ukazuje váha v lietadle. Polomer otáčania a vzdialenosť od stredu Zeme za zväčšia o letovú výšku $h = 10$ km. Čo sa ale stane s rýchlosťou, ako rýchlo ide to lietadlo? Ide smerom na východ, teda rovnakým smerom, ako sa točí Zem. A za dva dni, teda kým planéta spraví dve otočky, by Terka chcela urobiť ešte jednu navyše, teda tri. Jej uhlová rýchlosť preto musí byť o polovicu väčšia, ako uhlová rýchlosť otáčania Zeme, preto $\omega_L = \frac{3}{2} \omega_Z$. A matematika bude rovnaká:

$$F_{tL} = \kappa \frac{m_T M_Z}{(R_Z + h)^2} - m_T \omega_L^2 (R_Z + h) = m_T \left(\kappa \frac{M_Z}{(R_Z + h)^2} - \omega_L^2 (R_Z + h) \right).$$

Úlohou je zistiť, ako sa zmení údaj na váhe, teda spočítať pomer F_{tL}/F_{tZ} . Hneď vidno, že môžeme zostať v medziach slušnosti, pretože nepotrebujeme poznať m_T (a dámy sa na hmotnosť nepýtame). Podme teda počítať!

$$\frac{F_{tL}}{F_{tZ}} = \frac{\kappa \frac{M_Z}{(R_Z + h)^2} - \omega_L^2 (R_Z + h)}{\kappa \frac{M_Z}{R_Z^2} - \omega_Z^2 R_Z} = \frac{9,807 \text{ m/s}^2 - 0,076 \text{ m/s}^2}{9,838 \text{ m/s}^2 - 0,034 \text{ m/s}^2} = 99,2548 \text{ \%}.$$

Spočítali sme teda, že v lietadle váha ukáže asi o 0,75 % menšie číslo.

3.4 Sa nepostrekovalo

vzorák Matúš H., opravoval Matúš H.

Zadanie sa pýta na percentuálnu zmenu spotreby modrej Škody Fábie ak vojde do hustého mraku komárov. Energia, ktorá sa získa z paliva sa stráca všelikde. Na prekonanie odporu vzduchu, valivého trenia pneumatík, zrýchľovanie, zahrievanie motora, prekonávanie trenia prevodovky, trenia piestov v motore a ešte všelikde inde. Pri prejazde mrakom komárov sa stráca ešte aj pri zrážaní komárov.

Vieme však odhadnúť bežnú spotrebu Škody Fábie v meste. Energia, ktorá sa spaľovaním získa z daného objemu benzínu, sa za normálnych okolností rozdelí na všetky vyššie spomínané straty.

Keď auto vojde do mraku, tak sa pridá ešte strata, ku ktorej dochádza v dôsledku zrážania komárov. Poďme ju teda vypočítať.

Nech má auto čelný prierez S , ide rýchlosťou, ktorá má konštantnú veľkosť v , objemová hustota komárov je ρ , a jeden komár váži m . Ak uvažujeme, že komár má pri zrazení náhodnú rýchlosť náhodným smerom, tak priemerný komár sa nehýbe. Preto mu auto udelí hybnosť $p = mv$. Na vzdialenosti d sa preto hybnosť auta kvôli komárom zmenší o

$$\Delta p_a = S d \rho m v.$$

Pričom platí $d = vt$, kde t je čas ktorý autu trvá prejsť dráhu d . Keďže ale auto má stálu veľkosť rýchlosti, tak má aj stálu veľkosť hybnosti. Preto motor počas času t musí pôsobiť silou takou, aby sa hybnosť nezmenila. S využitím vzťahu $\Delta p = Ft$ dostávame

$$F = S \rho m v^2.$$

Odtiaľ získavame prácu, ktorú musí motor vykonať na vzdialenosti d navyše kvôli komárom:

$$W = S \rho m v^2 d.$$

Ak H je energia ktorú dostaneme z daného objemu paliva a μ je účinnosť motora, tak kvôli komárom spálime na úseku d o toľkoto benzínu viac:

$$V = \frac{S \rho m v^2 d}{H \mu}.$$

Ak S_p je spotreba auta na jednotku dĺžky, tak pomer spotreby pred a po vjazde do roja komárov je:

$$\frac{S_p d + \frac{S \rho m v^2 d}{H \mu}}{S_p d} = \frac{S_p + \frac{S \rho m v^2}{H \mu}}{S_p}$$

Hustotu roja ρ a hmotnosť komára m máme zadané. Zvyšné hodnoty odhadneme (respektíve zistíme na internete). Priemerný odhad spotreby Kubkovej Škody Fábie je približne 5,9 l/100 km = 0,000 059 l/m¹¹ (musíme premeniť na rovnaké jednotky aké bude mať druhý zlomok). Čelný prierez Škody Fábie je okolo 2,5 m², lebo je vysoká približne 1,5 m a široká približne 1,8 m¹². Nech Kubko ide v meste predpísanou rých-

¹¹Údaj odhadnutý Kubkom na základe dlhodobého používania

¹²https://webapps.skoda-auto.sk/Cenniky-a-katalogy/techdata/Nova-Skoda_Fabia_techickeudaje.pdf

losťou 50 km/h $\approx 13,9$ m/s. Výhrevnosť benzínu je 32 MJ/l¹³. Účinnosť spaľovacích motorov je zhruba okolo 30%¹⁴. Po dosadení hodnôt dostávame nárast spotreby o 420%.

Pri riešení sme urobili veľa odhadov a aproximácií, ktoré spôsobili, že sme dostali iba odhad. V skutočnosti napríklad spotreba auta nerastie lineárne vzhľadom na prekonávaný odpor, takže ďalšia odporová sila sa tiež nepremietne lineárne do spotreby. Alebo tým ako vzduch obteká auto, tak spôsobí, že v skutočnosti nie všetky komáre ktoré sme započítali zrazíme. Niektoré budú odfúknuté obtekajúcim vzduchom a obídu nás. Z odhadu ale vieme určiť, že prírastok spotreby v dôsledku tak hustého roja nie je zanedbateľný.

3.5 Rozbujnením do hrobu

vzorák Tomáš, opravoval Tomáš

Začnime krátkym zamyslením o tom, čo očakávame, že sa s polypom udeje. Polyp generuje teplo svojou hmotou, pričom jeho hmotnosť závisí od tretej mocniny polomeru. Teplo však stráca svojím povrchom, ktorého veľkosť závisí od druhej mocniny polomeru. Ak sa teda polomer zväčší z r na $2r$, tak hmotnosť sa zmení z m na $8m$ a povrch z S na $4S$. Preto v ňom bude vznikať viac tepla ako z neho uniká, až kým sa nezohreje na teplotu, kedy bude polyp opäť v tepelnej rovnováhe.

Rečou fyziky, výkon s ktorým teplo vzniká je

$$P_+ = km,$$

kde m je hmotnosť polypu a k je konštanta, ktorá hovorí, koľko joulov vznikne za sekundu v jednom kilograme polypu. Tento zákon nie je po nikom pomenovaný narozdiel od Stefanovho-Boltzmannovho zákona. Ten vraví, že ak polyp budeme považovať za absolútne čierne teleso, tak jeden meter štvorcový jeho povrchu vyžaruje s výkonom $P = \sigma T^4$, kde σ je Stefanova Boltzmannova konštanta a T je teplota polypu. Z povrchu S preto vyžaruje energia s výkonom

$$P_- = S\sigma T^4.$$

Samozrejme, nezabúdame, že T je termodynamická teplota, ktorú meriame v kelvinoch.

Teplotu polypu T_1 poznáme zo zadania, skúsme si ju teda vyjadriť aj pomocou horeuvedených veličín. Polyp v tepelnej rovnováhe generuje presne toľko tepla, koľko vyžiari, teda

$$P_+ = P_-$$

$$kV\rho = S\sigma T_1^4$$

$$k\frac{4}{3}\pi r^3\rho = 4\pi r^2\sigma T_1^4$$

$$T_1 = \left(\frac{rk\rho}{3\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} = 293 \text{ K}.$$

Keďže nás zaujíma, akú teplotu bude mať dvakrát väčší polyp, tak jednoducho do vzťahu pre teplotu napíšeme $2r$ namiesto r . To je

$$T_2 = \left(\frac{2rk\rho}{3\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4}}\left(\frac{rk\rho}{3\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4}}T_1 = 2^{\frac{1}{4}} \cdot 293 \text{ K} \doteq 348 \text{ K} = 75 \text{ }^\circ\text{C}.$$

¹³<https://cs.wikipedia.org/wiki/Benz%C3%ADn>

¹⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Engine_efficiency

Chudák polyp zažije to, čo mu prorokoval názov úlohy: Rozbujnením do hrobu.

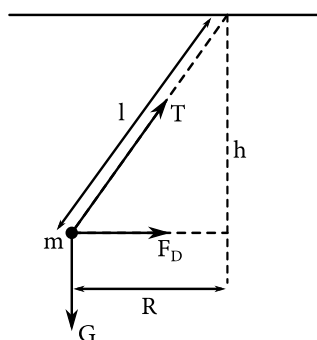
Biologická poznámka

Vidíme, že polyp si dokáže udržať vyššiu teplotu voči svojmu okoliu, ak je väčší. To je zrejme dôvodom, prečo je napríklad tučniak obrovský žijúci v Antarktíde masívne väčší ako tučniak galapážsky žijúci na Galapágoch. Dokáže si tým udržať vyššiu telesnú teplotu voči chladnému antarktickému vzduchu, a teda nezamrzne. Nazýva sa to **Bergmannovo pravidlo**.

3.6 Pracný prietah

vzorák Patrik, opravoval Patrik

Táto úloha vôbec nie je taká ťažká ako sa na prvý pohľad javí. Všetko čo je potrebné je Pytagorova veta, zo-všeobecnený zákon zachovania energie a zákon zachovania momentu hybnosti. Vrháme sa na Pytagorovu vetu. Na obrázku značíme dostredivú silu ako F_D , tiažovú silu ako G , ťahovú silu lana ako T , polomer otáčania kyvadla ako R a výšku kyvadla h . Keďže my fyzici máme radi Index (Cafebar), tak indexami 1 budeme značiť stavy pred potiahnutím a indexami 2 stavy po potiahnutí.



Obrázok 3.6.1: Sily a ich smery

Z obrázka a z podobnosti trojuholníkov vidíme, že bude platiť

$$\frac{F_D}{G} = \frac{m\omega^2 R}{mg} = \frac{\omega^2 R}{g} = \frac{R}{\sqrt{l^2 - R^2}} = \frac{R}{h} \quad \Rightarrow \quad R^2 = l^2 - \frac{g^2}{\omega^4}$$

a teda

$$h^2 = l^2 - R^2 = \frac{g^2}{\omega^4}.$$

Týmto sme vybavili Pytagorovu vetu. Teraz sa pozrime na zákon zachovania momentu hybnosti. Možno sa pýtate: „Patrik, ako to, že platí ZZMH? Veď predsa sa tam koná práca!!“ Odpoveď je prostá, milý Watson. Vonkajšia sila na závažie pôsobí pomocou lanka. Táto sila je ale rovnobežná s polohovým vektorom závažia voči bodu otáčania, takže moment sily $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$. Zo ZZMH teda dostaneme

$$m\omega_1 R_1^2 = m\omega_2 R_2^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 l_1^2 - \frac{g^2}{\omega_1^3} = \omega_2 l_2^2 - \frac{g^2}{\omega_2^3}.$$

$$\omega_2^4(l_2^2) - \omega_2^3\left(\omega_1 l_1^2 - \frac{g^2}{\omega_1^3}\right) - g^2 = 0$$

Túto rovnicu vyriešime veľmi jednoducho, a to tak, že ju hodíme do Wolfram Alphy :D.

$$\omega_2 \approx 23,55 \text{ rad/s}^2$$

Teraz sa už iba pozrieme na ZZZE. Ako nulovú hladinu potenciálnej energie zvolíme stôl. Vieme, že vykonaná práca je rozdielom energií medzi dvomi stavmi, a teda bude platiť

$$E_{rot}^1 + E_{pot}^1 = W + E_{rot}^2 + E_{pot}^2$$

$$W = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 - I_2\omega_2^2) + (-mgh_1 + mgh_2)$$

$$W = \frac{1}{2}(mR_1^2\omega_1^2 - mR_2^2\omega_2^2) - mg\frac{g^2}{\omega_1^4} + mg\frac{g^2}{\omega_2^4}$$

Po dosadení všetkých hodnôt dostaneme

$$|W| \approx 51,4 \text{ J.}$$

3.7 Budiž fotón a bolo teplo

vzorák Patrik, opravoval Patrik

Na úvod sa chcem ospravedlniť za preklep v zadaní. Fotónový plyn je zadaný rovnicami

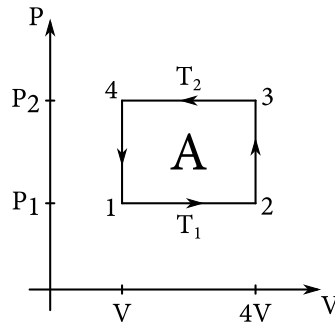
$$U = 3pV = bVT^4.$$

Teoreticky to nesprávne nie je, ale zvykne sa používať toto. Nič to nemení na postupe riešenia, iba na číselných hodnotách.

Jednou z našich úloh je spočítať účinnosť tepelného čerpadla, a teda je dobré si povedať, čo pod účinnosťou vlastne budeme rozumieť. Účinnosť si najčastejšie definujeme ako to, čo chceme, delené to, čo dodáme. V prípade tepelného čerpadla to teda bude

$$\mu = \frac{Q_{out}}{A},$$

kde Q_{out} je teplo odovzdané (chladič je v tomto prípade okolitý vzduch) a A je vykonaná práca (obsah ohraňenej plochy v p - V diagrame). p - V diagram fotónového plynu vyzerá nasledovne:

Obrázok 3.7.1: *p-V diagram fotónového plynu*

Zo stavovej rovnice vidíme, že pri izotermickom deji budú p aj T konštantné. Na naše prekvapenie vedci zistili, že pri izochorickom deji bude konštantný práve objem. Z toho vidíme, že náš p - V diagram deja s fotónovým plynom bude obdĺžnik.

Teraz sa pozrime na prvý termodynamický zákon, ktorý nezávisí od média

$$\Delta U = Q - A,$$

kde ΔU je zmena vnútornej energie, Q je nami dodané teplo a A je systémom vykonaná práca. Pozrime sa teraz postupne na všetky prechody:

- $1 \rightarrow 2$

$$\Delta U = 3p_1(V_2 - V_1) = Q - p_1(V_2 - V_1) = Q - A$$

$$Q = 4p_1(V_2 - V_1) = \frac{4}{3}bT_1^4(V_2 - V_1) > 0$$

- $2 \rightarrow 3$

$$\Delta U = bV_2(T_2^4 - T_1^4) = Q = Q - A$$

$$Q = bV_2(T_2^4 - T_1^4) > 0$$

- $3 \rightarrow 4$

$$\Delta U = 3p_2(V_1 - V_2) = Q - p_2(V_1 - V_2) = Q - A$$

$$Q = 4p_2(V_1 - V_2) = \frac{4}{3}bT_2^4(V_1 - V_2) < 0$$

- $4 \rightarrow 1$

$$\Delta U = bV_1(T_1^4 - T_2^4) = Q = Q - A$$

$$Q = bV_1(T_1^4 - T_2^4) < 0$$

Vieme, že teplo dodané chladiču je to, ktoré je záporné, a teda sčítame Q z posledných dvoch prechodov:

$$Q_{out} = Q_{3 \rightarrow 4} + Q_{4 \rightarrow 1} = \frac{4}{3}bT_2^4(V_2 - V_1) + bV_1(T_2^4 - T_1^4)$$

Zároveň vieme, že práca je obsah útvaru v p - V diagrame:

$$A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = \frac{1}{3}b(T_2^4 - T_1^4)(V_2 - V_1)$$

Nesmieme zabudnúť premeniť stupne celzia na kelviny (+273). Po premene jednotiek bude účinnosť:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\frac{4}{3}bT_2^4(V_2 - V_1) + bV_1(T_2^4 - T_1^4)}{\frac{1}{3}b(T_2^4 - T_1^4)(V_2 - V_1)} \\ &= \frac{\frac{4}{3}b(298)^4(4V - V) + b(V)(298^4 - 278^4)}{\frac{1}{3}b(298^4 - 278^4)(4V - V)} \\ &= \frac{4(298)^4 + (298^4 - 278^4)}{(298^4 - 278^4)} = \frac{4(298)^4}{(298^4 - 278^4)} \approx 17,5.\end{aligned}$$

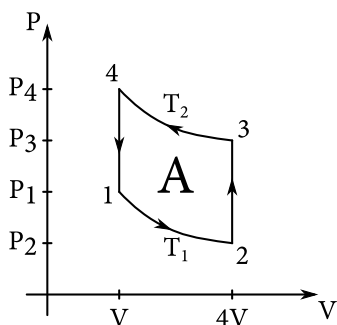
Netreba sa nechať okabátiť, chladiče sú také super zariadenia, ktoré majú účinnosť ožaj väčšiu ako 1.

Pre ideálny plyn bude postup analogický, iba s inou rovnicou. Vieme, že stavové rovnice ideálneho plynu majú tvar

$$pV = NkT,$$

$$U = \frac{3}{2}NkT$$

Dej vyzerá v p-V diagrame takto:



Obrázok 3.7.2: p-V diagram ideálneho plynu

Na účinnosť budeme potrebovať Q_{out} a A , poučení však predošlou podúlohou vieme, že nám bude stačiť $Q_{3 \rightarrow 4}$ a $Q_{4 \rightarrow 1}$:

- $3 \rightarrow 4$

$$\Delta U = 0 = Q - NkT_2 \ln \frac{V_1}{V_2} = Q - A$$

$$Q = NkT_1 \ln \frac{V_1}{V_2} < 0$$

- $4 \rightarrow 1$

$$\Delta U = \frac{3}{2}Nk(T_1 - T_2) = Q = Q - A$$

$$Q = \frac{3}{2}Nk(T_1 - T_2) < 0$$

A tiež

$$A = NkT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} - NkT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Nk \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) (T_2 - T_1),$$

čím dostávame účinnosť

$$\mu = \frac{NkT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{3}{2}Nk(T_2 - T_1)}{Nk \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) (T_2 - T_1)} = \frac{278 \ln 4 + 30}{20 \ln 4} \approx 15.$$

Vidíme teda, že účinnosť čerpadla s fotónovým plynom je väčšia ako účinnosť čerpadla s plynom ideálnym.

3.8 GúľAl

vzorák Asi nebude, opravoval Jaro