Riešenia 3. kola letnej časti

3.1 Nabúrať alebo nabúrať

vzorák **Hovorca**, opravoval **Hovorca**

Zadefinujme si najprv, čo znamená, že Kubkovi hrozí nebezpečenstvo. Môžeme si pritom spomenúť na humornú vetičku: „Čo nejde silou, ide ešte väčšou silou.“ Skutočne to, čo môže Kubka ohroziť, je práve nejaká sila, ktorá by na Kubka mohla pôsobiť (a tak mu spôsobiť zranenia rôzneho charakteru). Čo je to sila? Pomôže nám (v tejto úlohe) druhý Newtonov pohybový zákon. Ten nám vraví, že sila F je to, čo za nejaký časový interval Δt spôsobuje zmenu hybnosti Δp, má teda tvar

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}.$$

Zákon by sme mali uvádzať vo vektorovom tvare, ale v danom prípade to nie je relevantné, a tak si ušetríme kus pomyselného papiera (určite Vám teraz v hlave ide „No jasne, už len táto zátvorka zaberá viac miesta….“. ale je to dobré poznamenať). Vidíme, že sú tu relevantné akési dve veličiny – hybnosť (konkrétne jej zmena) a časový interval. Poďme sa teda na ne bližšie pozrieť.

Hybnosť hmotného bodu p je vektorová veličina definovaná ako súčin jeho hmotnosti a rýchlosti, teda

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Vidíme, že jej smer je rovnaký, ako bol smer rýchlosti. Dôležitým faktom k hybnosti je ešte zákon zachovania hybnosti (ZZH). Ten nám vraví, že pokiaľ na sústavu telies nepôsobia žiadne vonkajšie sily, tak sa celková hybnosť sústavy zachováva. Pod celkovou hybnosťou sa tu samozrejme rozumie vektorový súčet hybností jednotlivých častí sústavy. Poďme sa pozrieť na spomínanú *zmenu* hybnosti v jednotlivých opísaných situáciách. Budeme uvažovať, že Kubkovo auto má pred zrážkou hybnosť p_0.

V prvej situácii Kubko nabúra svoje autíčko do protiidúceho auta, ktoré má rovnakú hmotnosť aj rýchlosť, teda aj veľkosť hybnosti. Tieto dve autá sa ale hýbu opačnými smermi a teda majú opačný smer hybnosti. Ak sa vrátime do času pred zrážkou, vidíme, že celková hybnosť v sústave oboch áut je ako správny vektorový súčet dvoch opačných vektorov nulová. Avšak pri zrážke áut neprichádza k pôsobeniu žiadnej *vonkajšej* sily (autá na seba pôsobia len navzájom, taká sila je pre túto sústavu vnútorná). Preto nám v tejto situácií platí ZZH a teda aj po zrážke musí byť celková hybnosť áut nulová. Znamená to teda, že obe autá po zrážke **zostanú stáť**. Teda každé auto má po zrážke nulovú rýchlosť a tým pádom aj hybnosť. Celková zmena hybnosti, ktorú tak zažije Kubkovo auto je zmena z pôvodnej hybnosti p_0 na nulovú hybnosť, teda $\Delta p = p_0$.

V druhej situácii Kubko nabúra svoje autíčko do pevnej, nehybnej steny. Táto stena fakt zostane na mieste, nech sa deje, čo sa deje. Čo sa stane pri zrážke? To je dobrá otázka! Ak by sme uvažovali pružnú zrážku, tak by sa Kubkovo auto dokonale odrazilo a smerovalo opačným smerom s rovnakou hybnosťou. Avšak zo života vieme, že zrážka bude nepružná a auto zastane. Zmena hybnosti je tak tiež $\Delta p = p_0$. Patrí sa okomentovať, prečo sme neaplikovali ZZH. Je to práve preto, že na stenu v sústave pôsobí nejaká iná vonkajšia sila – je to práve tá sila, ktorá stenu drží pevne na mieste. Dá sa na to pozerať ešte trochu matematickejším pohľadom – ak by Vás zaujímal, napíšte mi (napríklad na hovorca[at]fks.sk) a rád ho poskytnem.

Vidíme, že v oboch situáciách je zmena hybnosti Kubkovho auta pri zrážke úplne rovnaká. Zostáva nám teda ešte pozrieť sa na ten časový interval. Tu sa ale priznáme, že sme sa mu doteraz účelovo vyhýbali – veľmi ťažko sa s takouto veličinou pracuje, pretože závisí od toho, ako rýchlo sa plechy na aute pokrčia a podobne. Dôležité je ale uvedomiť si, že bude v oboch prípadoch rovnaký. Plechy sa totiž vo finále pokrčia rovnako – styčná (krčiaca) plocha pri zrážke dvoch identických áut je zo symetrie nutne rovina, rovnako ako pri zrážke zo stenou. Časový interval teda bude rovnaký. Z toho ale vyplýva, že **Kubkovi v oboch situáciach hrozí rovnaké nebezpečenstvo**.

3.2 Nin(j)a medzi stenami

vzorák **Majo**, opravoval **Majo**

Zase raz úloha zo statiky. Veď v tej úlohe nie je nič zaujímavé, či? Opak je však pravdou.

Nina sa má udržať medzi stenami, teda musí byť schopná medzi stenami zotrvávať v pokoji. To pre Ninu ako tuhé teleso znamená, že

1. sily, ktoré na ňu pôsobia, musia mať (vektorový) súčet $\vec{0}$,
2. momenty síl vzhľadom na Ninino ťažisko, ktoré na ňu pôsobia, musia mať (vektorový) súčet $\vec{0}$.

Prvá z týchto podmienok znamená, že Nina nezrýchľuje v žiadnom priamom smere. Druhá zas hovorí, že Nina nerotuje.

Potrebujeme sa tak pozrieť, čo za sily pôsobia v našej situácii. Nina pôsobí na stenu so súčiniteľom trenia f_1 silou $\vec{F_1}$. Zo zákona akcie a reakcie potom stena pôsobí na Ninu silou $-\vec{F_1}$. Podobne Nina pôsobí silou $\vec{F_2}$ na druhú stenu a tá zas na Ninu reakčnou silou $\vec{F_2}$. V celej úlohe predpokladajme, že tieto sily pôsobia kolmo na stenu. [1].

Ďalej v bodoch, kde sa Nina dotýka stien, pôsobia trecie sily $\vec{F_{t_1}}$ a $\vec{F_{t_2}}$. Trecie sily pôsobia proti smeru pohybu Nininých rúk, ktoré by sa chceli skĺznuť nadol, takže pôsobia smerom nahor. Aj k týmto silám sú ich dvojičky reakčných síl, ktoré pôsobia tentoraz na stenu, no tie nás nebudú zaujímať. Napokon poslednou silou v celej situácii je stará známa tiažová sila $\vec{F_G}$.

Na Ninu tak pôsobí celkovo päť síl – dve reakčné na Ninino tlačenie do stien, dve trecie a tiažová. A týchto päť síl má mať nulový súčet a majú vyvolávať nulový moment.

Začnime časťou s nulovým súčtom síl. Táto podmienka hovorí:

$$-\vec{F_1} - \vec{F_2} + \vec{F_{t_1}} + \vec{F_{t_2}} + \vec{F_G} = \vec{0}\,.$$

[1] V záverečných poznámkach rozoberieme, ako by sa riešenie zmenilo, keby toto neplatilo.

Keď si ale všimneme, že sily $-\vec{F_1}$ a $-\vec{F_2}$ pôsobia vo vodorovnom smere a zvyšné tri sily pôsobia v zvislom smere, musí platiť

$$-\vec{F_1} - \vec{F_2} = \vec{0},$$

$$\vec{F_{t_1}} + \vec{F_{t_2}} + \vec{F_G} = \vec{0}.$$

Prvá z týchto rovností nám hovorí, že sily $\vec{F_1}$ a $\vec{F_2}$ musia mať rovnakú veľkosť, no opačný smer. Označme túto ich veľkosť F. Druhá z rovností nám spolu s tým, že trecie sily pôsobia smerom nahor a tiažová smerom nadol, dáva rovnosť pre ich veľkosti:

$$F_{t_1} + F_{t_2} = F_G \tag{3.2.1}$$

Tým sme vytrieskali nejaké podmienky z časti o nulovom súčte síl, môžeme ísť na časť o nulovom momente síl. Budeme predpokladať, že Ninino ťažisko leží presne v strede medzi bodmi, v ktorých tlačí do stien.

Všimnime si, že sily $-\vec{F_1}$, $-\vec{F_2}$ a $\vec{F_G}$ pôsobia na priamkach, ktoré prechádzajú Nininým ťažiskom. Preto vzhľadom na Ninino ťažisko nevyvolávajú žiaden moment. Zaujímavé budú len trecie sily. Označme ramená týchto síl (čo sú v tomto prípade len vektory spájajúce Ninino ťažisko s príslušným bodom, kde Nina tlačí rukami) $\vec{r_1}$ a $\vec{r_2}$. Nulovosť výsledného momentu dáva podmienku:

$$\left(\vec{r_1} \times \vec{F_{t_1}}\right) + \left(\vec{r_2} \times \vec{F_{t_2}}\right) = \vec{0}.$$

V našom prípade je ale tento vzťah výrazne jednoduchší. Jedna z trecích síl roztáča Ninu v smere hodinových ručičiek, kým druhá proti smeru hodinových ručičiek. Momenty od týchto síl preto budú opačne orientované. Taktiež v tomto prípade platí, že vektor každej zo síl je kolmý na svoje rameno, a tak bude veľkosť momentu každej z nich daná jednoducho len súčinom veľkosti sily dĺžky jej ramena. Vďaka tomu dostaneme nasledovný vzťah pre veľkosti:

$$F_{t_1} r_1 = F_{t_2} r_2.$$

Napokon si uvedomíme, že v zadaní máme povedané, že Nina má mať ťažisko presne v strede medzi stenami. Takže platí $r_1 = r_2$ a predošlý vzťah sa zjednoduší na obyčajné

$$F_{t_1} = F_{t_2}. \tag{3.2.2}$$

Inými slovami, obe trecie sily musia mať rovnakú veľkosť[2].

Zostáva už len dať všetko dokopy. Použitím vzťahu 3.2.2 vo vzťahu 3.2.1 dostávame

$$F_{t_1} = F_{t_2} = \frac{F_G}{2} = \frac{mg}{2}.$$

Pre veľkosť trecej sily platí vzťah $F_t \leq f F_N$, kde f je súčiniteľ trenia a F_N je veľkosť normálovej sily (teda sily kolmej na povrch) v bode, kde dochádza k treniu. Pre trecie sily $\vec{F_{t_1}}$ a $\vec{F_{t_2}}$ zohrajú úlohu normálových síl sily

[2] K presne rovnakému záveru by sme sa dostali, keby oslabíme predpoklad a namiesto ťažiska v strede medzi bodmi dotyku dovolíme Nine mať ťažisko aj kdekoľvek inde, no stále v strede medzi stenami.

$\vec{F_1}$ a $\vec{F_2}$, ktorými Nina tlačí do stien. Zo vzťahov pre veľkosti trecích síl dostávame nerovnosti:

$$\frac{mg}{2} = F_{t_1} \leq f_1 F_1 = f_1 F$$

$$\frac{mg}{2} = F_{t_2} \leq f_2 F_2 = f_2 F$$

To dáva podmienky pre F:

$$F \geq \frac{mg}{2f_1}$$

$$F \geq \frac{mg}{2f_2}$$

Keďže však $f_2 < f_1$, $\frac{mg}{2f_2} > \frac{mg}{2f_1}$. Obe podmienky sú preto súčasne splnené, iba ak je splnená len jedna z nich, konkrétne

$$F \geq \frac{mg}{2f_2}.$$

Keď bude splnená táto podmienka, trecie sily už Ninu udržia. Preto musí Nina pôsobiť na každú zo stien silou s veľkosťou aspoň $\frac{mg}{2f_2}$.

Poznámka 1 (*prípad, keď netlačíme kolmo na povrch*)

Ak by Nina netlačila kolmo na povrch, celé riešenie by vyzeralo skoro rovnako, len by pribudlo niekoľko členov. Tie by riešenie spravili o dosť nechutnejším. Sily, ktorými Nina pôsobí a aj reakčné sily, by sa rozkladali na vodorovnú a zvislú zložku. Vodorovné zložky by sa vyriešili rovnako ľahko ako v kolmom prípade, zvislé zložky by vytvorili svoje členy vo vzťahu 3.2.1. Väčšiu opatrnosť by bolo vhodné dať časti s momentmi, ale aj tam by sa nič moc nezmenilo – tieto dve reakčné sily by opäť spolu vyvolávali nulový moment.

Situácia by sa ale skomplikovala, ak by Nina mohla do stien tlačiť rôzne šikmo. Vtedy by sa všetky veci, ktoré vychádzali pekne, stali škaredšími, ale náš postup by stále fungoval.

Poznámka 2 (*ako si zjednodušiť udržanie sa*)

Môže sa nám nepáčiť, že podľa výsledného vzťahu nám drsnejšia stena vôbec nijako nepomáha. To sa ale dá zmeniť. Ak by totiž Nina posunula svoje ťažisko bližšie k drsnejšej stene, zmenila by veľkosti ramien trecích síl. Tým by umožnila trecej sile $\vec{F_{t_1}}$ byť väčšou. Pri vhodnom posunutí ťažiska by dokonca Nina mohla zariadiť, aby trecie sily mohli mať veľkosti $F_{t_1} = f_1 F$ a $F_{t_2} = f_2 F$. Vďaka tomu by Nine stačilo pôsobiť menšou silou.

V nejakej miere by Nine k zjednodušeniu si udržania sa mohlo dopomôcť, aj ak by tlačila do stien pod nejakým uhlom, ako v predošlej poznámke. Vodorovná zložka Nininej sily by prispievala stále ako normálová sila pre treciu silu a zvislá zložka by prispievala k tomu, aby zvislá zložka reakčnej sily vytláčala Ninu smerom nahor.[3]

[3] Toto si v istej miere môžete všimnúť, ak si pozriete nejaké zábery zo súťaže *Ninja Warrior* z prekážky zvanej *Spider Jump*. Jasné, že tam vstupuje ešte viacero ďalších faktorov. Ale u tých, čo to vedia, si môžete všimnúť, že majú ruky pomerne nízko a že nimi tlačia aj mierne nadol.

Poznámka opravovateľa 1 (*výsledný moment musí byť nulový*)

Väčšina z vás si v tejto úlohe myslela, že na to, aby sa Nina udržala, stačí, aby výsledná sila pôsobiaca na ňu bola nulová. Keď si vezmete glóbus a budete ho stále viac a viac roztáčať[4], rozhodne nepôjde o statickú situáciu. Treba aj o polnoci vedieť, že v statickej situácii na tuhé teleso nepôsobí žiadna sila a žiadny moment.

Poznámka opravovateľa 2 (*vzorec na výpočet trecej sily*)

Skoro vo všetkých riešeniach sa vyskytlo, že vzorček na treciu silu má tvar $F_t = f F_N$. Takto tento vzorček **ne**vyzerá. Ak by to totiž platilo, diali by sa divné veci – položíte kvádrik na mierne naklonenú rovinu a trecia sila ho vytiahne nahor.

V skutočnosti vzťah $F_t = f F_N$ popisuje akou najväčšou silou môže trecia sila pôsobiť (teda správny vzťah je $F_t \leq f F_N$). Trecia sila však nie vždy bude pôsobiť takouto silou. Trecia sila vždy bude pôsobiť proti smeru (potenciálneho) pohybu, ale **nikdy** nebude pohyb vyvolávať. Tak ako na naklonenej rovine, kde buď trecia sila bude dostatočná na to, aby kvádrik udržala na mieste, alebo nebude dostatočná a bude kvádrik spomaľovať svojou najväčšou možnou veľkosťou.

3.3 Každej rovným dielom

vzorák **Jaro**, opravoval **Jaro**

Začnime tým, že si ujasníme, čo od nás zadanie požaduje. Máme nájsť tvar nádoby s deravým dnom, pre ktorú platí, že prietok, a teda aj výtoková rýchlosť, sú konštantné. Človeku poznajúcemu Torricelliho vzorec sa to môže javiť ako zjavný nezmysel. Veď predsa ako voda z nádoby vyteká, zmenšuje sa výška vodného stĺpca nad otvorom, no a pre výtokovú rýchlosť podľa spomínaného vzorca má platiť $v = \sqrt{2gh}$. Tak kde je problém?

Problém je v tom, že Torricelliho vzorec predpokladá, že pri vytekaní vody z nádoby sa výška hladiny nemení, resp. sa mení len veľmi pomaly. Inými slovami, že otvor v nádobe je ďaleko menší, než je plocha hladiny. Ak táto podmienka nie je splnená, musíme naším výpočtom sledovať presné odvodenie Torricelliho vzorca a nezanedbať tie veci, ktoré sa štandardne zanedbávajú pri jeho odvodení. Poďme na to!

Uvažujme nádobu takého tvaru, aby vyhovovala zadaniu. Nech je plocha vodorovného prierezu nádoby vo výške h odo dna $S(h)$. Predpis funkcie $S(h)$ jednoznačne popisuje tvar nádoby, čiže toto je naša neznáma funkcia, ktorej predpis chceme nájsť.

Pre vytekajúcu vodu určite platí rovnica kontinuity

$$Q = S_o v_o = S(h) v(h),$$

[4] Odhliadnuc od toho, že glóbus časom rozbijete (true story).

kde v_o je výtoková rýchlosť vody z nádoby a $v(h)$ je vertikálna rýchlosť prúdenia vo výške h. Okrem toho zrejme platí aj Bernoulliho rovnica[5] [6].

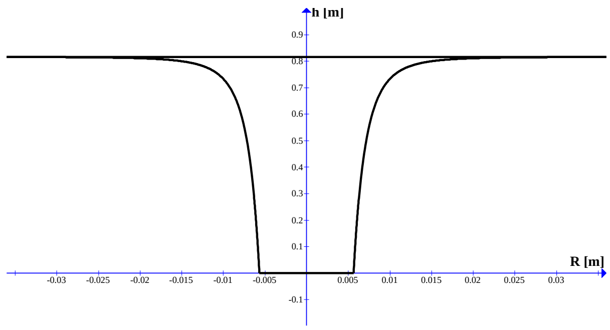
$$v_o^2 = v^2(h) + 2gh.$$

Tým máme všetko, čo potrebujeme. Vylúčením neznámej rýchlosti $v(h)$ a pár jednoduchými úpravami nachádzame hľadaný tvar nádoby

$$S(h) = \frac{Q}{\sqrt{v_o^2 - 2gh}} = \frac{Q}{\sqrt{\left(\frac{Q}{S_o}\right)^2 - 2gh}}.$$

Pre lepšiu predstavu bude vhodnejšie zapísať ho ako závislosť polomeru nádoby od výšky

$$R(h) = \sqrt{\frac{Q}{\pi}} \frac{1}{\sqrt[4]{\left(\frac{Q}{S_o}\right)^2 - 2gh}}.$$



Obrázok 3.3.1: *Príklad tvaru nádoby pre* $S_o = 1 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$ *a* $Q = 4 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$

Po dosadení za $h = 0$ dostávame, že $S(0) = S_o$, takže zisťujeme, že otvor zaberá celé dno. Z grafu vidíme, že nádoba sa s výškou rozširuje. To dáva perfektne zmysel. V skutočnosti je to rovnaký tvar, aký má prúd vody tečúci z kohútika. Jediný rozdiel je v tom, že tu drží vodu pokope nádoba a tam je to povrchové napätie vody.

Teraz môžeme pristúpiť k ďalšej časti úlohy. Máme nájsť teoretickú maximálnu výšku nádoby, pre ktorú je možné splniť podmienku zo zadania. Nájdený tvar nádoby nám dáva okamžite odpoveď. Vidíme, že pre istú výšku dostávame nekonečne veľký prierez. To je zrejme ten limit. Nech H je maximálna možná výška. Podmienkou potom je nulovosť menovateľa v nájdenom predpise, odkiaľ

$$H = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{S_o}\right)^2.$$

[5] Vynechali sme z nej členy za hydrodynamický tlak, čo znamená, že predpokladáme, že ten je v každej výške rovnaký. Nárast hydrodynamického tlaku je totiž spôsobený spomalením prúdenia v širšej časti potrubia/nádoby a silovým pôsobením rýchlejšie pritekajúcej vody do tejto rozšírenej časti. Ak má byť však výtoková rýchlosť konštantná bez ohľadu na zostávajúce množstvo vody v nádobe, tak zrejme nemôže byť ovplyvnená hydrodynamickým tlakom, preto budeme predpokladať, že ten sa s výškou nemení. Ak by sa nám s týmto predpokladom nepodarilo nájsť riešenie, vždy sa sem môžeme vrátiť a tento predpoklad prehodnotiť.

[6] V skutočnosti by v Bernoulliho rovnici mala vystupovať celková rýchlosť a nie len jej vertikálna zložka. Pokiaľ sa totiž s výškou mení tvar nádoby, tak voda má aj nejakú radiálnu zložku rýchlosti. Predpokladajme teda, že prierez sa s výškou mení len pomaly, a teda radiálnu zložku rýchlosti možno zanedbať.

Tu by sa patrilo pripomenúť, že sme predpokladali, že plocha prierezu nádoby sa s výškou mení pomaly. To už ale nie je pravda, keď sa menovateľ blíži k nule, teda keď sa výška nádoby blíži k tejto hodnote. Preto treba túto hodnotu brať len ako rádový odhad.

No a čo doba vytekania? Pripomeňme si, čo sme napísali v prvej poznámke pod čiarou – rýchlosť tečenia v nejakej výške nie je ovplyvnená vodou v iných výškach. To ale znamená, že zmena rýchlosti vody je spôsobená len a len gravitáciou, teda že voda padá voľným pádom. Na začiatku je voda v pokoji, na konci opúšťa nádobu rýchlosťou v_o.[7] Doba vytekania je teda[8]

$$\tau = \frac{v_o}{g} = \frac{Q}{gS}.$$

Kto neverí, môže si to overiť výpočtom. Stačí zrátať objem nádoby, predeliť ho prietokom a dostanete hľadaný čas vytekania. Na nájdenie objemu takto tvarovanej nádoby však budete potrebovať veľmi dobré tabuľky.[9]

Vyberáme z vašich riešení

S kreatívnymi riešeniami prišli Andrej Kubec a Ondrej Hacker, ktorí si uvedomili, že pokiaľ platí Toricelliho vzorec, tak ak sa im nejako podarí zabezpečiť, aby výška hladiny nad otvorom, ktorým voda opúšťa nádobu, bola vždy konštantná, tak dostanú konštantnú výtokovú rýchlosť. Na prvý pohľad sa to zdá ako nesplniteľná úloha. Veď predsa ako voda z nádoby vyteká, musí zákonite klesať aj výška vodnej hladiny nad otvorom. Ibaže by sa poloha otvoru menila spolu s výškou hladiny. Ako toto docieliť? Napríklad tak, že na hladinu umiestnime bójku, ktorá bude kontrolovať polohu otvoru. V princípe máme dve možnosti:

- K bójke pripevníme slamku, ktorej druhý koniec vyvedieme dierou v dne nádoby. V takom prípade voda opúšťa nádobu (rozumej slamku) o dĺžku slamky nižšie.[10]
- Otvor v nádobe urobíme pri jej dne a pripevníme k nemu z vonkajšej strany slamku. Slamke umožníme ohýbať sa alebo meniť svoj sklon. Na bójku umiestnime konštrukciu, ktorá bude pretŕčať ponad okraj nádoby a jej rameno bude v dostatočnej výške nad týmto okrajom. K ramenu priviažeme voľný koniec slamky. Ako bude hladina v nádobe klesať, bude klesať aj rameno konštrukcie, a tým aj voľný koniec slamky, čím sa zabezpečí konštantný výškový rozdiel medzi hladinou vody v nádobe a voľným koncom slamky.

Poznajúc výškový rozdiel medzi voľnou hladinou a otvorom, ktorým voda opúšťa nádobu, nie je problém vypočítať výtokovú rýchlosť. Stačí si uvedomiť, že v každom momente opúšťa nádobu element kvapaliny s hmotnosťou Δm. Jeho miesto zaujmú elementy, ktoré boli nad ním. V konečnom dôsledku teda hladina poklesne, čiže je to ekvivalentné tomu, ako by sme presunuli jeden element z hladiny tesne pod otvor. To znamená, že potenciálna energia elementu sa zmenila o $\Delta mg\Delta H$, kde ΔH je spomínaný výškový rozdiel, no a táto energia sa zmenila na jeho kinetickú energiu pri výstupe, teda $\frac{1}{2}\Delta mv^2$. Z rovností týchto dvoch energií potom dostávame výtokovú rýchlosť kvapaliny $v = \sqrt{2v\Delta H}$.[11]

[7] Tu vidíme, že v prvých momentoch je zrejme výtoková rýchlosť menšia než v_o, pretože voda ešte nestihla dostatočne zrýchliť. Vtedy ešte ani hydrodynamický tlak nie je zrejme konštantný. Po čase sa však rýchlosť ustáli a prietok je už potom konštantný.

[8] V skutočnosti je o čosi väčšia práve preto, že chvíľu trvá, kým sa vytekanie ustáli (viď predchádzajúca poznámka pod čiarou).

[9] Alebo vedieť integrovať.

[10] V skutočnosti je to ešte o máličko viac, pretože za čas, kým voda preprúdi slamkou z jedného konca na druhý, slamka o čosi poklesne. Čím je slamka v porovnaní s nádobou užšia, tým je rozdiel oproti dĺžke slamky zanedbateľnejší.

[11] V skutočnosti by sme sem mali započítať, že aj na hladine mal tento element nejakú malú kinetickú energiu, no tá je v porovnaní s poklesom jeho potenciálnej energie zanedbateľná.

Na záver treba poznamenať, že výtoková rýchlosť pri použití takéhoto konceptu je konštantná, okrem prvotnej fázy, kým dôjde k jej ustáleniu, a záverečnej fázy, keď sa už voda v nádobe nenachádza a voda doteká už len zo slamky.

3.4 Lenivé elektróny

vzorák **Kubo**, opravoval **Kubo**

Táto úloha bola ozaj veľmi jednoduchá. Natoľko, že niektorí ste sa nechali popliesť… No, nechajme to na neskôr. Problém, ktorý bol zadaný, je veľmi dobre známy. Veličina, na ktorú sme sa pýtali, sa nazýva **driftová rýchlosť** a označuje napríklad v_d – podobne ako pri plyne, vieme, že každá jedna z molekúl sa pohybuje pomerne rýchlo (stovky metrov za sekundu). Pri meraní rýchlosti vetra takéto hodnoty nedosahujeme. Jedná sa teda o *priemernú rýchlosť elektrónu v kove* pri zohľadnení smeru pohybu – stovky metrov za sekundu sú pri plyne *priemerná veľkosť ich rýchlosti*; pri bezvetrí je však driftová rýchlosť molekúl vzduchu nulová, kým driftová rýchlosť pri vetre je to isté, čo rýchlosť vetra. Driftová rýchlosť je často používaná veličina a existuje viacero rôznych vzťahov, ktorými sa k nej možno dopracovať.

Asi najjednoduchšie bolo dopátrať sa k veličine nazývanej **elektrónová mobilita** (označenie μ); toto je materiálová veličina a zohľadňuje mernú vodivosť materiálu takým spôsobom, že je len konštantou úmernosti medzi driftovou rýchlosťou a elektrickým poľom naloženým na materiál,

$$v_d = \mu E.$$

Hneď Wikipedia hovorí o tom, že pre meď sa táto hodnota pohybuje okolo 40 $\mathrm{cm^2/(V\,s)}$. A elektrické pole? To je predsa vo voltoch na meter – a pre homogénny medený vodič to bude v našom prípade 4,5 V/m. To teda hovorí o rýchlosti okolo 1,8 cm/s a teda (vzorec pre rovnomerný pohyb si vygooglite…) o čase okolo 56 sekúnd.

Ak sa vám predchádzajúci výpočet zdal tak trochu ako švindeľ, trochu tomu tak je – elektrónovú mobilitu vymysleli presne preto, aby to ľudia mohli takto obísť. Dalo sa to, samozrejme, počítať aj inak, trochu (ale nie príliš) zložitejšie. Opäť sa stretneme s jednou divnou veličinou, ktorá opisuje nejaké vodivostné vlastnosti materiálov – tentokrát to bude **koncentrácia nosičov náboja**, alebo tiež (ak náboj nesú elektróny – v polovodičoch to tak byť nemusí) koncentrácia vodivostných elektrónov (ak vás zaujíma, ako sa táto správa v dva nanometre tenkých filmoch rôznych kovov, ozvite sa mi). Je to jednoducho číslo, ktoré hovorí, koľko nosičov náboja je v jednotke objemu a značí sa n. Možno ho dopočítať napríklad z atómovej hmotnosti, hustoty a počtu valenčných elektrónov (áno, pre meď sa to dá, to je slušný kov, ale nie vždy žijeme v takomto luxuse, ehm ehm molybdénkarbid). Pre meď je to teda $8{,}5 \cdot 10^{28}/\mathrm{m^3}$.

Ak chceme spočítať, koľko kusov nosičov náboja prejde za sekundu pri prúde I, bude to $\frac{I}{e}$ – e je náboj elektrónu, teda nosiča náboja. A ak sa na to pozrieme, tak (žiadna vysoká fyzika sa nekoná) počet pretečených elektrónov za sekundu musí byť ich koncentrácia krát prierez drôtu krát ich rýchlosť. Teda rovnicou

$$\frac{I}{e} = nSv_d$$

a po učesaní

$$\frac{I}{S} = nev_d.$$

Lenže pomer I/S vystupuje i kdesi inde… prúd síce nemáme, ani odpor, sťaby sme nemohli použiť Ohmov zákon? Ale nie, stačí si len odpor, použijúc definičný vzťah rezistivity, rozpitvať na $R = \frac{\rho l}{S}$ a dosadiť do Ohmovho zákona

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{\frac{\rho l}{S}} = \frac{US}{\rho l}.$$

No a tento prúd teraz dosadíme do vzťahu, ktorý už poznáme:

$$\begin{aligned} nev_d &= \frac{I}{S} \\ &= \frac{\frac{US}{\rho l}}{S} \\ &= \frac{U}{\rho l} v_d \quad = \frac{U}{\rho l n e}. \end{aligned}$$

Rezistivita, alebo merný elektrický odpor, je klasická tabuľková záležitosť. A koncentrácia nosičov náboja tiež – ale ak by ste o tom náhodou nevedeli, tak sa vždy dalo spočítať, koľko atómov je v objeme medi (z jej hustoty a atómovej hmotnosti) a z periodickej tabuľky určiť, že každý atóm dáva jeden vodivostný elektrón. Keď teda dosadíme za rezistivitu $\rho = 1{,}72 \cdot 10^{-8}\ \Omega\,\mathrm{m}$ a za koncentráciu $n = 8{,}5 \cdot 10^{28}/\mathrm{m}^3$, dostávame hodnotu driftovej rýchlosti okolo 1,9 cm/s. To nám dá čas okolo 53 sekúnd.

A ako je to s tou dobou, kedy sa zažne žiarovka? Veď to poznáme z počasia – front postupuje inou rýchlosťou, akou fúka vietor; alebo aj opačným smerom. Tak čomu sa diviť? Najjednoduchšie vysvetlenie, ktoré je v mojich schopnostiach a súčasne je tu na neho priestor, hovorí o tom, že to vyzerá ako voda v hadici – voda kdesi ďaleko už má nenulovú rýchlosť, aj keď voda odtiaľto tam ešte ani zďaleka nedošla. Ako to môže fungovať v prípade elektrónov, ktoré sa ani náhodou nedotýkajú, to si asi necháme na inokedy.

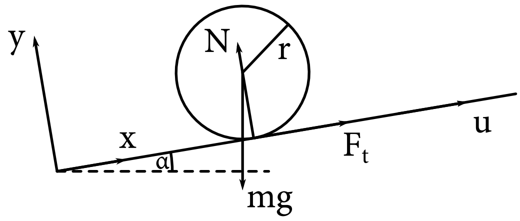
A ozaj, prečo to nejde cez energie? Veď napätie krát náboj elektrónu je potenciálna energia! A kinetická sa mení na potenciálnu… Prvý problém si niektorí z vás všimli; ošetrili ho vetou „relativistické efekty zanedbáme“. A potom im vyšla rýchlosť blízka rýchlosti svetla, tú podčiarkli a tešili sa. Lenže pri takejto rýchlosti by už relativitu bolo treba uvážiť. Chyba je však inde a takúto rýchlosť elektróny nedosiahnu! Čo je teda zle na úvahe o kinetickej a potenciálnej energii? Nejaká časť energie sa stratí. Inžiniersky sa tomu povie, že sa vodič zahrieva a že za to môže elektrický odpor (ten predsa poznáme) – no a mikroskopický pohľad nám naznačí, že elektróny narážajú do jadier atómov medi, to sa dá interpretovať ako trenie a sme späť pri zahrievaní – tu sa predsa stráca tá energia!

3.5 Miško, pusť balónik a meraj!

3.6 Fyzik vo fitku II

vzorák **Jaro**, opravoval **Jaro**

Uvažujme bežiaci pás naklonený pod uhlom α, s povrchom pohybujúcim sa rýchlosťou u smerom nahor. Súradnicovú sústavu si zvolíme tak, že x-ová os korešponduje s povrchom pásu a y-ová os je pochopiteľne na ňu kolmá, pričom leží vo vertikálnej rovine. Poučení úlohou z predchádzajúceho kola si odpustíme obšírne obkecávanie a pustíme sa rovno do riešenia.



Obrázok 3.6.1: *Valec na naklonenom bežiacom páse*

Začnime translačným pohybom. Podľa druhého Newtonovho zákona možno pre x-ový smer písať

$$ma = F_t - mg\sin\alpha.$$

Odtiaľ

$$a = \frac{F_t}{m} - g\sin\alpha.$$

V y-ovom smere k žiadnemu pohybu nedochádza, preto

$$N = mg\cos\alpha.$$

Pre rotačný pohyb písaný vzhľadom na ťažisko platí

$$J\varepsilon = F_t r,$$

kde $J = \frac{1}{2}mr^2$, teda uhlové zrýchlenie valca je

$$\varepsilon = \frac{2F_t}{mr}.$$

V prvých momentoch po položení valca na rozbehnutý bežiaci pás valec na ňom prešmykuje. Pre treciu silu vtedy platí

$$F_t = fN = fmg\cos\alpha.$$

Po dosadení do výrazov pre zrýchlenia dostávame

$$a = fg\cos\alpha - g\sin\alpha$$

$$\text{a } \varepsilon = \frac{2fg\cos\alpha}{r}.$$

Vidíme, že smer pohybu valca závisí od sklonu pásu. Ak je sklon pásu mierny, valec sa rozbehne v smere pôsobenia trecej sily, teda v smere pohybu pásu; ak je sklon strmší, rozbehne sa opačným smerom. Pre sklon $\alpha = \arctan f$ zostane valec na mieste. Pozor, ale len do momentu, kým nedosiahne dostatočnú uhlovú rýchlosť, pri ktorej prešmykovanie ustane! Následne sa trenie zmení na statické, pre ktoré platí $F_t \leq fmg\cos\alpha$ a valec sa zrejme rozpohybuje. Ale nepredbiehajme! Nájdime najskôr rýchlosť, pri ktorej prešmykovanie ustane.

Translačné aj uhlové zrýchlenie valca sú počas prešmykovania konštantné. To znamená, že v tejto fáze pohybu rastú jeho rýchlosť a uhlová rýchlosť lineárne s časom

$$v(t) = g(f\cos\alpha - \sin\alpha)t,$$

$$\omega(t) = \frac{2fg\cos\alpha}{r}t.$$

Označme si rýchlosť valca v momente zastavenia prešmykovania V a jeho uhlovú rýchlosť v tomtiež momente Ω. Prešmykovanie ustane, keď sa rýchlosť bodu na povrchu valca v kontakte s pásom vyrovná rýchlosti pásu

$$u = V + \Omega r.$$

Po dosadení príslušných výrazov za rýchlosti vieme vyjadriť čas, v ktorom prešmykovanie ustane

$$\tau = \frac{u}{g(3f\cos\alpha - \sin\alpha)},$$

ako aj translačnú a uhlovú rýchlosť v tomto čase

$$V = \frac{f\cos\alpha - \sin\alpha}{3f\cos\alpha - \sin\alpha}u,$$

$$\Omega = \frac{2f\cos\alpha}{3f\cos\alpha - \sin\alpha}\frac{u}{r}.$$

Čo sa bude diať ďalej? Akonáhle prešmykovanie ustane, zrýchlenia valca sa vo všeobecnosti zmenia, pretože statická trecia sila sa vo všeobecnosti líši od dynamickej. Vráťme sa teda k výrazom pre zrýchlenia valca so všeobecnou trecou silou. Pre závislosti rýchlosti a uhlovej rýchlosti valca na čase platí[12]

$$v(t) = V + \left(\frac{F_t}{m} - g\sin\alpha\right)t$$

$$\text{a } \omega(t) = \Omega + \frac{2F_t}{mr}t.$$

Keďže nemá dochádzať k prešmykovaniu, v každom momente musí platiť

$$u = v(t) + \omega(t)r.$$

Teraz to už chce len trochu obratnosti s úpravou výrazov a nepomýliť sa. Po dosadení za $v(t)$ a $\omega(t)$ možno nájsť neznámu treciu silu

$$F_t = \frac{1}{3}mg\sin\alpha$$

[12] Čas „vynulujeme“ v momente ustatia prešmykovania, takže v čase $t = 0$ má valec rýchlosť V a uhlovú rýchlosť Ω.

a po jej dosadení späť do týchto výrazov konečne dostaneme hľadané závislosti

$$v(t) = \frac{f\cos\alpha - \sin\alpha}{3f\cos\alpha - \sin\alpha}u - \frac{2}{3}g\sin\alpha t,$$

$$\omega(t) = \frac{2f\cos\alpha}{3f\cos\alpha - \sin\alpha}\frac{u}{r} + \frac{2g\sin\alpha}{3r}t.$$

Prizrime sa lepšie týmto funkciám. Zrýchlenie translačného pohybu je vždy záporné. To znamená, že valec sa začne valiť nadol po bežiacom páse bez ohľadu na jeho sklon[13] či súčiniteľ trenia. Kladné uhlové zrýchlenie zase hovorí, že rotácia valca sa bude počas toho zväčšovať, čo dáva perfektný zmysel, ak požadujeme, aby valec neprešmykoval.

Čo ale potom s tou statickou polohou valca, na ktorú sa pýta zadanie? Translačné zrýchlenie valca je $a = \frac{2}{3}g\sin\alpha$. $\frac{2}{3} \neq 0$, $g \neq 0$, takže pokiaľ je aj sklon nenulový a pás sa pohybuje rovnomernou rýchlosťou, nie je možné, aby valec zostal stáť na mieste.

Ak by sme chceli, aby valec stál na mieste, musela by existovať sila, ktorá by pôsobila proti zložke tiažovej sily rovnobežnej s pásom. Počas prešmykovania to bola trecia sila, lenže tá sa po ustatí prešmykovania zmenšila a už nebola schopná vyrovnať tiažovú silu.

Jedinou možnosťou, ako valec udržať na mieste, je teda, že trecia sila neklesne až tak veľmi. To sa dá docieliť tým, že pás bude zrýchľovať. Túto situáciu sme analyzovali už v predchádzajúcom kole.

Ak je zrýchlenie pásu dostatočne veľké – až tak, že valec bude na páse prešmykovať, potom je to ekvivalentné situácii, keď položíme valec na už rozbehnutý bežiaci pás. Vtedy ale vieme, že statická poloha existuje aspoň pre sklon

$$\alpha = \arctan f.$$

Na mieste je otázka, či vieme dosiahnuť statickú polohu aj pre iný sklon. Uvažujme, že pás zrýchľuje, no dostatočne pomaly, takže k prešmykovaniu nedochádza. Potom ale platí presne rovnaký výpočet, ako sme robili pre druhú fázu pohybu, s tým, že $V = 0$, $\Omega = 0$ a $u = u(t) = a_p t$, kde a_p je zrýchlenie pásu. Potom presne rovnakým postupom dostaneme

$$F_t = \frac{1}{3}m\left(a_p + g\sin\alpha\right)$$

$$\text{a } v(t) = \left(\frac{a_p}{3} - \frac{2}{3}g\sin\alpha\right)t.$$

Odtiaľ z podmienky nulovej rýchlosti valca

$$a_p = 2g\sin\alpha.$$

Statickú polohu valca teda možno dosiahnuť aj pre iný sklon, ak bude pás zrýchľovať s takýmto zrýchlením.

[13] Za predpokladu, že je nenulový.

Ale pozor, nie pre ľubovoľný sklon, aj keď nám sklon vo výsledku explicitne nevystupuje! Nezabúdajme, že zrýchlenie pásu nemôže byť ľubovoľne veľké, inak valec začne prešmykovať a dostaneme predchádzajúci prípad. Podmienka neprešmykovania je daná maximálnou trecou silou medzi valcom a pásom

$$F_t \leq fmg\cos\alpha.$$

Pre maximálne zrýchlenie pásu teda musí platiť

$$\frac{1}{3}m\left(a_{p\ \max} + g\sin\alpha\right) = fmg\cos\alpha,$$

odkiaľ

$$a_{p\ \max} = 3fg\cos\alpha - g\sin\alpha.$$

No a napokon z podmienky $a_p \leq a_{p\ \max}$ dostávame, že stacionárnu polohu je možné takýmto spôsobom dosiahnuť, len ak pre sklon pásu platí

$$\tan\alpha \leq f.$$

3.7 Pomocník s hadicou

vzorák **Jaro**, opravoval **Jaro**

Zo zadania vieme, že hadica má prierez S a voda v hadici má prietok Q. Odtiaľ je rýchlosť prúdenia vody v hadici $v = \frac{Q}{S}$.

Uvažujme krátky kúsok hadice prislúchajúci stredovému uhlu $\delta\varphi$. V takomto kúsku hadice sa v každom momente nachádza voda s hmotnosťou $\delta m = \rho SR\delta\varphi$. Nájdime, akou silou na ňu hadica pôsobí. Najjednoduchšie to urobíme tak, že si uvedomíme, že sila od hadice je dostredivou silou pre túto vodu, preto

$$\delta F = F_{\text{dostr}} = \delta m\frac{v^2}{R} = \rho Sv^2\delta\varphi.$$

Vidíme, že táto sila závisí na veľkosti stredového uhla lineárne. Označme si preto silu normovanú na jednotkový uhol ako

$$f = \frac{\delta F}{\delta\varphi} = \rho Sv^2 = \frac{\rho Q^2}{S}.$$

Túto silu vieme dostať aj iným, mierne pracnejším spôsobom. Pri jej odvodzovaní však nájdeme dôležitý medzivýsledok, ktorý sa nám zíde neskôr, preto si ukážme aj tento druhý spôsob. Uvažujme opäť element vody v hadici prislúchajúci stredovému uhlu $\delta\varphi$. Jeho hybnosť je

$$\delta p = \delta mv = \rho SR\delta\varphi v = \rho QR\delta\varphi$$

a hybnosť prislúchajúca jednotkovému uhlu

$$q = \frac{\delta p}{\delta\varphi} = \rho QR.$$

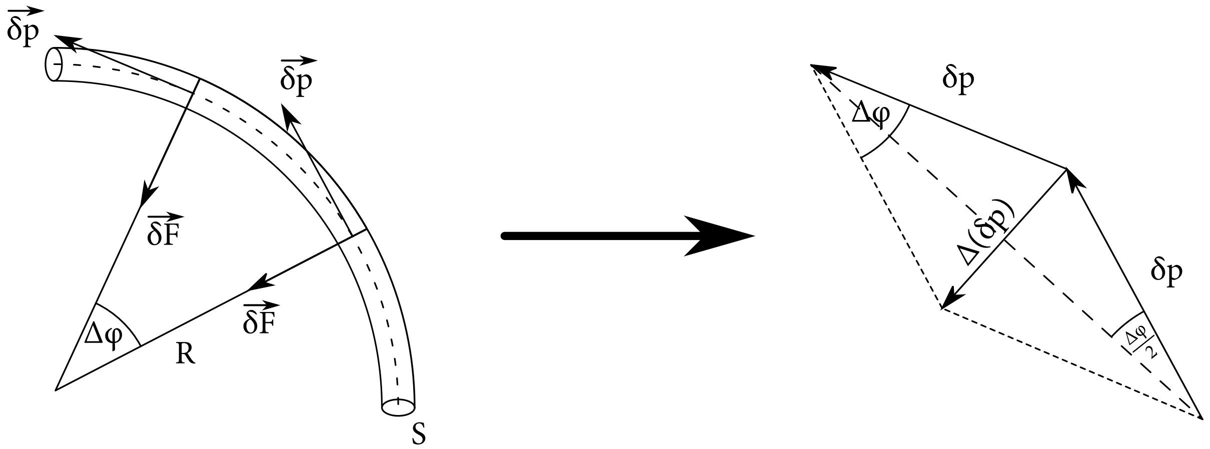
Za čas Δt sa element vody posunie do vzdialenosti $v\Delta t$ a tejto vzdialenosti zodpovedá zmena stredového uhla $\Delta\varphi = \frac{v\Delta t}{R}$. Veľkosť hybnosti elementu vody sa pritom nijako nezmení, zmení sa len jej smer. Hybnosť ako vektor sa teda zmení. Zmenu hybnosti jednoducho nájdeme využitím jednoduchej geometrie ako dĺžku uhlopriečky kosoštvorca (viď fig. 3.7.1) ako

$$\Delta(\delta p) = 2\delta p \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \approx 2\delta p \frac{\Delta\varphi}{2} = \rho Q R \delta\varphi \frac{v\Delta t}{R} = \frac{\rho Q^2}{S}\delta\varphi\Delta t.$$

Konečne podľa druhého Newtonovho zákona sila je rovná zmene hybnosti za čas, preto

$$\delta F = \frac{\Delta(\delta p)}{\Delta t} = \frac{\rho Q^2}{S}\delta\varphi,$$

čo je identický výsledok, ako sme dostali pri výpočte cez dostredivú silu.



Obrázok 3.7.1: *Zmena hybnosti elementu vody*

Podľa tretieho Newtonovho zákona element vody pôsobí na jemu prislúchajúci kúsok hadice rovnako veľkou silou opačného smeru. Aby bola hadica v rovnováhe, musí byť výsledná sila na ňu pôsobiaca nulová. Stačí nám teda sčítať príspevky od všetkých elementov vody v hadici a mali by sme mať vybavené. Poďme teda na to.

Chceme sčítať veľmi veľa veľmi malých príspevkov. To zaváňa integrovaním. Nevieme sa mu však nejako vyhnúť? Vieme! Vieme, že voda vytekajúca z hadice má opačný smer než voda do nej vtekajúca. Oblúk hadice teda mení hybnosť každého elementu vody z δp na $-\delta p$, teda o $-2\delta p$. Za čas Δt vtečie do hadice voda s hybnosťou $\delta p = q\frac{v\Delta t}{R} = \frac{\rho Q^2}{S}\Delta t$. Zmena hybnosti vody za tento čas je teda $\Delta p = -2\delta p = -2\frac{\rho Q^2}{S}\Delta t$ a sila, ktorou musí Patrik pôsobiť, je

$$F_\parallel = \frac{\Delta p}{\Delta t} = -2\frac{\rho Q^2}{S}.$$

Táto sila sa rovnomerne rozkladá medzi jeho dve ruky, preto každou z nich musí pôsobiť silou $\frac{F_\parallel}{2}$.

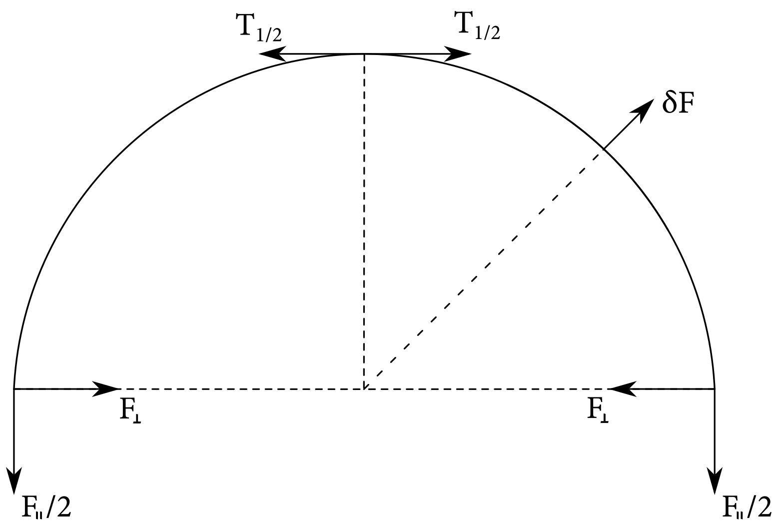
No dobre, toto je sila v smere vystretej časti hadice. Ale čo sila v smere kolmom na rovnú časť hadice? V tomto smere sa hybnosť nemení. Znamená to však, že aj sila je nulová? Keď sa pozrieme na nejaký kratší úsek polkružnicovej časti hadice, napríklad polovicu z nej, vidíme, že tu sa hybnosť vody na tomto úseku mení. Niekomu by mohlo napadnúť sčítať zložky sily pôsobiacej na hadicu od vody v tomto smere. Buď integrovaním alebo opäť jednoduchou úvahou o zmene hybnosti vody v štvrťkružnici zistíme, že na vodu v štvrťkružnici v kolmom smere musí pôsobiť sila

$$F_{\perp} = \frac{\rho Q^2}{S}.$$

Je však toto sila, ktorou musí Patrik pôsobiť na hadicu v kolmom smere? Na prvý pohľad to tak vyzerá, no nemusí to tak byť. Platí totiž, že aby bolo teleso v rovnováhe, musí byť výslednica všetkých naň pôsobiacich vonkajších síl nulová. Lenže tým, že sme uvažovali len polovicu zakrivenej časti hadice, sme ju akoby rozrezali na polovicu a sila od druhej polovice hadice je teda tiež vonkajšou silou. Správne tvrdenie je teda, že

$$F_{\perp} + T_{\frac{1}{2}} = \frac{\rho Q^2}{S}.$$

No a o sile od druhej časti hadice zatiaľ nič povedať nevieme.



Obrázok 3.7.2: *Sily pôsobiace na rozrezanú hadicu*

Stále sme však nevyužili druhú podmienku rovnováhy – nulovosť celkového momentu pôsobiacich síl. Pozrime sa teda na ňu. Za referenčný bod si zvoľme stred krivosti hadice. Vzhľadom na tento bod sú momenty síl od každého elementu kvapaliny v hadici nulové. Jedinými nenulovými momentmi sú moment od rovnobežnej zložky Patrikovej sily a moment sily od druhej polovice hadice. Matematicky zapísané

$$\frac{F_{\parallel}}{2} R + T_{\frac{1}{2}} R = 0.$$

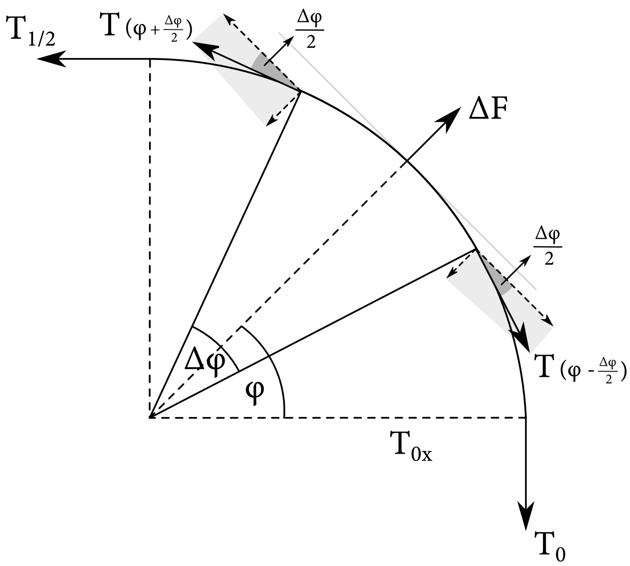
Odtiaľ

$$T_{\frac{1}{2}} = -\frac{F_{\parallel}}{2} = \frac{\rho Q^2}{S}.$$

a teda

$$F_{\perp} = \frac{\rho Q^2}{S} - T_{\frac{1}{2}} = 0.$$

Tento výsledok vyzerá dosť neintuitívne. Až tak, že by sme mohli začať pochybovať o tom, či je vôbec správny. Presvedčme sa o jeho správnosti teda ešte tak, že sa pozrieme na napäťové sily v hadici. Zadanie hovorí, že hadica je dokonale ohybná. To znamená, že napäťové sily v hadici majú v každom bode smer dotyčnice k hadici.



Obrázok 3.7.3: *Napäťové sily v dokonale ohybnej hadici*

Uvažujme oblúk hadice prislúchajúci stredovému uhlu $\Delta\varphi$. Na jeden koniec tohto kúsku hadice pôsobí ťahová sila $T\left(\varphi-\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$, na druhý koniec ťahová sila $T\left(\varphi+\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$ (viď fig. 3.7.3). Tieto sily neležia na jednej priamke v dôsledku zakrivenia kúska hadice. Nájdime zložky ťahových síl v smere kolmom na os uhla $\Delta\varphi$. Tieto zložky musia byť v rovnováhe.[14] Dostávame

$$T\left(\varphi-\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)=T\left(\varphi+\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right),$$

odkiaľ

$$T\left(\varphi-\frac{\Delta\varphi}{2}\right)=T\left(\varphi+\frac{\Delta\varphi}{2}\right).$$

Táto rovnica hovorí, že napäťová sila o kúsok ďalej je rovnaká ako napäťová sila o kúsok skôr. To znamená, že napäťová sila je všade rovnaká

$$T(\varphi)=\text{kont.}$$

My však vieme, že na začiatku polkružnice je napäťová sila daná silou, ktorou Patrik ťahá za hadicu

$$T(\varphi)\big|_{\varphi=0}\equiv T_0=\frac{F_{\parallel}}{2}=\frac{\rho Q^2}{S}.$$

No a keďže má byť napäťová sila pozdĺž celej hadice rovnaká, tak aj v strede oblúka musí byť

$$T_{\frac{1}{2}}\equiv T(\varphi)\big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}=T(\varphi)\big|_{\varphi=0}=\frac{\rho Q^2}{S}.$$

Toto je konzistentné s naším výsledkom.

[14]Samozrejme aj zložky v smere osi uhla $\Delta\varphi$ musia byť v rovnováhe. Tie sú však, ako vieme, kompenzované silou $\Delta F=f\Delta\varphi$ od kvapaliny v hadici, preto rovnováhu síl v tomto smere skúmať nemusíme.

Uvedomme si, že ak je hadica dokonale ohybná, tak nie je schopná hromadiť strižné napätia (t. j. napätia kolmé na hadicu). Inými slovami, ak by Patrik pôsobil silou v smere kolmom na hadicu, tak absencia strižných napätí by znamenala, že by neexistovala sila od zvyšku hadice, ktorá by bránila kúsku hadice v Patrikovej ruke v pohybe a hadica by nadobudla taký tvar, aby smer sily, ktorú vyvíja Patrik, bol dotyčnicou k hadici. Potom by už zvyšok hadice dokázal kompenzovať Patrikovo pôsobenie ťahovou silou v smere hadice.

Ak máte ešte stále problém tento výsledok pochopiť, predstavte si, že hadicu nedrží Patrik, ale že presne v miestach, kde začína a končí oblúk, sú uviazané špagáty, na ktorých hadica visí tesne nad zemou. Oblúk hadice má pochopiteľne rovnaký tvar, ako keď ju držal Patrik. Nič sa nezmenilo, len spôsob jej uchytenia. Teraz je však jednoduchšie nahliadnuť, že sila musí pôsobiť len v smere špagátu, pretože ten zjavne nie je schopný vyvinúť silu kolmú na jeho smer. No a ak špagát dokáže udržať hadicu v požadovanom tvare aj bez sily v kolmom smere, nie je dôvod, aby to nedokázal aj Patrik.

Reálna hadica kladúca odpor pri ohybe[15]

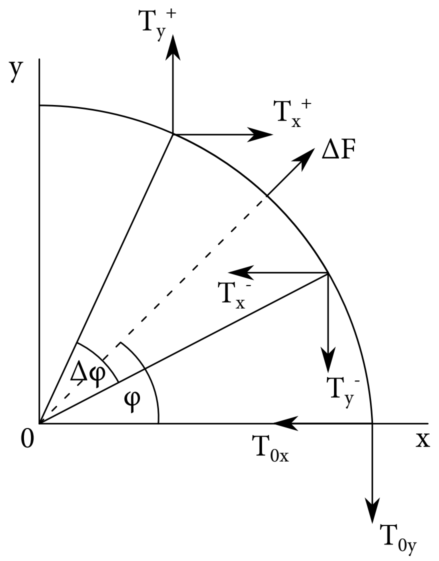
V prípade dokonale ohybnej hadice sme dostali zaujímavý výsledok, a to, že nie je potrebná sila v kolmom smere na to, aby sme boli schopní udržať hadicu v požadovanom tvare. Na mieste je otázka, či toto platí všeobecne, alebo je to pravda len pre uvedený špecifický prípad. Prvotné výpočty[16] naznačujú, že by to tak mohlo byť, no preskúmajme to ešte cez napäťové sily v hadici.

Požiadavka na dokonalú ohybnosť hadice sa do zadania dostala preto, aby sme neuvažovali silu potrebnú na ohyb samotnej hadice. Hneď na úvod povedzme, že toto nebudeme adresovať ani teraz. To, čo nás bude zaujímať, je, o koľko väčšou silou musí Patrik na hadicu pôsobiť v kolmom smere oproti situácii, keď ňou netečie voda. Alternatívne sa na to môžeme pozerať tak, že hadica má prirodzene tvar polkružnice v nenapätom stave, a teda nás zaujíma sila, ktorou musíme na ňu pôsobiť, aby sme ju v tomto tvare udržali, keď ňou začne prúdiť voda.

Táto situácia je už o čosi komplikovanejšia než predchádzajúca, preto k nej pristúpime systematickejšie. Zaveďme si kartézsku súradnicovú sústavu s počiatkom v strede krivosti hadice, s x-ovou osou v smere kolmom na rovnú časť hadice a y-ovou osou v smere rovnobežnom. Uhol φ budeme merať od kladnej x-ovej polosi v ACW smere a komponenty síl budú kladné v smere doprava a nahor.

Uvažujme opäť oblúk hadice prislúchajúci stredovému uhlu $\Delta\varphi$. Na jeho konce opäť pôsobia napäťové sily od zvyšku hadice. Tentokrát ale môžu mať všeobecný smer. Budeme si ich preto rozpisovať po kartézskych zložkách. Zároveň silu pôsobiacu na koniec prislúchajúci menšiemu uhlu φ[17] budeme označovať horným indexom „-“ a silu pôsobiacu na opačný koniec horným indexom „+“, pričom zrejme platí $T^-(\varphi) = -T^+(\varphi)$.[18]

[15] Doplňujúci materiál nad rámec úlohy. Čítať na vlastné riziko.
[16] analýza pre štvrťkružnicu
[17] t. j. ten, ktorý je bližšie ku kladnej x-ovej polosi
[18] Zákon akcie a reakcie. $T^-(\varphi)$ je sila, ktorou pôsobí predchádzajúci kúsok hadice na nasledujúci v mieste φ, $T^+(\varphi)$ je sila, ktorou pôsobí nasledujúci kúsok hadice na predchádzajúci v rovnakom mieste.



Obrázok 3.7.4: *Napäťové sily v reálnej hadici kladúcej odpor proti ohybu*

V rovnovážnom stave má byť výslednica síl pôsobiacich na každý kúsok hadice nulová. Zapíšme si teda rovnice rovnováhy síl po zložkách.

V x-ovom smere máme[19]

$$T_x^-\left(\varphi - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) + \Delta F_x(\varphi) + T_x^+\left(\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) = 0.$$

Silu od kvapaliny poznáme

$$\Delta F_x(\varphi) = \Delta F(\varphi)\cos\varphi = f\Delta\varphi\cos\varphi = \frac{\rho Q^2}{S}\cos\varphi\Delta\varphi.$$

Po dosadení do predchádzajúcej podmienky a miernom preusporiadaní dostávame

$$\frac{T_x^+\left(\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) - T_x^+\left(\varphi - \frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\Delta\varphi} = -\frac{\rho Q^2}{S}\cos\varphi.$$

Na ľavej strane rovnice spoznávame deriváciu $\frac{\mathrm{d}T_x^+(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}$. Získavame teda diferenciálnu rovnicu pre zložku $T_x^+(\varphi)$, ktorú však vieme vyriešiť jednoduchým integrovaním. Jej všeobecným riešením je

$$T_x^+(\varphi) = -\frac{\rho Q^2}{S}\sin\varphi + C_x.$$

Konštantu C_x určíme z okrajových podmienok. Ak Patrik pôsobí na hadicu na začiatku polkružnice silou veľkosti $T_{0x} \geq 0$ vo vodorovnom smere, tak

$$T_x^-(\varphi)\big|_{\varphi=0} = -T_{0x} = -T_x^+(\varphi)\big|_{\varphi=0},$$

[19] Všetky sily sčítavame, lebo v súlade s našou konvenciou sú sily, ktoré majú smer doľava, záporné.

čiže

$$T_x^+(\varphi)\big|_{\varphi=0} = T_{0x}.$$

Zároveň vieme z našich predchádzajúcich úvah pre štvrťkružnicu, rešpektujúc našu znamienkovú konvenciu, že

$$T_x^-(\varphi)\big|_{\varphi=0} + T_x^+(\varphi)\big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -\frac{\rho Q^2}{S}.$$

Odtiaľ

$$T_x^+(\varphi)\big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -\frac{\rho Q^2}{S} + T_{0x}.$$

Z uvedených okrajových podmienok dostávame, že

$$C_x = T_{0x}.$$

Analogicky v y-ovom smere máme podmienku pre rovnováhu síl

$$T_y^-\left(\varphi - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) + \Delta F_y(\varphi) + T_y^+\left(\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) = 0.$$

Tú vieme previesť na tvar

$$\frac{T_y^+\left(\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) - T_y^+\left(\varphi - \frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\Delta\varphi} = -\frac{\rho Q^2}{S}\sin\varphi.$$

Na ľavej strane opäť spoznávame deriváciu $\frac{\mathrm{d}T_y^+(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}$, čiže získavame jednoduchú diferenciálnu rovnicu pre $T_y^+(\varphi)$. Jej všeobecné riešenie získané prostým integrovaním je

$$T_y^+(\varphi) = \frac{\rho Q^2}{S}\cos\varphi + C_y.$$

Konštantu C_y určíme opäť z okrajových podmienok. Vieme, že Patrik pôsobí na hadicu v y-ovom smere silou veľkosti $T_{0y} = \frac{\rho Q^2}{S}$, teda

$$T_y^-(\varphi)\big|_{\varphi=0} = -\frac{\rho Q^2}{S} = -T_y^+(\varphi)\big|_{\varphi=0}.$$

Zároveň na základe úvah o rozrezaní zo symetrie vyplýva, že

$$T_y^+(\varphi)\big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = T_y^-(\varphi)\big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Zisťujeme, že integračná konštanta

$$C_y = 0.$$

Zistili sme, ako sa mení napäťová sila v hadici, tak si to zhrňme:

$$T_x^-(\varphi) = -T_{0x} + \frac{\rho Q^2}{S}\sin\varphi \quad T_x^+(\varphi) = T_{0x} - \frac{\rho Q^2}{S}\sin\varphi$$

$$T_y^-(\varphi) = -\frac{\rho Q^2}{S}\cos\varphi \qquad T_y^+(\varphi) = \frac{\rho Q^2}{S}\cos\varphi$$

Nepodarilo sa nám však určiť hľadanú silu T_{0x}. Na to potrebujeme ešte použiť podmienku rovnováhy momentov síl. Poďme na to!

Momenty budeme počítať vzhľadom na počiatok súradnicovej sústavy. Polohový vektor sily prislúchajúcej uhlu φ je $\vec{r}(\varphi) = (R\cos\varphi; \quad R\sin\varphi)$. Moment ľubovoľnej sily $\vec{F}$ vypočítame ako $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. V skutočnosti nás bude zaujímať iba jeho z-ová zložka $M_z = xF_y - yF_x$. Pre uvažovaný kúsok hadice dostávame

$$-R\cos\left(\varphi - \frac{\Delta\varphi}{2}\right)\frac{\rho Q^2}{S}\cos\left(\varphi - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) - R\sin\left(\varphi - \frac{\Delta\varphi}{2}\right)\left[-T_{0x} + \frac{\rho Q^2}{S}\sin\left(\varphi - \frac{\Delta\varphi}{2}\right)\right] +$$

$$+R\cos\left(\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)\frac{\rho Q^2}{S}\cos\left(\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) - R\sin\left(\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)\left[+T_{0x} - \frac{\rho Q^2}{S}\sin\left(\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)\right] = 0.$$

Po pár úpravách konečne zisťujeme, že

$$T_{0x} = 0.$$

Tým sme si potvrdili, že ani v prípade reálnej hadice nemusí Patrik vynakladať dodatočnú silu v kolmom smere na rovnú časť hadice v súvislosti s prúdením vody v hadici.

Poznajúc silu, ktorou Patrik pôsobí na hadicu, vráťme sa ešte na chvíľu k priebehu napäťových síl v hadici. Môžeme si všimnúť, že hoci zložky napäťových síl $T_x(\varphi)$ a $T_y(\varphi)$ závisia na uhle, veľkosť napäťovej sily vypočítaná podľa Pytagorovej vety $T = \frac{\rho Q^2}{S}$ na uhle nezávisí, čiže je všade rovnaká. Zároveň skalárny súčin $\vec{r}(\varphi) \cdot \vec{T}(\varphi) = 0$, čo znamená, že napäťová sila je kolmá na polomer, a teda má smer dotyčnice k hadici. Takže hoci sme pripustili, že by napäťová sila mohla mať ľubovoľný smer, z rovníc sme dostali, že má smer dotyčnice k hadici, a teda je to obyčajná ťahová sila. To ale dáva zmysel. Keďže voda pôsobí na hadicu v každom mieste rovnako veľkou silou, nie je ani najmenší dôvod, aby v hadici vznikali dodatočné strižné napätia v dôsledku prúdenia vody v jej vnútri.