Riešenia 2. kola letnej časti

2.1 O hymne

vzorák **Patrik**, opravoval **Patrik**

Na to, aby sme porozumeli, prečo sa v zime neblýska, potrebujeme porozumieť tomu, ako vznikajú búrkové mračná a blesky. Všetko sa začína už pri povrchu Zeme. Naša planéta absorbuje slnečné lúče a tým zohrieva vzduch nad ňou. Tento zohriaty vzduch začne stúpať a zoberie si so sebou aj vodnú paru. Ako teplý vzduch stúpa, ochladzuje sa až do momentu, kedy skondenzuje vodná para a uvolní skupenské teplo. Toto uvoľnené teplo ešte viac zohreje stúpajúci vzduch, ktorý vytvorí nízko položený mrak Cumulus (malý, biely, fluffy mrak). Horúci vzduch v tomto mraku je menej hustý ako okolitý vzduch, takže začne rýchlo stúpať. Zatiaľ čo Cumulus stúpa a rastie, vlhký vzduch v ňom je zrýchľovaný smerom nahor, až kým príde do momentu, kedy je studenší ako okolitý vzduch. Ťažké kvapky vody a ľadové čiastočky sa horizontálne roztiahnu čo spôsobí, že mrak stmavne. Takto vznikne mrak menom Cumulonimbus. Počas tohoto procesu sa však zrážajú ľadové čiastočky, čo spôsobí, že sa v mraku začne separovať na hornej a dolnej strane mraku kladný a záporný náboj. Ak sa vytvorí dostatočne veľký náboj, preskočí blesk. Blesk môže preskočiť či už v mraku medzi hornou a dolnou časťou, medzi mrakom a zemou alebo mrakom a mrakom. Keď už vieme, ako blesky vznikajú, hravo vidíme odpoveď na našu otázku. Najdôležitejší faktor je, že v zime sa Zemský povrch nezohreje v takej miere ako v lete, takže vzduch nezačne tak ľahko stúpať. Druhý faktor je, že v zime je vzduch menej vlhký, čo znamená menej skupenského tepla uvoľneného pri stúpaní a menej ľadových čiastočiek, ktoré by separovali náboj.

2.2 Hadice a rebríky

vzorák **Terka** a **Jaro**, opravovala **Terka**

Na začiatok je dobré prečítať si zadanie pozorne. Všimneme si, že jediný rozdiel medzi prvým a druhým pokusom je zdvihnutie ústia hadice do výšky h, a teda žiadna zmena v mechanizme vháňania vody do hadice. Voda v hadici teda netečie rýchlejšie,[1] či pod vyšším tlakom. Znamená to teda, že voda, ktorá vstupuje do hadice, má rovnakú energiu pri oboch pokusoch. Na to, aby dostrekla do výšky $2h$, potrebuje kúsok vody s hmotnosťou m prekonať potenciálnu energiu gravitačného poľa $mg2h$. No bohužiaľ, ako sme videli pri prvom pokuse, voda je schopná prekonať len výšku $h' < 2h$, a teda voda v hadici má energiu $mgh' < mg2h$. Na začiatku sme povedali, že energia vody v hadici sa medzi pokusmi nemení, z čoho vyplýva, že po zdvihnutí hadice do výšky h ostane množstvo energie potrebné na dostreknutie do výšky $2h$ rovnaké ako pri prvom pokuse, a teda voda ani pri druhom pokuse na okná FKS nedostrekne.

Ďalej sa nás zadanie pýta, či by to predsa len za nejakých okolností nebolo možné. Ale naša argumentácia cez zachovanie energie vyzerá byť nepriestrelná, či? Ak chceme používať zákon zachovania energie, musíme uvažovať ideálnu kvapalinu, pretože reálna kvapalina má vnútorné trenie. No a voda je všetko, len nie ideálna kvapalina. Na prvý pohľad sa nám zdá, že nám to hrá do kariet. Ak uvážime vnútorné trenie, tak voda vytekajúca z hadice má menšiu energiu než voda do nej vstupujúca. Lenže to nie je dobrá správa. Už aj v prvom prípade je výtoková rýchlosť vody daná tým, koľko energie voda pri pretekaní hadicou stratí. No a ak je toto množstvo ďaleko väčšie než nárast potenciálnej energie pri zdvihnutí hadice o jeden meter, tak sa

[1] skôr naopak

úsťová rýchlosť veľmi nezmení. V takom prípade by sme boli schopní dostreknúť na okná. No a čo teda musí byť splnené, aby takáto situácia mohla nastať?

- Voda do hadice vteká pod vysokým tlakom, t. j. má veľkú energiu.
- Hadica je dostatočne dlhá, aby v nej došlo k potrebnému poklesu tlaku, t. j. strate energie.
- Zdvihneme dostatočne dlhý úsek hadice/celú hadicu, nie len jej koniec.[2] Len za súčasného splnenia všetkých troch podmienok máme šancu dostreknúť na okná FKS miestnosti.

2.3 Top nábojová úloha

vzorák **MisQo** a **Adam**, opravovali **MisQo** a **Adam**

Máme veľmi presne popísanú situáciu tesne predtým, ako náboj narazí do kyvadla. Chceli by sme zistiť, ako bude situácia vyzerať po zrážke. Najprv sa skúsme zamyslieť, čo musí platiť. Samozrejme, musí platiť zákon zachovania hybnosti[3] a zákon zachovania energie[4].

Hybnosť

Hybnosť je kúsok jednoduchšia. Pred zrážkou je v pohybe iba náboj, teda hybnosť celej sústavy je $p = mv_n$, v_n sme označili rýchlosť náboja. Po náraze bola v pohybe zlatá guľa spolu s roztopeným nábojom. Teda ide o nepružnú zrážku. Zo zákona zachovania hybnosti teda dostávame $p = mv_n = (m + M)v_k$, v_k sme označili rýchlosť kyvadla bezprostredne po zrážke.

Energia

Počas nárazu náboja do gule dochádza k premene foriem energie. Pred zrážkou má sústava len kinetickú energiu náboja $E = \frac{mv_n^2}{2}$. Nulovú hladinu potenciálnej energie sme zvolili tak, aby potenciálna energia náboja aj gule bola nulová v momente zrážky. Po zrážke sa hýbe kyvadlo spolu s roztopeným nábojom, a teda kinetická energia sústavy je $\frac{(m+M)v_k^2}{2}$. Potenciálna energia je síce tesne po zrážke nezmenená, ale náboj, a spolu s ním aj zlatá guľa, sa zohriali na t_t – teplotu topenia sa olova[5]. Tomu zodpovedá zmena tepelná energia o $c_o m(t_t - t_1) + c_z M(t_t - t_2)$, kde c_o, c_z je merná tepelná kapacita olova, resp. zlata. Ďalšia tepelná energia zodpovedá roztopeniu náboja, a to ml_o, kde l_o merné skupenské teplo topenia olova. V súčte je energia sústavy po zrážke a roztopení $E = \frac{(m+M)v_k^2}{2} + c_o m(t_t - t_1) + c_z M(t_t - t_2) + ml_o$.

Výpočet

Dostávame sústavu rovníc:

---

[2] Ak by sme zdvihli len koniec, tak relevantné sú len straty energie na tomto zdvihnutom úseku, a tie sú určite menšie, než zmena potenciálnej energie.

[3] https://sk.wikipedia.org/wiki/Z%C3%A1kon_zachovania_hybnosti

[4] https://sk.wikipedia.org/wiki/Z%C3%A1kon_zachovania_energie

[5] Je mieste skontrolovať, či je teplota topenia sa zlata vyšia ako teplota topenia sa olova, a teda, či situácia popísaná v zadaní je fyzikálna

$$mv_n = (m+M)v_k$$
$$\frac{mv_n^2}{2} = \frac{(m+M)v_k^2}{2} + c_o m(t_t - t_1) + c_z M(t_t - t_2) + ml_o.$$

Jediné neznáme sú v_n a v_k. Vyriešime teda dve rovnice o dvoch neznámych. Z prvej vyplýva

$$v_k = \frac{mv_n}{m+M}$$

Dosadíme do druhej, dostávame:

$$\frac{mv_n^2}{2} = \frac{(m+M)(\frac{mv_n}{m+M})^2}{2} + c_o m(t_t - t_1) + c_z M(t_t - t_2) + ml_o$$
$$mv_n^2 - \frac{m^2}{m+M}v_n^2 = 2c_o m(t_t - t_1) + 2c_z M(t_t - t_2) + 2ml_o$$
$$v_n^2(m - \frac{m^2}{m+M}) = 2c_o m(t_t - t_1) + 2c_z M(t_t - t_2) + 2ml_o$$
$$v_n^2 = \frac{2c_o m(t_t - t_1) + 2c_z M(t_t - t_2) + 2ml_o}{(m - \frac{m^2}{m+M})}$$
$$v_n = \sqrt{\frac{2c_o m(t_t - t_1) + 2c_z M(t_t - t_2) + 2ml_o}{(m - \frac{m^2}{m+M})}}.$$

Potom rýchlosť kyvadla bude:

$$v_k = \frac{mv_n}{m+M}$$

Dosadenie

Nájdeme hodnoty, ktoré neboli v zadaní: $t_t = 327\ °\mathrm{C}$, $c_o = 129\ \mathrm{J/(kg\,°C)}$, $l_o = 22\,900\ \mathrm{J/kg}$, $c_z = 129\ \mathrm{J/(kg\,°C)}$

dosadíme:

$$v_n \doteq 726\ \mathrm{m/s}$$

Rýchlosť kyvadla potom bude:

$$v_k = \frac{mv_n}{m+M} \doteq 145\ \mathrm{m/s}$$

Do akej výšky sa vychýli kyvadlo?

Teraz budeme sledovať situáciu po zrážke a roztopení náboja. Odpor prostredia nebudeme uvažovať, teda mechanická energia kyvadla sa bude stále zachovávať. V každom momente bude mať kyvadlo kinetickú energiu $\frac{(m+M)v^2}{2}$ a potenciálnu energiu $(m+M)g\Delta h$ voči svojej pôvodnej polohe.

Výška Δh bude najvyššia v čase, keď rýchlosť (a teda aj kinetická energia) bude nulová. Do rovnosti dáme energiu sústavy po zrážke, a v momente, v ktorom je výška najväčšia.

$$\frac{(m+M)v_k^2}{2} = (m+M)g\Delta h$$

$$\Delta h = \frac{(m+M)v_k^2}{2(m+M)g}$$

$$\Delta h \doteq 1073\ \mathrm{m}$$

Lanko má však dĺžku iba 2 m, takže kyvadlo vystúpa až do maximálnej výšky a to 4 m.

2.4 Odpor prostredia nezanedbajte!

2.5 Trochu iná kontrakcia dĺžky

vzorák **Tomáš**, opravoval **Tomáš**

Kubkov obľúbený vlak má presne N vagónov a jeden rušeň, pričom každý člen vlakovej súpravy má hmotnosť m. Hmotnosť celej súpravy je teda $(N+1)m$. Brzdenie má na strosti iba rušeň trením kolies o koľajnice, preto vo vzorci pre treciu silu F_t vystupuje v úlohe kolmej prítlačnej sily tiažová sila pôsobiaca na rušeň

$$F_t = mgf.$$

Na chvíľu sa zamyslime nad tým, prečo sme napísali rovnosť. Tú môžeme písať pri šmykovom trení, ale vlak predsa nebrzdí tak, že kolesá má zablokované a tie sa šmýkajú po koľajniciach. Kolesá sa pri brzdení točia a v bode dotyku s koľajnicami sa povrch kolesa a koľajnice voči sebe nepohybujú. Jedná sa teda o statické trenie medzi kolesom a koľajnicou. A pre statické trenie platí $F_t \leq mgf$. Rovnosť nastane, ak vlak brzdí na hrane fyzikálnych zákonov tak, že aj najmenšie navýšenie brzdnej sily by znamenalo, že kolesá sa zablokujú.

Keďže podľa zadania žiadna pružina nekmitá, každý člen súpravy sa pohybuje rovnomerne spomaleným pohybom s rovnakým spomalením

$$a = \frac{F_t}{m_{\text{súprava}}} = \frac{gf}{N+1}. \tag{2.5.1}$$

Očíslujme si pružiny od 1 po N tak, že pružina N je pri rušni, a rovnako aj vagóny – vagón 1 je na konci a vagón N je pri rušni. Každá pružina je stlačená, a preto vagóny od seba odtláča. Na vagón 1 pôsobí pružina 1 silou

$$F_1 = ma = \frac{mgf}{N+1}, \tag{2.5.2}$$

kde sme za a dosadili z rovnice 2.5.1. Na vagón 2 tiež pôsobí pružina 1, ale opačným smerom, preto má záporné znamienko. Okrem toho na vagón 2 pôsobí aj pružina 2 silou F_2. Súčet síl pôsobiacich na vagón 2 je teda

$$F_2 - F_1 = ma \qquad \rightarrow \qquad F_2 = ma + F_1 = 2\frac{mgf}{N+1},$$

pričom sme opäť dosadili a z rovnice 2.5.1 a aj F_1 z rovnice 2.5.2. Niečo sa nám tu začína črtať, a to konkrétne, že i-tá pružina odtláča vagóny silou

$$F_i = i\frac{mgf}{N+1}.$$

Naozaj, ak by sme to spočítali aj pre vagón 3 a ďalšie, vyšlo by nám to presne tak.

i-ta pružina pôsobí silou F_i, pretože je stlačená o $x_i = \frac{F_i}{k}$. Stačí nám teda sčítať všetky vzdialenosti x_i, o ktoré sú pružiny stlačené. To je jednoduché, pretože x_i je aritmetická postupnosť. Celková kontrakcia dĺžky vlaku teda je

$$x = \sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} i\frac{mgf}{k(N+1)} = \frac{mgfN}{2k}. \tag{2.5.3}$$

Aby sme číselne vyjadrili kontrakciu dĺžky vaku, ak by sme pružiny nahradili tyčami, musíme vypočítať, aká je tuhosť tyče k. Na to využijeme materiálovú konštantu – Youngov modul pružnosti E. Ak sa tyč dĺžky L skráti o y, tak v nej vznikne napätie

$$\sigma = \frac{y}{L}E.$$

Toto napätie je vlastne tlak, ktorým musíme na tyč pôsobiť, aby sa skrátila o y. Preto ak má tyč plochu prierezu S a tlačíme na ňu silou F, tak

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{y}{L}E \qquad \rightarrow \qquad F = \frac{ES}{L}y.$$

Táto rovnica je rovnaká ako rovnica pre stlačenie pružiny $F = ky$. Tuhosť tyče je teda $k = \frac{ES}{L}$. Pozorný čitateľ si určite všimol, že v prvej časti úlohy sme mali model vlaku, medzi ktorého vagónmi bola len jedna pružina s tuhosťou k. Na skutočných vlakoch sú však dve! Tuhosť paralelne zapojených pružín sa sčítava[6], a teda do rovnice 2.5.3 dosadíme tuhosť $k = 2\frac{ES}{L}$, čím dostaneme kontrakciu dĺžky

$$x = \frac{mgfNL}{4ES}.$$

Už len stačí vyhľadať v tabuľkách alebo na internete konštanty a odhadnúť zvyšné veličiny. Tyče namiesto pružín medzi vagónmi nech sú z ocele, ktorej Youngov modul pružnosti je $E = 220$ GPa, a nech sú dlhé $L = 1$ m a majú plochu prierezu $S = 300\ \mathrm{cm}^2$[7]. Koeficient statického trenia ocele na oceli je $f = 0{,}15$ a nech to je taký poriadny nákladný vlak s $N = 20$ vagónmi plnými uhlia, t.j. $m = 100$ t. S týmito hodnotami je kontrakcia dĺžky len asi $x \doteq 0{,}11$ mm. To je dosť málo, ale stále viac ako relativistická kontrakcia dĺžky vlaku.

Poznámka o ustálenom stave pružín

Ak by v úlohe nebolo dané, že všetky vagóny spomaľujú s rovnakým spomalením, mali by sme problém. Iba ťažisko celej súpravy by spomaľovalo so spomalením $a = \frac{F_t}{m_{\text{súpravy}}}$. Museli by sme si napísať $N+1$ pohybových rovníc, jednu pre každú časť vlakovej súpravy. Konkrétne pre tri posledné vagóny, a potom rušeň by sme

[6] Dôkaz prenechávame pozornému čitateľovi.
[7] To je polomer 10 cm.

mali

$$F_1 = ma_1$$
$$F_2 - F_1 = ma_2$$
$$F_3 - F_2 = ma_3$$
$$\vdots$$
$$F_t - F_N = ma_{\mathrm{rue}}.$$

Hmotnosti vagónov poznáme, treciu silu medzi kolesami rušňa a koľajnicami tiež poznáme, zostáva nám teda N neznámych síl, ktorými pôsobia pružiny a $N+1$ neznámych zrýchlení vagónov a rušňa. Máme však viac neznámych ako rovníc, čo sa zdá ako problém, ale nie je. Stačí si uvedomiť, že sily, ktorými pôsobia pružiny vieme prepočítať na ich skrátenia či predĺženia oproti ich pokojovej dĺžke. A zo skrátenia a predĺženia pružín zase vieme vypočítať, o akú vzdialenosť sú vagóny vychýlené zo svojej pokojovej polohy, t.j. keď vlak nebrzdí. Tým je problém vyriešený, pretože ak máme rovnicu, v ktorej vystupuje výchylka a zrýchlenie niečoho, vieme zrátať, ako sa to pohybuje. Napríklad pre jednoduché závažie na pružinke máme známu rovnicu $a = -\frac{k}{m}x$ a riešením tejto rovnice je, že poloha x sa v čase mení ako kosínus. Skutočný problém však je, že pri vlaku by sme takto dostali $N+1$ takýchto rovníc, pričom v rovnici pre zrýchlenie i-teho vagóna by vystupovali výchylky aj iných vagónov, ako len i-teho. A to by som veru počítať nechcel.

2.6 Fyzik vo fitku

vzorák **Jaro**, opravoval **Jaro**

Začnime tým, že sa pozrieme na to, aké sily pôsobia na valec položený na bežiaci pás. V horizontálnom smere je to trecia sila medzi valcom a pásom a vo vertikálnom smere tiažová sila a normálová sila od pásu.

Keďže sa vo vertikálnom smere valec nepohybuje, tiažová a normálová sila musia byť v rovnováhe

$$N = mg.$$

V horizontálnom smere je situácia o trochu zaujímavejšia, no nie oveľa. Podľa druhého Newtonovho zákona môžeme jednoducho písať

$$ma = F_t,$$

odkiaľ

$$a = \frac{F_t}{m}.$$

Poďme sa pozrieť na rotačný pohyb valca. Tu sa musíme rozhodnúť, vzhľadom na ktorý bod budeme písať pohybové rovnice. Vo všeobecnosti máme dve možnosti: pevný bod alebo ťažisko. Vzhľadom na to, že valec sa bude zrejme pohybovať, pevný bod nie je rozumná voľba, nakoľko by sa nám moment zotrvačnosti valca vzhľadom na tento bod menil. Zvoľme teda za referenčný bod ťažisko.

Keďže moment zotrvačnosti pri tejto voľbe nie je závislý na čase, možno písať pohybovú rovnicu rotačného pohybu v tvare $J\varepsilon = M$, kde $J = \frac{1}{2}mr^2$ je moment zotrvačnosti valca vzhľadom na jeho ťažisko, ε je jeho uhlové zrýchlenie a M je výsledný moment pôsobiacich síl. Tiažová a normálová sila majú zrejme nulový moment, preto

$$\frac{1}{2}mr^2\varepsilon = F_t r.$$

Odtiaľ

$$\varepsilon = \frac{2F_t}{mr}.$$

Všetky doteraz napísané rovnice boli univerzálne platné. Poďme sa teraz pozrieť na jednotlivé prípady.

Začnime pásom pohybujúcim sa rovnomerne rýchlosťou u. V takom prípade začne valec v momente kontaktu s pásom prešmykovať a popritom sa roztáčať.

Prešmykovanie znamená, že trecia sila je rovná

$$F_t = fN = fmg.$$

Zrýchlenie valca je teda

$$a = fg$$

a uhlové zrýchlenie

$$\varepsilon = \frac{2fg}{r}.$$

Vidíme, že valec zrýchľuje a roztáča sa rovnomerne, preto jeho rýchlosť v čase rastie ako

$$v(t) = fgt$$

a uhlová rýchlosť ako

$$\omega(t) = \frac{2fg}{r}t.$$

Prešmykovanie ustane v momente, keď rýchlosť bodu na povrchu valca v kontakte s pásom vyjadrená v laboratórnej sústave je rovná rýchlosti pásu. Táto rýchlosť je vektorovým súčtom translačnej rýchlosti valca v a obvodovej rýchlosti bodu na povrchu ωr. Keďže v najnižšom bode majú obe rovnaký smer, stačí písať obyčajný súčet a dostávame

$$v + \omega r \stackrel{!}{=} u.$$

Nech prešmykovanie ustane v čase τ. V takom prípade

$$u = fg\tau + \frac{2fg}{r}\tau r = 3fg\tau.$$

Odtiaľ

$$\tau = \frac{u}{3fg}$$

a ustálená rýchlosť valca je potom

$$v = fg\tau = \frac{u}{3}.$$

Uvažujme teraz prípad zrýchľujúceho pásu so zrýchlením a_p. Jeho rýchlosť teda rastie ako

$$u(t) = a_p t.$$

Ak pás zrýchľuje dostatočne rýchlo, v každom momente má väčšiu rýchlosť než bod na povrchu valca. V takom prípade valec po páse prešmykuje, a teda túto situáciu popisujú presne rovnaké rovnice ako v prípade už predom rozbehnutého pásu. To dáva celkom zmysel, nakoľko predom rozbehnutý pás je len limitný prípad, keď a_p ide do nekonečna. Aj v tomto prípade sa teda valec ustáli na rýchlosti

$$v = \frac{u}{3}.$$

Ale čo keď sa pás rozbieha pomaly? V takom prípade sa treba vrátiť k pôvodným rovniciam so všeobecnou trecou silou F_t, pre ktorú zrejme platí $F_t \leq fmg$.

Ak sa pás rozbieha pomaly, valec sa stíha roztáčať, takže nedochádza k prešmykovaniu. V takom prípade v každom momente platí, že bod na povrchu valca v kontakte s pásom má rovnakú rýchlosť ako pás. Matematicky zapísané

$$v(t) + \omega(t)r \stackrel{!}{=} u(t).$$

Všetky rýchlosti poznáme a po ich dosadení dostávame

$$\frac{F_t}{m}t + \frac{2F_t}{mr}tr = a_p t.$$

Odtiaľ môžeme vyjadriť neznámu treciu silu

$$F_t = \frac{a_p m}{3}$$

a dosadiť ju do výrazu pre zrýchlenie valca.[8] Dostávame

$$a = \frac{a_p}{3}.$$

Vieme, že rýchlosť pásu sa ustáli na rýchlosti u. Udeje sa tak za čas

$$T = \frac{u}{a_p}.$$

Ustálená rýchlosť valca je preto

$$v = aT = \frac{u}{3},$$

čo je opäť identický výsledok.

Vo všetkých uvažovaných prípadoch sa valec ustáli na rýchlosti $v = \frac{u}{3}$.

2.7 Intenzívny potenciál

vzorák **Majo**, opravoval **Majo**

Intenzita a potenciál elektrického poľa. Jedna veličina vektorová, druhá skalárna. Každá z nich sa sčítava trošku ináč, čo má na svedomí, že sa k nim budeme musieť správať rôzne.

[8] V tomto momente vieme povedať, čo je dostatočne rýchle a čo pomalé robiehanie pásu. Ak $\frac{a_p}{3} > fg$, valec bude prešmykovať, v opačnom prípade nebude. Je to preto, lebo trecia sila nevie valec urýchľovať s väčším zrýchlením než fg.

Mözgáč má svoje náboje v trojrozmernom priestore. To by mohlo vytvárať dojem, že musíme pracovať v troch rozmeroch. Ľahko to ale zjednodušíme do dvojrozmerného prípadu. Celá situácia je totiž rotačne symetrická vzhľadom na rotáciu okolo priamky, ktorá spája oba náboje. Stačí preto vyriešiť úlohu iba v dvoch rozmeroch, aj to len v jednej polrovine. Výsledná množina potom vznikne rotáciou okolo tejto osi.

Vrhnime sa rovno do toho. V celej úlohe budeme predpokladať, že $Q_1 > Q_2$. Druhý z prípadov by sme riešili podobne.

Časť a)

Pre lepší popis situácie si zaveďme súradnicovú sústavu. Zaveďme ju tak, aby bod $[0, 0]$ bol v mieste, kde sa nachádza náboj s veľkosťou Q_1. Os x nech je totožná s priamkou, na ktorej ležia náboje, pričom nech je náboj s veľkosťou $-Q_2$ v bode $[d, 0]$. Úlohu riešime len v jednej polrovine, tak nech je to tá s $y \geq 0$.

Intenzita elektrického poľa je vektor. Ak sa rozprávame o elektrickom poli kladného náboja (napr. Q_1), tak tento vektor smeruje od náboja. Ak od záporného náboja (napr. $-Q_2$), tak smerom k náboju. V ľubovoľnom bode $[x, y]$ v našej úlohe získame intenzitu elektrického poľa sčítaním vektorov intenzít od nábojov Q_1 a $-Q_2$.

Z tohto vidíme, že body na priamke spájajúcej oba náboje budú mať intenzitu rovnobežnú s priamkou spájajúcou oba náboje. To preto, lebo na tejto priamke je intenzita od každého z nábojov v smere tejto priamky, čo platí, aj keď intenzity sčítame. Takže priamka $y = 0$ obsahuje body, ktoré hľadáme. Vyhoďme z nej ale body $[0, 0]$ a $[d, 0]$, v ktorých sú jednotlivé náboje. V nich bude niektorá intenzita nekonečná a vektoru s nekonečnou veľkosťou (zvyčajne) smer neurčujeme. Vyhoďme aj bod $\left[\frac{Q_1+\sqrt{Q_1Q_2}}{Q_1-Q_2}d, 0\right]$, v ktorom je intenzita nulová, kedy tiež (zvyčajne) neurčujeme smer vektora.

Ako to bude s ostatnými bodmi? Tu už sa nevyhneme výpočtom. Najprv si ujasnime, čo znamená, že intenzita bude v smere priamky spájajúcej náboje. V danom bode $[x, y]$ zrátame intenzity od jednotlivých nábojov, vektorovo sčítame a výsledný vektor musí mať iba x-ovú zložku. Jeho y-ová zložka musí byť nulová. Chytíme sa podmienky, že zložky intenzity v y-ovom smere sa musia vynulovať.

Počítajme preto intenzity v bode $[x, y]$. Intenzita $\vec{E_1}$ od náboja Q_1 vzdialeného r_1 a intenzita $\vec{E_2}$ od náboja vzdialeného r_2 majú veľkosti [9]:

$$E_1 = \frac{Q_1}{r_1^2}$$

$$E_2 = -\frac{Q_2}{r_2^2}$$

Nás hlavne zaujímajú zložky v y-ovom smere, a teda prenásobíme tieto intenzity sínusom vhodného uhla - uhla ktorý zviera vektor inzenzity s priamkou spájajúcou náboje. Tieto sínusy vieme vypočítať. Sú takéto[10]:

$$\sin\phi_1 = \frac{y}{r_1}$$

$$\sin\phi_2 = \frac{y}{r_2}$$

[9] Konštanta $\frac{1}{4\pi\varepsilon}$ je nepodstatná, a tak pracujme v takých jednotkách, že táto konštanta bude rovná 1 (vo vhodných jednotkách).

[10] Na tomto mieste by sme mohli byť opatrnejší a povedať, ktorý presne uhol myslíme. Ašak potrebujeme vedieť len sínus tohto uhla, takže je to jedno.

Zložky intenzít v smere y sú preto:

$$E_{1_y} = E_1 \sin \phi_1 = \frac{Q_1 y}{(r_1)^3}$$

$$E_{2_y} = E_2 \sin \phi_2 = -\frac{Q_2 y}{(r_2)^3}$$

A tieto dve krásky majú spolu dávať 0. V konečnom dôsledku by sme v tomto chceli spoznať nejaký geometrický útvar. Vo viere, že to pôjde, sa pustime do úprav:

$$E_{1_y} + E_{2_y} = 0$$

$$\frac{Q_1 y}{(r_1)^3} = \frac{Q_2 y}{(r_2)^3}$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{(r_1)^3}{(r_2)^3}$$

$$\left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^{1/3} = \frac{r_1}{r_2}$$

Ľubovoľný bod hľadanej množiny preto bude mať vlastnosť, že pomer jeho vzdialeností od jednotlivých nábojov je zrovna $\left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^{1/3}$, čo je nejaká konštanta, ktorú označme k. Ľudia znalí pokročilejšej geometrie v tomto hneď vedia spoznať Apolóniovu kružnicu [11]. Hľadaná množina tak bude kružnica nad priemerom určeným tými dvomi bodmi priamky spájajúcej náboje, pre ktoré platí $k = \frac{r_1}{r_2}$. Ľudia Apolóniovej kružnice neznalí vedia dôjsť k tomuto výsledku masírovaním vzťahu $k = \frac{r_1}{r_2}$ až na tvar, z ktorého vidno, že ide o popísanú kružnicu [12].

Pre úplnosť už len dodáme, že v našom prípade, keď $k > 1$[13] (pretože $Q_1 > Q_2$), tak stred hľadanej kružnice leží v bode $\left[\frac{k^2 d}{k^2-1}, 0\right]$ a táto kružnica má polomer $\frac{kd}{k^2-1}$.

Spolu tak hľadaná množina v rovine obsahuje priamku $y = 0$ bez troch bodov, $[0,0]$, $[d,0]$ a $\left[\frac{Q_1+\sqrt{Q_1 Q_2}}{Q_1-Q_2} d, 0\right]$, a Apolóniovu kružnicu popísanú v predošlom odseku. V priestore tak vyhovuje priamka[14] $y = 0; z = 0$ bez troch bodov a guľa, ktorú dostaneme rotáciou Apolóniovej kružnice podľa priamky $y = 0; z = 0$.

Časť b)

V tejto časti už máme len skalárnu veličinu, takže sa to bude o čosi krajšie sčítavať. Poďme rovno na to. Potenciály V_1 a V_2 od nábojov Q_1 a Q_2 sú[15]:

$$V_1 = \frac{Q_1}{r_1}$$

$$V_2 = -\frac{Q_2}{r_2}$$

[11] https://en.wikipedia.org/wiki/Circles_of_Apollonius

[12] Možností je viacero: od vhodného použitia Kosínusovej vety až po spôsoby uvedené v už spomínanom linku na Wikipédiu.

[13] Ak $k < 1$, tak $\frac{1}{k} > 1$ a vieme spraviť to isté, ale s tým, že $\frac{1}{k} = \frac{r_2}{r_1}$.

[14] V trojrozmernom priestore vieme priamku popísať napríklad aj dvomi rovnicami.

[15] Opäť raz pracujme s takými jednotkami, že $\frac{1}{4\pi\varepsilon} = 1$.

Hľadáme body, kde $V_1 + V_2 = 0$, tak to zrátajme:

$$V_1 + V_2 = 0$$
$$\frac{Q_1}{r_1} = \frac{Q_2}{r_2}$$
$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

Tým sme sa dostali do rovnakej situácie ako v časti a). Tentoraz ale pre $k = \frac{Q_1}{Q_2}$.

Takže riešením v rovine bude opäť nejaká Apolóniova kružnica [16]. Čiže v priestore to bude guľa so stredom v bode $\left[\frac{k^2 d}{k^2-1}, 0, 0\right]$ a polomerom $\frac{kd}{k^2-1}$, kde $k = \frac{Q_1}{Q_2}$.

Bonus pre záujemcov (na čo je to dobré?)

Vedomosť z časti b) sa často využíva mierne iným spôsobom. Predstavme si, že máme uzemnenú sféru a niekde mimo nej bodový náboj Q_1. Pýtajme sa, aká sila pôsobí na tento náboj.

Takáto úloha sa rieši tým, že si umelo vyrobíme ďalší náboj $-Q_2$. Vyrobíme a umiestnime ho tak, aby uzemnená sféra (čo je mimochodom plocha s nulovým potenciálom) bola Apolóniovou sférou pre náboje[17] Q_1 a $-Q_2$. V tomto prípade je situácia s nábojom Q_1 a uzemnenou sférou rovnaká ako situácia s nábojmi Q_1 a $-Q_2$, kedy už ľahko zrátame silu pôsobiacu na náboj Q_1.

Metóda, ktorú sme použili, sa volá *metóda zrkadlenia nábojov*. Funguje aj ak ako uzemnenú sféru uvažujeme rovinu (teda sféru s nekonečným polomerom). Záujemci si o tejto metóde môžu prečítať viac napríklad vo Feynmannovi (2.diel, 6.kapitola).

[16] V tomto prípade nám narozdiel od časti a) nevyjde priamka.

[17] Veľkosť náboja $-Q_2$ a jeho polohu vieme ľahko získať z toho, aký polomer má uzemnená sféra a ako má byť vzdialená od Q_1 (pozri vzorčeky, ktoré nám vyšli). Poloha sa dá geometricky nájsť aj sférickou (kružnicovou) inverziou.