Fyzikálny korešpondenčný seminár
XXXVII. ročník, 2021/2022
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 1. kola letnej časti

1.1 Ako ryba vo vode

vzorák **Jaro** a **Tete**, opravovali **Jaro** a **Tete**

Poďme sa pozrieť, na aké fyzikálne zákony naše rybičky referujú. Rybička Archimedes svoju úvahu zakladá na hydrostatickom tlaku, ktorý je rovný súčinu hustoty kvapaliny, tiažového zrýchlenia a hĺbky, pre ktorú chceme tento tlak počítať. Keďže hustota aj zrýchlenie sú v celom akváriu rovnaké, znamená to, že čím hlbšie sa v kvapaline nachádzam, tým väčšie množstvo kvapaliny na mňa zhora tlačí. Čisto podľa tejto úvahy by jasne mal byť na dne akvária najvyšší tlak. Zatiaľ sme však nezobrali do úvahy to, že akvárium je zaťažené piestom.

Na tento problém sa sústredila rybička Pascal, ktorá sa odvoláva na Pascalov zákon. Ten hovorí, že ak pôsobí vonkajšia sila na uzavretú nádobu, tlak spôsobený touto silou je vo všetkých miestach rovnaký.

Ako je teda možné, že dva fyzikálne zákony podľa našich rybičiek hovoria dve protichodné veci? Chyba nastala pri nesprávnom pochopení Pascalovho zákona. Ten hovorí, že tlak spôsobený vonkajšou silou je všade rovnaký, nie to, že celkový tlak je všade rovnaký. Na prvý pohľad sa nám to môže zdať ako tá istá vec, no nie je to tak. Okrem tlaku spôsobeného piestom predsa vzniká vo vode v akváriu aj Archimedom spomenutý hydrostatický tlak v dôsledku tiažového pôsobenia Zeme. Na zistenie celkového tlaku potrebujeme oba tieto tlaky sčítať. Keďže jeden je všade rovnaký a druhý je najvyšší práve na dne, tak mala pravdu rybička Archimedes.

Tu sa nám naskytá otázka, prečo bežne pri výpočtoch jeden z týchto tlakov ignorujeme a odvolávame sa buď na hydrostatický tlak alebo inokedy na Pacalov zákon, zdanlivo podľa toho, ako sa nám to hodí. Dôvod je jednoduchý: často sú tieto dva tlaky výrazne rôznych rádov, a teda ten menší z nich (ako to my fyzici radi robíme) zanedbáme. Napríklad pri výpočtoch s hydraulickými zariadeniami často môže tlak dosiahnuť rádovo gigapaskaly, pričom jeden meter vody vytvára hydrostatický tlak iba približne 10 kPa. V takom prípade možno tlak v kvapaline hydraulického zariadenia považovať prakticky za konštantný. Inokedy však hydrostatický tlak zanedbať nemôžeme. Napríklad pri potápaní sa pôsobí v zmysle Pascalovho zákona tlak len jednej atmosféry,[1] zatiaľ čo hydrostatický tlak dosahuje pre typické hĺbky hodnoty niekoľkých atmosfér. Jasne teda pozorujeme nárast tlaku s hĺbkou, pričom pre malé hĺbky[2] sú oba tlaky porovnateľné, takže nemožno ani jeden z nich zanedbať, no už pri väčších hĺbkach je príspevok od atmosféry v zmysle Pascalovho zákona zanedbateľný.

Vráťme sa ešte na chvíľu späť k rybičkám. Bežné akváriá dosahujú hĺbky rádovo desiatok centimetrov. Rozdiel tlakov pri povrchu a na dne akvária je teda len niekoľko kilopaskalov, čo je podstatne menej než už len samotný atmosférický tlak tlačiaci na hladinu, a to máme na hladine ešte aj piest. Takže je síce pravda, že na dne je väčší tlak než pri povrchu, no klesnutím na dno si Archimedes veľmi nešplhne.

[1] Atmosféra tlačí na hladinu svojou tiažou podobne ako piest.
[2] rádovo pár desiatok metrov

1.2 S krúpami o preteky

vzorák **Kubo** a **Sisa**, opravovali **Kubo** a **Sisa**

Krúpy všetci poznáme a netešíme sa keď nás zastihnú napríklad na zastávke. Ale kabriolet? Ešte horšie. No poďme pomôcť Kubkovi byť šikovný a vyhnúť sa im.

Krúpu si vieme predstaviť ako guľôčku ľadu. Keď krúpa padá z oblohy, pôsobia na ňu dve sily – tiažová, ktorá ju ťahá nadol a sila odporu vzduchu, ktorá pôsobí proti smeru pohybu a teda nahor.

Tiažovú silu vieme vyjadriť ako $F_t = mg$, kde m je hmotnosť krúpy a g je tiažové zrýchlenie. Hmotnosť gule so známou hustotou vieme vyjadriť ako $m = V\rho_l = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_l$ a tiažová sila bude $F_t = g\rho_l\frac{4}{3}\pi r^3$. ρ_l je hustota ľadu, z ktorého je krúpa – použijeme hodnotu 920 kg/m^3. r je polomer guľôčky, v našom prípade budeme riešiť takú bežnú, polcentimetrovú krúpu, teda $r = 0{,}25$ cm.

Odporovú silu zas ako $F_{od} = \frac{1}{2}CS\rho_v v_k^2$. Čo však znamenajú jednotlivé parametre tu?

- C je odporový koeficient; určuje sa experimentálne a závisí len od tvaru telesa – guľa je našťastie dosť bežný tvar a tak vieme, že pre guľu je v závisloti od drsnosti povrchu hodnota medzi 0,1 a 0,4 – my použijeme hodnotu $C = 0{,}2$
- S je plocha prierezu padajúceho telesa – v prípade gule je to obsah kruhu s polomerom r, teda $s = \pi r^2$;
- ρ_v je hustota prostredia, v ktorom teleso padá, teda pre nás hustota vzduchu $\rho_v \approx 1{,}293$ kg/m^3;
- v_k je rýchlosť, ktorou krúpa padá.

Keďže krúpa padá voľným pádom, jej rýchlosť neustále narastá – pôsobí na ňu konštantná sila F_t a tá ju zrýchľuje. S rýchlosťou ale narastá aj odporová sila, ktorá ju brzdí. V istom momente sa tak dostaneme do stavu $F_{od} = F_t$ – vtedy sú obe sily vyrovnané a výslednica síl na krúpu pôsobiacich je nulová. Podľa prvého Newtonovho zákona (zákona zotrvačnosti) vieme, že ak výslednica síl na teleso pôsobiacich je nulová, toto zotrváva v pokoji (to nebude náš prípad), alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe. Znamená to, že rýchlosť krúpy (a tým ani odporová sila!) sa už nebude meniť. Takáto rýchlosť sa nazýva terminálna rýchlosť a vieme ju vypočítať ako

$$
\begin{aligned}
F_{od} &= F_t \\
\frac{1}{2}CS\rho_v v_k^2 &= mg \\
\frac{1}{2}C\pi r^2\rho_v v_k^2 &= \frac{4}{3}g\rho_l\pi r^3 \\
v_k^2 &= \frac{8}{3}\frac{g\rho_l\pi r^3}{C\pi r^2\rho_v} \\
v_k &= \sqrt{\frac{8}{3}\frac{g\rho_l r}{C\rho_v}}
\end{aligned}
$$

Ale my všetky parametre poznáme, poďme teda zrátať rýchlosť! Po dosadení hodnôt zo vzorca vyjde hodnota $v_k = 15$ m/s, čo je rýchlosť, ktorou krúpa dopadá na zem… alebo na auto. Čo ale v aute? Ako dobre chráni vodiča jeho sklo? Nie ste jediní, ktorí kabriolet videli len na fotke, preto sme si vhodnú fotku našli na internete.

Obrázok 1.2.1: *Kabriolet z internetu* https://www.autofacil.es/fotos/audi/a5/fotos-audi-a5s5-cabrio-2017.html

Predstavme si krúpu v niektorom momente práve na vrchu skla. Auto sa rovnomernou rýchlosťou hýbe dopredu, krúpa zas nadol. Ak si hlavu vodiča predstavíme ako bod, potom krúpe unikne vtedy, ak za čas, za ktorý krúpa prejde smerom nadol od vrchu skla k hlave vodiča, auto zabezpečí vodičovi únik. Inak povedané, ak za čas, kým krúpa spadne vodičovi na hlavu, auto ho odnesie dosť dopredu na to, aby už nebol v dráhe krúpy.

Potrebné geometrické rozmery odhadneme z fotky – nazvime tieto vzdialenosti, vodorovnú a zvislú, ako s_x a s_y, vieme ich odhadnúť napríklad ako $s_x \approx 50$ cm; $s_y \approx 15$ cm

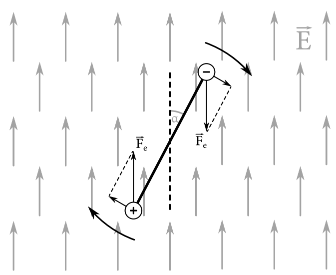
Pre časy musí platiť $\frac{s_x}{v_{\text{auto}}} < \frac{s_y}{v_k}$ a teda $v_{\text{auto}} > \frac{s_x}{s_y} v_k$, čiže minimálna rýchlosť auta vyjde okolo $v_{\text{auto}} = 50\ \mathrm{m/s}$.

Pri danej rýchlosti Kubko utečie krúpe, ale uvidíme, či aj policajtom.

1.3 Polemika s tyčkou

vzorák **Andrej**, opravoval **Andrej**

Pozrime sa najprv na to, aké sily pôsobia na oba náboje. V miestnosti máme zadané homogénne elektrické pole (tj. pole rovnaké v každom jeho bode) s intenzitou E. Toto pole bude preto na každý z nábojov pôsobiť po celú dobu konštantnou silou s veľkosťou $F_e = QE$. Samozrejme, aj náboje samotné okolo seba vytvárajú nejaké elektrické pole, to sa ale prejaví iba ich vzájomným priťahovaním, ktoré bude vyrušené normálovou silou nehmotnej tyčky medzi nimi. Výslednou silou pôsobiacou na náboje bude teda jedine sila F_e. Tá má smer vždy zhodný so smerom elektrickej intenzity $\vec{E}$ a znamienko určené znamienkom daného náboja, teda pre kladný náboj $\vec{F_{e_1}} = Q\vec{E}$ a pre záporný $\vec{F_{e_2}} = -Q\vec{E}$. V prípade, keď je ešte tyčka rovnobežná so smerom $\vec{E}$, pôsobia obe sily F_{e_1} aj F_{e_2} priamo proti nej, ale opačnými smermi. Navzájom sa teda vyrušia a výsledná sila je nulová - ide o rovnovážnu polohu. Keď ale Mözgáč tyčku pootočí o nejaký malý ale nenulový uhol α_0, dostane sa tak do polohy, kde na ňu už pôsobí nenulový moment sily. Sily F_{e_1} a F_{e_2} sa totiž v tomto prípade už nevynulujú celé, ale iba ich zložky rovnobežné s tyčkou. Zložky kolmé na tyčku ňou začnú otáčať v smere uhlu α.



Obrázok 1.3.1: *Tyčka vychýlená o uhol α*

Obe kolmé zložky majú rovnakú veľkosť, a to $F_e \sin\alpha$, takže os otáčania sa bude nachádzať presne v strede medzi nábojmi. Zároveň z toho vyplýva, že s rastúcim uhlom α bude rásť aj moment sily, ktorý tyčku roztáča. To bude platiť, až kým α neprekročí hodnotu 90°, kedy náboje dosiahnu svoje maximálne zrýchlenie. Odvtedy budú veľkosti kolmých zložiek F_{e_1} a F_{e_2} už iba klesať, až kým pre $\alpha = 180°$ nebudú opäť nulové. Tyčka sa tak dostane do stabilnej rovnovážnej polohy, v ktorej sú všetky výsledné sily nulové. Tak to ale nezostane nadlho. Keďže doteraz oba náboje neustále iba zrýchľovali, tyčka má zjavne v tomto momente svoju maximálnu uhlovú rýchlosť a bude sa preto otáčať aj ďalej. Po opustení rovnovážnej polohy začnú kolmé zložky síl F_{e_1} a F_{e_2} náboje naopak spomaľovať a pre uhol $\alpha = 270°$ budú pôsobiť maximálnym spomalením. Pohyb bude teda analogický k predchádzajúcej fáze pohybu, len bude akoby prebiehať odzadu. V prípade, že neuvažujeme žiadny odpor prostredia, sa tyčka zastaví až v momente, keď dosiahne stav ekvivalentný tomu počiatočnému. Takže ak Mözgáč tyčke na začiatku neudelil žiadnu uhlovú rýchlosť, zastaví sa na uhle $360° - \alpha_0$. Ako ste si už isto uvedomili, ide o pohyb zhodný s pohybom matematického kyvadla a práve sme si popísali jeden jeho kyv. Keďže ale rozsah hodnôt výchylky α nášho kyvadla je takmer 360°, nejde o štandardný lineárny oscilátor s malými výchylkami a harmonickým priebehom. To, že sila, ktorá vracia kyvadlo do rovnovážnej polohy (v našom prípade kolmá zložka F_e) nie je lineárne závislá od uhlu α spôsobuje, že sa kyvadlo zdržiava dlhšie okolo hraničných hodnôt α a kratšie v okolí rovnovážnej polohy. Ide teda o neharmonický kmitavý pohyb.

V druhej časti úlohy nás zaujíma hodnota maximálnej rýchlosti, ktorú náboje pri pohybe nadobudnú. Ako sme si už úvahou odvodili, pôjde o rýchlosť nábojov v rovnovážnej polohe, teda pre uhol $\alpha = 180°$. Keďže na túto rýchlosť boli náboje urýchľované iba silou (silami) F_e a uvažujeme, že sa mechanická energia sústavy zachováva, ich kinetická energia bude rovná práve práci sily F_e. Teraz by sme si na určenie tejto práce mohli silu F_e rozkladať na zložku rovnobežnú s tyčkou a na zložku kolmú na tyčku a následne sčítavať príspevky tejto sily v smere trajektórie náboja, to ale vôbec nie je potrebné. Stačí si uvedomiť, že sila F_e je po celú dobu konštantná a prácu koná iba v smere rovnobežnom s ňou. V tomto smere prejde každý náboj iba dráhu L, alebo ak chceme byť presní, tak dráhu $\frac{L}{2}(1+\cos\alpha_0) \approx L$. Takže práca, ktorú vykoná sila F_e na jednom náboji bude $W = QEL$. Z rovnosti tejto práce a kinetickej energie náboja dostávame hľadanú maximálnu rýchlosť nábojov.

$$2 \cdot \frac{1}{2} m v^2 = 2 \cdot QEL$$

$$v = \sqrt{\frac{2QEL}{m}}$$

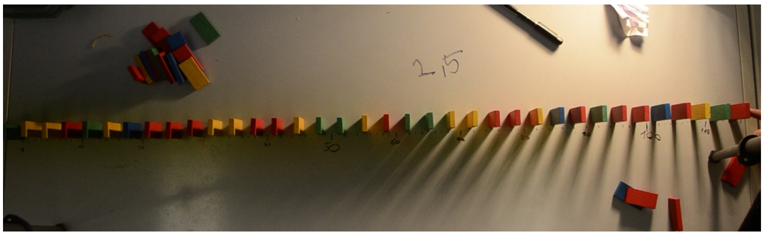
1.4 Niečo si želaj

vzorák **Dušan** a **Marcel**, opravoval **Hovorca**

Na začiatok letnej časti si pre vás Hovorca pripravil pomerne jednoduchú úlohu, postaviť rad dominových kociek a zmerať rýchlosť šírenia vlny. Žiadne teoretické výpočty, iba spraviť dostatočne presné merania, správne ich zaznamenať a zanalyzovať.

Každý experiment by ste mali začať počiatočnými očakávaniami, aby vás namerané hodnoty neprekvapili, respektíve aby ste vedeli spozorovať, že niečo nebeží dobre, ak to odporuje očakávaniam. V tejto úlohe by mali byť očakávania prosté. Keď sú kocky príliš blízko seba, drcnutie do prvej kocky spôsobí následný „pád“, ktorý nebude pádom, pretože ťažisko kocky sa nepresunie za bod otáčania. V opačnom extréme, keď sú kocky príliš ďaleko od seba, pád prvej kocky nespôsobí pád tej nasledujúcej, pretože na seba nedočiahnu. Čiže v oboch extrémoch bude rýchlosť šíriacej sa dominovej vlny nulová a niekde medzi tým sa bude diať niečo zaujímavé. Graf závislosti rýchlosti vlny od vzdialeností kociek d bude teda s najväčšou pravdepodobnosťou „kopec s jedným maximom“,[3] nie je dôvod, aby tam bola nejaká jama (lokálne minimum) navyše. A samozrejme prešmykovanie kociek pri otáčaní alebo iné drobné efekty by výsledok kvalitatívne nemali zmeniť.

No a prejdime k samotnému meraniu. My sme použili dominové kocky s rozmermi 50 mm × 25 mm × 8 mm. Samozrejme bolo možné použiť akékoľvek kocky, dôležité bolo, aby mali všetky rovnaké rozmery. Rozmery kociek (výška a hrúbka) totiž iba určujú interval rôznych d, na ktorom možno merať nenulové rýchlosti šíriacich sa dominových vĺn. Pred každým rozostavením kociek sme si vyznačili na tabuľu fixou polohy jednotlivých kociek (toto je dôležité, vrátime sa k tomu, keď budeme hovoriť o chybách merania). Následne sme kocky rozostavili. Drcli sme do prvej kocky a dvoma zosynchronizovanými kamerami, jednou na začiatku a druhou na konci radu kociek, sme merali čas pádu celého radu. Samozrejme stačilo použiť stopky a voľné oko, ale potom bolo treba chybu aj patrične odhadnúť.



Obrázok 1.4.1: *Pravidelne rozostavené dominové kocky*

Takto sme spravili dve merania pre sedem rôznych rozostupov kociek d. Zvolili sme si rôzne dlhé merané úseky l. Samozrejme, čím dlhšie, tým lepšie, ale dôvody sme na to mali dva. Jednak sa na tom pri spracovaní výsledkov niečo naučíme, a dvak, merali sme to na viackrát, boli sme trochu neporiadni a leniví. No a nakoniec sme vypočítali rýchlosť šírenia sa vlny ako podiel dĺžky meraného úseku l a času od prvého drcnutia po pád poslednej kocky t, čiže základoškolsky $v = \frac{l}{t}$. Výsledky sme zaznamenali do tabuľky nižšie.

Vzdialenosť medzi kockami d	Dĺžka meraného úseku l	Čas t	Rýchlosť v
1,0 cm	2,8 m	3,208 s	0,872 m/s
1,0 cm	1,03 m	1,087 s	0,947 m/s

[3] Táto úvaha platí, len ak očakávame, že závislosť rýchlosti padania na vzdialenosti kociek je spojitá funkcia. Zamyslite sa, prečo to naozaj môžeme očakávať.

Vzdialenosť medzi kockami d	Dĺžka meraného úseku l	Čas t	Rýchlosť v
1,5 cm	1,08 m	1,087 s	0,993 m/s
1,5 cm	1,08 m	1,043 s	1,035 m/s
2,0 cm	3,14 m	3,375 s	0,930 m/s
2,0 cm	1,01 m	1,174 s	0,860 m/s
2,5 cm	1,08 m	1,130 s	0,955 m/s
2,5 cm	1,00 m	1,260 s	0,793 m/s
3,0 cm	4,7 m	5,625 s	0,835 m/s
3,0 cm	0,98 m	1,130 s	0,866 m/s
3,5 cm	1 m	1,652 s	0,605 m/s
3,5 cm	1,03 m	1,521 s	0,678 m/s
4,0 cm	3,02 m	4,791 s	0,630 m/s
4,0 cm	1,64 m	3,166 s	0,518 m/s

No a teraz sa pozrime na to, aké chyby sme mohli spraviť pri meraní a ako sme ich mohli minimalizovať. Keď hovoríme o chybách merania, respektíve niekedy môžete počuť označenie neistoty merania, štandardne ich rozdeľujeme na dve skupiny, tzv. typ A a typ B.

Typ A pochádza zo štatistického spracovania nameraných údajov pri rovnakých podmienkach. V našom prípade sme používali rovnaké kocky, rovnaké meracie zariadenia, ale ak sme pri stavaní dominového radu umiestnili kocky trošku krivo, do prvej kocky sme drcli trošku viac ako bolo potrebné alebo nám iba zafúkal vietor, tak všetko nám to prispelo rozptylu nameraných rýchlostí pre jednotlivé pády kociek. Tento príspevok k neistote merania spočítame ako smerodajnú odchýlku s_a od priemeru meraní $\langle x\rangle$, ktorú poznáte asi aj zo školy

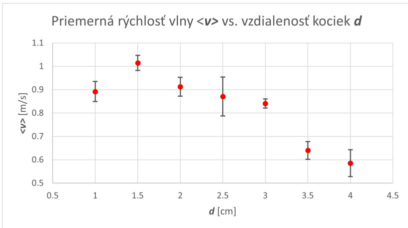
$$s_A = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{1}^{N}(x_i - \langle x\rangle)},$$

kde N je počet meraní a x_i je nameraná hodnota v i-tom meraní, v našom prípade rýchlosť. Je jasne vidieť, že čím viac meraní zopakujeme, tým túto chybu minimalizujeme. Žiaľ, my sme pre každé d spravili iba dve merania, takže táto chyba nám vyjde veľká.

Neistota merania typu B pochádza z presnosti použitých meracích postupov a prístrojov. Jej odhad ilustrujeme na našich meraniach. My sme poznali polohu každej dominovej kocky v rade presnosťou 1 mm, s tým, že sme kontrolovali aj celkovú dĺžku radu. Keby sme kocky rozostavovali tak, že postavíme kocku, odmeriame d, postavíme ďalšiu kocku, odmeriame $d\dots$, tak by táto neistota v meraní dĺžky bola pri každom meraní prenásobená počtom použitých dominových kociek. Čas pádu celého dominového radu sme merali s presnoťou trvania jedného „frejmu“ na kamere, čiže $\frac{1}{24}$s. No a ako z tohto určiť neistotu pre rýchlosť? No predsa podľa pravidiel šírenia neistôt merania. Keď sčítavame/odčítavame rovnaké typy veličín, tak sa sčítavajú absolútne neistoty, a keď robíme súčin/podiel dvoch veličín, tak sa sčítavajú relatívne neistoty. Keďže priemernú rýchlosť každého dominového pádu spočítame ako prejdenú dráhu za celkový čas pádu, tak najprv musíme určiť absolútne neistoty prejdených dráh a časov pádu. V našom prípade je absolútna neistota každej meranej dráhy 2 mm, pretože máme neistotu v polohe začiatku aj konca. Veľmi podobne máme neistotu v čase začiatku a konca pádu jeden frejm, takže celková neistota času pádu bude $\frac{2}{24}$s. Rýchlosť je podielom, takže iba pre každé meranie spočítame realtívne neistoty dráhy, času a nakoniec aj rýchlosti, z čoho absolútnu neistotu získame prenásobením príslušnou rýchlosťou. Ako posledný krok treba určiť túto neistotu pre priemer. Tu si treba uvedomiť, že zvýšeným počtom meraní túto neistotu neznížime, pretože počet meraní neovplyvňuje presnosť meracích prístrojov. Pre každé d preto odhaneme neistotu merania typu B pre priemernú rýchlosť tou väčšou neistotou z tých dvoch, ktoré sme dostali pre každá meranie.

Áno, pravidlá propagácie neistôt môžu byť na prvý pohľad pomerne komplikované a ťažko sa pamätajú, no stačí vedieť, kde ich nájsť. Napríklad sa na ne odkazujeme na našejstránke v časti Ako riešiť.

A na záver treba ešte tieto neistoty dvoch typov spojiť do jednej neistoty s, a to sa štandardne robí ako $s = \sqrt{s_A^2 + s_B^2}$. Bez toho, aby sme dávali do vzoráku ďalšiu dlhú tabuľku, zobrazíme priemerné rýchlosti ako body v grafe a neistotu s ako príslušné chybové úsečky.



Obrázok 1.4.2: *Závislosť priemernej rýchlosti pádu domina od rozostupu medzi kockami*

Ako môžete vidieť, naše domino sa správalo tak, ako sme predpokladali, graf rýchlosti pádu domina, resp. šírenia sa dominovej vlny, je kopec s jedným maximom. Žiadne namerané hodnoty neulietavajú a vypočítaná neistota je pod 10%, čo vzhľadom na dve merania pre každé d nie je veľa. Ďalekosiahle závery z toho robiť nebudeme, keďže by sme toho museli namerať oveľa viac a zadanie to od nás ani nechce. Úlohu prehlasujeme za splnenú a želáme veľa šťastia a trpezlivosti pri ďalšej experimentálke. Hough!

Aha, a nebojte sa, pri hodnotení nám postačilo, ak ste popísali príčiny neistôt merania a spravili jednoduchú štatistiku, čiže spravili odhad neistôt typu A :)

Poznámka opravovateľa: Vo všeobecnosti bola kvalita spracovania experimentu nižšia, než by som si želal (hoc som sa rozhodol hodnotiť pomerne milosrdne). Chcel by som sa preto vyjadriť k niekoľkým veciam, ktoré by som od vás v deväťbodovom riešení očakával, konkrétne v tejto úlohe.

Zreprodukovateľnosť – experiment by mal obsahovať postup, ako ste ho vykonali. Tento postup by mal byť taký detailný, že ak by ste dali svoje pomôcky niekomu inému, ten by podľa postupu zvládol vykonať experiment takmer identicky ako vy. Toto je veľmi dôležitá vlastnosť, ktorú by vaše riešenie experimentálky FKS malo mať. Pomôže vám to získať viac čiastkových bodov, lebo opravovateľ minimálne vie, čo ste sa to vlastne snažili robiť.

Snaha o čo najvyššiu presnosť – sem patrí opakovanie meraní pre každé d, prípadne hľadanie spôsobov, ako znížiť relatívnu neistotu meranej veličiny (v tomto prípade **rýchlosti**), napríklad pomocov veľmi dlhého radu domino kociek a podobne.

Práca s neistotou/chybou merania – a to kvalitatívna (čo ju spôsobuje), aj kvantitatívna (aká veľká výsledne je). Dobré štatistické spracovanie odchýlky, napr. použitie štandardnej odchýlky ak rátam neistotu náhodnej veličiny. To sa týka najmä výslednej veličiny, ktorú chceme merať. Čerešničkou na torte sú error-bary v prípadnom grafe.

Meranie správnej veci – čo sa v tejto úlohe často ukázalo ako problematické. Ak od vás očakávame nejakú rýchlosť, jednotka tejto veličiny je prirodzene meter za sekundu. Uznal som aj nameranie a závislosť trvania pádu jedného domina, ak to niekto urobil. Prosím, poriadne čítajte, čo sa od vás chce a ak si nie ste istí, napíšte na otazky@fks.sk. Radi vám dovysvetlíme zadanie.

Fyzikálna korektnosť – špeciálne v tejto experimentálke sme nevyžadovali priveľa teórie (nakoľko je fakt veľmi komplikovaná), i keď nejaké zamyslenia sa dali urobiť. Spadá sem aj korektnosť prevedenia experimentu (teda nerobenie hrubých chýb) a spája sa aj s ďalším bodom.

Komentár k výsledku – ak ste mali nejakú hypotézu, vyjadrite sa, či sa potvrdila. Ak sa nepotvrdila, nenapíšte, že sa potvrdila! Ak nie, zhodnoťte, čo výsledok hovorí. Špeciálne v tejto úlohe, vyjadrite sa, aká by asi mohla byť finálna závislosť. Môžete skúsiť vymyslieť aj teóriu, prečo je výsledok práve taký, aký je. Všetko toto by malo byť vrámci bodu vyššie. Doplním ešte, že v tejto úlohe pod túto sekciu spadá aj to, ako dobre ste preukázali závislosť. Ak ste namerali rýchlosť pre dve či tri rôzne d, ťažko možno hovoriť, ako sa závislosť všeobecne správa. Platí tu čím viac, tým lepšie.

Týmto by som chcel (s ich súhlasom) pochváliť riešenia Julky Mnichovej a Miška Tomagu, ktorí získali z úlohy 9 bodov (detaily sa ale dajú vždy zlepšovať) a kvalita ich riešení je porovnateľná (ak nie lepšia) so vzorovým riešením – môžete sa ich skúsiť spýtať, či by vám poslali svoje opravené riešenie pre inšpiráciu. H.

1.5 Áno, trenie

vzorák **Jaro**, opravovala **Nina**

Zaveďme si súradnicovú sústavu tak, že x je vodorovná súradnica s počiatkom v rovnovážnej polohe závažia.

Uvažujme, že závažie je vychýlené do vzdialenosti x_0. Nájdime, akou silou F_p pôsobia pružinky na závažie v tejto polohe. Predpokladajúc, že rovnovážna poloha závažia je od stien vzdialená D, pružinky sú natiahnuté na dĺžky $D \pm x_0$. Výsledná sila od pružiniek je teda

$$F_p = k\left(D + x_0\right) - k\left(D - x_0\right) = 2kx_0.$$

Vidíme, že Ninina sústava pružiniek je ekvivalentná jedinej pružinke s tuhosťou $K = 2k$. Ďalej preto budeme počítať s takouto zástupnou pružinkou.

Vychýľme teda závažia do vzdialenosti x_0 a preskúmajme dve po sebe idúce krajné polohy závažia. Nech po n-tom prechode rovnovážnou polohou je maximálna výchylka závažia x_n a po $(n+1)$-om x_{n+1}. Po n-tom prechode v krajnej polohe je celá mechanická energia sústavy uložená v potenciálnej energii pružinky $E_n = \frac{1}{2}Kx_n^2$, po $(n+1)$-om prechode $E_{n+1} = \frac{1}{2}Kx_{n+1}^2$. Straty energie sú spôsobené trením, preto rozdiel medzi týmito energiami je zrejme rovný práci trecej sily medzi polohami x_n a x_{n+1}. Veľkosť trecej sily je $F_t = Mgf$ a pôsobila na dráhe $|x_n| + |x_{n+1}|$, preto

$$E_n - E_{n+1} = F_t\left(|x_n| + |x_{n+1}|\right)$$

$$\frac{1}{2}K\left|x_n\right|^2 - \frac{1}{2}K\left|x_{n+1}\right|^2 = F_t\left(|x_n| + |x_{n+1}|\right)$$

$$\frac{1}{2}K\left(|x_n| - |x_{n+1}|\right) = F_t$$

$$|x_{n+1}| = |x_n| - \frac{2F_t}{K}.$$

Zaveďme si označenie $a_n \equiv |x_n|$, nech sa zbavíme absolútnych hodnôt. Pre amplitúdu výchylky po n-tom prechode rovnovážnou polohou dostávame jednoduchý rekurentný vzťah

$$a_n = a_{n-1} - \frac{2F_t}{K}.$$

Skúsme ho opakovane do seba dosádzať a sledujme, čo dostaneme:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} - \frac{2F_t}{K} = \\ &= a_{n-2} - 2\frac{2F_t}{K} = \ldots = \\ &= a_{n-m} - m\frac{2F_t}{K} = \ldots = \\ &= a_0 - n\frac{2F_t}{K}. \end{aligned}$$

Nech závažie prekmitne rovnovážnou polohou práve N-krát. V takom prípade maximálna výchylka po N-tom prekmitnutí je

$$a_N = a_0 - N\frac{2F_t}{K}.$$

Aby závažie neprekmitlo aj $(N+1)$-vý krát, zrejme musí byť potenciálna energia v krajnej polohe menšia než práca trecej sily z krajnej polohy do rovnovážnej polohy. Ak by bola čo i len o trošku väčšia, závažie by prekmitlo už $(N+1)$-vý krát, preto

$$\frac{1}{2}Kx_N^2 \overset{!}{<} F_t\,|x_N|\,,$$

odkiaľ

$$a_N \equiv |x_N| < \frac{2F_t}{K}.$$

Zároveň vieme, že amplitúda je nezáporná. Dostávame teda podmienku

$$0 \leq a_N = a_0 - N\frac{2F_t}{K} < \frac{2F_t}{K}.$$

Odtiaľ

$$a_0 \geq N\frac{2F_t}{K} > a_0 - \frac{2F_t}{K}$$

$$\frac{K}{2F_t}a_0 \geq N > \frac{K}{2F_t}a_0 - 1$$

$$N = \left\lfloor \frac{K}{2F_t}a_0 \right\rfloor$$

Po dosadení príslušných výrazov za K a F_t a uvážiac, že počiatočná amplitúda je $a_0 = L$, konečne dostávame[4]

$$N = \left\lfloor \frac{kL}{Mgf} \right\rfloor .$$

1.6 Nábojová obtiažnosť

vzorák **Patrik**, opravovala **Lucka**

Bez ujmy na všeobecnosti nech je $C_1 > C_2$. Zo zapojenia pred zopnutím spínačov dostávame

$$\begin{aligned} Q_1 &= U_0 C_1, \\ Q_2 &= U_0 C_2. \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

Po zopnutí spínačov elektróny na vetve B pretečú z jedného kondenzátora na druhý, pretože sa musí vyrovnať napätie. Rovnako sa tak stane aj na vetve A. Napätie po ustálení si označme U'. Zo zapojenia po zopnutí dostávame

$$\begin{aligned} Q_1' &= U' C_1, \\ Q_2' &= U' C_2. \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

Posledná potrebná rovnica vychádza zo zákona zachovania náboja. Ak písmenami Q označujeme veľkosť náboja, tak jeho polaritu musíme určiť znamienkom pred Q. Na vetve A je teda pôvodne kladný Q_1 a záporný Q_2. Z predpokladu $C_1 > C_2$ vyplýva, že na vetve A je dokopy kladný náboj, ktorý sa tak po zopnutí spínača rozdelí na kladné náboje Q_1' a Q_2', čiže

$$Q_1' + Q_2' = Q_1 - Q_2. \tag{1.6.3}$$

Pozorný čitateľ vzoráku si určite všimne, že heslo šifry je hryzovisko, no dôležitejšie je, že máme 5 rovníc o 5 neznámych, a teda hor sa na riešenie.

Po dosadení rovníc 1.6.1 a 1.6.2 do 1.6.3 dostávame

$$U'\left(C_1 + C_2\right) = U_0\left(C_1 - C_2\right) \qquad \Rightarrow \qquad U' = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} U_0. \tag{1.6.4}$$

Vidíme, že napätie nám vyšlo menšie ako U_0, čo bolo aj naozaj očakávané.

Ešte potrebujeme zrátať, aký náboj pretiekol spínačom S_1. Keďže pred pretečením bol na kondenzátore náboj Q_1 a po pretečení Q_1', ich rozdiel je vlastne pretečený náboj, pretože náboj nevzniká ani nezaniká, čiže

$$Q = Q_1 - Q_1'. \tag{1.6.5}$$

[4] $\lfloor x \rfloor$ značí dolnú celú časť čísla x. V našom výpočte uvažujeme, že na to, aby sme zarátali prechod rovnovážnou polohou, stačí, aby závažie túto rovnovážnu polohu dosiahlo. Ak by sme požadovali, aby závažie touto polohou naozaj aj prešlo, mali by sme podmienku $0 < a_N = a_0 - N\frac{2F_t}{K} \leq \frac{2F_t}{K}$, odkiaľ $N = \left\lceil \frac{K}{2F_t} a_0 - 1 \right\rceil = \left\lceil \frac{kL}{Mgf} \right\rceil - 1$.

Po dosadení z rovníc 1.6.1, 1.6.2 a 1.6.4 do 1.6.5 máme

$$
\begin{aligned}
Q &= U_0 C_1 \left(1 - \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}\right) \\
&= 2\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U_0.
\end{aligned} \tag{1.6.6}
$$

Týmto je úloha vyriešená.

1.7 True story

vzorák **Tomáš**, opravoval **Tomáš**

Zadanie nám presne opisuje, čo sa bude diať po odstránení závažia. Piest začne vykonávať tlmené kmity až sa po nejakom čase ustáli v novej rovnovážnej polohe. Môže to znieť zložito, ale nám stačí poznať iba o koľko je nová rovnovážna poloha vyššie ako stará. Keď plynu dodávame teplo, môže sa využiť na jeho zohriatie a/alebo zväčšenie objemu, čiže konanie práce. Náš dej je izotermický a teda celkové dodané teplo, ktoré z okolia prešlo do systému plyn+nádoba+piest, sa nevyužilo na zmenu teploty plynu, ale iba na rozpínanie plynu, teda zdvihnutie piestu. Celkové dodané teplo sa preto rovná zmene potenciálnej energie piestu.[5] Budeme teda chcieť spočítať o koľko sa piest zdvihol.

V pôvodnej rovnovážnej polohe pôsobí na plyn v nádobe zhora tlak spôsobený tiažou piestu so závažím a taktiež aj atmosférický tlak p_a. Tento tlak je vyrovnávaný tlakom plynu p_1 zospodu. Ak označíme hmotnosť piestu M, hmotnosť závažia m a plochu piestu S, matematicky zapísané to je

$$
\frac{(M+m)g}{S} + p_a = p_1.
$$

A rovnaké to je aj v novej rovnovážnej polohe, kde ale zhora pôsobí menší tlak v dôsledku odstráneného závažia, čiže aj tlak plynu p_2 je menší. Máme teda druhú rovnicu

$$
\frac{Mg}{S} + p_a = p_2.
$$

Pri izotermickom deji platí prvý Dušanov vzorec pV = konst., ktorý hovorí, že v každom momente deja je súčin tlaku a objemu plynu rovnaký. My si vyberieme začiatok, kedy bol plyn v stave p_1, V_1 a konečný stav s p_2, V_2. S využitím prvých dvoch rovníc teda môžeme počítať

$$
\begin{aligned}
p_1 V_1 &= p_2 V_2 \\
\left(\frac{(M+m)g}{S} + p_a\right) V_1 &= \left(\frac{Mg}{S} + p_a\right) V_2 \\
V_2 &= \frac{\frac{(M+m)g}{S} + p_a}{\frac{Mg}{S} + p_a} V_1.
\end{aligned}
$$

[5] V skutočnosti sa tým zvýšila aj potenciálna energia plynu, pretože aj on vystúpal vyššie v tiažovom poli, ale 10 l akéhokoľvek plynu má zanedbateľnú hmotnosť, teda aj polohovú energiu, oproti 1000 kg piestu.

A keďže piest sa zdvihol o $\Delta h = \frac{V_2 - V_1}{S}$, celkové dodané teplo už je jednoducho

$$Q = Mg\frac{V_2 - V_1}{S} = \frac{Mg}{S}V_1\left(\frac{\frac{(M+m)g}{S} + p_a}{\frac{Mg}{S} + p_a} - 1\right) = \frac{Mmg^2V_1}{\left(\frac{Mg}{S} + p_a\right)S^2} \doteq 8{,}89\ \mathrm{J}.$$

Prácu izotermického deja nemôžeme počítať ako $W = p\Delta V$, pretože tento vzťah platí len pre dej s konštantným tlakom. Musíme teda integrovať alebo si proste nájdeme na internete druhý Dušanov vzorec pre prácu izotermického deja $W = NkT \ln \frac{V_2}{V_1}$, kde NkT je nám dobre známa trojica písmen zo stavovej rovnice ideálneho plynu. V prípade izotermického deja je súčin NkT stále konštantný. Pomocou stavovej rovnice teda prepíšeme prácu vykonanú plynom medzi objemami V_1 a V_2 do veličín, ktoré máme zadané či už spočítané

$$W = p_1V_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{(M+m)g}{S} + p_a\right)V_1 \ln\frac{\frac{(M+m)g}{S} + p_a}{\frac{Mg}{S} + p_a} \doteq 9{,}81\ \mathrm{J}.$$

Naozaj, vykonaná práca v prvej fáze pohybu sa nerovná celkovému dodanému teplu. Dokonca sa zdá, že plyn vykonal viac práce, ako mu okolie dodalo tepla. Ale to je v poriadku, zákon zachovania energie stále platí. Môžeme si to predstaviť tak, že okolie dodalo plynu 9,81 J, pretože inak by plyn nemohol vykonať takú prácu. Výsledkom práce bolo zdvihnutie piestu, na čo bolo potrebných 8,89 J. Ďalej, mal piest v momente prvého dosiahnutia objemu V_2 aj nejakú kinetickú energiu E_k. Okrem toho ešte plyn pracoval proti trecej sile, čím sa vlastne počas pohybu premieňala jeho kinetická energia na teplo Q_T, ktoré plyn vrátil späť okoliu. Čiže keď plyn prvýkrát dosiahol objem V_2, piest mal mechanickú energiu $E_k + E_p$. Preto celkové dodané teplo v prvej fáze pohybu je 9,81 J $- Q_T = W - Q_T$, zatiaľ čo dodané teplo v prvej fáze deja je 9,81 J, ako sme si už vyššie vyjasnili. Pod dodaným teplom sa teda myslí teplo, ktoré okolie dodalo plynu a pod celkovým dodaným teplom sa myslí celková energetická bilancia, teda teplo, ktoré okolie dodalo plynu, mínus teplo, ktoré plyn vrátil späť okoliu. A rovnako to bude v ktoromkoľvek inom čase t, teda

$$E_k(t) + E_p(t) = W(t) - Q_T(t).$$

Po dlhom čase, keď sa piest ustáli, už nemá kinetickú energiu a táto rovnica sa zmení na

$$E_p' = W' - Q_T' \Rightarrow W' = E_p' + Q_T',$$

kde sme veličinám dali čiarky, aby bolo jasné, že sa týkajú už skončeného deja. W' však nezávisí od toho, či plyn prešiel z V_1 do V_2 a tam zastal, alebo sa tam dostal nejakým tlmeným kmitaním, pretože plyn koná kladnú prácu, keď sa rozpína, a zápornú, keď sa stláča. V súčte teda prechod z V_1 do V_2 vykoná vždy prácu $W' = W = 9{,}81$ J. Nezabúdajúc, že pri izotermickom deji sa vykonaná práca W rovná dodanému teplu, rovnica $W = E_p + Q_T'$ nám hovorí, že celý dej prebehol tak, že okolie plynu dodalo 9,81 J, z čoho sa 8,89 J použilo na zdvihnutie piestu a zvyšných 0,92 J plyn okoliu vrátil naspäť, keď sa kinetická energia piestu trením premieňala na tepelnú energiu.