Riešenia 3. kola zimnej časti

3.1 Zväčša neškodná

vzorák **Filip**, opravoval **Filip**

Zdravím všetkých budúcich aj súčasných motoristov a motoristky. Predstavme si, že s Felíciou zrýchlime na cestovnú rýchlosť v meste a pôjdeme len priamočiaro po rovine. Vyradíme ešte rýchlosť, čím prerušíme spojenie medzi motorom a kolesami. (Motor by nám to zbytočne komplikoval, keďže nás môže pri zaradenej rýchlosti spomaľovať a aj zrýchľovať bez toho, aby sme čo i len použili plynový pedál.) Všetko super sa raz musí skončiť a aj naša Felícia raz zastane.

Aké sily nás zastavili?

- *Aerodynamický odpor*, ktorý je úmerný kvadrátu rýchlosti. Izolovane by sa dal zmerať vo veternom tuneli.
- *Trenie súčiastok auta* – kolesá musia byť stále pripojené k autu ložiskami, ktoré nie sú dokonalé. Izolovane by sa dalo zmerať zdvihnutím celého auta v autoservise.
- *Valivý odpor kolies* – závisí hlavne od tlaku v pneumatikách (čím je tlak nižší, tým sa bude koleso viac deformovať a zvyšovať valivý odpor) a od vlastností povrchu (nerovný a neúplne tuhý povrch bude valivý odpor zvyšovať).

Celkovo si teda horizontálnu silu pôsobiacu na auto môžeme približne vyjadriť ako

$$F = C_1 + C_2 v^2,$$

kde C_1 a C_2 sú konštanty. C_1 teda v sebe skrýva valivý odpor kolies a aj trenie súčiastok v aute. Ložiská sú v praxi veľmi efektívne (minimalizovanie trenia je jeden z hlavných dizajnových parametrov pri konštrukcii), preto môžeme povedať, že táto odporová sila C_1 je spôsobená hlavne valivým odporom. Uvažujme najskôr, že C_1 je zanedbateľné. Na Wikipédii sa nachádzajú konštanty aerodynamického odporu pre rôzne autá (stačí vybrať podobne hranatý a veľký model ako Felícia). Vieme teda vypočítať

$$C_2 = \frac{1}{2}\rho C_d A \approx 0{,}5\ \mathrm{Ns^2/m^2}.$$

Takže napríklad pri cestovnej rýchlosti $60\ \mathrm{km/h} \approx 17\ \mathrm{m/s}$ by malo byť spomalenie $a = \frac{C_2 v^2}{m} \approx \frac{144}{1000} \approx 0{,}14\ \mathrm{m/s^2}$. Odporová sila sa bude znižovať, ako budeme spomaľovať a celková prejdená dráha sa dá vypočítať napríklad numericky pomocou jednoduchej simulácie v Exceli (čas rozdelíme na krátke úseky, počas ktorých budeme uvažovať, že odporová sila, zrýchlenie a rýchlosť sú konštantné). Výsledok je, že Felícia sa nezastaví ani po piatich kilometroch, čo je veľmi odlišné od reality, kde sa auto samo zastaví po niekoľko sto metroch. Zanedbajme teda vplyv aerodynamického odporu a hor sa na meranie C_1. Palubná doska priemernej Felície obsahuje rýchlomer, otáčkomer, počítadlo prejdenej vzdialenosti s presnosťou na 100 metrov a počítadlo spotreby.

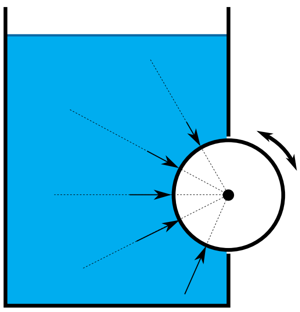
Teda na rovine zrýchlime na $v_0 = 60$ km/h, vyradíme rýchlosť, zapamätáme si číslo z tachometra na začiatku s_0 a pri zastavení s_1. Odporovú silu si vypočítame zo zákona zachovania mechanickej energie $C_1(s_1 - s_0) = \frac{1}{2}mv_0^2$ a po úprave $C_1 = \frac{1}{2}\frac{mv_0^2}{s_1 - s_0}$.

Keďže naše meradlo má najmenší dielik porovnateľný s meranou dráhou, bolo by dobré experiment opakovať a výslednú odporovú silu uviesť ako priemer meraní aj so štandardnou odchýlkou.

3.2 Le-glass

vzorák **Viki**, opravovala **Viki**

Na to, aby sa valec točil, museli by naň pôsobiť nejaké sily. V situácii, v ktorej sme, sú najrelevantnejšie sily hydrostatického tlaku, ktoré pôsobia kolmo na povrch Legovho valca. Kolmo však znamená, že všetky sily pôsobiace na zaoblenú časť smerujú do osi otáčania valca, čiže nemajú otáčavý účinok, a tie, ktoré pôsobia na podstavy valca, sa navzájom vyrušia. To, že vyššie sú tie sily slabšie a nižšie silnejšie, nám však nič nemení na tom, že ich smer je vždy do osi otáčania.



Čo sa týka energie, zo zákona zachovania energie v rámci tejto sústavy vieme, že na to, aby valček konal prácu otáčavým pohybom, musí byť premenená nejaká iná energia tej istej sústavy. Túto zmenu by mohla mať na svedomí jedine voda a následne by sme počítali so vzťahom pre energiu otáčavého pohybu $E = \frac{1}{2}\frac{I}{\omega^2}$. Voda však svoju energiu nemení – ani neprúdi, ani nevyteká, teda jej energiu valček nevyužíva. Valec sa teda otáčať nebude.

3.3 Spring is coming

vzorák **Kvík** a **Terka**, opravovala **Terka**

Na začiatok treba podotknúť, že zadanie dovoľovalo dve interpretácie, z ktorých jedna bola o dosť jednoduchšie vypočítateľná. Preto nezúfajte ak nemáte veľa bodov. Prvé riešenie sa dalo použiť pri interpretácii, keď obe pružiny v zadaní boli na stole položené zvislo, a teda boli obe v stlačenom stave.

Ako sa správa hmotná pružina s nenulovou pokojovou dĺžkou? Môžeme sa na ňu pozrieť ako na mnoho rovnakých kratších pružiniek, spojených za seba. Silou, ktorá konkrétnu pružinku stláča, je v našom prípade tiaž pružiniek, ktoré sa nachádzajú nad ňou.

Malý kúsok pružiny na samom vrchu teda nebude stlačený vôbec. Stlačenie sa bude postupne lineárne zvyšovať[1] až po spodok. Hmotná pružinka sa teda nespráva ako nehmotná pružinka so závažím.

[1] Lineárne od dĺžky nestlačenej pružiny, nie výšky na už stlačenej pružine.

Ako sa teda skráti celá pružinka po stlačení? Môžeme integrovať výraz typu $\int_0^L ax\,\mathrm{d}x$; ak nevieme alebo nechceme, nevadí, skrátenie si môžeme predstaviť inak: ku každému kúsku na pružine vieme nájsť druhý „zrkadlový“ kúsok na druhej strane pružiny, ktorý je rovnako vzdialený od jej stredu. Ak sčítame sily, ktoré na tieto dva kúsky pôsobia, dokopy sú vždy rovné tiaži celej pružiny. Výsledné celkové skrátenie je teda presne také isté, ako keby sme mali nehmotnú pružinu s rovnakou pokojovou dĺžkou, stlačenú silou rovnou polovici tiaže našej hmotnej pružiny. Tá je ale takisto úmerná jej dĺžke, takže výsledná závislosť bude až kvadratická. Označme si konštantu úmernosti c. Potom môžeme pre dĺžku stlačenej prvej pružiny L_1 a druhej pružiny L_2 napísať

$$L_1 = L_0 - \frac{1}{2}cL_0^2 \qquad \text{a} \qquad L_2 = 2L_0 - \frac{1}{2}c(2L_0)^2.$$

Možno to tak nevyzerá, ale už máme všetko, čo potrebujeme: stačí tieto rovnice odčítať, presnejšie polovicu druhej od prvej. Dostaneme $L_1 - \frac{1}{2}L_2 = \frac{1}{2}cL_0^2$. Pri zavesení zo stropu sa každý element bude správať rovnako, až na znamienko (každý kúsok sa namiesto skracovania bude rovnako predlžovať) a orientáciu (najviac sa natiahnu kúsky pri strope, najmenej tie naspodu pružiny). Výsledná dĺžka je potom

$$L_0 + \frac{1}{2}cL_0^2 = L_0 + L_1 - \frac{1}{2}L_2 = 3L_1 - L_2,$$

pričom výraz $\frac{1}{2}cL_0^2$ nemusíme vyhodnocovať. Po dosadení hodnôt zo zadania nám pre visiacu pružinu vyjde dĺžka 304 mm.

Pri druhej interpretácii je riešenie o niečo zložitejšie, a to keď je prvá pružinka vodorovne na stole s pokojovou dĺžkou $L_0 = 276$ mm a druhá pružinka zvislo na stole, stlačená, s dĺžkou $L_2 = 524$ mm. Pružinku s hmotnosťou m, tuhosťou k a pokojovou dĺžkou L si môžeme rozdeliť na N maličkých pružiniek s hmotnosťou $\frac{m}{N}$, pričom každý kúsoček má tuhosť Nk a dĺžku $\frac{L}{N}$. Keď bude N dostatočne veľké, hmotnosť jedného kúsočka bude taká malá, že s každým kúsočkom môžeme pracovať ako s nehmotnou pružinkou, pre ktorú platí $F = -k\Delta L$ kde F je sila pôsobiaca na pružinku a ΔL je dĺžka, o ktorú sa vplyvom pôsobenia sily F pružinka predĺži/skráti. Celkové skrátenie je súčtom skrátení všetkých pružiniek $\Delta L = \sum_{i=1}^{N} \Delta L_i$, a teda sila na i-tý kúsok pod vplyvom i pružiniek je $F_i = i\frac{m}{N}g$ a skrátenie je $\Delta L_i = \frac{F_i}{Nk}$. Výsledné skrátenie celej pružinky je

$$\Delta L = \sum_{i=1}^{N} \Delta L_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{i\frac{m}{N}g}{Nk} = \sum_{i=1}^{N} i\frac{mg}{N^2k} = \frac{mg}{k}\sum_{i=1}^{N}\frac{i}{N^2} = \frac{mg}{k}\frac{1}{2},$$

s použitím $\sum_{i=1}^{N} \frac{i}{N^2} = \frac{N^2}{2N^2}$ ak sa N blíži k nekonečnu. Keďže pri zavesenej pružinke fyzika funguje rovnako, akurát sa pružinka predlžuje, pre stlačenú druhú pružinku a natiahnutú prvú pružinku dostávame

$$L_2 = 2L_0 - \frac{2mg}{2\frac{k}{2}} \qquad \text{a} \qquad L = L_0 + \frac{mg}{k}.$$

Po vyjadrení dosadení hodnôt zo zadania nám pre visiacu pružinu vyjde dĺžka $L = 2L_0 - \frac{L_2}{2} = 290$ mm.

Na záver ešte vsuvka o tom, ako pracovať s tuhosťou pružín. Keď máme N nehmotných pružiniek s tuhosťou k za sebou a zavesíme na ne závažie s hmotnosťou m, každá sa natiahne o x. Pre veľkú pružinku s tuhosťou K , zloženú z N pružiniek teda platí $mg = KNx$, keďže predĺženia sa sčítajú. Pre hociktorú malú pružinku zas platí $mg = kx$. To znamená, že $KNx = kx$, a teda $K = \frac{k}{N}$.

3.4 Oh... how the tables have turned!

vzorák **PA3K**, opravovali **PA3K** a **Lucka**

Ako ste si určite všimli, táto úloha bola nezvyčajná, a preto aj jej vzorové riešenie nebude vo zvyčajnej forme, na akú ste možno zvyknutí. V prílohe[2] môžete nájsť ozajstný Patrikov protokol, ktorý považujeme za správny. Porovnanie ho so zadanými protokolmi necháme na vás. Formát, v akom je správny Patrikov protok napísaný, by sme ako opravovatelia veľmi ocenili vo vašich budúcich experimentálkach, pretože je prehľadný, pekne štrukturovaný a je v ňom všetko potrebné na to, aby sme dobre porozumeli tomu, čo ste vo svojich pokusoch robili. Aby sme vám však iba nedali PDF s vysnívanou štruktúrou experimentálok, zhrnieme si tu zopár zásad, ktorých dodržiavanie by nám veľmi pomohlo pri opravovaní.

1. Štrukturovanie textu na úvod, postup, nákres, spracovanie nameraných údajov, diskusiu, záver, literatúru, poprípade na ešte niečo iné, čo vyžaduje experiment.
2. Snažíme sa nerobiť gramatické a štylistické chyby.
3. Používanie prvej osoby množného čísla, teda „zoberieme“, „urobíme“, „dostaneme“, atď.
4. Vyhýbame sa expresívnym a nárečovým výrazom. Snažíme sa, aby náš text znel profesionálne a rigorózne.
5. Pri písaní teórie sa snažíme aspoň trochu opísať alebo odvodiť, ako sme vzorce, ktoré používame, získali Nechceme aby sa vzorce sčista-jasna len tak objavili.
6. Všetky veličiny, ktoré v príklade vystupujú, pomenujeme, prípadne napíšeme aj ich jednotku.
7. Nebojíme sa poriadne rozpísať postup merania. Chceme, aby bol podrobný do takej miery, že keď dáme náhodnému človeku urobiť to isté meranie, bude presne vedieť, čo má robiť.
8. Meranie spracujeme do tabuliek a ak je to potrebné, vykreslíme aj grafy. Tabuľky, grafy a rovnako aj obrázky, pomenujeme a v skratke napíšeme, čo sa v nich nachádza.
9. V diskusii a závere spomenieme nie len výsledok merania a čo všetko z neho plynie, ale aj chyby merania, ktoré sme urobili. Vždy je veľmi užitočné k nameraným hodnotám uviesť ďalšie informácie, akými sú napríklad absolútna chyba, relatívna chyba, rozptyl, najväčšia a najmenšia hodnota, stredná hodnota (priemer), medián, atď. Nie všetko je potrebné, ale čím viac toho je, tým väčšiu výpovednú hodnotu meranie má.
10. Na záver nezabudneme uviesť zdroje a použitú literatúru. V prípade kníh je dobré uviesť názov, autora a niekedy aj rok vydania. Ak je zdrojom internet, je potrebné uviesť link.

Ak tento formát použijete pri riešení experimentálnych úloh v budúcnosti, veľmi sa potešíme. Zároveň vám to môže pomôcť aj v škole pri chemických či fyzikálnych protokoloch.

3.5 Očkované termodynamické praktikum

vzorák **Tomáš**, opravoval **Tomáš**

Postup riešenia tohto príkladu je pomerne jednoduchý. Zistíme, koľko tepla z chaty unikne, od toho odpočítame teplo dodané chate inými spôsobmi ako kúrením v krbe, a tento rozdiel prepočítame cez výhrevnosť dreva na jeho hmotnosť, aby sme vedeli, koľko ho musíme spáliť v krbe.

Chata môže strácať teplo najmä dvomi spôsobmi – vedením tepla cez steny chaty, a sem tam treba aj vyvetrať, čím teplý vzduch uniká a na jeho miesto prichádza studený. Spočítať tepelné straty vetraním vieme pomocou vzťahu $Q = mc_v\Delta T$, kde m je hmotnosť studeného vzduchu, ktorý vstúpil do chaty, c_v je tepelná kapacita pri

[2] https://fks.page.link/37-1-3-4-sol

stálom objeme[3] a ΔT je rozdiel medzi pôvodnou vonkajšou teplotou vzduchu a teplotou, na ktorú ho musíme zohriať, aby bolo v chate príjemne teplúčko.

Pre vedenie tepla existuje vo fyzike rovnica vedenia tepla. Je diferenciálna, parciálna a druhého rádu. S pár zjednodušeniami je však jej riešenie jednoduché, ba priam až intuitívne. Prvým zjednodušením je, že teplu prikážeme šíriť sa cez steny len v smere kolmo na povrch stien. Druhé zjednodušenie je, že vonkajšia aj vnútorná strana steny budú mať po celý čas konštantnú teplotu. Potom za čas δt unikne cez stenu s plochou S a hrúbkou l teplo

$$Q = \lambda \frac{S\Delta T}{l} \Delta t, \tag{3.5.1}$$

kde ΔT je rozdiel teplôt medzi vnútorným a vonkajším povrchom steny a λ je koeficient tepelnej vodivosti materiálu steny. Naozaj to je intuitívne – čím väčšiu máme stenu a čím väčší je rozdiel teplôt, tým viac tepla unikne, a naopak ak máme hrubšiu stenu, tým menej tepla unikne. Ak máme dostatočne veľké steny, tak teplo cez ne zväčša naozaj prúdi kolmo na povrch stien. Niekde v rohoch to tak už nie je, ale je to zanedbateľný efekt voči zvyšku steny.

Ako už určite tušíte po prečítaní prvého odseku, chata sa dá zohriať aj inakšie ako kúrením v krbe. Televízory či notebooky aj s nabíjačkou mávajú výkon asi 100 W, sporák má pri plnom výkone aj niekoľko kW. Keď spoza mrakov vykukne Slnko, tiež dokáže príjemne ohriať. V chate je však aj 10 ľudí, ktorých si môžeme aproximovať ako 10 absolútne čiernych telies. Plocha človeka je približne $S = 2\ \mathrm{m}^2$ a teplota pokožky $T_p = 33\ ^\circ\mathrm{C}$. Podľa Stefanovho-Boltzmannovho zákona tak človek vyžaruje tepelné žiarenie s výkonom $P_out = S\sigma T_p^4 \approx 1000\ \mathrm{W}$. Prvé upozornenie: T_p je termodynamická teplota, ktorú dosádzame v kelvinoch. Druhé upozornenie: keď sa nachádzame v chate, t. j. v príjemnom teplúčku $T_0 = 25\ ^\circ\mathrm{C}$, všetko okolo nás takisto vyžaruje tepelné žiarenie, ktoré my prijímame ako výkon P_in. V skutočnosti teda človek stráca teplo výkonom $P = P_out - P_in = S\sigma(T_p^4 - T_0^4) \approx 100\ \mathrm{W}$, ktorým vlastne vykuruje chatu.

S mechanizmami ochladzovania a zohrievania chaty sme už oboznámení, poďme teda odhadnúť relevantné veličiny. 10 ľudí by rado malo tri alebo štyri miestnosti na spanie, kuchyňu, nejakú spoločnú miestnosť, stolný futbal taktisto zaberá dosť miesta. Hrubým odhadom, nech má chata štvorcový pôdorys so stranou dlhou 8 m, dve poschodia, teda výšku 6 m, a horné poschodie je menšie a má šikmý strop, lebo každá chata má predsa šikmú strechu. Vonkajšia plocha dolného podlažia je teda $4 \cdot 8\ \mathrm{m} \cdot 3\ \mathrm{m} = 96\ \mathrm{m}^2$. Horné poschodie môže mať vonkajšiu plochu $60\ \mathrm{m}^2$. Keďže pôdorys chaty má $64\ \mathrm{m}^2$, tak šikmá strecha musí mať viac, asi takých $94\ \mathrm{m}^2$, aby vonkajšia plocha chaty mala obsah rovných $250\ \mathrm{m}^2$. Avšak nesmieme zabudnúť na okná, ktoré sú z iného materiálu ako steny, a teda majú iný koeficient tepelnej vodivosti λ. Tie by mohli mať obsah približne $S_{\mathrm{okno}} = 25\ \mathrm{m}^2$. Preto steny majú plochu $S_{\mathrm{stena}} = 225\ \mathrm{m}^2$. Teplo nemusí unikať len von, môže ísť aj do zeme cez podlahu, tá má už spomínaných $S_{\mathrm{podlaha}} = 64\ \mathrm{m}^2$ ako pôdorys.

Koeficienty tepelných vodivostí môžeme nájsť, ako obvykle, na Wikipédii[4]. Hodnoty samozrejme závisia od mnohých faktorov, ale môžeme si vybrať nejaké priemerné hodnoty pre tehly $\lambda_{\mathrm{tehla}} = 0{,}7\ \mathrm{W/(mK)}$ a bude tam určite aj nejaká izolácia s $\lambda_{\mathrm{izolácia}} = 0{,}04\ \mathrm{W/(mK)}$. Keby sme odhadli hrúbky tehál a izolácie, vedeli by sme spočítať aj efektívny koeficient tepelnej vodivosti steny, ale ten môžeme rovno odhadnúť $\lambda_{\mathrm{stena}} = 0{,}1\ \mathrm{W/(mK)}$. Do rovnice 3.5.1 potrebujeme poznať aj hrúbku steny, ktorá nech je $l_{\mathrm{stena}} = 0{,}5\ \mathrm{m}$. Podlaha pod linoleom či parketami môže byť na betónovej základovej doske hrubej $l_{\mathrm{podlaha}} = 1\ \mathrm{m}$ a pre koeficient tepelnej vodivosti betónu nájdeme hodnotu $\lambda_{\mathrm{podlaha}} = 1{,}3\ \mathrm{W/(mK)}$. Pri oknách to je trochu inak, tam sa udáva koeficient, ktorý

[3] Pri plynoch totižto poznáme aj tepelnú kapacitu pri stálom tlaku c_p, ale po zavretí okna sa vzduch v miestnosti ohrieva pri stálom objeme, ktorý je daný veľkosťou miestnosti.

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_thermal_conductivities

už v sebe má zarátanú[5] hrúbku okna a opisuje celkové tepelné straty, teda vedením aj žiarením cez okno. Pre dvojvrstvové okno to je $\lambda_{\text{okno}} = 2\ \mathrm{W/(m^2K)}$. V rovnici 3.5.1 vystupuje aj rozdiel teplôt. Príjemné teplúčko sme už definovali ako $T_0 = 25\ °\mathrm{C}$, ale vonku sa teplota počas dňa mení. Použijeme preto priemernú teplotu vonku, ktorá nech je $T_1 = -5\ °\mathrm{C}$, teda rozdiel teplôt je 30 °C. Nezabudnime ani na to, že betón pod podlahou siaha meter pod zem, kde už nie je −5 °C, ale o pár stupňov teplejšie, teda pre podlahu bude rozdiel teplôt odhadom $\Delta T_2 = 25\ °\mathrm{C}$. Po dlhom odhadovaní môžeme konečne niečo spočítať, konkrétne koľko tepla stratí chata vedením tepla. Vypočítame, koľko tepla unikne za čas Δt cez jednotlivé povrchy podľa rovnice 3.5.1 a sčítame ich.

$$Q_{\text{vedenie}} = \lambda_{\text{stena}} \frac{S_{\text{stena}} \Delta T_1}{l_{\text{stena}}} \Delta t + \lambda_{\text{okno}} S_{\text{okno}} \Delta T_1 \Delta t + \lambda_{\text{podlaha}} \frac{S_{\text{podlaha}} \Delta T_2}{l_{\text{podlaha}}} \Delta t = 4930\ \mathrm{W} \Delta t.$$

Dĺžka pobytu na chate je $\delta t = 48\ \mathrm{h}$, čo nám vo výsledku dáva uniknuté teplo $Q_{\text{vedenie}} \approx 8{,}52 \cdot 10^8\ \mathrm{J}$.

Keď sa teraz pozrieme na vetranie, zistíme, že je zanedbateľné oproti Q_{vedenie}, pretože aj ak by sme celú chatu vychladili na −5 °C a chceli vykúriť naspäť na príjemných $25 °C, tak pri objeme $V = 300\ \mathrm{m^3}$, hustote $\rho = 1{,}2\ \mathrm{kg/m^3}$ a tepelnej kapacite pri stálom objeme $c_v = 718\ \mathrm{J/(kgK)}$ vzduchu nám stačí teplo $Q_{\text{vetranie}} = mc_v\Delta T = V\rho c_v \Delta T \approx 7{,}75 \cdot 10^6\ \mathrm{J}$, čo je o dva rády menej než Q_{vedenie} a za dva dni v zime určite nevyvetráme až toľko, aby to bolo porovnateľné s jednorazovým vychladením celej chaty na −5 °C.

Teraz sa môžeme presunúť k vykurovaniu. Už sme spočítali, že jedna osoba vykuruje chatu výkonom 100 W, ale osoba chodí aj von na prechádzku, postaviť snehuliaka, guľovať sa a iné. Z dvojdňového pobytu tak chatu 10 osôb svojou prítomnosťou vykuruje asi po čas $\Delta t = 44\ \mathrm{h}$, to je teplo

$$Q_{\text{osoba}} = 10 \cdot 100\ \mathrm{W} \cdot 44\ \mathrm{h} \approx 1{,}58 \cdot 10^8\ \mathrm{J}.$$

Elektrospotrebiče – televízor, notebooky, nabíjačky aj žiarovky a chladnička[6] nech bežia dokopy 24 h[7] s priemerným výkonom spolu 500 W, tým dodajú chate

$$Q_{\text{elektro}} = 4{,}32 \cdot 10^7\ \mathrm{J}.$$

Pre jeho veľký výkon, sporák spočítame samostatne. Výkon síce môže byť niekoľko kW, ale ak chceme to jedlo jesť a nie zoškrabávať z dna hrnca, z výkonu trochu uberieme, rádovo na $1000 W, a počas 6 h varenia nás tak okrem obeda poteší aj dodaným teplom

$$Q_{\text{sporák}} = 1000\ \mathrm{W} \cdot 6\ \mathrm{h} = 2{,}16 \cdot 10^7\ \mathrm{J}.$$

Môže to znieť zvláštne, ale aj v zime nám vie Slnko poriadne prikúriť. Poznáme solárnu konštantu $1361\ \mathrm{W/m^2}$, ktorá však bola nameraná mimo atmosféry a k nám dole prichádza asi $70 % celkovej energie zo Slnka. Do chaty nám svieti cez okná, ale iba cez tie, ktoré sú na južnej strane, čiže asi polovica z celkových $25\ \mathrm{m^2}$. Okrem toho, ak chata stojí rovno, tak Slnko nám nesvieti kolmo cez okná, ale z nejakého uhla, a efektívne teda slnečné lúče prechádzajú menšou plochou, odhadnime to ako 0,75 – násobok veľkosti plochy. S týmto by sme sa mohli ešte pohrať a pridať aj ďalšiu konštantu vyjadrujúcu množstvo svetla, ktoré okno odrazí naspäť, ale dôležitejšie je, koľko hodín slnečného svitu dostaneme. Napríklad v Poprade[8] to je 2,5 h za deň.

[5] Všimnite si, že tento koeficient má preto inú jednotku ako predchádzajúce.
[6] Tam vzadu je teplá.
[7] Beží vám chladnička? Možno práve teraz nie, pretože chladí iba vtedy, keď je v nej vo vnútri príliš teplo.
[8] `https://www.shmu.sk/sk/?page=1786&id=&identif=11934&rok=2021&obdobie=1981-2010`

Počas dvojdňového pobytu nám teda Slnko dodá

$$Q_{\text{Slnko}} = 0{,}7 \cdot 1361\ \text{W/m}^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 25\ \text{m}^2 \cdot 0{,}75 \cdot 2 \cdot 2{,}5\ \text{h} \approx 1{,}61 \cdot 10^8\ \text{J}.$$

Konečne sa dostávame k otázke, koľko dreva potrebujeme. Predsa toľko, aby sme jeho spálením získali toľko tepla, koľko je rozdiel medzi uniknutým a dodaným teplom. Staré známe modré Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy udávajú výhrevnosť dreva $H = 1{,}6 \cdot 10^7$ J/kg a rýchly prieskum trhu ukazuje, že účinnosti krbov sa pohybujú okolo $\eta = 0{,}75$. Spálením dreva hmotnosti m potrebujeme získať teplo

$$\eta m H = Q_{\text{vedenie}} - Q_{\text{osoba}} - Q_{\text{elektro}} - Q_{\text{sporák}} - Q_{\text{Slnko}},$$

teda potrebujeme

$$m = \frac{Q_{\text{vedenie}} - Q_{\text{osoba}} - Q_{\text{elektro}} - Q_{\text{sporák}} - Q_{\text{Slnko}}}{\eta H} \approx 39\ \text{kg}$$

dreva. To je pomerne uveriteľné číslo na to, koľko rôznych hodnôt sme odhadovali. Vidíme, že tepelné straty chaty možno takmer výhradne pripísať vedeniu tepla, a ak by majiteľ chaty myslel na izoláciu podlahy, nepotrebovali by sme spáliť toľko dreva. Tým vlastne chceme povedať, že konečné číslo nie je až také dôležité. Pokiaľ nám ale vyšla tona dreva alebo naopak, že by sme chatu museli stále ochladzovať, je jasné, že sme na niečo zabudli, resp. zle odhadli.

Pri výpočte sme veľa vecí zanedbali, napríklad, že ruky si umývame teplou vodou, ale ona aj hneď odtečie, a tak nestihne takmer vôbec ohriať chatu. Alebo keď sa sprchujeme, tak tam je prítomná aj nejaká ventilácia kvôli vlhkosti, ktorá ale odnáša preč aj teplo, a kozmické mikrovlnné pozadie so jeho biednymi 2,7 K akiste môžeme tiež zanedbať.

3.6 To chce gule

vzorák **Kvík**, opravoval **Nina**

Úloha vyzerá celkom priamočiaro – a aj je, akurát si treba dať pozor a nenechať sa oklamať čiastkovým úspechom. Simulovať môžeme buď v nejakom programovacom jazyku, alebo sa uspokojíme s nejakým tabuľkovým procesorom, napríklad Excelom. Simulácia bude v oboch prípadoch rovnaká, akurát za C_d prvý raz dosadíme konštantu, druhý raz si doň musíme v každom kroku priradiť výsledok pomerne zložitého výpočtu. Ten však počítač urobí za nás, stačí mu raz povedať, ako sa to robí.

Keďže kroky si môžeme voliť ako chceme[9], postačí nám jednoduchá Eulerova metóda: v každom kroku si analyticky spočítame zrýchlenie a. Tu našťastie závisí iba od rýchlosti ako

$$a(v) = \frac{F(v)}{m} = -\frac{C_d S \rho_a v^2}{2m} = -\frac{C_d \pi r^2 p M_a v^2}{2mRT}, \tag{3.6.1}$$

kde sme hustotu vyjadrili zo stavovej rovnice ideálneho plynu, pričom sa však nič hrozné nestane, ak za ňu dosadíme tabuľkovú hodnotu.

Teraz v každom kroku rýchlosť zväčšíme o $a\Delta t$[10], polohu zväčšíme o $v\Delta t$ a tak až donekonečna – alebo teda kým neuvidíme, že sa delová guľa zastavila, resp. jej rýchlosť klesla pod nejakú kritickú hodnotu, povedzme

[9] Vychádzame z trúfalého predpokladu, že ste nezačali riešiť o 23:30 v posledný deň pred termínom.
[10] Zrýchlenie a bude záporné, takže ju v skutočnosti budeme znižovať.

1 μm/s. Teda máme predpis

$$\begin{aligned} x_0 &= 0\ \mathrm{m}, & v_0 &= 100\ \mathrm{m/s}, \\ x_{n+1} &\leftarrow x_n + v_n \cdot \Delta t, & v_{n+1} &\leftarrow v_n + a(v_n) \cdot \Delta t \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

a s tým si už program alebo tabuľkový procesor hravo poradia.

Jednoduché? Vyzerá to tak. Lenže pri numerickom riešení diferenciálnych rovníc často natrafíme na nepríjemný jav. Presnosť totiž závisí od veľkosti kroku.

- Ak zvolíme priveľký krok, pri hodnotách, kde sa zrýchlenie prudko mení (v našom prípade na začiatku pohybu, keď je odporová sila veľká), stratíme presnosť. Ak by sme zvolili veľmi veľký krok, guľa by v našom výpočte zastavila prakticky okamžite, alebo sa dokonca začala pohybovať naspäť.
- Ak zvolíme primalý krok, výpočet síce bude veľmi presný… akurát jeho konca sa nemusíme dožiť.

Na tejto rovnici je trochu nepríjemné práve to, že na dosiahnutie dostatočnej presnosti potrebujeme veľmi malý krok[11]. Ak sa uspokojíme s prvým tipom, ktorý zvolíme, určite nedostaneme dobrý výsledok. Ak Δt trochu zväčšíme, zrazu nám vyjde niečo úplne iné. Aby nám malá zmena Δt dala iba malú zmenu výsledku, musíme použiť krok natoľko malý, že nás pred ukončením výpočtu zastihne dôchodkový vek. Rozumná presnosť sa dá dosiahnuť pre $\Delta t = 0{,}001$ s. Pri sekundovom kroku už tratíme veľa presnosti na začiatku pohybu.

S trochou zamyslenia sa ale vieme vynájsť: čo keby sme použili malé časové kroky vtedy, keď sa zrýchlenie prudko mení (teda zo začiatku), a veľké kroky neskôr, keď budú rýchlosť a odporová sila menšie? Napríklad po každom kroku zväčšíme Δt o 1 %, čiže ho vynásobíme 1,01. Takto vieme dosiahnuť obstojnú presnosť a zároveň stihnúť termín odovzdania. Rovnica 3.6.2 samozrejme prejde na

$$\begin{aligned} x_0 &= 0\ \mathrm{m}, & v_0 &= 100\ \mathrm{m/s}, & \Delta t_0 &= 0{,}001\ \mathrm{s}, \\ x_{n+1} &\leftarrow x_n + v_n \cdot \Delta t_n, & v_{n+1} &\leftarrow v_n + a(v_n) \cdot \Delta t_n, & \Delta t_{n+1} &\leftarrow \Delta t_n \cdot 1{,}01. \end{aligned} \tag{3.6.3}$$

Prvý prípad

V prvom prípade by sme mali zistiť, že nech robíme, čo chceme, vzdialenosť nám vždy závisí od počtu krokov, ktoré necháme počítač odsimulovať. Dokonca pekne exponenciálne: ak celkovú dobu simulácie zväčšíme e-krát, guľa zaletí o skoro presne 2500 m ďalej. Guľa sa teda nezastaví nikdy a preletená vzdialenosť môže byť ľubovoľne veľká, ak jej dáme dosť času.

Od vás sme to samozrejme nechceli, ale táto rovnica sa dá vyriešiť aj analyticky:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\alpha v^2 \quad \text{s počiatočnou podmienkou} \quad v(0) = 100\ \mathrm{m/s} \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{1}{100\alpha t + 1} \cdot 100\ \mathrm{m/s}.$$

Pre $t \to \infty$ síce rýchlosť klesá k nule, ale nie dosť rýchlo. Prejdená dráha je rovná

$$x(t) = \int_0^t v(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{\ln(100\alpha t + 1)}{\alpha},$$

[11] Áno, v prvej poznámke pod čiarou som klamal.

a teda rastie síce veľmi pomaly, ale nad všetky medze.

Druhý prípad

Popísaný vzťah je nechutný, ale zato veľmi dobre sedí s experimentálnymi dátami. Ani v tomto prípade sa guľa nikdy úplne nezastaví, pokles rýchlosti je ale dostatočne rýchly na to, aby celková vzdialenosť bola konečná. Žiadnym nastavením presnosti alebo dĺžky výpočtu nedosiahneme, aby preletela viac ako 32,639 km.

Aj keď kompletné analytické riešenie je v tomto prípade nedosiahnuteľné[12], pre malé Re sa funkcia C_d rovná zhruba $\frac{24}{\mathrm{Re}}$ a odporová sila sa približuje k Stokesovmu odporu

$$F = -\underbrace{6\pi\mu r}_{\beta} v .$$

Ako guľa brzdí, skôr či neskôr musí spomaliť natoľko, aby viskozita vzduchu začala hrať dôležitú rolu. Pohyb je potom popísaný rovnicou

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\beta v \qquad \Rightarrow \qquad v(t) = v(t_0)\mathrm{e}^{-\beta t},$$

Rýchlosť klesá k nule, aj keď ani teraz ju nikdy nedosiahne. Prejdená dráha je však rovná

$$x(\infty) = \int_{t_0}^{\infty} v(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{v(t_0)}{\beta},$$

čo celkom veselo konverguje ku konečnej hodnote.

Komentár k riešeniam

Úloha mala dve podstatné podčasti: správne naprogramovať samotné riešenie, a potom si zvoliť správnu dĺžku kroku. Pravda, nešlo o to, či nájdete konkrétnu hodnotu alebo predpis, ktorý dá ako-tak správny výsledok, ale či si všimnete, čo to robí.

3.7 Bungee oscilácie

vzorák **Tömáš**, opravoval **Kubo K.**

Najprv si musíme uvedomiť, aké sily pôsobia na závažie. Pôsobí na neho Slnko gravitačnou silou, pružina svojou vlastnou silou a odstredivá sila, pretože obieha okolo Slnka. Závažie je k nehmotnému bodu pripútané tak, že sa môže hýbať len v radiálnom smere, čiže jeho uhlová rýchlosť je rovnaká, ako uhlová rýchlosť telesa obiehajúceho Slnko po kružnici s polomerom R. Tú vypočítame z rovnosti gravitačnej a odstredivej sily:

$$\frac{GMm}{R^2} = m\omega_0^2 R \qquad \Rightarrow \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}.$$

Označme x výchylku pružiny z jej rovnovážnej polohy, pričom za kladnú považujeme výchylku smerom k Slnku. Hmotný bod môže kmitať iba okolo rovnovážnej polohy, kde je súčet síl naň pôsobiacich nulový, teda

[12] Museli by sme totiž integrovať čosi, čo závisí aj od tej príšernej funkcie zo zadania.

$$\frac{GMm}{(R-x)^2} - \frac{GMm}{R^3}(R-x) - kx = 0$$

$$GMmR^3 - 3GMm(R-x)^3 - kxR^3(R-x)^2 = 0.$$

Keď zátvorky umocníme a pre prehľadnosť zavedieme substitúcie $\omega_0^2 = \frac{GM}{R^3}$ a $\omega_p^2 = \frac{k}{m}$, tak dostaneme kubickú rovnicu

$$(\omega_0^2 - \omega_p^2)x^3 + R(2\omega_p^2 - 3\omega_0^2)x^2 + R^2(3\omega_0^2 - \omega_p^2)x = 0.$$

Máme šťastie, pretože jedno jej riešenie hneď vidíme. Je to $x_1 = 0$. Teraz môžeme x z rovnice vykrátiť, čím už dostaneme kvadratickú rovnicu, ktorá má dve riešenia

$$x_{2,3} = \frac{2\omega_p^2 - 3\omega_0^2 \pm \sqrt{4\omega_0^2\omega_p^2 - 3\omega_0^4}}{2(\omega_p^2 - \omega_0^2)}R.$$

Použijeme ešte jednu substitúciu $\alpha = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}$, čím sa riešenia zjednodušia na

$$x_{2,3} = \frac{2\alpha - 3 \pm \sqrt{4\alpha - 3}}{2(\alpha - 1)}R.$$

Zadanie po nás chce malé kmity, teda musí byť $R - x > 0$, kde $R - x$ je vzdialenosť hmotného bodu od Slnka. Pravdaže je možné aj $R - x < 0$, ale to by znamenalo, že hmotný bod by bol vychýlený až tak veľmi, že by prekmitol cez Slnko, čo určite nie sú malé kmity. Pre x_1 je podmienka zjavne splnená, pre ďalšie dve riešenia je

$$R - x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{4\alpha - 3}}{2(\alpha - 1)}R > 0.$$

Aby bol tento výraz vôbec definovaný, musí byť $\alpha \geq \frac{3}{4}$ a $\alpha \neq 1$. Pre $\frac{3}{4} \leq \alpha < 1$ je menovateľ záporný a čitateľ kladný v oboch prípadoch $\pm$ pred odmocninou, teda celý zlomok je záporný, a to nechceme. Ale pre $\alpha > 1$ je nerovnosť splnená pri riešení s $+$ pred odmocninou. Tým sme zistili, že z troch možných riešení rovnice dávajú v tejto úlohe fyzikálny zmysel iba rovnovážne polohy, v ktorých je výchylka pružiny $x_1 = 0$ a $x_2 = \frac{2\alpha-3+\sqrt{4\alpha-3}}{2(\alpha-1)}R$, t.j. sú od Slnka vzdialené $R_1 = R - x_1 = R$ a $R_2 = R - x_2 = \frac{1+\sqrt{4\alpha-3}}{2(\alpha-1)}R$.

Keď poznáme rovnovážne polohy, periódu malých kmitov už hravo zvládneme. Ak hmotný bod vychýlime o malú výchylku y z rovnovážnej polohy R_1, bude naň pôsobiť sila

$$ma = \frac{GMm}{(R_1 - y)^2} - \frac{GMm}{R_1^3}(R_1 - y) - ky.$$

Toto by sme nejako chceli upraviť do tvaru $a = -\omega^2 y$, čo je rovnica harmonického oscilátora s frekvenciou ω. Preto využijeme Taylorov rozvoj v okolí $y = 0$, čiže $\frac{1}{(R_1-y)^2} \approx \frac{1}{R_1^2} + \frac{2y}{R_1^3}$. Obmedzili sme sa na prvý rád y, keďže nás zaujímajú malé kmity. Tým sa nám rovnica zjednodušila na

$$ma = GMm\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{2y}{R_1^3}\right) - \frac{GMm}{R_1^3}(R_1 - y) - ky,$$

čo upravíme na

$$a = -(\omega_p^2 - 3\omega_0^2)y.$$

Frekvencia malých kmitov okolo rovnovážnej polohy R_1 je teda $\sqrt{\omega_p^2 - 3\omega_0^2}$, čo znamená, že ich perióda je

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_p^2 - 3\omega_0^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - 3\frac{GM}{R^3}}}.$$

Pre výchylku y od R_2 dostávame veľmi podobnú rovnicu

$$ma = \frac{GMm}{(R_2 - y)^2} - \frac{GMm}{R^3}(R_2 - y) - k(x_2 + y),$$

kde opäť využijeme $\frac{1}{(R_2-y)^2} \approx \frac{1}{R_2^2} + \frac{2y}{R_2^3}$ a po roznásobení aj $\frac{GMm}{R_2} - \frac{GMm}{R^3}R_2 - kx_2 = 0$, keďže ide o rovnovážnu polohu. Tým dostaneme rovnicu

$$a = -\left(\frac{k}{m} - GM\left(\frac{2}{R_2^3} + \frac{1}{R^3}\right)\right)y.$$

Perióda kmitov okolo rovnovážnej polohy R_2 je teda

$$T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - GM\left(\frac{2}{R_2^3} + \frac{1}{R^3}\right)}},$$

čo po dosadení všetkých substitúcií je

$$T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{GM}{R^3}\left(1 + 16\left(\frac{\frac{kR^3}{GMm} - 1}{1 + \sqrt{\frac{4kR^3}{GMm} - 3}}\right)^3\right)}}.$$