Trojsten

Fyzikálny korešpondenčný seminár
XXXVII. ročník, 2021/2022
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

FKS

Riešenia 1. kola zimnej časti

1.1 Budiž svetlo

vzorák **Kristína**, opravovala **Kristína**

Ak by bola miestnosť, v ktorej je Lucka, pokrytá ideálnymi zrkadlami (teda zrkadlami, ktoré by odrazili všetko svetlo, ktoré na ne dopadne) a v miestnosti by bolo dokonalé vákuum, naozaj by v nej mohlo vyžiarené svetlo ostať navždy. Dokonca ani Luckina prítomnosť by nespôsobila pohltenie svetla, keďže Lucka je neviditeľná a teda so svetlom nijak neinteraguje.

V miestnosti sú ale reálne zrkadlá, ktoré neodrazia všetko svetlo, ktoré na ne dopadne. Časť dopadajúceho svetla je teda pohltená a premenená na inú formu energie (najmä teplo). Svetlo sa bude v miestnosti odrážať od zrkadiel, až kým nebude týmto spôsobom pohltené všetko.

Možno by sme čakali, že tento proces bude nejakú chvíľku trvať a že by Lucka videla, ako sa v miestnosti postupne stmieva. Jednoduchým odhadom ale zistíme, že tento čas je príliš krátky na to, aby ho Lucka postrehla:

Uvažujme miestnosť tvaru kocky so stranou dĺžky napríklad 3 m. Pre jednoduchosť ďalej budeme uvažovať, že svetlo sa bude dopadať kolmo na zrkadlo, čiže prejde násobky rozmeru miestnosti. Ak by sme aj použili drahé zrkadlá s odrazivosťou 99,99 %, už po 50000 odrazoch by v miestnosti ostalo len $0{,}9999^{50000} \approx 0{,}007$, čiže menej ako 1 % svetla. Pri dĺžke miestnosti 3 m a rýchlosti svetla $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s zistíme, že na 50000 odrazov stačí svetlu iba

$$\frac{50000 \cdot 3\ \mathrm{m}}{3 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}} = 0{,}0005\ \mathrm{s}.$$

Ako vidíme, rýchlosť svetla je taká vysoká, že aj keď použijeme pomerne vysoko reflektívne zrkadlá, z pohľadu človeka prebehne celý proces okamžite.

1.2 Kockáči

vzorák **Lucy** a **Kubo**, opravovali **Lucy** a **Kubo**

Na začiatku tejto úlohy je dôležité zamyslieť sa nad tým, čo vlastne chceme zisťovať a čo vieme. Poznáme dva stavy, kedy kocky plávajú vo vode. Raz je na vrchu Patrik, vtedy sú obe kocky ponorené do nejakej hĺbky h. Potom je navrchu Lucka a my chceme zistiť, do akej hĺbky sú kocky ponorené teraz.

Čo všetko teda vieme povedať o týchto dvoch situáciách? Kocky vždy zostanú voľne plávať vo vode. To znamená, že sú v pokoji a teda výslednica síl, ktoré na ňu pôsobia, je nulová. Na objekt ponorený v kvapaline pôsobia dve sily, gravitačná a vztlaková. Obe si môžeme vyjadriť. Vieme, že pre gravitačnú silu platí vzťah $F_G = mg$ a z Archimedovho zákona vieme určiť vztlakovú silu ako

$$F_{\mathrm{vz}} = \rho_{\mathrm{kvapaliny}} V_{\mathrm{ponorenej\ časti}}\, g.$$

Tieto rovnice platia rovnako pre stav na začiatku aj na konci. Keď sa na ne pozrieme, všimneme si, že viacero premenných nepoznáme, to nám ale nemusí prekážať, pretože hľadáme súvislosť medzi hĺbkou ponoru na začiatku a na konci. Lenže v oboch stavoch je veľa vecí rovnakých. Lucka a Patrik majú vždy rovnakú hmotnosť, teda vo vzorčeku pre F_G máme dve konštanty a aj ich súčin bude konštantný. Ak má ale platiť rovnosť $F_G = F_{\text{vz}}$, potom aj sila F_{vz} musí byť konštantná.

Môžeme označiť obe sily F_{vz_1} a F_{vz_2} a po odstránení dlhých slov z dolných indexov ich postaviť do rovnosti

$$\rho_1 V_1 g_1 = \rho_2 V_2 g_2 .$$

Pritom vieme, že kvapalina aj tiažové pole sú v oboch prípadoch rovnaké, takže $\rho_1 = \rho_2$ a $g_1 = g_2$ a z rovnosti nám zostane $V_1 = V_2$.

Tu sa môžeme tešiť, pretože V_1 vieme presne vyjadriť pomocou dĺžok strán kociek a hĺbky ponoru (ktoré poznáme) a V_2 zas pomocou dĺžok strán kociek a novej neznámej hĺbky ponoru h_2. Takže by sme mali vedieť vyjadriť ponor na konci len pomocou známych premenných a, b a h.

Zostáva nám už len trocha geometrie. Vieme, že Patrik má stranu dlhú a, Lucka má stranu dlhú b, hĺbku ponoru na začiatku označme h a hĺbku na konci h_2. Na začiatku, keď sa Patrik položil na Lucku, mohli nastať dva stavy. Lucka mohla a nemusela byť celá ponorená. Ak nebola, $V_p = b^2 h$ a ak bola, $V_p = b^3 + a^2 (h - b)$. Po výmene mohli podobne nastať dva stavy: buď Patrik bol, alebo nebol celý ponorený.

Teda $V_p = a^2 h_2$ alebo $V_p = a^3 + b^2 (h_2 - a)$. Uvedomme si ešte, že ak bola Lucka na začiatku celá ponorená pod hladinou, potom Patrik, súc menšou kockou, bude po výmene určite tiež celý pod hladinou. Môžu teda nastať tri rovnosti:

$$\begin{aligned}
b^2 h &= a^2 h_2 &&\Rightarrow && h_2 = \frac{b^2 h}{a^2},\\
b^2 h &= a^3 + b^2 (h_2 - a) &&\Rightarrow && h_2 = \frac{b^2 h - a^3 + b^2 a}{b^2},\\
b^3 + a^2 (h - b) &= a^3 + b^2 (h_2 - a) &&\Rightarrow && h_2 = \frac{b^3 + a^2 (h - b) + b^2 a - a^3}{b^2}.
\end{aligned}$$

To, ktorá možnosť naozaj nastane, závisí od pomeru hustoty jednotlivých kociek a vody. Keďže nepoznáme hmotnosť ani hustotu Patrika a Lucky (len vieme, že sú hustí), nevieme s určitosťou povedať, ako to bude vyzerať.

1.3 Kužeľ z Ivachnovej

vzorák **Nina**, opravovala **Nina**

Pozrime sa najprv na sily, ktoré pôsobia na kužeľ. Prvá je tiažová $F_g = m \cdot g$ smerom nadol. Ďalšie sú sily F_{p1}, F_{p2}, ktorými na kužeľ kolmo na jeho steny pôsobia Patrikove prsty. No a tretie sú trecie sily F_{t1}, F_{t2} pôsobiace od miesta dotyku Patrikových prstov s kužeľom pozdĺž hrany kužeľa smerom k jeho vrcholu.

Ak Patrik drží kužeľ tak, že sa nehýbe, výsledná sila F naň pôsobiaca je nulová, čiže

$$\vec{F} = \vec{F_g} + \vec{F_{p1}} + \vec{F_{p2}} + \vec{F_{t1}} + \vec{F_{t2}} = \vec{0} .$$

Aby sme sa nemuseli hrať so smermi jednotlivých síl, rozdelíme si ich na horizontálne a vertikálne zložky, pričom kladný smer bude smerom doprava, resp. nadol. V horizontálnom smere to budeme mať jednoduché. Tiažová je v horizontálnom smere nulová, zatiaľ čo horizontálne zložky síl F_{p1} a F_{p2}, resp. F_{t1} a F_{t2} sú rovnako veľké a opačného smeru (smerom k osi kužeľa), takže sa navzájom vynulujú.

Vo vertikálnom smere nám pôsobí[1] [2]

$$
\begin{aligned}
F_g &= m \cdot g, \\
F_{p1v} = F_{p2v} &= F_{p1} \cdot \sin\alpha \\
F_{t1v} = F_{t2v} &= -F_{t1} \cdot \cos\alpha \geq -F_{p1} \cdot f \cdot \cos\alpha .
\end{aligned}
$$

Ich súčet potom bude

$$
\begin{aligned}
0 &= F_g + F_{p1v} + F_{p2v} + F_{t1v} + F_{t2v} \\
&\geq m \cdot g + 2 \cdot F_{p1} \cdot \sin\alpha - 2 \cdot F_{p1} \cdot f \cdot \cos\alpha .
\end{aligned}
$$

Potom

$$
\begin{aligned}
2 \cdot F_{p1} \cdot f \cdot \cos(\alpha) &\geq m \cdot g + 2 \cdot F_{p1} \cdot \sin(\alpha) \\
f &\geq \frac{m \cdot g + 2 \cdot F_{p1} \cdot \sin(\alpha)}{2 \cdot F_{p1} \cdot \cos(\alpha)} \\
f &\geq \frac{m \cdot g}{2 \cdot F_{p1} \cdot \cos(\alpha)} + \tan(\alpha)
\end{aligned}
$$

1.4 Just Bc. I can

1.5 Riešime len current

vzorák **Hovorca**, opravovali **Hovorca** a **Viki**

Pre obvod so striedavým prúdom musí platiť Ohmov zákon v tvare

$$U = ZI,$$

kde Z je tzv. celková impedancia obvodu. Impedancia je veličina, ktorá je zdanlivým odporom obvodu, t. j. práve také „oné“, aby platil Ohmov zákon v uvedenom tvare. Vo všeobecnosti sú v takomto prípade U, Z aj I komplexné veličiny, avšak jednoduchým trikom sa im dá bez problémov vyhnúť (ako toto vzorové riešenie ukáže), takže reálnostichtivý čitateľ nemusí vyhľadať lekársku pomoc.

Konkrétne totiž v každom okamihu v obvode platí, že

$$|U| = |Z||I|,$$

[1] Výpočet trecej sily z normálovej pomocou $F_t = f \cdot F_N$ je v skutočnosti mierne zavádzajúci. Trecia sila nikdy nebude väčšia ako sila proti ktorej pôsobí – nepohne telesom do opačného smeru, môže ho len udržiavať v pokoji – čiže môže túto silu veľkosťou len dorovnať tak, aby ich výslednica bola nulová. Správne preto je $F_t \leq f \cdot F_N$.

[2] Navyše trecie sily sú jediné, ktorých vertikálne zložky pôsobia smerom nahor, preto ak máme kladný smer definovaný ako smer nadol, tieto budú mať pre nás záporné hodnoty a z $F_t \leq f \cdot F_N$ dostávame $-F_t \geq -f \cdot F_N$.

kde tieto veľkosti sú brané v komplexnom zmysle. Špeciálne však ak má napätie amplitúdu U_0 a prúd amplitúdu I_0, platí vzťah

$$U_0 = |Z| I_0.$$

Zostáva už len čo-to povedať o veličine $|Z|$ – veľkosti impedancie. Tá je daná na prvý pohľad pomerne jednoduchým vzťahom

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

Na druhý pohľad si čitateľ povie: Čo sú R a X? Odpovede sú opäť nie prináročné – R je celkový odpor v obvode, niečo, s čím je čitateľ už pravdepodobne dôverne oboznámený. Veličina X je takzvaná *reaktancia* obvodu. Reaktancia je zdanlivým odporom cievky či kondenzátora v obvode so striedavým prúdom. Správa sa podobne, ako odpor (teda pre sériovo zapojené súčiastky je celková reaktancia súčtom reaktancií súčiastok), pričom nenáročným hľadaním (napríklad za pomoci Wikipédie, kde nájdete i rigorózne odvodenie) zistíte, že ak obvodom preteká striedavý prúd charakterizovaný uhlovou frekvenciou ω, potom:

- reaktancia cievky s indukčnosťou L je daná ako $X_L = \omega L$,
- reaktancia kondenzátora s kapacitou C je daná ako $X_C = -\frac{1}{\omega C}$.

Pozrime sa teraz na náš obvod. Máme v ňom ampérmeter (čo je vlastne len rezistor) s odporom R, cievku s indukčnosťou L a kondenzátor s neznámou kapacitou C. Celková veľkosť impedancie v našom obvode je teda na začiatku

$$|Z_0| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

a platí $U_0 = |Z_0| I_0$.

Následne pridáme ešte jeden sériovo zapojený kondenzátor s kapacitou C. Amplitúda U_0 ani uhlová frekvencia ω napätia zdroja sa nezmení a zadanie nám vraví, že ani amplitúda prúdu I_0 sa nezmení. Veľkosť impedancie sa ale zmení na

$$|Z_1| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - 2\frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Zachovať sa pritom má

$$U_0 = |Z_1| I_0.$$

Táto sústava rovníc (jedna so $|Z_0|$ a jedna so $|Z_1|$) má dve neznáme – C a I_0 – a môže mať rôzne riešenia v závislosti od U_0. Totižto pre $U_0 = 0$ je triviálnym riešením $I_0 = 0$ a ľubovoľné C. Ak ste túto možnosť vo svojom riešení neuviedli, body sme vám nestrhli, ale **pozor na to**. Úlohu je dobré riešiť všeobecne.

Ďalšie triviálne (i keď trochu hlúpe) riešenie je také, kde $C = 0$ (čiže náš „kondenzátor“ je vlastne len prestrihnutý drôt), vtedy obvodom prúd nepotečie a impedancia bude mať (ehm ehm) nekonečnú veľkosť, a tak (matematici traste sa!) dokážeme formálne splniť

$$U_0 = \infty \cdot 0.$$

No nie je to krásne? Pridajme preto i sprosté riešenie, kde náš „kondenzátor“ je vlastne len dokonale vodivý drôt, teda by mal nekonečnú kapacitu, niečo typu $C = \infty$. Vtedy je v oboch prípadoch impedancia rovnaká, nakoľko žiadny kondenzátor (prvý či druhý) neexistuje. Automaticky sa obvod správa rovnako ako keby sme kondenzátor nepridali a teda toto skutočne rieši úlohu, kde prúd má zostať v amplitúde rovnaký. Krása číslo dva. Ak ste tieto dve riešenia nemali, opäť vás strhnutie bodov nečaká, ale i pre vás je tu druhé **pozor na to!**

No, poďme konečne na nejaké slušné (t. j. tzv. nedegenerované) riešenie. Také bude vskutku jedno, a to bude konkrétne (dostaneme ho fakt poctivým riešením rovníc)

$$C = \frac{3}{2\omega^2 L}.$$

1.6 Fero, kozmický smetiar

vzorák **Kvík**, opravoval **Tomáš**

Začnime všeobecnou palebnou prípravou. Skúsme sa najprv zamyslieť nad charakterom žiarenia, ktoré budú vražedné špendlíkové hlavičky vyžarovať. Ak si ich povrch aproximujeme ako dokonale čierne teleso, ich spektrum bude popísané Planckovým zákonom. V hrubom odhade nás celé spektrum nemusí zaujímať, bude nám stačiť poznať typickú vlnovú dĺžku vyžarovaných fotónov. Tú spočítame jednoducho podľa Wienovho posunovacieho zákona ako

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T} = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K\,m}}{1{,}5 \cdot 10^{7}\ \mathrm{K}} \doteq 193\ \mathrm{pm}. \tag{1.6.1}$$

To sú tvrdé röntgenovské fotóny, z ktorých každý nesie rádovo 3000-krát väčšiu energiu, ako fotóny viditeľného svetla (asi 6,2 keV). Takéto žiarenie je skutočne životu veľmi nebezpečné a Ferovi ostáva dúfať, že ho nedostane priveľkú dávku.

Druhá vec, ktorá je v oboch prípadoch rovnaká, je zlomok celkovej vyžiarenej energie, ktorý Fero absorbuje. Guľaté teleso nemá žiadny preferovaný[3] smer vyžarovania a teda žiari do všetkých strán rovnako. Časť, ktorú absorbuje Fero, potom vieme spočítať ako pomer jeho prierezu (ten môžeme odhadnúť ako $S_{\mathrm{Fero}} = 0{,}5\ \mathrm{m}^2$) k povrchu gule s polomerom $d = 1000$ km, čiže

$$c_{\mathrm{Fero}} = \frac{S_{\mathrm{Fero}}}{4\pi d^2} \approx 4 \cdot 10^{-14}. \tag{1.6.2}$$

Fero teda absorbuje iba veľmi maličkú časť vyžiarenej energie.

Posledným dôležitým konceptom je *absorbovaná dávka*. Bez toho, aby sme šli do biologických detailov, môžeme prijatú energiu prerátať do jednotiek Gray, kde 1 Gy znamená, že 1 kg tkaniva absorbuje 1 J ionizujúceho žiarenia. Nebezpečné dávky sú rádovo v jednotkách Gy.

Prvý prípad

V prvom prípade by sme intuitívne mohli cítiť, že špendlíková hlavička hmoty asi nebude obsahovať dostatok energie na ukončenie Ferovho trápenia. Energia je v našom objekte uložená ako teplo, čiže mikroskopická kinetická energia jednotlivých atómových jadier.[4] Celkové množstvo tepelnej energie určíme ako súčin počtu

[3] pun intended

[4] Pri teplote 15 MK už molekuly nemôžu existovať, pretože kinetická energia vzájomných zrážok častíc je rádovo väčšia, ako energia chemických väzieb. Navyše v jadre Slnka máme hélium, ktoré chemické väzby aj tak vytvára veľmi nerado. Rovnaký argument platí aj pre elektróny, pretože pri týchto teplotách sú prakticky všetky atómy úplne ionizované.

častíc v špendlíkovej hlavičke a energie na jednu časticu, ktorá je v monoatomárnom plyne rovná

$$E = NE_1 = \frac{3}{2}NkT. \tag{1.6.3}$$

Koľkože je N? S využitím mad Wikipedia skillz ľahko zistíme, že jadro Slnka je tvorené zo zhruba dvoch tretín héliom ${}^4_2\mathrm{He}$ a zvyšok je vodík ${}^1_1\mathrm{H}$, takže priemerná hmotnosť jedného jadra je asi

$$m_0 = \frac{2}{3} \cdot 4u + \frac{1}{3} \cdot u = 3u \tag{1.6.4}$$

a že hustota v jadre je asi 150 000 kg/m^3.

Počet častíc je teda

$$N = \frac{m}{m_0} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{m_0} = \frac{4\pi \left(10^{-3}\ \mathrm{m}\right)^3 \cdot 150\,000\ \mathrm{kg/m^3}}{3 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}} \doteq 1{,}26 \cdot 10^{23}. \tag{1.6.5}$$

Celková energia po dosadení do rovnice 1.6.3 je

$$E = \frac{2}{3u}\pi r^3 \rho k T \approx 40\ \mathrm{MJ} \tag{1.6.6}$$

a teda Fero absorbuje asi

$$E_{\mathrm{Fero}} = c_{\mathrm{Fero}} E \approx 1{,}5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{J}. \tag{1.6.7}$$

Ferova hmotnosť je rádovo 100 kg, a teda dostane dávku asi $1{,}5 \cdot 10^{-8}$ Gy. To na ukončenie jeho biologických procesov určite nebude stačiť – väčšie nebezpečenstvo mu hrozí napríklad od toho, že si zabudne obliecť skafander.

Druhý prípad

Druhý prípad je ideovo náročnejší, ale výpočtovo o niečo jednoduchší. Tentokrát nemôžeme použiť hélium (ktoré by sa nám rýchlo rozplynulo), ale imaginárnu nezničiteľnú guličku, ktorá vydrží aj takéto obrovské teploty. Potom nám stačí spočítať, aký výkon na jednotku plochy dostáva Fero v ustálenom stave. Celkový vyžiarený výkon zistíme priamo zo Stefan–Boltzmannovho zákona ako

$$P = 4\pi r^2 \sigma T^4, \tag{1.6.8}$$

z čoho Fero opäť absorbuje malú časť, ktorú sme si už vypočítali v rovnici 1.6.2. Plošný výkon je

$$\Phi = \left(\frac{r}{d}\right)^2 \sigma T^4 \approx 10^{-18} \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2\,K^4)} \cdot \left(1{,}5 \cdot 10^7\ \mathrm{K}\right)^4 \doteq 2870\ \mathrm{W/m^2}, \tag{1.6.9}$$

čiže približne dvakrát viac, ako dostáva Zem od Slnka. To by sa ešte teoreticky prežiť dalo, keby šlo o neionizujúce žiarenie – röntgenovské žiarenie ale také milosrdné nie je. Stokilový Fero s účinným prierezom 0,5 m^2 v tomto prípade absorbuje približne 15 Gy/s, takže už po jednej sekunde vystavenia žiareniu sú jeho šance na šťastnú a pokojnú starobu minimálne.

1.7 Zapöjte mözgy

vzorák **Majo**, opravovali **Tete** a **Majo**

Naštartujme mözgy a poďme na to.

Ťažisko sústavy planét môžeme považovať za nehybné. Keďže majú obe planéty rovnakú hmotnosť, nachádza sa ťažisko v strede úsečky, ktorá ich spája. Ak sa majú planéty hýbať po kružnici, stred tejto kružnice sa musí nachádzať v ťažisku. Navyše musí spojnica planét v každom momente tvoriť priemer tejto kružnice, a tak má priemer tejto kružnice dĺžku D.

Planéty sú preto v každom momente vzdialené D, a tak na seba pôsobia gravitačnou silou $F_g = G\frac{M^2}{D^2}$. Na to, aby sa planéty pohybovali po kružnici s polomerom $\frac{D}{2}$, musí na každú z nich pôsobiť dostredivá sila $F_d = \frac{Mv^2}{\frac{D}{2}}$. Dostávame tak podmienku:

$$\begin{aligned} F_g &= F_d \\ G\frac{M^2}{D^2} &= \frac{2Mv^2}{D} \\ v &= \sqrt{\frac{GM}{2D}} \end{aligned} \tag{1.7.1}$$

Tým je prvá časť úlohy vyriešená. Čo sa stane ale keď bude rýchlosť menšia ako v? Na to musíme zapöjiť mözgy o čosi viac.

Pristavme sa ešte pri pohybe po kružniciach a trochu ináč sa pozrime na to, čo sa tam dialo. Vyberme si jednu z planét[5] a ignorujme tú druhú. Táto planéta cíti, že ju zo smeru ťažiska niečo ťahá smerom do ťažiska. Tejto planéte je ale úplne šumafuk, čo ju tam ťahá, dôležité je len to, že ju tam niečo ťahá. Mohla by nám tak napadnúť otázka, či nevieme niekam inam umiestniť iné teleso, ktoré by robilo to isté. A o to krajšie by to bolo, ak by sme to umiestnili do ťažiska a ešte by sa to ani nehýbalo.

Prekvapivo[6] niečo také vieme dosiahnuť. Umiestnime nejaké teleso do ťažiska a presuňme sa do sústavy spojenej s týmto telesom – tým zabezpečíme, že „ťažisko“ (teda toto teleso) sa nebude hýbať. Akú má mať naše teleso hmotnosť? V gravitačnom zákone $F_G = G\frac{M_1M_2}{R^2}$ sme R zmenšili na polovicu, čím sme F_G zväčšili na štvornásobok. Aby planéta stále cítila rovnakú silu, teleso musí mať štvrtinovú hmotnosť.

Preto sme celú situáciu v prvej časti mohli riešiť rovnako, ako keby sme v ťažisku mali zafixované teleso s hmotnosťou $\frac{M}{4}$, okolo ktorého by vo vzdialenosti $\frac{D}{2}$ obiehala planéta s hmotnosťou M.

Tento trik použime v druhej časti úlohy. Tu môžeme spraviť to isté[7] – rovnaké teleso s hmotnosťou $\frac{M}{4}$ priklincujeme do ťažiska a necháme okolo neho obiehať planétu, pričom druhú planétu úplne ignorujeme. Trajektória, ktorú v tejto sústave opíše planéta, bude presne rovnaká, akú by opísala v ťažiskovej sústave pôvodnej úlohy.

Pustime sa už konečne do riešenia. Z pohybu planéty poznáme jeden hlavný vrchol a jeho vzdialenosť od jedného z ohnísk. Poďme zistiť vzdialenosť druhého hlavného vrchola od tohto ohniska – nech má v tomto

[5] Ak potrebujete v hlave, aby sa nejako volala, nech sa volá Mözög.

[6] Alebo možno nie až tak prekvapivo. Potom vás ale asi neprekvapí ani hračka z Kinder Surprise.

[7] Pri odvodení tohto triku sme totiž použili iba jednu vec – to, že teleso sa zakaždým bude nachádzať v strede medzi planétami, a tak zmeníme vzdialenosť na polovicu.

bode planéta vzdialenosť x od ohniska a rýchlosť u'. Planéte sa v každom momente bude zachovávať moment hybnosti aj energia. Zo zákona zachovania momentu hybnosti dostávame vzťah:

$$\frac{D}{2}u = xu' \tag{1.7.2}$$

Kinetická energia planéty je $E_k = \frac{1}{2}Mu^2$, resp. $E_k = \frac{1}{2}Mu'^2$ a potenciálna energia[8] je zas[9] $E_p = -\frac{GM^2}{2D}$, resp. $E_p = -\frac{GM^2}{4x}$. Zákon zachovania energie tak dáva

$$\frac{1}{2}Mu^2 - \frac{GM^2}{2D} = \frac{1}{2}Mu'^2 - \frac{GM^2}{4x}.$$

Po dosadení 1.7.2 nám už len stačí vyriešiť túto rovnicu pre x:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}Mu^2 - \frac{GM^2}{2D} &= \frac{1}{2}Mu^2\left(\frac{\frac{D}{2}}{x}\right)^2 - \frac{GM^2}{4x} \\
\frac{1}{2}u^2\left(1 - \frac{D^2}{4x^2}\right) &= GM\left(\frac{1}{2D} - \frac{1}{4x}\right) \\
u^2\frac{4x^2 - D^2}{4x^2} &= GM\frac{2x - D}{2xD} \\
u^2 &= GM\frac{2x}{D\left(2x + D\right)}
\end{aligned}$$

Tu sa pristavme a všimnime si, že ak by sme chceli kružnicovú trajektóriu, t. j. $x = \frac{D}{2}$, vyjde nám presne to isté ako v 1.7.1. Môžeme pokračovať v úpravách:

$$\begin{aligned}
u^2 &= GM\frac{x}{D\left(x + \frac{D}{2}\right)} \\
u^2\frac{D^2}{2} &= GMx - u^2Dx \\
x &= \frac{u^2\frac{D^2}{2}}{GM - u^2D} \\
x &= \left(\frac{1}{\frac{GM}{u^2D} - 1}\right)\frac{D}{2}.
\end{aligned}$$

Na tomto výsledku si opäť vieme overiť viacero vecí. Či už opäť overiť, že pre $u = v$ vyjde $x = \frac{D}{2}$ alebo si všimnúť, že pre $u < v$ je zátvorka menšia ako 1, a teda je tento bod bližšie ako bod, v ktorom sme „začali“[10].

[8] Za hladinu nulovej potenciálnej energie berieme bod v nekonečne. Preto by nemuselo vyzerať tak divne, že potenciálnu energiu berieme zápornú.
[9] Pripomínam, že centrálne teleso má hmotnosť $\frac{M}{4}$.
[10] Čo verím, že je v zhode s predpokladom čitateľa.

Už máme všetko potrebné na zistenie rovnice elipsy. Aby sme ju zapísali v tvare $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, potrebujeme už len zistiť dĺžky polosí a, b. Dĺžku polosi a zistíme ľahko ako

$$a = \frac{\frac{D}{2} + x}{2} = \left(1 + \frac{1}{\frac{GM}{u^2D} - 1}\right)\frac{D}{4} = \left(\frac{\frac{GM}{u^2D}}{\frac{GM}{u^2D} - 1}\right)\frac{D}{4}.$$

Ľahko tiež vieme vypočítať lineárnu excentricitu[11]

$$ae = \frac{\frac{D}{2} - x}{2} = \left(1 - \frac{1}{\frac{GM}{u^2D} - 1}\right)\frac{D}{4} = \left(\frac{\frac{GM}{u^2D} - 2}{\frac{GM}{u^2D} - 1}\right)\frac{D}{4}.$$

Vedľajšia polos je preto dlhá

$$b = a\sqrt{1 - e^2} = \sqrt{\left(\frac{GM}{u^2D}\right)^2 - \left(\frac{GM}{u^2D} - 2\right)^2}\,\frac{1}{\frac{GM}{u^2D} - 1}\frac{D}{4} = \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{GM}{u^2D} - 1}}\right)\frac{D}{2}$$

a hľadaná rovnica elipsy pre $u < v = \sqrt{\frac{GM}{2D}}$ je

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\frac{GM}{u^2D}}{\frac{GM}{u^2D}-1}\right)^2\frac{D^2}{16}} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\frac{GM}{u^2D}-1}\right)\frac{D^2}{4}} = 1.$$

[11] Využívame pri tom naznačené $x < \frac{D}{2}$.