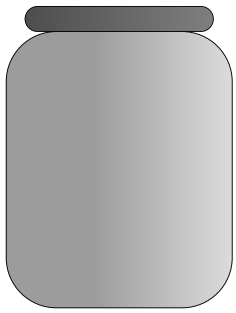
Fyzikálny korešpondenčný seminár
XXXI. ročník, 2015/2016
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 3. kola letnej časti

3.1 Emancipácia

vzorák **Kubo**, opravoval **MaťoB**

Enka by rada vedela, akú silu potrebujeme na odkrútenie vrchnáka zaváraninovej fľaše. Pokúste sa odargumentovať, aké všetky efekty nám môžu brániť v otvorení fľaše.



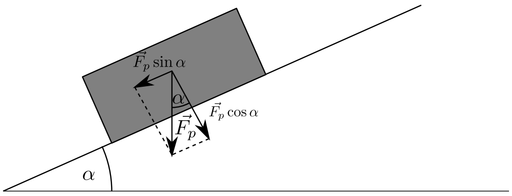
Zo skúsenosti vieme, že zaváraninové poháre sa neotvárajú ľahko. Zaujímavé ale je, že ak zatvoríme ešte raz, potom ide otvoriť už jednoducho (respektíve rovnako ťažko, ako keď sme ho zatvárali). Otázka teda znie: V čom sa líši situácia, keď pohár otvárame prvýkrát po dlhšej dobe a keď ho otvárame nie dlho po tom, čo sme ho uzatvorili?

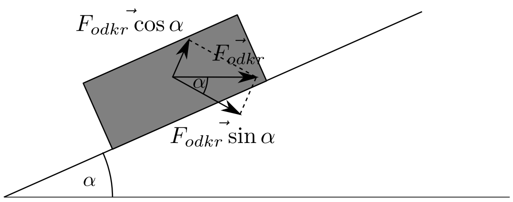
Poďme postupne. Ak nám pohár ide veľmi ťažko otvoriť, potom to znamená, že zvonku musí naňho tlačiť väčšia sila než zvnútra. Vonkajšia sila je daná atmosférickým tlakom o veľkosti $\sim 100\,\mathrm{kPa}$. Vnútri teda musí byť evidentne tlak menší. Takýto efekt sa zväčša dosahuje tak, že do pohára strčíme niečo, čo je teplejšie, než okolie (napríklad horúci ríbezľový džem), uzavrieme a počkáme, kým sa vyrovnajú teploty. Vo chvíli, kedy pohár uzatvárame, je samozrejme aj vnútri pohára tlak o veľkosti atmosférického. Zo stavovej rovnice ale vieme, že $pV = nRT$, takže ak zachovávame objem a počet častíc (čím tvrdíme, že sklo sa nescvrkne a žiadny atóm ani ríbezľa neunikne z pohára), tak pri znížení teploty sa zníži aj tlak. Ak sme napríklad do pohára uložili džem o teplote 50 °C, uzavreli a odložili do špajze s teplotou okolia 10 °C, tak sa po dostatočnom čase urobí v pohári podtlak (teplotu dosadzujeme v Kelvinoch)

$$\Delta p = p_A - p_A \frac{T_1}{T_2} = 100\,\mathrm{kPa} \cdot \left(1 - \frac{283\,\mathrm{K}}{323\,\mathrm{K}}\right) \approx 12\,\mathrm{kPa}.$$

Keď uvážime bežný vrchnáčik zavaráninového pohára s priemerom 6 cm, čiže s približným obsahom $\approx 30\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}003\,\mathrm{m}^2$, sila, ktorú musíme vyvinúť na otvorenie fľaše je $F = \Delta p S = 36\,\mathrm{N}$, čo je ekvivalent zaveseného 3,6-kilového závažia.

Skúsme sa ešte zamyslieť nad tým, aký veľký efekt spôsobuje na otváranie flaší trenie. Ak si to rozmyslíme, tak závit v zaváraninovom pohári je naklonenou rovinou. Nami vypočítaná sila vytvára prítlačnú silu vo vertikálnom smere na túto rovinu F_{prit}, ktorá vytvára treciu silu. Sila F_{odkr}, ktorou odkrúcame vrchnák zaváraninového pohára pôsobí vo vertikálnom smere, a jedna z jej zložiek vytvára $F_{\mathrm{trecia}} \leq fN$, kde N je normálová sila na podložku a f je koeficient šmykového trenia. Rozklad prítlačnej aj odkrúcacej sily nájdete v nasledujúcom obrázku.





Na to aby sa nám podarilo odkrútiť vrchnák fľaše, musí platiť nerovnosť

$$F_{\text{odkr}} \cos(\alpha) \geq F_{\text{prit}} \left(f \cos(\alpha) + \sin(\alpha)\right) + fF_{\text{odkr}} \sin(\alpha)$$

$$F_{\text{odkr}} = F_{\text{prit}} \frac{f \cos(\alpha) + \sin(\alpha)}{\cos(\alpha) - f \sin(\alpha)}$$

Zlomok, ktorý sa nám tu zrazu objavil môžeme vyčísliť napr. pre $f = 1$ (horný odhad pre koeficient trenia) a $\alpha = 30°$ (rádovo typické stúpanie závitov vo vrchnákoch) na približne 3,68.

Spolu s trením tak na odkrútenie vrchnáka fľaše potrebujeme typicky silu ekvivaletnú približne 13-kilovému závažiu (horný odhad).

Na záver odporúčame otvárať zaváraninové poháre tak, že ho najskôr ponoríte do horúcej vody, čím umelo vrátite systém do horúcejšieho stavu, vďaka čomu veľkosť podtlaku klesne.

3.2 Žraločia hojdačka

vzorák **Jaro**, opravoval **Jaro**

Určite to poznáte aj sami. Odkedy ste sa naučili poriadne fyziku, žiadny film už nie je zábava, lebo v ňom vidíte všetky fyzikálne chyby. Vo FKS nás zaujalo, akou silou by sa muselo batoľa zahryznúť do stola, aby sa tam udržalo? Ako sme prišli na túto otázku? Takto![1]

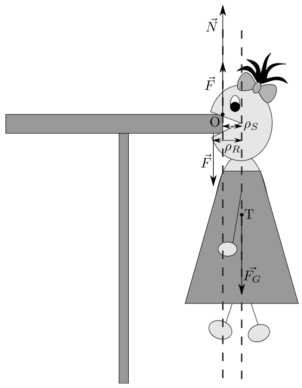
Ujasnime si najskôr, akú situáciu ideme analyzovať. Jediné, čo vieme, je, že dieťa nejakým spôsobom visí na hrane stola za svoj chrup. Predpokladajme, že sa nachádza presne vo vertikálnej polohe. To znamená, že ťažisko dieťaťa neleží priamo na tej istej zvislici ako bod, za ktorý dieťa visí. Týmto bodom je hrana stola, ako o chvíľu uvidíme. To má ale jeden závažný dôsledok, a to, že tiažová sila má nenulový moment, a teda spôsobí, že dieťa sa vychýli zo zvislej polohy. To samozrejme aj očakávame, keďže vieme, že každé teleso sa snaží nadobudnúť minimálnu energiu, čo v tomto prípade znamená, že ťažisko musí byť najnižšie, ako to je len možné, čo zodpovedá tomu, že ťažisko je priamo pod osou otáčania, t.j. hranou stola.[2] Lenže takáto poloha je pre dieťa stabilnou, čo znamená, že ak ho o málo z tejto polohy vychýlime, tak sa do nej vráti. To v konečnom dôsledku vidíme aj z daného videa, kde dieťa prekmitáva okolo tejto rovnovážnej polohy. Ak teda pripustíme, že dieťa môže visieť tak, že jeho ťažisko leží priamo pod hranou, tak nemusí vynakladať žiadnu námahu, aby sa udržalo na stole.[3] Jednoducho stôl bude pôsobiť na dieťa[4] silou, ktorá akurát vykompenzuje tiažovú silu, a keďže obe ležia na jednej vektorovej priamke, tak ich výsledný moment je nulový. Problém ale nastáva, ak ťažisko nie je priamo pod hranou stola a chceme, aby dieťa v tejto polohe zotrvalo. V našich úvahách budeme požadovať, aby dieťa zotrvalo vo zvislej polohe.

[1] Lemony Snicket's A Series of Unfortunate Events – https://www.youtube.com/watch?v=ZmEn9aZZlWk

[2] Tu si treba uvedomiť, že ak pôvodne dieťa viselo za celý horný chrup a o málo sa vychýlilo, tak sa rezáky odľahčia a dieťa zostane visieť na stoličkách na hrane stola. Preto je hrana stola osou otáčania.

[3] Už druhá vec je, že by pri takomto pokuse zrejme prišlo o mliečny chrup.

[4] jeho hornú čeľusť



Obrázok 1: *Model popisujúci visiace dieťa*

Uvažujme najskôr, že dieťa nevyvíja svojím chrupom žiadnu silu, t.j. na stole voľne visí zavesené o hornú čeľusť, a nejaká fiktívna horizontálna sila mu bráni v otáčaní sa. Čo vieme povedať v takom prípade? Je zjavné, že dieťa sa nebude hýbať, teda výslednica síl musí byť nulová. Ak označíme vertikálnu zložku sily od stola pôsobiacej na dieťa N, tak podmienku rovnosti vertikálnych zložiek síl napíšeme v tvare

$$N = F_G$$

kde $F_G = mg$ je tiažová sila pôsobiaca na dieťa.

Teraz uvažujme, že dieťa sa zahryzne do stola silou F. Predpokladajme, že táto sila je akurát taká, že po odstránení fiktívnej horizontálnej sily sa nebude otáčať. Samozrejme, stôl stále pôsobí na dieťa silou N, no okrem toho pôsobí na hornú i dolnú čeľusť silami veľkostí F opačného smeru.[5] Stále platí, že výslednica síl je nulová. Ale čo ich momenty? Teraz už sily nepôsobia na jednej vektorovej priamke, preto treba poctivo napísať rovnicu pre momenty síl. Momenty budeme počítať vzhľadom na ťažisko.[6] Najskôr ale potrebujeme zistiť, kde pôsobia sily F. Keď si predstavíme, ako sa hlava dieťaťa chce natáčať okolo hrany stola, tak jasne vidíme, že sily pôsobia v miestach horných stoličiek a dolných rezákov. Teraz nám už nič nebráni zapísať podmienku nulovosti celkového momentu síl. Pripomeňme ešte, že moment sily vypočítame ako súčin veľkosti sily a vzdialenosti vektorovej priamky od bodu, vzhľadom na ktorý moment počítame. Matematicky vyjadrené $M = \rho F$. Dostávame teda rovnicu

$$\rho_R F = \rho_S F + \rho_S N$$

Z uvedených rovníc je už triviálne vyjadriť, že

$$F = \frac{mg\rho_S}{\rho_R - \rho_S}$$

Skúsme odhadnúť veľkosť tejto sily. Uvažujme dieťa hmotnosti $m = 20\,\mathrm{kg}$. Nech vzdialenosť stoličiek od ťažiskovej zvislice je $\rho_S = 10\,\mathrm{cm}$ a „hĺbka chrupu“[7] $\rho_R - \rho_S = 2\,\mathrm{cm}$. V takom prípade dostávame $F = 1\,\mathrm{kN}$. Je to veľa, či málo? Táto hodnota vám možno veľa nepovie, tak uveďme krátky prehľad síl, ktoré dokážu vyvinúť svojimi čeľusťami niektoré živočíchy.[8]

[5]To, že sú rovnakej veľkosti ľahko nahliadneme tak, že si uvedomíme, že ak by neboli rovnako veľké, tak by ich výslednica bola nenulová, a teda dieťa by začalo vo vertikálnom smere zrýchľovať.

[6]No rovnako dobrý je každý bod ležiaci na zvislici obsahujúcej ťažisko, pretože moment tiažovej sily bude v takom prípade nulový, ale, samozrejme, mohli by sme si vybrať úplne náhodný bod.

[7]vzdialenosť rezákov a stoličiek v priečnom profile

[8]zdroj: `http://bit.ly/1WfICpz`

Živočích	Maximálna sila zhryzu
dospelý človek	0,6 kN
nemecký ovčiak	1,3 kN
mastif[9]	1,7 kN
lev	3 kN
hyena	5 kN
T-Rex (dolný odhad)	8 kN – 13 kN
krokodíl nílsky	16 kN
T-Rex (horný odhad)	30 kN – 60 kN

Tabuľka 1: Prehľad síl zhryzu vybraných živočíchov

Na základe tejto tabuľky vidíme, že dieťa nemá šancu udržať sa svojím chrupom na stole vo zvislej polohe. Pre iné živočíchy je, samozrejme, potrebná sila na udržanie rôzna a závisí od ich hmotnosti a proporcií tela. Tentokrát vás výrazne nabádame, aby ste tieto výsledky neskúšali konfrontovať s experimentom, pokiaľ sa nechcete doživotne vyhnúť návšteve zubára.

3.3 Do plaviek

vzorák **Fero**, opravoval **Fero**

*Plyš sa rozhodol, že Kvík by mal čo najrýchlejšie schudnúť do plaviek, lebo inak sa s ním na žiadnom kúpalisku v lete rozhodne neukáže. Takú hanbu si predsa neurobí! Navrhol teda diétny plán pre Kvíka. Skúste porovnať, akými všetkými možnými spôsobmi a v akom množstve človek Kvíkovho kalibru (*185 cm, 90 kg*) stráca teplo, resp. aké sú tepelné výkony takýchto procesov, pri ktorých nevyvíja žiadnu špeciálnu námahu (ako napr. dýchanie, …). Kvík je predsa len tvor lenivý, a že by svojho plyšáka vždy počúval sa takisto nedá povedať.*

Najprv sa zamyslíme, koľko energie denne prijmeme. Treba si uvedomiť, že celková chemická energia obsiahnutá v potravinach je omnoho väčšia, ako energia, ktorú naše telo dokáže z potravín abstrahovať. My by sme radi poznali práve túto časť energie. Namahu nám ušetria výrobcovia potravín. Vďaka nim vieme, koľko kalórií telo prijme, teda koľko energie dokáže naše telo z potravín uvoľniť, keď niečo zjeme.

Denná odporúčaná dávka energie je 2000 kcal. Ak si kalórie premeníme na rozumné jednotky, zistíme, že je to okolo 2325 watthodín, alebo 8,4 MJ. Predpokladajme, že človek, ktorý je dennú odporúčanú energetickú dávku, dlhodobo nepriberá (a teda neuskladňuje) žiadnu energiu vo forme tukov – čiže všetku energiu, čo zje, aj minie. Hlavnú časť jeho energetickej spotreby tvoria metabolické procesy.[10] Ako fyzici vieme, že energia sa nestráca, takže všetkých 8,4 MJ sa vylúči. Túto energiu vylučujeme tepelným žiarením, dýchaním, potením…..

Ak použijeme Stefan-Boltzmannov zákon pre žiarenie absolútne čierneho telesa, $P = \sigma S T^4$, a uvedomíme si, že aj miestnosť nám vracia energiu naspäť, musí platiť $P = \sigma S \left(T_{\mathrm{telo}}^4 - T_{\mathrm{miestnosť}}^4\right)$, kde σ je Stefan-Boltzmannova konštanta a S je plocha tela, ktorú odhadneme ako 1,8 metra štvorcového. Uvažujme, že teplota tela je 37 °C[11] a teplota miestnosti je 20 °C. Po dosadení dostaneme veľmi veľké číslo, takže si rýchlo uvedomíme, že prirovnávať sa k čiernemu telesu nie je veľmi rozumné. Ak by sme náš model vylepšili na úkor jednoduchosti, mali by sme prísť ku hodnote okolo 2 MJ.

[9] najviac spomedzi všetkých psov
[10] Pokiaľ Kvík nie je vrcholový športovec, môžme zanedbať energiu spotrebovanú na mechanickú prácu.
[11] čo nie je veľmi múdry odhad, ale nám postačí – hlava má trochu väčšiu teplotu, aby mohol mozog pracovať v každej situácii

Ďalší spôsob, ako strácame energiu, je vedením tepla[12]: $P = hS\Delta T$, kde h je koeficient, ktorý súvisí s materiálom a hrúbkou vrstvy. Po dosadení príslušných hodnôt, dostaneme výsledok okolo 70 W, čo je za deň okolo 6 MJ.

Ďalším spôsobom, ako vieme strácať energiu, je aj samotné dýchanie. Bežné vydýchneme za minútu zhruba 20 litrov, čo je asi 30 m^3 za deň. Tento vzduch ohrejeme približne o 10 stupňov Celzia. Z kalorimetrickej rovnice vieme, že

$$Q = c\rho V \,\Delta T.$$

Taktiež nesmieme zabudnúť ani na obsah vodných pár vo vydýchnutom vzduchu. Keď sa nadýchneme, v tele prebieha reakcia kyslíka s glukózou, pri ktorej vzniká voda. Táto voda sa vylúči vo forme vodných pár. Dospelý muž[13] za 24 hodín vydýchne vo forme vodných pár okolo 0,3 l vody. Keďže voda z kvapalného stavu prešla do plynného, potrebujeme vedieť koeficient latentného tepla pri izbovej teplote. Zapísané v reči matematiky: $Q = l \cdot m$, kde l je latentné teplo (voda – vzduch) pri 25 °C. Po vyčíslení dostávame približne 300 kJ.

Energiu vieme strácať aj potením. Človek vie za deň stratiť až 10 litrov vody. Keďže Kvík si nepotrpí na fyzickú námahu, predpokladajme, že denne stratí 1 liter potu. Teraz sa zamyslíme, ako prebieha mechanizmus potenia. Potíme sa preto, aby sme ochladzovali telo. Celá finta je v tom, že vodu na našej pokožke telo odparí, a na to spotrebuje energiu $Q = lm$, kde l je teplo vaporizácie pri 25 stupňoch Celzia. Energia stratená potením je rovná 2 MJ.

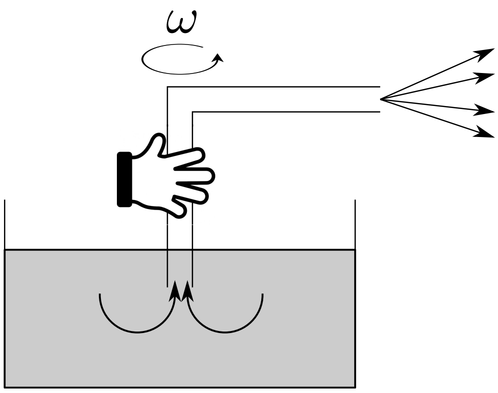
Teraz sa treba zamyslieť nad tým, aké presné boli naše odhady. Strácanie tepla žiarením možno hneď zanedbať, lebo oproti ostatným dejom je naozaj malé. Nepresností je isto celá hŕba, ale my sme sa snažili len čo najpresnejšie odhadnúť rád energie, ktorú stratíme daným procesom. Treba si uvedomiť, že časť energie sa vylúči vo forme chemickej energie v exkrementoch a moči. Túto chemickú energiu sme neuvažovali, pretože to je energia, ktorú telo nedokáže abstrahovať z potravy, preto nie je zahrnutá v dennej odporúčanej dávke…

Ako bonus si všimnite, že najviac tepla strácame tým, že nás ochladzuje okolie. Toto je úplne konzistentné s tým, čo očakávame. Je známe, že ľudia žijúci v polárnych oblastiach jedia oveľa viac ako my. Taktiež existujú diéty na chudnutie založené na tom, že sa ľudia menej obliekajú. Čiže ak chcete schudnúť, začnite byť otužilí.

3.4 Kovboj požiarnikom

vzorák **Pľyš**, opravoval **MaťoB**

Dušan zistil, že aj obyčajná hadica sa dá použiť ako vodné čerpadlo. Ponorte jeden koniec do väčšej nádoby s vodou a začnite krútiť druhým koncom vo vzduchu, akoby ste mali laso. Budete pozorovať, že voda v hadici začne stúpať, prípadne až vystrekovať. Zmerajte závislosť výšky výstupu vody od obvodovej rýchlosti konca hadice. Prečo vlastne voda začala stúpať?



[12] https://en.m.wikipedia.org/wiki/Convective_heat_transfer

[13] hádam už Kvíka možno považovať za aspoň fyzicky dospelého, aj keď istí členovia FKS by tvrdili určite svoje

Teória

Máme systém voda + hadica + vzduch. Keď je tento systém statický, voda v hadici sa drží na úrovni hladiny vody. Zároveň je v hadici aj mimo nej atmosférický tlak.

V momente, keď začneme trubicou otáčať, dochádza k vzájomnému pohybu medzi voľným koncom hadice a okolitým vzduchom. Predstavme si, že sedíme na konci hadice, teda okolo nás prúdi vzduch rýchlosťou v (čiže pôvodné $v = 0$ prešlo na $v > 0$). Podľa Bernoulliho rovnice zvýšenie rýchlosti spôsobí zníženie tlaku, takže vzniká *podtlak*:

$$\frac{1}{2}\rho_{\text{vzduch}}v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho_{\text{vzduch}}v_2^2 + p_2.$$

V našom prípade je p_1 tlak v trubici, keď ňou nehýbeme, $v_1 = 0$ a v_2 je obvodová rýchlosť.

Výsledkom je, že na jednom konci vzniká prúdenie vzduchu, a voda na druhom konci hadice je „vcucávaná“ do hadice. Úroveň hladiny vody v hadici stúpne. Úpravou Bernoulliho rovnice (pri položení $v_1 = 0$) vieme stanoviť rozdiel tlakov ako

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho_{\text{vzduch}}v_2^2.$$

Zároveň z rovnice pre hydrostatiku poznáme vzťah

$$\Delta p = \rho_{\text{voda}}gh.$$

Z druhej a tretej rovnice vieme vyjadriť výšku h, do ktorej voda vystúpa:

$$h = \frac{\rho_{\text{vzduch}}v_2^2}{2\rho_{\text{voda}}g}$$

Z tohoto výrazu je pre nás dôležité, že výška výstupu hladiny vody v hadici je závislá *kvadraticky* od obvodovej rýchlosti, teda v grafe budeme očakávať parabolu.

Experiment

Pri tomto meraní bolo možné postupovať viacerými spôsobmi. Uvádzame merania troch riešiteľov – Mariána Poturnaya, Michaely Leinwatherovej a Mateja Hrma – ktoré nás zaujali pekným prevedením, či svojou originalitou. Výsledky ich meraní (grafy) uvádzame na konci.

Marián Poturnay:

Počas experimentu som použil lavór plný vody, priehľadnú hadicu, telefón s kamerou, fixku a moje ružové Pikachu pravítko. Poprosil som brata, aby ma natáčal a ja som pritom zobral hadicu. Vždy som ju chytil za to isté miesto, aby polomer otáčania bol rovnaký (samozrejme som si ho odmeral: 0,5 m). Potom som hadicu ponoril do vody tak, aby vždy bola pod vodou rovnaká časť (označené fixkou), a začal ňou krútiť. Voda vyšla do istej výšky. V mieste, kam až dosiahla voda, som chytil hadicu. Potom som ju vytiahol a odmeral výšku, do ktorej voda vystúpila. Následne som preštudoval videozáznam, z ktorého som zistil uhlovú rýchlosť otáčania hadice, z ktorej som vypočítal obvodovú rýchlosť.

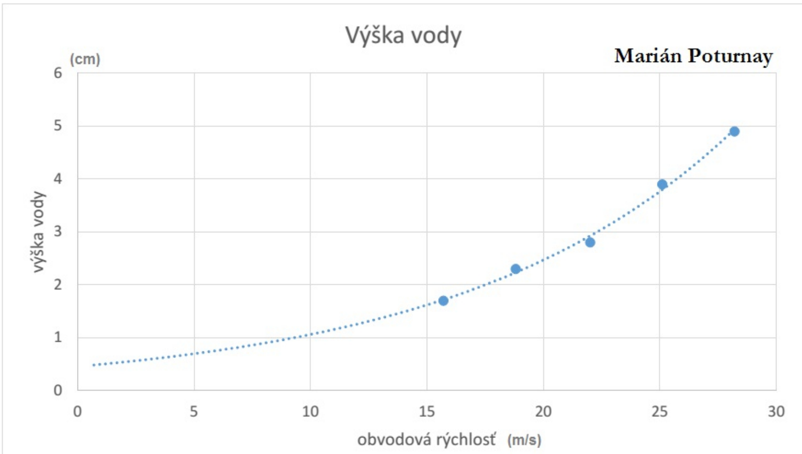
Michaela Leinwatherová:

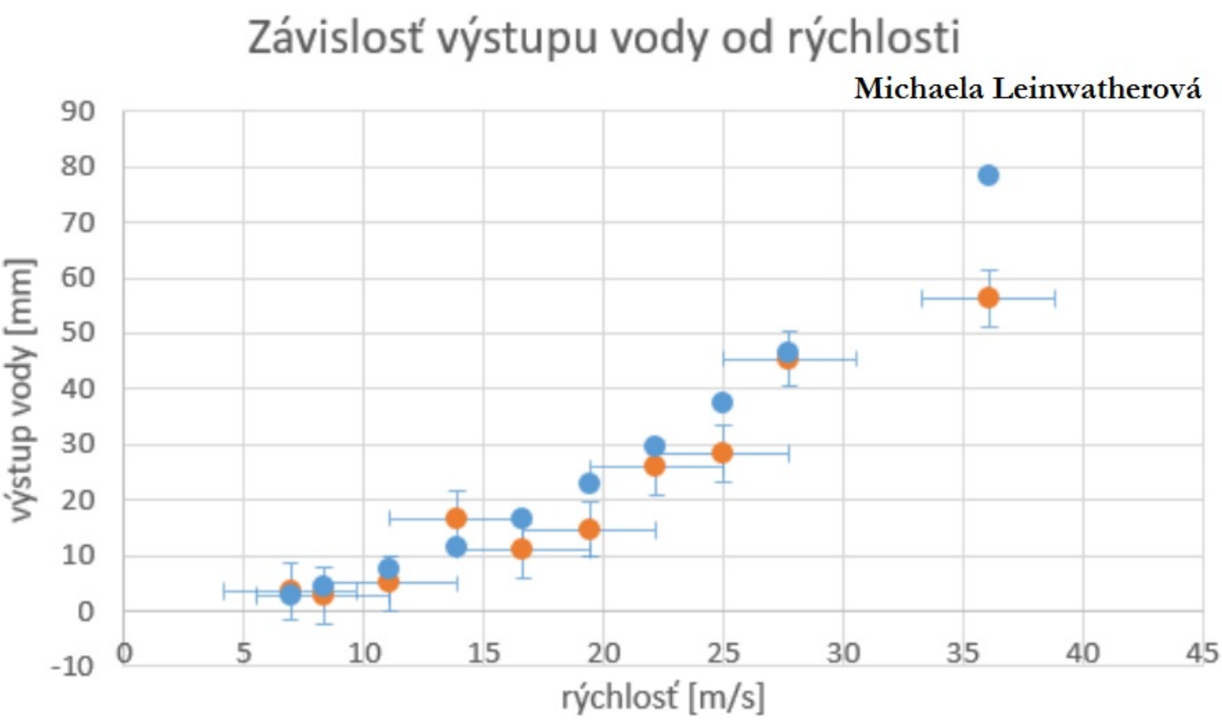
Pre zvýšenie presnosti som sa rozhodla urobiť meranie v idúcom aute. Koniec hadice bol vystrčený z okna kolmo na smer jazdy. Hladinu vody v hadici som merala v závislosti od rýchlosti auta.

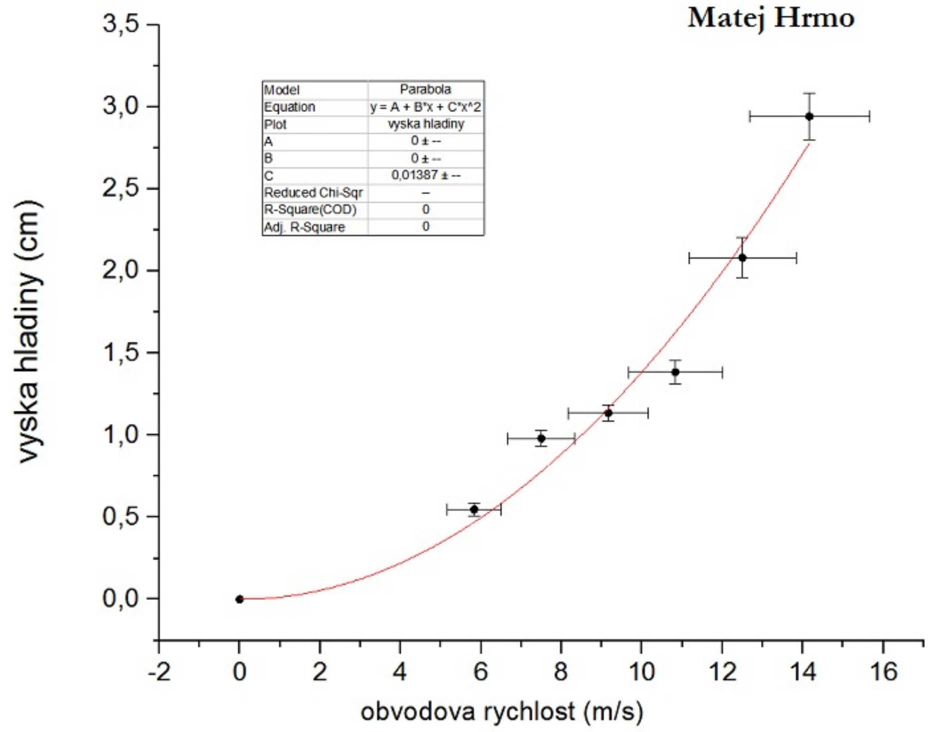
Matej Hrmo:

Zostavili sme si aparatúru z Lega, pričom sme použili motorček zo sady Technic. Pomocou jednoduchého prevodu (1:1) z ozubených koliesok sme zabezpečili otáčanie slamky ponorenej do vody. Gumenou hadičkou sme pripojili druhú slamku kolmo na prvú tak, aby sa mohla voľne otáčať vo vodorovnej rovine. Aby slamka nenarážala do konštrukcie a ostala v rovine, pridali sme malý kotúč z kartónu ako stabilizáciu.

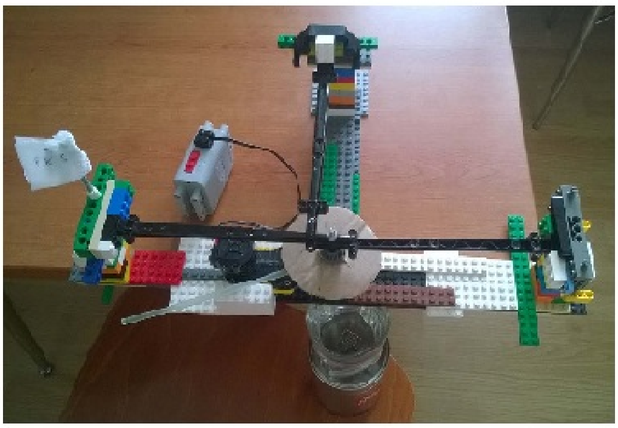
Všetky tri uvedené merania boli úspešné, a teda na grafoch zobrazujúcich potrebnú závislosť môžeme vidieť kvadratický vyťah medzi obvodovou rýchlosťou a výškou výstupu hladiny.



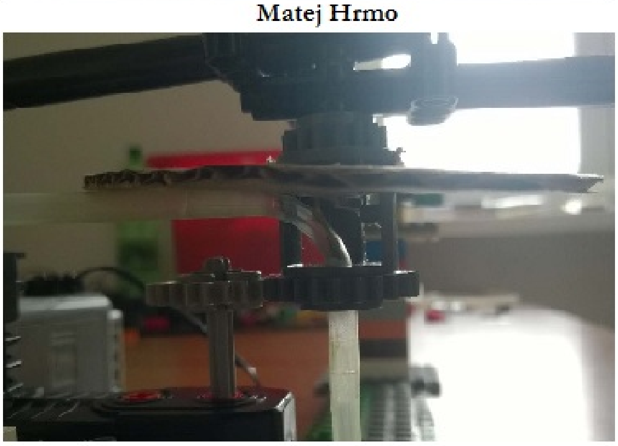




Michaela Leinwatherová



Matej Hrmo



3.5 Obitá orbita

vzorák **Kvík**, opravoval **Kvík**

Tento príklad je opäť interaktívny. Na jeho riešenie budete potrebovať dostatočne moderný internetový prehliadač a zapnutý JavaScript. Plné zadanie nájdete na `http://alchemilka.fks.sk/~sesquideus/orbita/`.

1.2 Okrajové prípady

Počiatočná rýchlosť hviezdy je nastavená na nulu. Prečo sa po spustení pohne? Je to chyba simulácie, alebo sa skutočne má pohnúť týmto smerom?

Skutočne sa má pohnúť. Keďže na telesá nepôsobia vonkajšie sily, celková hybnosť sa musí zachovávať. Na začiatku sa planétky sa hýbu smerom doprava a hviezda stojí, takže celková hybnosť musí tiež smerovať doprava. Keď zelená planétka odletí doľava, jej hybnosť bude taktiež smerovať doľava, a hviezda to musí kompenzovať tým, že sa začne hýbať doprava. Modrú planétku nemusíme uvažovať, lebo jej dlhodobá priemerná hybnosť voči hviezde je nulová.

2.1 Prvý Keplerov zákon

Meňte rýchlosť ružovej planéty. V akých intervaloch rýchlostí (aspoň približne) nastávajú jednotlivé prípady?

Skúšaním ľahko zistíme, že orbita je kruhová pri rýchlosti 2. *Únikovú* rýchlosť, teda najmenšiu takú, pre ktorú sa už planétka nevráti, si môžeme priamo vypočítať, alebo ju nájsť skúšaním (to bude trvať dosť dlho). Vyjde niečo zhruba ako 2,83, v čom by skúsené oko malo rozoznať približnú hodnotu $\sqrt{8}$. Naozaj – keďže súčet kinetickej a potenciálnej energie sa nemení, planétka potrebuje toľko kinetickej energie, aby vyrovnala stratu potenciálnej oproti nekonečnu.

Potenciálnu energiu poznáme (alebo si niekde nájdeme) $E_p = \frac{-GmM}{r}$, kinetická je $\frac{mv^2}{2}$ a hľadáme také v, aby ich súčet bol nulový:

$$\frac{-GmM}{r} + \frac{mv^2_{\text{úniková}}}{2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad v_{\text{úniková}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Na kruhovej dráhe zas vieme spočítať veľkosť pôsobiacej sily, musí platiť $\frac{mv^2}{r} = \frac{GmM}{r^2}$, odkiaľ $v_{\text{kruhová}} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$. Ich podiel je práve $\sqrt{2}$, takže kritická rýchlosť musí byť $2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8}$.

Navyše si všimneme, že ak je rýchlosť menšia ako 2, bude planétka začínať v najbližšom bode, inak v najvzdialenejšom. Teda jej dráha je:

- eliptická s perihéliom (najbližším bodom k hviezde) v začiatku pre rýchlosti menšie ako 2,
- kruhová pre rýchlosť 2,
- eliptická s aféliom (najvzdialenejším bodom) v začiatku pre rýchlosti medzi 2 a $\sqrt{8}$,
- parabolická pre rýchlosť $\sqrt{8}$,
- hyperbolická pre všetky väčšie rýchlosti.

2.2 Druhý Keplerov zákon

Nastavte hmotnosť slnka tak, aby sa dráha zmenila na kruhovú. Je to menej, alebo viac, ako to bolo? Prečo?

Hmotnosť musí byť 5. Je to samozrejme menej – no a je to preto, že chceme, aby pôsobiaca sila bola menšia, ako na začiatku. Pri hmotnosti 40 je pôsobiaca sila väčšia, než akú treba na udržanie na kruhovej orbite, takže ju pritiahne bližšie. Naopak pri primalej hmotnosti je sila príliš malá a nestíha zmeniť pohybový stav planéty natoľko, aby letela po kružnici. Rovnováha nastáva pri hmotnosti 5.

2.3 Tretí Keplerov zákon

Koľkokrát dlhšiu hlavnú os má červená planéta oproti modrej?

Jednoducho zrátame počty obehov a všimneme si, že kým červená planéta obehne raz, modrá to stihne spraviť sedemkrát. Potrebnú rovnicu

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^3 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2,$$

máme napísanú v zadaní, takže si z nej iba vyjadríme

$$\frac{A_1}{A_2} = 7^{2/3},$$

čo je približne 3,66.

3.1 Dvojrozmerný vesmír

Nastavte planéte potrebnú rýchlosť a teoreticky zdôvodnite (stačí pár slovami).

Znovu potrebujeme nastaviť rýchlosť tak, aby dostredivá sila bola vždy kolmá na rýchlosť planéty. Teda chceme nájsť také v, aby $\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r}$ (pozor na to, že v Newtonovom vzorci pre gravitačnú silu tu r vystupuje iba v prvej mocnine). Simulácia je bezrozmerná, teda $G = 1$, a m a r sa nám vykrátia. Ostane teda $v^2 = M$, takže veľkosť rýchlosti je $\sqrt{12}$. Ešte si musíme dať pozor na to, že riešenia sú dve a majú opačné znamienka. Smer kolmý na spojnicu planéty s hviezdou poznáme, takže $v_x = \pm\sqrt{12}$ a $v_y = 0$.

3.2 Konštantná sila

Je tu možné utiecť do nekonečna? Prečo?

Nie je – nech je počiatočná rýchlosť akákoľvek, konštantná sila bude mať vždy dosť času na to, aby planétku stiahla naspäť k stredu. Alebo inými slovami, potenciálová jama je nekonečne hlboká a žiadne množstvo energie nestačí na to, aby sme z nej vyšli von. Iba ak tam dáme také veľké číslo, že simuláciu pokazíme ;-)

3.3 Štvorrozmerný vesmír

Nájdite tu nejakú nekruhovú stabilnú orbitu (aby planéta neušla do nekonečna a nespadla na hviezdu).

Nedá sa to. Kruhová orbita síce existuje, ale nie je stabilná. Ľubovoľne malá chyba ju časom nenávratne rozbije. Ak je rýchlosť trochu menšia, planéta neodvratne spadne na hviezdu, ak je väčšia, sila klesá príliš rýchlo a planéta nám uletí. Štvorrozmerný vesmír by teda najskôr bol veľmi nudný.

Napriek tomu v simulácii to kvôli numerickým chybám vo výpočte šlo – ak je dráha skoro kruhová, teda planéta padá veľmi pomaly, tesne pred kontaktom s hviezdou sa jej rýchlosť zväčší viac, ako by sa mala, čo ju znovu vynesie ďalej. Tam je ale výpočet presnejší, takže znovu začne padať a celé sa to periodicky opakuje. Napríklad pri $x = 7$, $y = 0$, $v_x = -0{,}02$, $v_y = 0{,}638$.

4.1 Mesiace

Zistite, v akých rozpätiach rýchlosti v smere osi y ostane Mäsiac na orbite okolo planéty aspoň tri sedlácke roky.

Úplne najdôležitejšie je hneď si uvedomiť, že Mäsiac môže okolo svojej planéty obiehať v dvoch rôznych smeroch. Rozpätia teda môžu byť dve a mali by mať zhruba rovnako veľkú rýchlosť *voči planéte*. Simulácia však počiatočnú rýchlosť udáva v sústave spojenej s hviezdou, takže to až také očividné nebude. Znovu nechceme úplne presné riešenie, stačí nájsť interval s nejakou rozumnou presnosťou (napríklad 0,01).

Najrýchlejší spôsob, ako prísť k výsledkom, je vyhľadávať binárne – teda nájsť ľubovoľnú „dobrú“ orbitu, ľubovoľnú „zlú“ a potom skúsiť aritmetický priemer im zodpovedajúcich rýchlostí. Podľa toho, či je nová orbita dobrá alebo nie, znovu rozpolíme jeden z nových intervalov. Opakovaním tejto schémy nájdeme pomerne presné riešenie na zopár pokusov.

Nastavená rýchlosť 0,2 je zjavne príliš veľká a Mäsiac svojej planéte ujde. Ak ju postupne zvyšujeme, pri rýchlostiach okolo 0,4 až 0,5 to začne vyzerať nádejne. Napríklad pre 0,43 ho pritiahne hviezda, pre 0,45 uletí do nekonečna a pre 0,47 zas narazí do Sedláka. Prvú stabilnú orbitu nájdeme niekde okolo rýchlosti 0,55. Naopak najvyššia možná rýchlosť (teda najnižšia voči planéte) je 0,74. Druhou možnosťou je nechať Mäsiac obiehať okolo planéty v opačnom smere. Rovnakým postupom získame hodnoty 2,08 až 2,32.

4.2 Lagrangove body

Skúste nastaviť zelenému mesiacu takú rýchlosť, aby aspoň rok vydržal na zhruba kruhovej orbite.

Znovu binárne vyhľadávame, vyjde niečo ako 1,610 955. Určite ste si všimli, že aj veľmi malá zmena rýchlosti časom povedie k veľkým zmenám v dráhe. Ak by sme si vizualizovali efektívny potenciál planétky, situácia sa podobá balansovaniu guličky na veľkej guli. Teoreticky je možné mesiac malou silou udržiavať na vrchole, ak ho však necháme vzdialiť sa, planéta alebo hviezda ho ľahko pritiahnu. Hádam vám došlo, že cieľom podúlohy nebolo ani tak nájsť vhodnú rýchlosť, ako ukázať, čo sa deje, keď sa do nej tesne netrafíme. Námet na zamyslenie: skúste si predstaviť, ako by to vyzeralo pri pohľade z nerotujúcej planétky.

Bonus: Ak sa chcete hrať, skúste nájsť bod L_3.

Toto bolo trochu ťažšie. Bolo si treba uvedomiť, že v bode L_3 musí byť uhol zeleného mesiačika (teda teraz už planétky) voči červenej planéte konštantný. Vzdialenosť sa meniť môže, lebo dráha nie je kruhová. Veľa orbít vyzerá veľmi podobne, túto podmienku však nespĺňajú. Navyše musíme meniť až dva parametre, čo je omnoho náročnejšie ako jeden.

Hneď však vieme povedať, že počiatočná vzdialenosť musí byť o máličko väčšia, než akú dosiahne červená planéta na ľavej strane. Rýchlosť potom donastavujeme, až kým sa orbita nepodobá orbite červenej planéty. Hľadané hodnoty budú niekde v okolí $y = -7{,}65$ a $v_y = -1{,}173$.

4.3 Dvojhviezda

Skúste planétku udržať čo najdlhšie na dráhe, pričom vám nesmie uletieť do nekonečna. Koľko časových jednotiek sa vám podarilo? Napíšte aj konfiguráciu.

Tu sa dalo vymyslieť kadečo, buď skúšať rôzne chaotické dráhy a zapisovať si časy, alebo sa trochu zamyslieť, vymyslieť princíp a potom už len overiť, či naozaj funguje. Takým riešením je položiť planétku niekam ďaleko a nechať ju obiehať po zhruba kruhovej dráhe. Vo veľkej vzdialenosti už gravitačné pole dvojhviezdy vyzerá skoro rovnako, ako pole jednej hviezdy s dvojnásobnou hmotnosťou, takže dráha bude stabilná, a aj obežná doba bude veľmi dlhá.

Druhou dobrou možnosťou je umiestniť planétku na nízku obežnú dráhu okolo jednej hviezdy, napríklad $x = 4{,}2$, $y = 0$, $v_x = 0$, $v_y = 1{,}4$.

4.4 Činka

Nájdite nejakú peknú uzavretú orbitu v tvare osmičky. Môžete meniť polohu aj rýchlosť planétky.

Pôvodne sme chceli, aby ste si uvedomili, že pekná osmička bude určite prechádzať stredom, teda bodom $[0; 0]$. Planétku si teda umiestnime na tieto súradnice a meníme jej rýchlosť. Napríklad rýchlosť $(1, 0{,}98)$ vedie na uzavretú dráhu. Orbity, ktoré nie sú stredovo súmerné, budú pomaly oscilovať (tieto obrázky sú fakt pekné).

Ak to však bolo dostatočne pomaly a planéta sa po obehu aspoň zhruba „trafila" do svojej pôvodnej orbity, uznali sme aj to.

4.5 Gravitačný prak

S akou najmenšou rýchlosťou pritom viete vyštartovať?

Tu proste treba skúšať a hrať sa (varovali sme vás, že riešiť túto úlohu päť minút pred deadlinom nie je dobrý nápad). Dôležité je uvedomiť si, že potrebujeme mieriť za Yüpiter, aby nás potiahol dopredu v smere pohybu. Dobré riešenie je napríklad $v_x = 0{,}783$, $v_y = 2{,}504$. Veľkosť v je potom asi $2{,}624$. Drobnými zmenami sa dá ešte o niečo máličko menej. A ak máte fakt veľa času[14], existuje aj úplne iné riešenie, je však značne náhodné a družica sa bude dosť dlho nudiť niekde v hĺbkach vesmíru: $v_x = 0$, $v_y = 2{,}54$.

Prečo je to dôležité? Množstvo paliva, ktoré raketa spotrebuje, rastie exponenciálne s rýchlosťou, ktorú chceme družici udeliť – preto sa takmer vždy snažíme túto rýchlosť čo najviac zmenšiť, aj napríklad za cenu, že poletíme omnoho dlhšie. Okrem toho v skutočnosti štartujeme zo Zeme, takže nás zaujíma rýchlosť voči nej. Planéta má rýchlosť 1,4, takže výsledná rýchlosť je iba $2{,}54 - 1{,}4 = 1{,}14$. A to sa už oplatí :-)

Pri skutočných letoch sa gravitačné praky používajú často aj viackrát. Napríklad takto vyzerala trajektória sondy Rosetta, ktorá trikrát využila Zem a raz Mars: `http://techgenmag.com/wp-content/uploads/2014/01/rosetta-mission.jpg`

Bodovanie

Za každú zjavne nesprávnu alebo chýbajúcu odpoveď sme strhávali jeden bod; za chýbajúcu podstatnú časť odpovede pol boda. Za drobné nepresnosti alebo veľmi pekné vysvetlenia sme hodnotenie priamo neupravovali, ale mohli zavážiť pri zaokrúhľovaní. A ak bolo napísané aspoň niečo rozumné, jeden bod sa vždy našiel.

3.6 Ďalekonosná vypekačka

vzorák **Vladko**, opravoval **Vladko**

Samašec bol nedávno na veľmi zaujímavom koncerte, a tak mu napadlo, do akej najväčšej vzdialenosti je schopný ten Meky Žbirka vypekať svoju vymakanú hudbu pomocou dvoch reproduktorov s výkonom $2 \times 750\,\mathrm{W}$ vzdialených $20\,\mathrm{m}$ od seba. Oba reproduktory sú otočené kolmo na ich spojnicu a ich zvuk sa šíri izotropne[15] do celého priestoru. Okrem koncertu je všade úplné ticho a bezvetrie. Citlivosť ľudského ucha a ďalšie potrebné údaje na riešenie úlohy si samozrejme neváhajte nájsť.

Priemerný človek je schopný počuť zvuk s intenzitou väčšou ako prahová intezita $I_0 = 1 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$. Keďže šírenie je izotropné, pre intenzitu v určitej vzdialenosti r od zdroja s výkonom P platí:

$$I \cdot 4\pi r^2 = P$$

$$r_{max} = \sqrt{\frac{P}{4\pi I_0}}$$

Po dosadení $P = 1500\,\mathrm{W}$ dostaneme, že rádový odhad $r_0 \approx 1{,}1 \cdot 10^7\,\mathrm{m}$. Príklad je zrátaný a môžeme spokojne submitnúť.

No, to teda určite nie. V šiestom príklade nemôže byť taká jednoduchá vec. Na čo sme zabudli? Keďže vzdialenosť medzi reproduktormi je porovnateľná s vlnovou dĺžkou zvuku, musíme pri počítaní rátať aj s interferenciou.

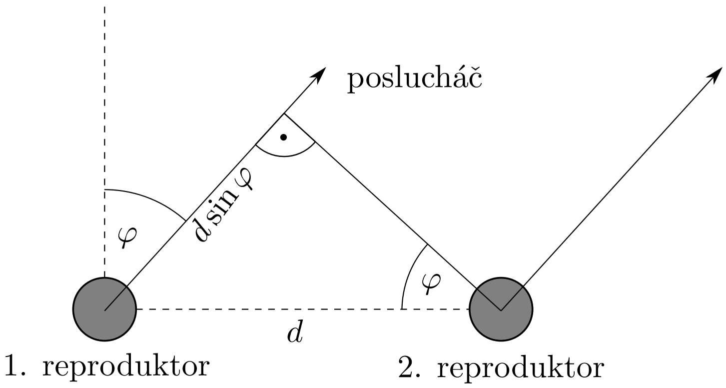
[14] ako napríklad Kvík, keď by mal písať bakalárku
[15] do všetkých smerov rovnako

Uvažujme, že membrána reproduktora vykonáva harmonické kmity šíriace sa do priestoru bez strát. Zvuk je pozdĺžne vlnenie, ktoré je prenášané zhusťovaním a zrieďovaním vzduchu. Vlnu môžeme reprezentovať funkciou $\chi(\vec{r}, t) = A\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$, kde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ je vlnové číslo, reprezentujúce koľko vlnových dĺžok sa zmestí do 2π a smer vektora $\vec{k}$ je v smere šírenia vlny[16], a $\omega = 2\pi f$ je uhlová frekvencia vlny. Keď sa poslucháč nachádza v dostatočnej vzdialenosti od reproduktorov, zvuk od vzdialenejšieho reproduktora prejde vzdialenosť väčšiu o $\Delta = d\sin\varphi$, kde φ je uhol od kolmice, pod ktorým sa šíri zvuková vlna od reproduktoru ku poslucháčovi. Pre zvukovú vlnu v mieste, kde sa poslucháč nachádza, platí:

$$\chi_1(\vec{r}, t) = A\ \cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)$$

$$\chi_2(\vec{r}, t) = A\ \cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - kd\sin\varphi\right)$$

$$\chi(r, t) = \chi_1(\vec{r}, t) + \chi_2(\vec{r}, t) = 2A\cos\frac{kd\sin\varphi}{2}\cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \frac{kd\sin\varphi}{2}\right)$$



Obrázok 2: *Poloha reproduktorov*

Všimnime si, že keby sme zanedbali interferenciu, tak by sme vo funkcii nemali člen $\cos\frac{kd\sin\varphi}{2}$. Čo tento člen spôsobuje? Obmedzuje hodnotu amplitúdy v niektorých smeroch šírenia φ. Napríklad vieme určiť smery, v ktorých je intenzita nulová:

$$\cos\frac{kd\sin\varphi}{2} = 0$$

$$\frac{kd\sin\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\sin\varphi = \frac{(1+2n)c}{2df}$$

kde c je rýchlosť vzduchu[17]. Pre frekvenciu $f = 100$ Hz sú „tiché uhly“ 2,38°, 7,17°, 12,01°… V týchto smeroch poslucháči nebudú Mekyho počuť. V blízkom okolí „tichých uhlov“ bude amplitúda výrazne nižšia, a teda hraničná vzdialenosť $r_{\max}$ je kratšia.

[16] $\vec{k}\cdot\vec{r}$ je skalárny súčin vektora $\vec{k}$ s vektorom $\vec{r}$, pre ktorý platí $\vec{k}\cdot\vec{r} = k_x\cdot x + k_y\cdot y + k_z\cdot z$.
[17] Nemýliť si s rýchlosťou objemového elementu, ktorá sa dá získať zderivovaním funkcie $\chi(\vec{r}, t)$, lebo nejde o tú istú rýchlosť.

Na jej určenie je potrebné vedieť, ako závisí intenzita zvuku od amplitúdy χ-funkcie. Závislosť určuje vzťah[18], $I = \frac{1}{2}\sqrt{\kappa p_0 \rho_0}\omega^2 A^2$, kde p_0, ρ_0 je pokojový tlak, resp. hustota vzduchu a κ je Poissonova konštanta.

Vieme, že $I \propto \frac{1}{4\pi r^2}$, a teda $A \propto \frac{1}{2\sqrt{\pi r}}$. Počiatočná hodnota $A\ |_{r=0} = A_0$ sa zistí zo vzťahu pre výkon. Vzťah uvádzame bez odvodenia, ktorého zložitosť by mohla byť pre čitateľa odpudzujúca[19]:

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\kappa p_0}{\rho_0}} A_0^2 \omega^2$$

Z čoho dostávame:

$$A_0 = \sqrt{\frac{2P}{\omega^2}\sqrt{\frac{\rho_0}{\kappa p_0}}}$$

Konečne môžeme vyjadriť intenzitu zvuku ako funkciu vzdialenosti:

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{\kappa p_0 \rho_0}\omega^2 \left(\frac{2A_0}{2\sqrt{\pi r}} \cos\frac{kd\sin\varphi}{2}\right)^2$$

$$r_{max}(\varphi) = \sqrt{\frac{P\rho_0}{\pi I_0}} \cos\frac{kd\sin\varphi}{2}$$

Prečo je hranica počuteľnosti v niektorých smeroch rádovo 10 000 km? V prvom rade sme ignorovali straty pri prenose zvuku vo vzduchu. V druhom rade je potrebné si vedomiť, že „bežné" ticho má hladinu intezity cca 15 dB[20], čo zníži skutočnú hranicu o 1 až 2 rády. Takisto musíme podotknúť, že Mekyho vypaľovačky nie sú monochromatické, teda frekvencia zvuku sa v čase mení a maximá a minimá $r_{max}(\varphi)$ sa posúvajú.

Pravdaže, na získanie plného počtu bodov stačilo vhodne vysvetliť, prečo intenzita zvuku klesá $\propto \frac{1}{r^2}$ a dostatočne kvantitatívne načrtnúť, ako by bola do výpočtu vložená interferencia.

3.7 Relatívne ťažká úloha

vzorák **Bu & MaťoB**, opravovala **Bu**

Maťo sa tento polrok naplno pustil do štúdia špeciálnej teórie relativity. V nej ho zaujala taká filozofická otázka, na ktorú by rád od vás počul odpoveď. Vedeli by ste Maťovi vysvetliť, ako medzi sebou súvisí fakt, že transformácia polohy a času (tzv. Lorentzove transformácie) sú medzi dvoma inerciálnymi vzťažnými sústavami lineárne[21] s faktom, že nevieme žiadnym experimentom (ani len myšlienkovým) rozlíšiť medzi dvoma inerciálnymi vzťažnými sústavami[22] (tým máme na mysli, že všetky fyzikálne zákony vyzerajú v oboch inerciálnych vzťažných sústavách rovnako)?

Nuž, filozofické otázky nechajme filozofom a skúsme sa na to pozrieť ako fyzici. Skúsme začať z toho čo poznáme, a to ako sa súradnice menia pri obyčajnom posune.

Predstavme si, že máme v priestore dva body, A a B a snažíme sa zmerať vzdialenosť medzi týmito bodmi v rôznych vzťažných sústavách. Prvá sústava, S, je v pokoji a má počiatok v bode A. Pozorovateľ v tejto sústave

[18] Odvodenie vyžaduje hlbšie štúdium problematiky vĺn. V prípade záujmu môžete siahnuť po Feynmanovych prednáškach z fyziky (české vydanie, 1. diel, kap. 47), podrobnejší, no náročnejší zdroj informácií ponúka David Morin vo svojej ešte nevydanej knihe „Waves", príslušnú kapitolu nájdete na http://www.people.fas.harvard.edu/~djmorin/waves/longitudinal.pdf

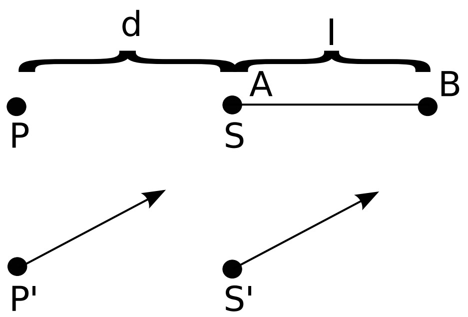
[19] Prípadní zvedavci ho nájdu v spomínaných skriptách D. Morina, v kapitole 5.

[20] hladina intenzity sa udáva v notoricky známej stupnici decibelov a platí $L = log\frac{I}{I_0}$

[21] Pod lineárnymi máme na mysli, že nové súradnice (čas a polohu) vieme vyjadriť ako lineárnu kombináciu pôvodných súradníc (čas a poloha), teda napr. $x' = 2x + 3t$.

[22] Toto druhé tvrdenie je v skutočnosti predpokladom na odvodenie špeciálnej teórie relativity.

teda vidí že vzdialenosť medzi A a B je l. Teraz sa presunieme do sústavy P, ktorá je stále v pokoji, ale posunutá o vzdialenosť d od sústavy S. V sústave P stále vidíme, že A je od B vzdialené práve l.



Obrázok 3: *Body A a B sú od seba vzdialené dĺžku l. Pozeráme sa na nich zo štyroch rôznych sústav, S, P a S', P'.*

Čo by sa však stalo, ak by sa tieto sústavy zmenili na také, ktoré majú počiatok na rovnakom mieste, ale obe sa hýbu konštantnou rýchlosťou rovnakým smerom, teda $P \to P'$, $S \to S'$, ako na obrázku? Vieme, že presun medzi dvoma sústavami nám zmení priestor podľa nejakej funkcie, nazvime ju g. Teda, ak poloha bodu B v sústave S bola l, tak poloha bodu B v sústave S' bude $g(l)$.

	A	B	$B-A$
S	0	l	l
P	d	$d+l$	l
S'	0	$g(l)$	$g(l)$
P'	$g(d)$	$g(d+l)$	$g(d+l)-g(l)$

Tabuľka 2: Pozície bodov a ich vzdialenosť v rôznych vzťažných sústavách

Sústavy S' a P' sú však stále iba posunuté vzhľadom na seba, a teda dĺžky v nich zmerané sa musia rovnať. Teda platí

$$g(l) = g(d+l) - g(l).$$

Z tohoto už môžeme vidieť, že naša transformácia g musí byť lineárna. Napríklad ak by sme túto rovnicu zderivovali (pozerali sa, ako sa zmení hodnota funkcie pri malej zmene parametra l) podľa l, dostali by sme rovnosť

$$g'(l) = g'(d+l).$$

Táto podmienka nám len hovorí, že v každom bode musí funkcia rásť rovnako rýchlo (derivácia má byť konštantná). Takúto podmienku spĺňa jedine lineárna funkcia.

Zatiaľ sme sa celý čas rozprávali iba o závislosti priestorovej transformácie od priestoru. Čo však nesmieme zabudnúť je, že priestorová transformácia môže závisieť aj od času, teda celá transformácia má tvar $x' = h(t)x+$

$g(t)$. To sme zatiaľ zjednodušili na tvar $x' = ax + g(t)$[23]. Už vieme, že a je konštanta a jediné, čo teraz potrebujeme zistiť je, či aj $g(t)$ je lineárna funkcia.

Vieme, že relatívna rýchlosť dvoch vzťažných sústav musí byť zachovaná, pretože inak by sme porušili podmienku, že sústavy sú inerciálne. Ak by však naša transformácia závisela od času nelineárne, táto relatívna rýchlosť by sa nezachovávala. Teda vieme, že aj tento komponent transformácie musí byť lineárny.

Týmto sme teda vyriešili transformáciu priestorových súradníc, avšak stále nám chýba časť, ktorá by transformovala časovú súradnicu. Našťastie, tak ako sme vedeli odvodiť transformáciu priestorových súradníc len vďaka tomu, že vieme, ako sa súradnice menia priestorovým posunom, úplne rovnako vieme, ako sa časové súradnice menia časovým posunom. A teda vieme úplne rovnaký argument zopakovať[24] aj pre linearitu časových transformácií.

Na záver sa teda ešte skúsme zamyslieť, ako by sa prejavila prípadná nelineárnosť transformácie súradnic. Využijeme znovu trik so sústavami vzdialenými o nejaké d. Na pomoc si môžeme zobrať pravítko, na ktorom sa, ako sa na správne pravítko patrí, nachádzajú v pravidelnom intervale značky. Ak by transformácia súradníc nebola lineárna, relatívna vzdialenosť značiek by sa menila, to by ale znamenalo, že vieme rozlíšiť medzi dvomi inerciálnymi sústavami, čo by ale bolo v spore s predpokladom teórie relativity (to, či je tento predpoklad správny, fyzici prakticky testujú tak, či produkuje experimentálne a teoreticky konzistentné výsledky).

[23] Ak sa vzájomná rýchlosť sústav nemení, koeficient a nemôže závisieť od času. Veríme totiž, že fyzikálne zákony by nemali záležať od toho, od akého okamihu meriame čas. Ak by a záviselo od času, aj keby bola vzájomná rýchlosť dvoch sústav rovnaká, dalo by sa to spozorovať.

[24] V krátkosti, stačí v predošlej úvahe vymeniť priestor za čas a všetky priestorové intervaly za časové a celá úvaha zostane v platnosti.