Riešenia 2. kola letnej časti

2.1 Kontakt

vzorák **Hovorca**, opravoval **Hovorca**

Reproduktoru sa odbornejšie vravieva i elektroakustický menič. Tento názov nám napovedá, ako reproduktor funguje – ide o zariadenie, ktoré mení elektrické signály (audio signály) na kmitanie membrány reproduktora, čím vzniká akustická vlna (zvuk).

Audio signál je teda v podstate zvuk reprezentovaný pomocou elektrického signálu – prúdu. Preto ak zapojíme konektor do počítača, mobilu alebo iného zariadenia generujúceho tieto audio signály, obvodom preteká prúd a reproduktor produkuje zvuk podľa signálov.

Prečo teda počujeme praskanie v prípade, že sa konektora dotkneme? Odpoveď je rovnaká, ako v prípade zapojenia do zdroja signálov. Ide o nejaký prúd nabitých častíc – teda náboj sa premiestňuje z našej kože do reproduktora (jednosmerný prúd), prípadne len kmitajú náboje na našej koži, ktoré následne rozkmitajú nabité častice v konektore (striedavý prúd). Reproduktor si len plní svoju elektroakustickomeničskú povinnosť. Kde sa tam ten náboj ale berie?

Predtým, než sa pustíme do zodpovedania tejto otázky, odporúčame, aby ste si spravili niekoľko experimentov doma sami. Potrebujete na to reproduktory s konektorom a seba, prípadne ostatných členov domácnosti. Vyskúšajte sa konektora chytiť. Chyťte sa ho aj spotenou rukou. Skúste priložiť konektor ku káblu, napájajúcemu reproduktory. Priložte konektor k mobilu a zavolajte naň. Vo všetkých prípadoch budete počuť praskanie, avšak konektor ani v jednom prípade nie je zapojený. Čo sa teda deje?

V našom okolí sa vyskytuje mnoho elektrických polí. Napríklad telefónne hovory zabezpečujú elektromagnetické vlny. Elektromagnetické pole vzniká aj v okolí vodičov, ktorými preteká prúd – napríklad napájacieho kábla. Naša koža zachytáva tieto vlny (správa sa podobne, ako anténa) a na koži vzniká elektrické napätie. Koža sa potom správa ako kondenzátor a uchováva elektrický náboj.

Tento náboj potom „prúdi“ (či už ako usmernený prúd, alebo ako kmitanie nabitých častíc na našej koži) do konektora, teda sa správa ako audio signál potrebný pre fungovanie reproduktora. Pritom pokiaľ obvodom preteká jednosmerný prúd, tak sa naša koža (ako kondenzátor) vybíja, a teda budeme počuť hlasné puknutie. Striedavý prúd sa prejaví ako súvislejšie šumenie o frekvencii 50 Hz (lebo taký prúd preteká aj káblom), čo je pre ľudské ucho počuteľná frekvencia.

Konektor samotný sa tiež správa ako anténa, teda ak konektor priložíme k miestu, kde je pole (napr. do okolia kábla či ku zvoniacemu telefónu), prítomnosť našej kože nie je vôbec potrebná. Prečo teda nepočujeme (alebo počujeme len veľmi tiché) praskanie v situácií, keď je konektor len tak voľne na vzduchu, ďaleko od všetkého? Pretože vzduch je **veľmi** dobrý elektrický izolant pri bežných podmienkach.

Merný odpor vzduchu pri izbovej teplote je okolo $10^9\,\Omega\,\mathrm{m}$ až $10^{15}\,\Omega\,\mathrm{m}$. Prúd teda veľmi dobre nevedie. Odpor ľudskej kože je aj medzi vzdialenými bodmi výrazne nižší, a tak naše telo lepšie „produkuje“ elektrické audio signály pre reproduktor. Preto po dotyku s konektorom počujeme praskanie, resp. počujeme ho silnejšie, ako bez dotyku.

2.2 Klenoty v Rio Pecos

vzorák **Hovorca**, opravovala **Nina**

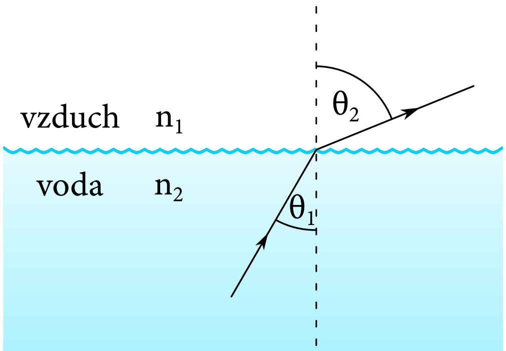
Prvou myšlienkou, ktorá nám napadne po prečítaní si zadania úlohy, môže byť napríklad: „Počkať, čo? Však predsa nekonečná, nie?“ Ak je rieka dokonale číra, tak by skrz vodu malo byť vidno aj v nekonečnej vzdialenosti, nie? Táto myšlienka však v našej situácií správna nie je. Správnou by bola v prípade, ak by sa hľadač pokladov Kubo pozeral na poklad spod vodnej hladiny.

Práve vodná hladina je v tejto úlohe bodom zlomu – a to doslova. Na poklad dopadá (i keď cez vodu, ale predsa) slnečné svetlo, ktoré sa od pokladu odráža do všetkých smerov. Tieto lúče smerujú k vodnej hladine, kde sa buď odrazia naspäť alebo prejdú hladinou a v procese sa zlomia – zmenia smer, respektíve uhol voči hladine.

A tu už sa dostávame aj k nejakému fyzikálnemu zákonu. Nech svetelný lúč dopadá na rozhranie dvoch prostredí (v našom prípade vodnú hladinu) pod uhlom θ_1 voči kolmici na rozhranie a prechádza rozhraním. Potom sa podľa Snellovho zákona zlomí a opúšťa rozhranie pod uhlom θ_2 voči kolmici na rozhranie, pričom platí

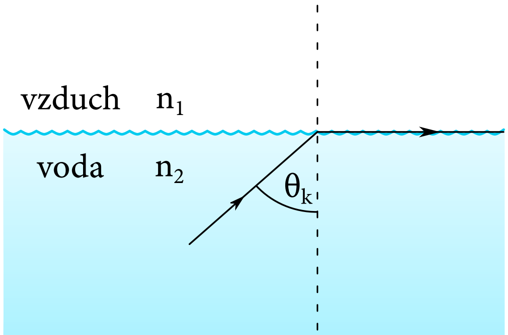
$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

kde n_1 je index lomu prvého prostredia a n_2 je index lomu druhého prostredia.



Obrázok 1: *Snellov zákon*

Vidíme však, že táto rovnica, Snellov zákon, veľmi dobre vymedzuje, aký musí byť uhol θ_1, aby lúč vôbec prešiel rozhraním. Vieme totižto, že uhol θ_2 musí byť menší ako 90°, inak lúč rozhraním neprechádza, ale odráža sa nazad do vody.

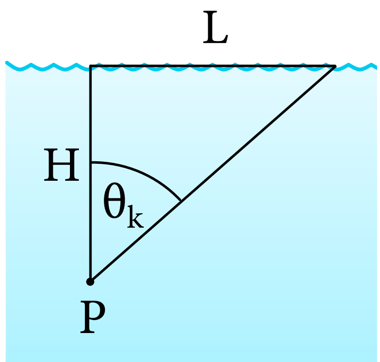


Obrázok 2: *Kritický uhol*

Aby teda lúč vôbec vyšiel z vody (a tak mohol byť uvidený nad hladinou hľadiacim Kubom), musí platiť $\theta_1 < \theta_k$, kde θ_k je tzv. kritický uhol, teda taký uhol θ_1, pre ktorý by platilo $\theta_2 = 90°$. Tento uhol je v našom prípade rovný

$$\theta_k = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\sin 90°\right) = \arcsin\frac{n_2}{n_1} = \arcsin\frac{1}{1{,}331} = 48{,}704°.$$

Nastať teda môžu tri prípady. Ak bude $\theta_1 > \theta_k$, lúč vychádzajúci od pokladu sa odrazí od hladiny nazad do vody, a teda sa ku Kubovi nedostane. Ak bude $\theta_1 = \theta_k$, lúč sa šíri rovnobežne s hladinou. Kubo má oči v nejakej výške nad hladinou, avšak veľmi malej. V hraničnom prípade (kedy oko považujeme za bod práve na hladine) teda takýto lúč uvidí. No a samozrejme pre $\theta_1 < \theta_k$ Kubo lúč uvidí.



Obrázok 3: *Výsledná vzdialenosť*

Teraz už ľahko vidíme z obrázka, že pre maximálnu horizontálnu vzdialenosť L, v ktorej Kubo poklad uvidí, musí platiť

$$\tan\theta_k = \frac{L}{H},$$

takže

$$L = H\tan\theta_k \approx 113{,}845\ \mathrm{m},$$

čo je najväčšia horizontálna vzdialenosť, v ktorej Kubo poklad uvidí.

2.3 Kolotočová socha

vzorák **Nina**, opravoval **Hovorca**

Na začiatku, kým je kolotoč v pokoji, pôsobí na Tomáša len tiažová sila $F_g = mg$ daná jeho hmotnosťou. Touto silou je ďalej napínané lano, na ktorom je sedačka, na ktorej Tomáš sedí. Zo zákona akcie a reakcie tomu zodpovedajúcou silou opačného smeru pôsobí na lano aj rameno kolotoča. Keďže tiažová sila pôsobí priamo nadol, aj lano so sedačkou visia priamo pod závesom lana.

Následne, keď sa kolotoč roztočí a odstredivá sila začne na Tomáša pôsobiť smerom von od osi otáčania, čím ho vychýli smerom von a o ΔR zväčší polomer jeho obežnej dráhy. Zadanie nám tu dovoľuje hmotnosť lana (závesu) slobodne zanedbať, takže o lane môžeme naďalej predpokladať, že je rovné a napínané v smere výslednice tiažovej a odstredivej sily pôsobiacej na Tomáša. Odchýlku závesu od jeho pokojového stavu označme ϕ.

Pozorné oko si tu môže všimnúť, že nám vznikol pravouhlý trojuholník, ktorého preponu tvorí vychýlené lano dlhé 5 m, odvesna protiľahlá k ϕ (rovnobežne zo zemou) je ΔR a odvesna priľahlá k ϕ je dlhá 5 m − 1 m = 4 m (dĺžka lana ktoré na jej mieste viselo, kým bol kolotoč v pokoji mínus 1 m o ktorý sa Tomáš zdvihol od zeme po roztočení kolotoča)[1]. Potom odchýlku ϕ si môžeme vyjadriť ako $\phi = \arccos(\frac{4}{5}) = 36{,}87°$ a dĺžku odvesny ΔR vypočítame z Pytagorovej vety ako

$$5^2 = 4^2 + \Delta R^2$$

$$5^2 - 4^2 = 9 = \Delta R^2$$

$$3 = \Delta R.$$

Týmto sme získali nielen polomer Tomášovho obiehania $R_2 = R + \Delta R = 3\ \mathrm{m} + 3\ \mathrm{m} = 6\ \mathrm{m}$, ale aj pomer medzi veľkosťami tiažovej a odstredivej sily pôsobiacej na Tomáša. To preto, že tiažová, resp. odstredivá sila, majú rovnaký smer ako k ϕ priľahlá, resp. protiľahlá odvesna, a preto, že koniec lana je napínaný výslednicou tiažovej a odstredivej sily, čiže lano (prepona v pravouhlom trojuholníku) má s touto výslednicou rovnaký smer. Získame teda, že

$$4\ \mathrm{m} : 3\ \mathrm{m} = F_g : F_{od}$$

čiže

$$F_g = \frac{4}{3} F_{\mathrm{od}}.$$

Tu $F_g = mg$ a $F_{od} = m\omega^2 R_2$, takže

$$3mg = 4m\omega^2 R_2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{4R_2}}.$$

Keďže ω je uhlová rýchlosť, v ktorej 2π/s by znamenalo jednu otočku za 1 s, výslednú dobu obehu T môžeme vypočítať ako

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3g}{4R_2}}} = \frac{2\pi\sqrt{4 \cdot 6\ \mathrm{m}}}{\sqrt{3 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}} = 5{,}67\ \mathrm{s}$$

2.4 Koľko toho papier znesie...

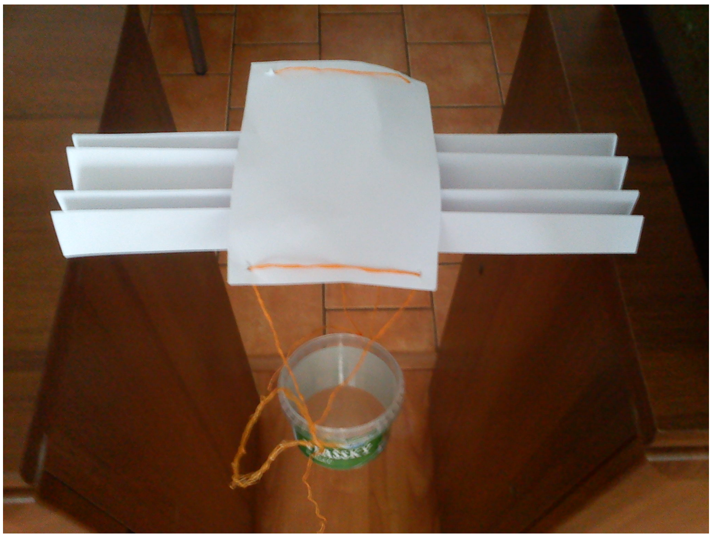
vzorák **Marcel**, opravoval **Marcel**

Prvá vec, ktorú treba urobiť hneď, ako si prečítame zadanie, je zadefinovanie si nášho problému. Tak to spravíme aj my.

Zadanie od nás chce nameranie závislosti nosnosti harmonikového mosta od počtu jeho zubov. Počet zubov budeme rátať ako počet vrcholov smerujúcich *iba* hore (alebo iba dole). Teda ak prehneme list A4 na štyri časti, náš most bude mať dva zuby. Taktiež je vhodné, aby sme pri našich meraniach menili iba tento parameter, keďže jeho vplyv na nosnosť chceme preskúmať. Preto sme sa rozhodli, že naše mosty budú mať vždy konštantnú šírku 10 cm a záťaž budeme vždy rozkladať na rovnaký povrch (vyrobili sme si vedierko so závesom, do ktorého sme pridávali závažia). Aj tieto parametre majú totiž na nosnosť veľký vplyv: napríklad je rozdiel, či sústredíte záťaž do jedného bodu, alebo ju rozložíte po celom povrchu. Posledná vec, ktorú si musíme zadefinovať, je kolaps mosta. Budeme ním chápať akékoľvek zrútenie, či už by to bolo preklopenie, zošmyknutie, alebo pokrčenie a spadnutie.

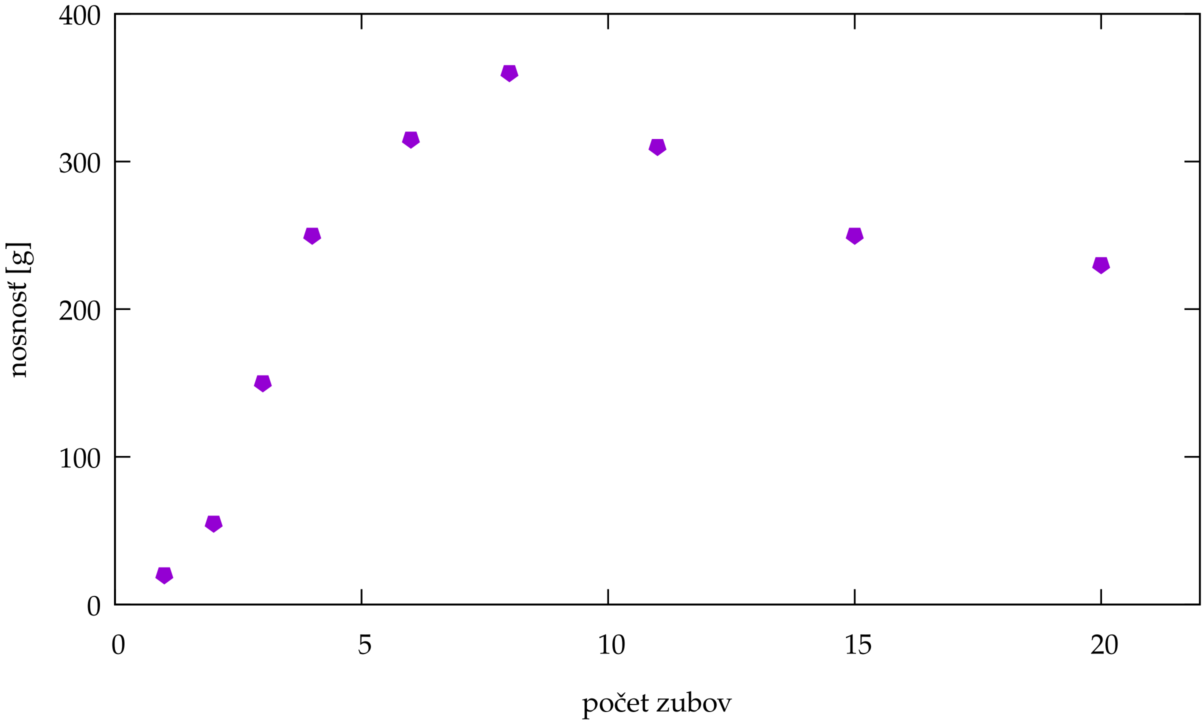
Samotná realizácia experimentu by mala byť pomerne jednoduchá. Vezmeme A4, prehneme ju na správnych miestach a máme most. Nájdeme medzeru, ktorá je o kúsok kratšia ako dĺžka A4, položíme, prípadne upevníme most a začneme merať.

[1] duša matematika sa už iste teší, že vidí Pytagorejský trojuholník, ostatní počítame ďalej



Obrázok 4: *Aparatúra: most*

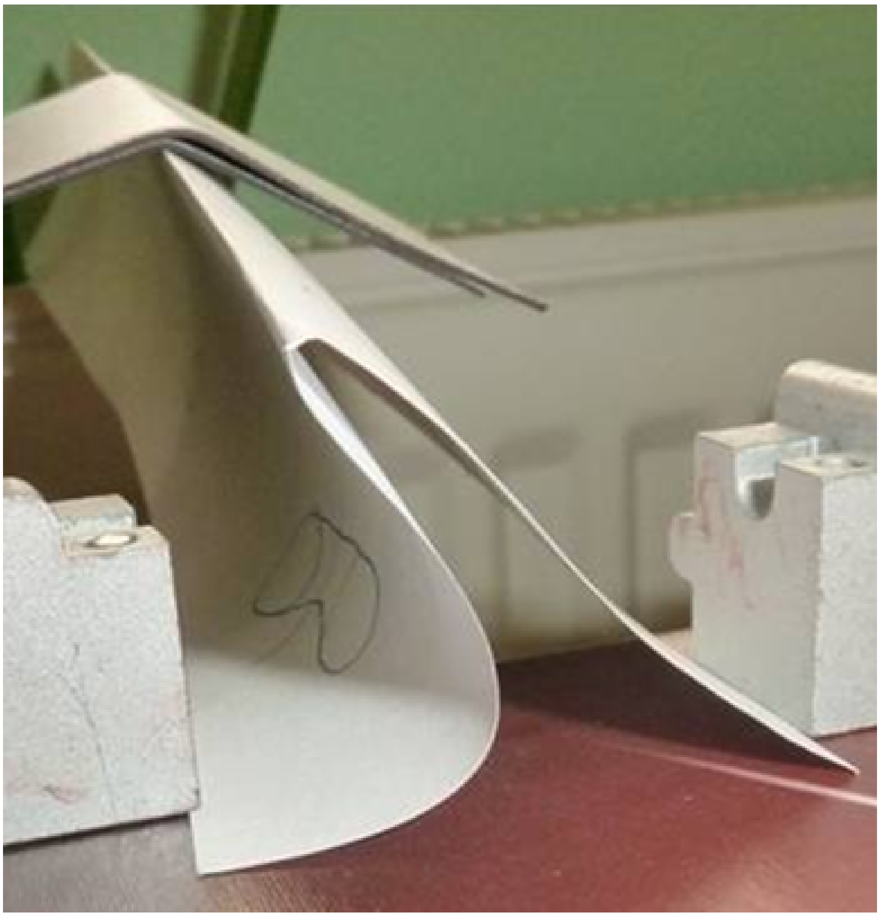
Pre každý počet zubov mosta je väčšinou vhodné urobiť viacero meraní. Pokiaľ ste papier skladali vždy rovnako presne, ukáže sa, že výsledky sa medzi jednotlivými meraniami pre ten istý počet zubov mosta nebudú skoro vôbec odlišovať. [2]



Obrázok 5: *Graf závislosti nosnosti od počtu zubov*

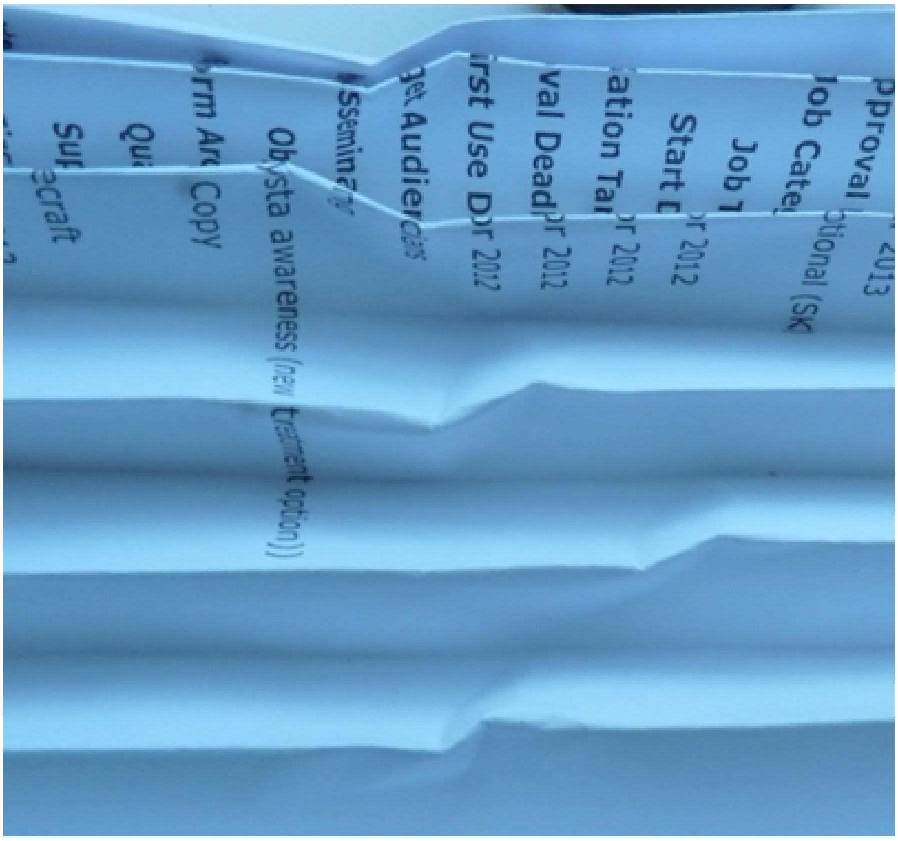
[2] Vo všeobecnom prípade si musíme dávať pozor na rozptyl našich meraní a odchýlku nameraných hodnôt od priemernej. Čím je táto odchýlka vyššia, tým viac meraní by sme mali spraviť, aby sme si boli finálnym výsledkom naozaj istí.

Ako vidíte, merali sme[3] v rozpätí od jedného po dvadsať zubov, avšak nie úplne všetky počty zubov. Dôvod je prostý: z menšieho množstva meraní vieme predpovedať, ako bude vyzerať zvyšok závislosti. Ak budeme zvyšovať počet zubov až po 8, nosnosť mosta bude rásť až po 360 g. Pri veľmi malom počte zubov zvykol most skolabovať najmä kvôli ohýbaniu zubov, ktoré boli príliš dlhé do strán. Po prekročení hranice ôsmich zubov začínali byť zuby menšie. Tým sa ale stávali aj menej pevnými, a teda sa pri záťaži krčili.



Obrázok 6: *Prvý mód zlyhania: ohnutie mosta*

[3] Za poskytnuté dáta ďakujeme TMFákom z GJH, ktorí túto úlohu riešili pred približne ôsmimi rokmi pre všetky možné typy mostov. Pre zaujímavosť, z jednej A4 sa dá vyrobiť most, ktorý unesie 14 kg. Áno, čítate dobre.



Obrázok 7: *Druhý mód zlyhania: pokrčenie mosta*

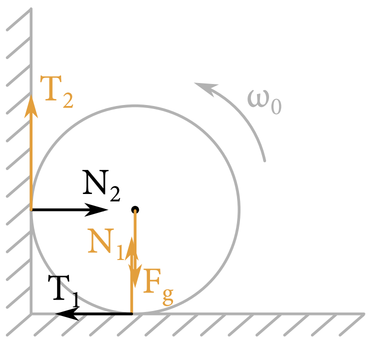
2.5 Každý ročník treba valec!

vzorák **Patrik**, opravoval **Patrik**

Ako to pri úlohách podobného typu chodí, na úvod si zostavíme rovnice pre sily a momenty síl. Treba si však dobre uvedomiť aké sily pôsobia a hlavne ktorým smerom.

Vo vertikálnom smere nám pôsobí trecia sila T_2 od steny s pôsobiskom v bode dotyku a smerom, ktorý spomaľuje valec, teda smerom „hore“. Tiažová sila F_g, ktorej pôsobisko bude v ťažisku valca so smerom „dole“ a nakoniec normálová sila N_1 od podlahy s pôsobiskom v bode dotyku s podlahou a smerom hore.

V horizontálnom smere nám pôsobí normálová sila N_2 od steny, s pôsobiskom v bode dotyku a so smerom „doprava“. Trecia sila T_1 od podlahy s pôsobiskom v bode dotyku a smerom ktorý spomaľuje valec, teda „doľava“.



Obrázok 8: *Sily dokreslené do obrázku zo zadania.*

V poslednom kroku pred zostavením rovníc je dôležité si uvedomiť, ktoré sily budú mať vzhľadom na os rotácie valca moment. Sily F_g, N_1, N_2 nemajú vzhľadom na os moment, takže v našej momentovej rovnici sa budú nachádzať jedine sily T_1 a T_2. Rovnako vieme, že rotácia valca sa postupne spomaľuje, preto je jeho moment $I\varepsilon$, kde I je moment zotrvačnosti a ε uhlové zrýchlenie, resp. spomalenie.

Zostavme si teda rovnice:

$$T_2 + N_1 = F_g,$$

$$T_1 = N_2,$$

$$I\varepsilon = -R \cdot (T_1 + T_2) .$$

Vieme, že pre treciu silu platí $T = f_N$, tiažová sila je $F_g = mg$ a vzťah pre moment zotrvačnosti valca je $I = \frac{1}{2}mR^2$. Preto naše rovnice napíšeme ako

$$fN_2 + N_1 = mg,$$

$$fN_1 = N_2$$

$$\frac{1}{2}mR^2\varepsilon = -Rf \cdot (N_1 + N_2) .$$

Z druhej rovnice dosadíme N_2 do prvej a vyjadríme si N_1,

$$f^2 N_1 + N_1 = mg \quad \Rightarrow \quad N_1 = \frac{mg}{1+f^2} \quad \Rightarrow \quad N_2 = \frac{fmg}{1+f^2}.$$

Zistené N_1 a N_2 dosadíme do momentovej rovnice, no predtým v nej vykrátime jedno R:

$$\frac{1}{2}mR\varepsilon = -f \cdot \left(\frac{mg}{1+f^2} + \frac{fmg}{1+f^2} \right),$$

$$\varepsilon = -\frac{2fg}{R} \cdot \frac{1+f}{1+f^2}.$$

Môžeme si všimnúť, že nám vyšlo uhlové zrýchlenie záporné, a teda sa jedná o spomalenie. Taktiež vidíme, že sme si ho vyjadrili cez všetky zadané parametre. Na to, aby sme zisitli počet otočiek, po ktorých valec zastane, potrebujeme si vyjadriť uhlovú rýchlosť v závislosti od času. Pre čas po ktorom valec zastane platí, že v ňom je rýchlosť nula, a preto

$$\Omega(t) = \omega_0 - |\varepsilon|\, t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\omega_0}{|\varepsilon|} -$$

Pre uhol, o ktorý sa valec otočí, platí

$$\varphi(t) = \omega_0 t - \frac{1}{2}|\varepsilon|\, t^2 = \frac{\omega_0^2}{|\varepsilon|} - \frac{1}{2}|\varepsilon| \frac{\omega_0^2}{|\varepsilon|^2} = \frac{1}{2}\frac{\omega_0^2}{|\varepsilon|}$$

A teraz už máme vyhraté, pretože počet otočiek je vlastne iba opísaný uhol predelený uhlom jednej otáčky, čo je 2π:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega_0^2}{4\pi|\varepsilon|} = \frac{R\omega_0^2}{8fg\pi} \cdot \frac{1+f^2}{1+f}.$$

Počet otočiek, po ktorých valec zastane, je $N = \frac{R\omega_0^2}{8fg\pi} \cdot \frac{1+f^2}{1+f}$.

2.6 Kovový závit (séria „Vyhadzovanie“)

vzorák **Lucka**, opravovala **Lucka**

Pozrime sa najprv, čo sa deje s letiacim závitom počas jeho dobrodružnej cesty. Na začiatku sa po vyhodení nachádza v statickom magnetickom poli, takže jediná sila, ktorú závit cíti je gravitačná. Potom sa však dostane na rozhranie, kde sa už začnú diať zaujímavé veci. Nás však zaujíma, čo sa deje, keď padá dole cez rozhranie, a preto sa budeme venovať tomuto prípadu. Po prechode cez rozhranie na závit pôsobí opäť len gravitačná sila, čiže v určitom bode začne padať dole (či už vplyvom gravitačnej sily alebo stropu). Takže, poďme sa pozrieť čo sa bude diať, keď bude závit padať cez rozhranie.

Z Faradayovho zákona elektromagnetickej indukcie vieme, že ak máme uzavretý vodič a jeho vnútro sa nachádza v časovo meniacom sa magnetickom poli (to, čo sa deje mimo vodiča nás nezaujíma), tak sa vo vodiči vytvára elektrický prúd (nazývaný aj indukovaný). Teraz potrebujeme ešte zaloviť v pamäti a spomenúť si na to, ako vyzerá Lorentzova sila, konkrétne jej zložka popisujúca magnetickú silu. Tá je daná ako vektorový súčin rýchlosti náboja s magnetickým poľom a to celé je vynásobené ešte nábojom, čiže

$$\overrightarrow{F_m} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right).$$

Vidíme, že ak máme nenulové magnetické pole a vo vodiči majú náboje nenulovú rýchlosť vzhľadom na vodič (čiže ním tečie prúd)[4], ktorá nie je rovnobežná s magnetickým poľom, potom na vodič pôsobí nenulová magnetická sila.

Takže si to zhrňme: pri prechode rozhraním sa vo vnútri vodiča mení magnetické pole z 0 na B, čiže podľa Faradayvho zákona elektromagnetickej indukcie sa nám indukuje prúd, takže nastáva pohyb nábojov vo vodiči, a preto je rýchlosť nábojov nenulová. Z faktu, že závit nemenil svoju orientáciu a z obrázku v zadaní vieme, že závit sa pohybuje v rovine kolmej na B. Keď sa teraz vrátime späť k magnetickej sile, vidíme, že B a v budú vždy na seba kolmé, pretože náboje nemôžu uniknúť z vodiča a teda z vektorového súčinu sa stane obyčajné násobenie.

Ešte však musíme zistiť znamienko. Teraz prišiel čas pozrieť sa na zúbky Lenzovmu zákonu: Indukovaný prúd má taký smer, že svojím magnetickým poľom pôsobí proti zmene magnetického poľa, ktorá ho vyvolala. V našom prípade síce magnetické pole smeruje od nás, ale pre nás je dôležitá zmena magnetického poľa. Keďže náš závit padá tak pole sa zmenšuje, čiže zmena je daná opačným smerom, čiže k nám a teda prúd bude daný poľom od nás.

Už sme skoro v cieli, stačí, ak si zopakujeme Ampérov zákon a pomocou pravidla pravej ruky vidíme, že ak má magnetické pole smerovať od nás (tak ako na obrázku v zadaní), potom prúd musí tiecť v smere hodinových ručičiek.

Pozrime sa aká sila pôsobí na jednotlivé strany závitu. Na bokoch závitu je sila rovnako veľká, ale opačne orientovaná, čo v ideálnom prípade spôsobí, že sa tieto sily navzájom vyrušia, avšak svet nie je ideálny a teda závit sa vplyvom týchto síl mierne zdeformuje.

[4] Striktne vzaté, elektróny majú z pohľadu termodynamiky stalé nejakú nenulovú rýchlosť, avšak teraz máme na mysli usmernený pohyb elektrónov.

Nás však zaujíma sila F_2, ktorá pôsobí proti gravitačnej sile a bude spôsobovať to, že závit sa po čase pri prechode cez rozhranie ustáli. Takže máme rovnicu

$$F_g = F_2,$$

$$mg = qvB.$$

To, čo nepoznáme, je v našom prípade rýchlosť pohybujúcich sa nábojov. Keďže v je konštantná, $v = s/t$ a ak $s = L$, magnetickú silu vieme napísať v tvare

$$F_2 = L\left(\frac{q}{t}\right)B = LIB.$$

Takže potrebujeme zistiť veľkosť indukovaného prúdu. Tak poďme na to.

Indukovaný prúd vzniká v dôsledku indukovaného napätia, ktoré je dané ako záporná malá zmena magnetického toku $\Delta\Phi$ za malý čas Δt.

$$U = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Predpokladajme, že závit padá už ustálenou rýchlosťou, takže môžeme napísať, že závit poklesne o $\Delta y = v\Delta t$ a teda celková plocha sa zmení o $\Delta S = L\Delta y = Lv\Delta t$. Pole B sa nám v čase nemení, a preto

$$\Delta\Phi = \Delta SB = Lv\Delta tB.$$

Z toho dostávame vzťah pre U,

$$U = -LvB.$$

Dosadením $U = RI$ dostávame, že $I = \frac{BvL}{R}$. Tento výsledok dosadíme do vzťahu pre magnetickú silu a z rovnosti magnetickej a gravitačnej sily dostávame vzťah pre rýchlosť ako

$$v = \frac{mgR}{B^2L^2}.$$

Na záver sa pre zaujímavosť môžeme pozrieť na to, čo sa deje, keď závit letí hore a pri tom prechádza cez rozhranie. Keďže magnetické pole sa nám postupne zväčšuje, zmena magnetického poľa bude smerovať k nám a teda opäť z Lenzovho zákona dostávame, že prúd pôjde proti smeru hodinových ručičiek, takže magnetická sila bude smerovať dole a teda z Flemingovho pravidla ľavej ruky zisťujeme, že závit bude spomaľovaný. Takže sa nám môže stať, že ak Lucka vyhodí závit s malou počiatočnou rýchlosťou, tak závit nemusí celý prejsť rozhraním.

2.7 Kometu spatřil jsem, povězte, kam letí?

vzorák **Majo**, opravoval **Majo**

Kométa má hmotnosť m a hviezda M. Keby sme vedeli s istotou povedať, že $m \ll M$, táto úloha by sa stala omnoho jednoduchšou. Toto ale nemusí platiť. Preto sa aj hviezda bude nejako hýbať.

Aby sme mali nejaký bod, ktorý sa nehýbe, a mohli určovať súradnice vzhľadom naň, presuňme sa do sústavy spojenej s ťažiskom. Keď označíme $\vec{x_k}$ a $\vec{x_h}$ polohové vektory kométy a hviezdy v ťažiskovej sústave, dostávame vzťah

$$m\vec{x_k} + M\vec{x_h} = 0. \tag{2.7.1}$$

Zároveň môžeme pre túto situáciu popísať rôzne zákony zachovania. Označme $\vec{v_k}$ a $\vec{v_h}$ vektory okamžitých rýchlostí kométy a hviezdy. Zo zákonu zachovania hybnosti máme vzťah:

$$m\vec{v_k} + M\vec{v_h} = 0. \tag{2.7.2}$$

Zo zákonu zachovania momentu hybnosti zase máme:

$$m\vec{x_k} \times \vec{v_k} + M\vec{x_h} \times \vec{v_h} = \vec{L}. \tag{2.7.3}$$

Napokon zo zákonu zachovania energie máme

$$\frac{1}{2}m\left|\vec{v_k}\right|^2 + \frac{1}{2}M\left|\vec{v_h}\right|^2 - \frac{GmM}{\left|\vec{x_k} - \vec{x_h}\right|} = E. \tag{2.7.4}$$

Konštanty $|\vec{L}|$ a E vieme dopočítať z informácií o tom, ako vyzerá situácia v najvzdialenejšom bode orbity kométy a prvých dvoch rovníc. V tom prípade dostaneme ďalšie dve rovnice:

$$\left|\vec{x_{k_0}} - \vec{x_{h_0}}\right| = R, \tag{2.7.5}$$

$$\left|\vec{v_{k_0}}\right| = v. \tag{2.7.6}$$

Použitím rovnice 2.7.2 v rovnici 2.7.3 dostávame

$$\vec{L} = m\vec{x_{k_0}} \times \vec{v_{k_0}} + M\vec{x_{h_0}} \times \vec{v_{h_0}} = m\vec{x_{k_0}} \times \vec{v_{k_0}} - m\vec{x_{h_0}} \times \vec{v_{k_0}} = m\left(\vec{x_{k_0}} - \vec{x_{h_0}}\right) \times \vec{v_{k_0}}.$$

Vektor $\vec{x_{k_0}} - \vec{x_{h_0}}$ je kolmý na vektor $\vec{v_{k_0}}$. Vďaka 2.7.5 a 2.7.6 pre veľkosť celkového momentu hybnosti platí

$$\left|\vec{L}\right| = m\left|\vec{x_{k_0}} - \vec{x_{h_0}}\right|\left|\vec{v_{k_0}}\right| = mRv. \tag{2.7.7}$$

Podobne postupujme pre energiu. Najprv do 2.7.4 dosaďme 2.7.5:

$$E = \frac{1}{2}m\left|\vec{v_{k_0}}\right|^2 + \frac{1}{2}M\left|\vec{v_{h_0}}\right|^2 - \frac{GmM}{R}.$$

Ďalej do tohto vzťahu dosaďme 2.7.2:

$$E = \frac{1}{2}m\left|\vec{v_{k_0}}\right|^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}\left|\vec{v_{k_0}}\right|^2 - \frac{GmM}{R} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right)m\left|\vec{v_{k_0}}\right|^2 - \frac{GmM}{R}.$$

Napokon použitím 2.7.6 máme:

$$E = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right)mv^2 - \frac{GmM}{R}. \tag{2.7.8}$$

Máme teda štyri vektorové rovnice so štyrmi neznámymi vektormi $\vec{x_k}$, $\vec{x_h}$, $\vec{v_k}$, $\vec{v_h}$. Keďže vektory, ktoré používame, sú trojrozmerné[5], v skutočnosti máme 10 rovníc s 12 neznámymi[6]. Potrebujeme ešte do nich ponahadzovať predpoklady tak, aby sme dostali toľko rovníc, koľko neznámych.

[5] Lebo žijeme v trojrozmernom vesmíre – teda aspoň tak ho popisujeme a vnímame.

[6] Prvé tri rovnice sú rovnosti vektorov, a tak nesú tri kusy informácie, v každej zložke jednu. Naproti tomu rovnica 2.7.4 je rovnosť skalárov, a tak nesie len jeden kus informácie.

Prvý predpoklad, ktorý použijeme, je, že si uvedomíme, že celá situácia sa odohráva v rovine. Takže môžeme nastaviť tretiu zložku každého z vektorov $\overrightarrow{x_k}$, $\overrightarrow{x_h}$, $\overrightarrow{v_k}$, $\overrightarrow{v_h}$ nulovú. Týmto sme sa dostali k tomu, že máme 7 rovníc s 8 neznámymi – stále to je málo.

Do druhého predpokladu zabalíme to, kedy očakávame, že budú k sebe kométa a hviezda najbližšie. Keď bola kométa v najvzdialenejšom bode, vektory $\overrightarrow{v_{k_0}}$ a $\overrightarrow{x_{k_0}} - \overrightarrow{x_{h_0}}$ boli navzájom kolmé. Nič nám teda nebráni zaviesť súradnicový systém tak, aby bol vektor $\overrightarrow{x_{k_0}} - \overrightarrow{x_{h_0}}$ v smere osi x a vektor $\overrightarrow{v_{k_0}}$ v smere osi y. Potom sú vektory $\overrightarrow{v_{k_0}}$ a $\overrightarrow{v_{h_0}}$ rovnobežné s osou y a keďže ťažisko máme v strede súradnicovej sústavy, vektory $\overrightarrow{x_{k_0}}$ a $\overrightarrow{x_{h_0}}$ sú rovnobežné s osou x.

V prípade, keď bude kométa najbližšie, očakávame, že budú mať všetky tieto štyri vektory opačnú orientáciu, ako keď bola kométa najďalej[7]. Súradnice vektorov v bode, kde nastane minimum vzdialenosti, zapíšme v tvare

$$\overrightarrow{x_k} = (x_k, 0, 0)\,, \qquad \overrightarrow{x_h} = (x_h, 0, 0)\,,$$

$$\overrightarrow{v_k} = (0, v_k, 0)\,, \qquad \overrightarrow{v_h} = (0, v_h, 0)\,.$$

Ešte predtým, ako sa pohneme ďalej, si uvedomme, že takýmto spôsobom vieme zapísať vektory v práve 2 bodoch – ten, kde je vzdialenosť kométy a hviezdy najmenšia, a ten, kde je najväčšia. Toto pozorovanie sa nám ešte zíde.

Keď využijeme tieto štyri zápisy vektorov, naše štyri rovnice sa nám zjednodušia na tvar

$$mx_k + Mx_h = 0, \tag{2.7.9}$$

$$mv_k + Mv_h = 0, \tag{2.7.10}$$

$$mx_kv_k + Mx_hv_h = L, \tag{2.7.11}$$

$$\frac{1}{2}mv_k^2 + \frac{1}{2}Mv_h^2 - \frac{GmM}{|x_k - x_h|} = E. \tag{2.7.12}$$

Toto sú už naozaj len štyri rovnice so štyrmi neznámymi, ako sme potrebovali. Teraz ich už len vyriešiť.

Bez ujmy na všeobecnosti si povedzme, že $x_k > 0$. Z 2.7.9 potom máme, že $x_h < 0$. Preto $x_k - x_h > 0$, a tak sa môžeme zbaviť absolútnej hodnoty v 2.7.12.

Povedzme, že sa pokúsime vyjadriť x_k. Vyjadrime x_h z 2.7.9 a v_h z 2.7.10 a dosaďme ich do 2.7.11 a 2.7.12:

$$x_h = -\frac{m}{M}x_k,$$

$$v_h = -\frac{m}{M}v_k,$$

$$L = mx_kv_k + \frac{m^2}{M}x_kv_k,$$

$$E = \frac{1}{2}mv_k^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}v_k^2 - \frac{GmM}{x_k + \frac{m}{M}x_k}.$$

[7] Symetria nás nepustí – celá situácia musí byť nutne symetrická podľa osi x. Ak teda nemá byť najmenšia vzdialenosť dosiahnutá v dvoch rôznych bodoch (uvažujeme, že nenastal prípad, že je dosiahnutá v každom bode), musí sa nadobudnúť v tom bode eliptickej trajektórie, ktorý je presne oproti tomu, kde je vzdialenosť najväčšia.

Po uprataní

$$m\left(1+\frac{m}{M}\right)x_k v_k = L,$$

$$\frac{1}{2}m\left(1+\frac{m}{M}\right)v_k^2 - \frac{GmM}{x_k\left(1+\frac{m}{M}\right)} = E.$$

Vyjadrime z prvej z rovníc v_k a dosaďme ho do druhej:

$$v_k = \frac{L}{m\left(1+\frac{m}{M}\right)x_k},$$

$$\frac{1}{2}m\left(1+\frac{m}{M}\right)\left(\frac{L}{m\left(1+\frac{m}{M}\right)x_k}\right)^2 - \frac{GmM}{x_k\left(1+\frac{m}{M}\right)} = E.$$

Upracme túto rovnicu, zbavme sa škaredých menovateľov a upravme na kvadratickú rovnicu:

$$\frac{1}{2}\frac{L^2}{m\left(1+\frac{m}{M}\right)x_k^2} - \frac{GmM}{x_k\left(1+\frac{m}{M}\right)} = E,$$

$$\frac{L^2}{2} - Gm^2Mx_k = Em\left(1+\frac{m}{M}\right)x_k^2, \tag{2.7.13}$$

$$Em\left(1+\frac{m}{M}\right)x_k^2 + Gm^2Mx_k - \frac{L^2}{2} = 0.$$

Skôr ako prejdeme k riešeniu tejto kvadratickej rovnice, tak si uvedomme, že my poznáme jedno jej riešenie – ním je riešenie, kedy bude kométa v najvzdialenejšom bode. Táto rovnica síce vyzerá škaredo, ale má nejaké pekné riešenie. Z toho vyplýva, že aj druhé riešenie nebude až tak škaredé, resp. že diskriminant budeme vedieť odmocniť[8].

Nájdime najprv diskriminant 2.7.9:

$$D = G^2m^4M^2 + 2Em\left(1+\frac{m}{M}\right)L^2.$$

[8] Keďže vieme jedno riešenie, mohli by sme zvoliť aj takýto postup: nájdeme $x_{k_0} = \frac{M}{m+M}R$ a celú rovnicu 2.7.13 (aj s dosadeným E a L) predelíme dvojčlenom $\left(x_k - \frac{M}{m+M}R\right)$ a nájdeme riešenie rovnice, ktorú dostaneme. Tento postup je ale podobne nechutný ako ten, ktorý sa chystáme spraviť.

Nadišiel čas na dosadenie E a L z 2.7.8 a 2.7.7:

$$\begin{aligned}
D &= G^2m^4M^2 + 2\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{m}{M}\right)mv^2 - \frac{GmM}{R}\right)m\left(1+\frac{m}{M}\right)m^2R^2v^2 \\
&= m^4\left[G^2M^2 + 2\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{m}{M}\right)v^2 - \frac{GM}{R}\right)\left(1+\frac{m}{M}\right)R^2v^2\right] \\
&= m^4\left[G^2M^2 + \left(\left(1+\frac{m}{M}\right)v^2 - 2\frac{GM}{R}\right)\left(1+\frac{m}{M}\right)R^2v^2\right] \\
&= m^4\left[G^2M^2 + \left(\left(1+\frac{m}{M}\right)R^2v^4 - 2GMRv^2\right)\left(1+\frac{m}{M}\right)\right] \\
&= m^4\left[G^2M^2 - 2GMRv^2\left(1+\frac{m}{M}\right) + R^2v^4\left(1+\frac{m}{M}\right)^2\right] \\
&= m^4\left[GM - Rv^2\left(1+\frac{m}{M}\right)\right]^2.
\end{aligned}$$

Diskriminant skutočne vyšiel dostatočne pekný, a teda ho môžeme jednoducho odmocniť. Pre riešenia 2.7.13 preto platí

$$\begin{aligned}
x_{k_{1,2}} &= \frac{-Gm^2M \pm m^2\left(GM - Rv^2\left(1+\frac{m}{M}\right)\right)}{2\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{m}{M}\right)mv^2 - \frac{GmM}{R}\right)m\left(1+\frac{m}{M}\right)}, \\
x_{k_{1,2}} &= \frac{-\frac{GM}{R} \pm \left(\frac{GM}{R} - v^2\left(1+\frac{m}{M}\right)\right)}{\left(\left(1+\frac{m}{M}\right)v^2 - 2\frac{GM}{R}\right)\left(1+\frac{m}{M}\right)}R.
\end{aligned}$$

Keď si vyberieme znamienko mínus, dostávame riešenie

$$\begin{aligned}
x_{k_1} &= \frac{-2\frac{GM}{R} + v^2\left(1+\frac{m}{M}\right)}{\left(\left(1+\frac{m}{M}\right)v^2 - 2\frac{GM}{R}\right)\left(1+\frac{m}{M}\right)}R, \\
x_{k_1} &= \frac{1}{\left(1+\frac{m}{M}\right)}R = \frac{M}{m+M}R.
\end{aligned}$$

Toto je presne riešenie, ktoré je v najvzdialenejšom bode pohybu kométy. Očakávali sme, že ho dostaneme, takže toto nám potvrdzuje, že sme (pravdepodobne) nespravili chybu vo výpočte.

Keď si vyberieme znamienko plus, dostávame riešenie

$$\begin{aligned}
x_{k_2} &= \frac{-v^2\left(1+\frac{m}{M}\right)}{\left(\left(1+\frac{m}{M}\right)v^2 - 2\frac{GM}{R}\right)\left(1+\frac{m}{M}\right)}R, \\
x_{k_2} &= \frac{v^2}{2\frac{GM}{R} - \left(1+\frac{m}{M}\right)v^2}R.
\end{aligned}$$

Z 2.7.9 vieme dopočítať aj x_{h_2}:

$$x_{h_2} = \frac{-\frac{m}{M}v^2}{2\frac{GM}{R} - \left(1+\frac{m}{M}\right)v^2}R.$$

V najbližšom bode sú tak kométa a hviezda vzdialené

$$x_{k_2} - x_{h_2} = \frac{\left(1 + \frac{m}{M}\right) v^2}{2\frac{GM}{R} - \left(1 + \frac{m}{M}\right) v^2} R.$$

Ešte by sa patrilo overiť, že táto vzdialenosť je najviac R. To nastane vtedy, keď

$$\frac{\left(1 + \frac{m}{M}\right) v^2}{2\frac{GM}{R} - \left(1 + \frac{m}{M}\right) v^2} R \leq R,$$

$$\left(1 + \frac{m}{M}\right) v^2 \leq \frac{GM}{R},$$

$$v \leq \sqrt{\frac{GM^2}{R\,(m+M)}}.$$

V tejto nerovnosti nastane rovnosť vtedy, keď bude rýchlosť taká, že kométa bude obiehať po kružnici. Pre vyššie rýchlosti bude kométa „na opačnej strane hviezdy“ ďalej od hviezdy ako R, resp. pre nižšie rýchlosti bližšie ako R. Zadanie ale tvrdí, že rýchlosť v bola v najvzdialenejšom bode, a tak je táto podmienka splnená[9]. Takže môžeme s čistým svedomím prehlásiť, že kométa sa dostane k hviezde najbližšie do vzdialenosti

$$x_{k_2} - x_{h_2} = \frac{\left(1 + \frac{m}{M}\right) v^2}{2\frac{GM}{R} - \left(1 + \frac{m}{M}\right) v^2} R.$$

[9] Aj vďaka tomu si môžeme byť istí, že nikdy pri výpočtoch nedelíme nulou. Zároveň vďaka tomu vieme overiť, že oba výsledky $x_{k_{1,2}}$ sú väčšie ako 0, čo sme využili pri výpočte. Taktiež vďaka tejto podmienke nenastala situácia, že by kométa „ušla“ po parabolickej či hyperbolickej trajektórii.