Riešenia 1. kola letnej časti

1.1 Výtečná

vzorák **Matúš** a **Jaro**, opravoval **Matúš**

Určite ste si niekedy všimli, že ak si zoberieme otvorenú fľašu naplnenú vodou a začneme tlačiť na jej steny, vieme ovplyvniť rýchlosť, akou z nej voda vyteká. Bežne trvá rádovo sekundy kým vytečie plne napustená fľaša. Ale ak na fľašu skočím, začne pôsobiť na vodu vo fľaši silný tlak, ktorý ju donúti rýchlejšie opustiť nádobu.

Taktiež vieme, že v kvapalinách vzniká hydrostatický tlak. Na kvapalinu pôsobí gravitačná sila, ktorá spôsobuje, že na každú „vrstvu" kvapaliny vyvíjajú tlak všetky vrstvy nad ňou. Preto čím hlbšie v kvapaline sa nachádzame, tým väčšia tlaková sila na nás pôsobí.

Rovnaký argument môžeme použiť aj pri dvoch dierach v stenách nádoby z našej úlohy. Jedna diera je nižšie, a preto na kvapalinu v jej okolí pôsobí väčší tlak, ktorý ju núti prúdiť von z nádoby rýchlejšie.

Ak by nám však takéto vysvetlenie nestačilo a chceli by sme byť fyzikálne korektnejší, môžeme sa odvolať na *Torricelliho zákon*. Ten nám priamo hovorí, že výtoková rýchlosť ideálnej kvapaliny je priamo úmerná druhej odmocnine výške vodného stĺpca. Teda čím hlbšie sa nachádza výtok, tým rýchlejšie bude kvapalina z nádoby vytekať.

Dobre, vieme už, že z nádoby bude vytekať za rovnaký čas viacej kvapaliny smerom k Hovorcovi, pretože ten má svoju dieru umiestnenú nižšie ako Jaro. No to už máme skoro vyhraté! Zo zákona akcie a reakcie vieme, že dva hmotné body na seba pôsobia rovnako veľkými silami opačného smeru. Napríklad ak ste niekedy videli nejaký historický vojnový film z novovekej éry, tak ste si mohli všimnúť, že keď vystrelíme guľu z dela, delo sa pohne opačným smerom. Rovnaké to bude aj pri našej nádobe.

Z Jarovej strany pôsobí na nádobu rovnaká sila, aká pôsobí na vytekajúcu kvapalinu z jeho diery. Z Hovorcovej strany pôsobí na nádobu opäť rovnaká sila, aká pôsobí na vytekajúcu kvapalinu z Hovorcovej diery. Keďže ale vieme, že obe diery sú rovnakej veľkosti a kvapalina vyteká z Hovorcovej strany rýchlejšie, tak musí na ňu pôsobiť väčšia sila. Avšak tieto dve sily pôsobiace na nádobu sú opačného smeru, takže výslednú silu získame ako absolútnu hodnotu rozdielu týchto dvoch síl. Smer výslednej sily bude totožný so smerom väčšej z dvoch síl. Výsledná sila pôsobiaca na nádobu preto pôsobí smerom k Jarovi a vozík s nádobou sa preto taktiež vyberie smerom k Jarovi.

1.2 Výhodné vycizelovanie

vzorák **Nina**, opravovala **Nina**

Pozrime sa najprv na to, čo sa Lucka naučila pred svojím krokom do prázdna. Naučila sa loptičku vyhodiť tak, že loptička má vzhľadom na ňu vždy rovnakú počiatočnú rýchlosť. O tejto rýchlosti vieme, že ak Lucka stojí na zemi (a teda sa nehýbe), loptička vystúpi presne do výšky l. Z toho vieme určiť počiatočnú rýchlosť loptičky hneď po tom, ako ju vypustí z ruky, pretože musí platiť

$$\vec{l} = \vec{v_0} t + \frac{\vec{g} t^2}{2}. \tag{1.2.1}$$

Rýchlosť loptičky v čase t bude 0, takže $\vec{v_0} + \vec{g}\,t = \vec{0}$ čiže $t = \frac{v_0}{g}$. Po dosadení do (1.2.1) získame rýchlosť, ktorou Lucka hádže loptu,

$$\vec{v_0} = -\vec{g}\sqrt{\frac{2l}{g}}. \tag{1.2.2}$$

V momente, keď Lucka vykročí v ústrety slobode a voľnému pádu, je vo výške H a ona aj loptička majú vertikálnu rýchlosť $\vec{0}$. Následne však Lucka aj s loptičkou padne voľným pádom do výšky h, čiže do hĺbky $H-h$, čo sa dá vyjadriť rovnicou $H - h = \frac{gt_1^2}{2}$, kde t_1 je čas, za ktorý padne do hĺbky $H-h$. Z toho vidíme, že bude padať čas

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$$

a jej rýchlosť v hĺbke $H-h$ bude

$$\vec{v_1} = \vec{g}\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}.$$

V tomto momente sa začínajú diať zaujímavé veci. Zadanie nám vraví, že Lucka sa naučila vyhadzovať loptičku rýchlosťou $\vec{v_0}$ vzhľadom na seba, nech sa s ňou už deje čokoľvek. To znamená, že ak $\vec{v_L}$ a $\vec{v_l}$ sú rýchlosti Lucky a loptičky po vyhodení loptičky, musí pre ne platiť

$$\vec{v_l} = \vec{v_L} + \vec{v_0}. \tag{1.2.3}$$

Zároveň si však môžeme všimnúť, že na sústavu Lucka-loptička pôsobí jediná vonkajšia sila a to tiažová. Prvá impulzová veta nám hovorí, že časová zmena hybnosti je úmerná výslednici vonkajších síl pôsobiacich na sústavu. Sila, ktorou Lucka vyhodí loptičku, pôsobí pravdaže na loptičku a loptička pôsobí rovnako veľkou silou naspäť na Lucku, čo znamená, že ide o vnútorné sily vrámci sústavy a tieto nemôžu zmeniť celkovú hybnosť sústavy. Nech Lucka vyhodí loptičku tak, že sa prestanú dotýkať, keď sú obe ich ťažiská presne vo výške h. Potom musí platiť

$$(M+m)\,\vec{v_1} = M\vec{v_L} + m\,\vec{v_l}, \tag{1.2.4}$$

kde $\vec{v_1}$ je zároveň rýchlosť spoločného ťažiska Lucky a loptičky v momente, keď sa prestanú dotýkať a $\vec{v_L}$, $\vec{v_l}$ sú samostatné rýchlosti Lucky a loptičky v tom istom momente. Do (1.2.4) teraz dosadíme (1.2.3), čím získame

$$(M+m)\,\vec{v_1} = M\vec{v_L} + m(\vec{v_L} + \vec{v_0}),$$

z čoho dostaneme rýchlosti Lucky a loptičky

$$\vec{v_L} = \vec{v_1} - \vec{v_0}\frac{m}{M+m},$$

$$\vec{v_l} = \vec{v_1} + \vec{v_0}\frac{M}{M+m}.$$

Rovnica pre zvyšok pohybu loptičky je

$$\vec{h} = \vec{v_l} t_2 + \frac{\vec{g} t_2^2}{2},$$

$$\vec{h} = (\vec{v_1} + \vec{v_0} \frac{M}{M+m}) t_2 + \frac{\vec{g} t_2^2}{2}.$$

Tu $\vec{v_1}$, $\vec{g}$ aj $\vec{v_0}$ majú smer dole, takže môžeme vektory nahradiť skalármi s rovnakými znamienkami:

$$h = \left(v_1 + v_0 \frac{M}{M+m} \right) t_2 + \frac{g t_2^2}{2},$$

z čoho riešením kvadratickej rovnice pre t_2 získame

$$t_2 = -\sqrt{\frac{2}{g}} \left(\sqrt{H-h} - \sqrt{l} \frac{M}{M+m} \right) \pm \sqrt{\frac{2}{g} \left(\sqrt{H-h} - \sqrt{l} \frac{M}{M+m} \right)^2 + \frac{2h}{g}}.$$

Tu je ale správnym riešením len

$$t_2 = -\sqrt{\frac{2}{g}} \left(\sqrt{H-h} - \sqrt{l} \frac{M}{M+m} \right) + \sqrt{\frac{2}{g} \left(\sqrt{H-h} - \sqrt{l} \frac{M}{M+m} \right)^2 + \frac{2h}{g}},$$

pretože len to je kladné.

Pre celkový čas ešte treba spočítať t_1 a t_2, čím získame

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} - \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\sqrt{H-h} - \sqrt{l} \frac{M}{M+m} \right) + \sqrt{\frac{2}{g} \left(\sqrt{H-h} - \sqrt{l} \frac{M}{M+m} \right)^2 + \frac{2h}{g}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\frac{\sqrt{l} M}{M+m} + \sqrt{\left(\sqrt{H-h} - \sqrt{l} \frac{M}{M+m} \right)^2 + h} \right). \end{aligned}$$

1.3 Vive la résistance!

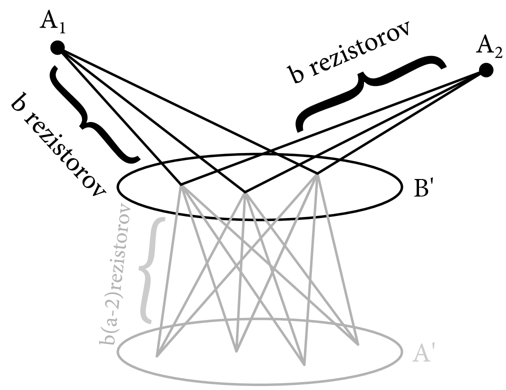
vzorák **Kubo**, opravovali **Kubo**

Pre začiatok si zaveďme značenie, nech sa v tom celom ľahšie orientujeme. Uzly zo skupiny A nazvime $A_1, A_2, \ldots, A_a$; obdobne uzly zo skupiny B nazvime $B_1, B_2, \ldots, B_b$. Toľko pre začiatok.

Celé riešenie úlohy zvládneme jedným, veľmi jednoduchým trikom. Ak majú dva body v obvode *rovnaký potenciál*, netečie medzi nimi prúd. Netečie medzi nimi prúd ani v prípade, že sú prepojené vodičom, či rezistorom. Ako v ktoromsi svojom učebnom texte k FKS napísal kedysi Juro Tekel, *keď je medzi takými dvoma bodmi vodič, môžeme ho kľudne rozpojiť, nakoľko by tadiaľ aj tak prúd netiekol; ak tam bol rezistor, môžeme ho predať a kúpiť si žuvačku.*

Ako však možno zistiť, že dva body majú rovnaký potenciál, keď už je to také užitočné? (Aj vy máte radi žuvačky?) Existuje niekoľko trikov so zrkadlovým prevracaním schémy či počítaním napätí a teda potenciálov v jednotlivých bodoch. A potom existuje jedna naozaj jednoduchá úvaha. Ak máme v obvode dva body, do/z ktorých tečú rovnaké prúdy, ak sú to body symetrické a ich výmenou by sa nič nezmenilo, vtedy majú rovnaký potenciál.

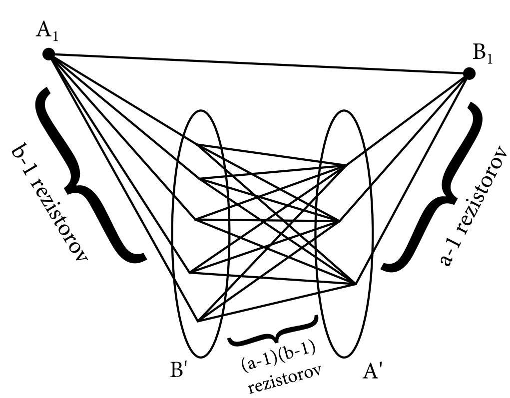
Merajme teraz odpor medzi bodmi A_1, A_2. Ak sa poriadne pozrieme na obvod, zistíme, že všetky body z B majú rovnaký potenciál – ak by sme napríklad medzi sebou prehodili body B_{42} a B_{47}, situácia v obvode sa nezmení. A úplne to isté platí o bodoch $A_3, A_4, ..., A_a$ - tiež majú všetky rovnaký potenciál. Rozpájanie v našom prípade príliš nehrozí - veď žiadne dva body z A, resp. z B nie sú vzájomne spojené. Môžeme však všetky body s rovnakým potenciálom spojiť do jedného uzla! Pozrime, čo nám to spraví so schémou - tu už pamätajme, že každá z elíps predstavuje jeden bod.



Obrázok 1: *Upravená schéma zapojenia*

Vidíme, že z uzla A_1 vedie do veľkého uzla s b bodmi b paralelne zapojených rezistorov, teda odpor medzi týmito dvoma uzlami je $\frac{R}{b}$. Toto celé je k tomu pripojené ešte raz sériovo (medzi uzlami b a A_2), teda platí, že **odpor medzi dvoma bodmi z** A **je rovný** $R_{AA} = \frac{2R}{b}$. Samozrejme, úplne symetricky, ak by sme vzali dva body z B, odpor medzi nimi by bol rovný $R_{BB} = \frac{2R}{a}$

Ak budeme merať odpor medzi bodmi A_1 a B_1, opäť vieme scucnúť do jedného bodu A' všetky uzly z A a do bodu B' všetky body z B (samozrejme, okrem A_1 a B_1 - body A', B' budú potom obsahovať $a-1$, resp. $b-1$ pôvodných uzlov). Jeden rezistor vedie medzi bodmi $A_1 - B_1$; $b-1$ rezistorov medzi bodmi $A_1 - B'$; $(a-1)(b-1)$ rezistorov medzi bodmi $A' - B'$ a napokon $a-1$ rezistorov medzi bodmi $A' - B_1$. Opäť si môžeme nakresliť obrázok.



Obrázok 2: *Schéma zapojenia – spojili sme body s rovnakým potenciálom.*

Jednoducho vieme povedať, že medzi A_1, B_1 sú dve paralelné vetvy, jedna s odporom R, druhá, zložitejšia, s odporom R_x, ktorý dopočítame. Vieme však povedať, že celkový odpor medzi našimi dvoma bodmi je $R_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R_x}}$, čo si vieme napísať i krajšie, tento výraz však platí pre práve dve paralelná odporné vetvy: $R_{AB} = \frac{RR_x}{R+R_x}$. Odpor R_x predstavuje tri sériovo zapojené paralelné skupiny rezistorov, teda $R_x = \frac{R}{b-1} + \frac{R}{(a-1)(b-1)} + \frac{R}{a-1}$, toto vieme upraviť na spoločného menovateľa, na tvar

$$R_x = \frac{(a-1)+1+(b-1)}{(a-1)(b-1)}R = \frac{a+b-1}{(a-1)(b-1)}R.$$

Toto vieme dosadiť do nášho vzťahu

$$R_{AB} = \frac{RR_x}{R+R_x} = \frac{\frac{a+b-1}{(a-1)(b-1)}R^2}{R+\frac{a+b-1}{(a-1)(b-1)}R} = \frac{\frac{a+b-1}{(a-1)(b-1)}R}{\frac{a+b-1+(a-1)(b-1)}{(a-1)(b-1)}} = \frac{a+b-1}{a+b-1+(a-1)(b-1)}R = \frac{a+b-1}{ab}R.$$

A teda po nepekných, no jednoduchých úpravách dostaneme odpor medzi jedným z bodov z A a jedným z bodov z B je rovný $R_{AB} = \frac{a+b-1}{ab}R$.

1.4 Vodu zmiešame so zmesou...

vzorák **Marcel**, opravoval **Marcel**

Na začiatok sa musím priznať, že hoci som sa UFu venoval dosť dlho, na túto úlohu si vôbec nepamätám… No, poďme k veci. Presne tak, ako píše zadanie, budeme zmiešavať soľ s cukrom, následne túto zmes zmiešavať s vodou a zisťovať koľko tejto zmesi sa roztopí vo vode.

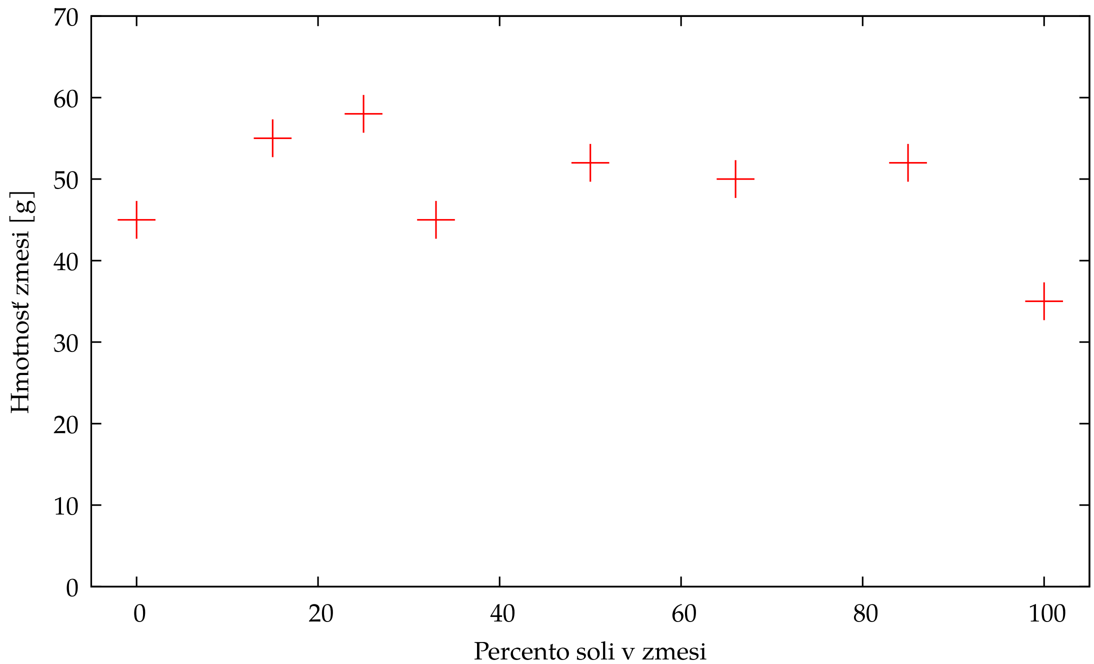
Pozrime si najprv koľko približne očakávame, že sa rozpustí takejto zmesi vo vode. Rozpustnosť kuchynskej soli podľa tabuliek je 355 g/l a cukru približne rovnako. Keďže nechceme minúť priveľa cukru a soli, tak by sme mohli rozpúšťať zmes soli a cukru v 100 ml vody.

Keďže rozpustnosť závisí od teploty vody, budeme sa snažiť túto teplotu počas merania nemeniť (čo by ale nemal byť problém). Inak bude experiment prebiehať pomerne priamočiaro: Do priehľadnej odmerky nalejeme 100 ml vody, v nejakej miske si namiešame zmes v požadovanom pomere a následne budeme pomaly prisypávať zmes až pokiaľ sa neprestane rozpúšťať.

Merania sme zapísali do tabuľky:

Percento soli v zmesi	Hmotnosť zmesi
0	45,0 g
15	55,0 g
25	58,0 g
33	45,0 g
50	52,0 g
66	50,0 g
85	42,0 g
100	35,0 g

A následne z meraní urobili graf:



Obrázok 3: *Graf závislosti hmotnosti zmesi v nasýtenom roztoku od percenta soli v zmesi.*

Povedzme najprv niečo o chybách merania a až potom zhodnoťme výsledky. Ako najväčšiu chybu merania by sme tentokrát asi označili to, že určovanie toho, kedy je roztok nasýtený sme nerobili nijako exaktne, ale len spôsobom: „Keď to dosť pomiešam a už sa to nerozpustí, tak je to nasýtené“. Problém bola u nás napríklad soľ, ktorá obsahovala niektoré kryštáliky, ktoré sa nerozpustili ani v prípade že roztok nebol nasýtený.

Hmotnosť bola meraná na desatinu gramu, čo je v porovnaní so subjektívnym zisťovaním nasýtenosti roztoku veľmi presne.

Čo sa týka výsledkov, tak z nich asi nevieme vyvodiť žiadnu závislosť. Je to spôsobené veľmi veľkou chybou merania v rozoznávaní nasýteného roztoku, ktorá bude asi aj väčšia ako rozdiel medzi najväčšou a najmenšou nameranou hodnotou.

Ako by sme mohli experiment zlepšiť? Asi by bolo treba venovať mu veľa času, aby sa dala zmes cukru a soli pridávať postupne, a mať čas na ich dokonalé rozpustenie. Za zváženie by stál aj opačný postup: nie pridávať cukor a soľ do vody, ale vodu do cukru a soli. Takto by sme mohli pridať toľko vody, koľko by bolo treba na rozpustenie zmesi a meranie by možno bolo presnejšie.

Iný možný postup je, že nasypeme veľa cukru a soli do vody a potom zistíme koľko sa jej nerozpustilo. To by ale znamenalo zisťovať hmotnosť toho, čo sa nerozpustilo, kvôli čomu by bolo asi treba túto zmes sušiť, aby sme ju nevážili aj s vodou.

Takýto postup nám príde na prvý pohľad ešte menej presný ako ten, ktorým sme to merali. (A medzi nami, to už je teda čo povedať.)

1.5 Viete... Klin sa bodom vybíja

vzorák **Rony**, opravoval **Rony**

Na začiatok sa zamyslime, čo sa bude s klinom a hmotným bodom diať. Hmotný bod je ťahaný tiažou dole, no v ceste mu stojí naklonená rovina tvorená klinom. Tým samozrejme myslíme normálovú silu, ktorou klin pôsobí na bod, aby sa neprepadol cez jeho povrch. Newtonov 3. zákon však káže pre každú akciu, rovnako veľkú a opačnú reakciu, teda hmotný bod bude tlačiť opačnou silou na klin, čím spôsobí, že klin sa mu bude uhýbať zrýchlením, ktorého veľkosť označme A. Podobne označme **horizontálnu** zložku zrýchlenia hmotného bodu a_x.

Ak si teraz označíme horizontálnu zložku normálovej sily ako N_x a napíšeme Newtonov 2. zákon pre obe telesá v tomto smere, dostaneme

$$MA = N_x,$$

$$ma_x = N_x.$$

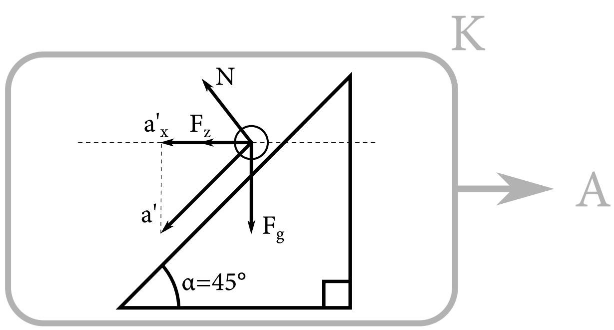
Z toho jednoznačne vyplýva, že

$$ma_x = MA. \tag{1.5.1}$$

Ďalej sa v riešení dá pokračovať aj cez energie, no my si ukážeme dve riešenia cez sily. Prvé sa dá veľmi ľahko aplikovať na všetky podobné príklady, druhé je síce čistejšie, no je ťažšie ho nájsť.

Riešenie 1 (pomocou fiktívnych (zotrvačných) síl a neinerciálnych sústav)

Predstavme si, že sa nachádzame vo vzťažnej sústave K spojenej s klinom. Klin však zrýchľuje vzhľadom na prednáškovú sálu, teda táto sústava je *neinerciálna*. V praxi to znamená, že na hmotný bod bude pôsobiť zotrvačná sila $F_z = mA$, viď obrázok. Presne táto sila je to, čo nás tlačí do sedadla keď sedíme v zrýchľujúcom aute. Na hmotný bod v tejto sústave navyše pôsobia všetky sily, ktoré naň pôsobili v inerciálnej sústave (tiaž F_g a normálová sila N).



Prečo sa oplatí presunúť do zrýchľujúcej sústavy K? Predsa preto, že klin sa v tejto sústave nehýbe, a tak to vlastne vyzerá, akoby hmotný bod len skĺzol dole po naklonenej rovine zrýchlením a'. Toto zrýchlenie nájdeme tak, že vypočítame priemet síl F_z a F_g na smer pohybu a použijeme Newtonov 2. zákon

$$ma' = F_g \sin\alpha + F_z \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(F_g + F_z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(mg + mA)\,.$$

Teraz chceme vyjadriť a_x pomocou a', aby sme mohli použiť (1.5.1). Prv nájdeme horizontálnu zložku a'_x zrýchlenia a' v sústave K. Keďže a' smeruje pozdĺž naklonenej roviny, platí

$$a'_x = a' \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} a' .$$

V horizontálnom smere sa teda bod pohybuje so zrýchlením a'_x vzhľadom na klin, ktorý sa pohybuje so zrýchlením A v opačnom smere vzhľadom na prednáškovú sálu. Tým pádom zrýchlenie a_x hmotného bodu vzhľadom na miestnosť nájdeme ako

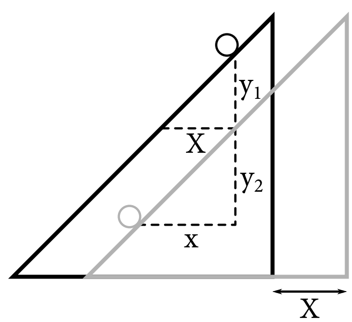
$$a_x = a'_x - A = \frac{1}{2}\left(g - A\right) .$$

Dosadením do rovnice (1.5.1) a úpravou dostaneme finálny výsledok

$$A = \frac{m}{m + 2M} g.$$

Riešenie 2

Avšak pokiaľ zo zrýchlení pociťujete závraty, riešiť sa dá aj v inerciálnej sústave. Prv sa zamyslíme po akej trajektórii sa bude bod pohybovať. V tom nám pomôže obrázok:



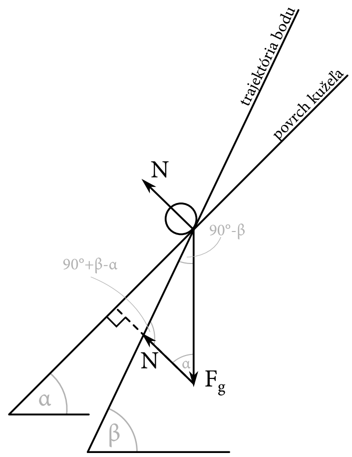
Vidíme, že keď sa bod pohne o x doľava a klin sa pohne o X doprava, tak na to, aby bod zostal na povrchu klinu, musí vertikálne klesnúť o

$$\begin{aligned} y = y_1 + y_2 &= X \tan\alpha + x \tan\alpha \\ &= X + x = x\left(1 + \frac{m}{M}\right), \end{aligned}$$

kde v poslednom kroku sme využili rovnicu 1.5.1, keďže $x = \frac{1}{2}at^2$, $X = \frac{1}{2}At^2$, $mx = MX$. To ale znamená, že bod sa pohybuje po priamej trajektórii pod uhlom β voči horizontále,

$$\tan\beta = \frac{y}{x} = \left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

V tejto (inerciálnej) sústave pôsobia na bod len dve sily, tiažová F_g a normálová N. Aby sa bod hýbal po priamke, musí aj výsledná sila (vektorový súčet $F_g + N$) na bod smerovať po tejto priamke:



Všimnite si, že silu N sme prekreslili tak, aby začínala na konci F_g - tak sa graficky sčítavajú sily. Zo sínusovej vety v trojuholníku tvorenom vektormi N a F_g dostaneme

$$\frac{N}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{F_g}{\sin(90^\circ + \beta - \alpha)},$$

$$N = mg\frac{\cos\beta}{\cos(\alpha - \beta)} = mg\frac{\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta},$$

$$N = mg\frac{1}{\cos\alpha + \sin\alpha\tan\beta},$$

$$N = \sqrt{2}g\frac{mM}{m + 2M}.$$

Teraz si už len stačí všimnúť, že horizontálna zložka normálovej sily je

$$N_x = N\sin\alpha = g\frac{mM}{m + 2M}$$

a keďže N_x je jediná horizontálne pôsobiaca sila na klin, máme $MA = N_x$, alebo

$$A = g\frac{m}{m + 2M}.$$

1.6 Volta by sa v hrobe obracal

vzorák **Legolas** a **Hovorca**, opravoval **Hovorca**

Elektromagnetická časť riešenia

Označme si elementárny náboj ako q. Potom elektróny vzdialené od seba d na seba pôsobia elektrickou silou (elektrickou zložkou Lorentzovej sily) veľkosti

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{d^2},$$

pričom táto sila je odpudivá.

Elektrón letiaci rýchlosťou v vytvára vo vzdialenosti d kolmo na svoj pohyb podľa Biot-Savart-Laplaceovho zákona pre bodový náboj magnetické pole veľkosti

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv}{d^2},$$

pričom toto pole bude kolmé na smer pohybu druhého elektrónu, takže magnetická sila (magnetická zložka Lorentzovej sily) pôsobiaca medzi elektrónmi bude mať veľkosť

$$F_m = qvB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q^2v^2}{d^2}.$$

Táto sila je zase príťažlivá (stačí sa trocha pohrať s vektorovými súčinmi vo vzťahu pre magnetickú zložku Lorentzovej sily, alebo si spomenúť, že vodiče so súhlasným smerom prúdu sa priťahujú).

Výsledná sila teda bude nulová vtedy, keď sa budú veľkosti elektrickej a magnetickej zložky rovnať, čiže dostávame rovnicu, ktorú už stačí len vyriešiť:

$$F_e = F_m,$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{d^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q^2v^2}{d^2},$$

$$v^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} = c^2,$$

$$v = c,$$

kde c je rýchlosť svetla. To je možno prekvapivý, relativistický výsledok.

Relativistická časť riešenia

Prvou rozumnou úvahou je následne úlohu znova vyriešiť, tentokrát však použijúc relativistické vzťahy pre magnetické a elektrické pole pre bodový náboj pohybujúci sa rýchlosťou v vo vzdialenosti d od miesta, v ktorom pole hľadáme. V našom prípade si môžeme dovoliť niekoľko zjednodušení, nakoľko spojnica elektrónu a miesta, v ktorom polia hľadáme, je vždy kolmá na smer rýchlosti (elektróny sa hýbu spolu).

Relativistické vzťahy sa teda zjednodušia na (vraviac čisto o veľkostiach):

$$E = \gamma\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d^2},$$

$$B = \frac{1}{c^2}vE = \gamma\frac{v}{c^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d^2},$$

kde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ je Lorentzov faktor.

Podmienka nulovej sily zostáva rovnaká, môžeme riešiť.

$$qE = F_e = F_m = qvB,$$

$$\gamma \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{d^2} = \gamma \frac{v^2}{c^2} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{d^2},$$

$$v^2 = c^2,$$

$$v = c.$$

Vidíme, že dostávame rovnaký výsledok. Toto overenie je dobré urobiť, avšak v ďalších úvahách sa zaobídeme aj bez neho.

Keď sa presunieme do vzťažnej sústavy spojenej s elektrónmi, udejú sa dve veci. Po prvé, v tejto sústave nebude žiadne magnetické pole (lebo v nej skrátka elektróny stoja), a teda sa elektróny budú odpudzovať.

Po druhé, zadanie sa mení na inú otázku – ako rýchlo má utekať pozorovateľ preč od elektrónov, aby sa mu zdalo, že sa elektróny neodpudzujú? Je však známe, že sily spôsobujú zrýchlenie. Takže elektróny určite budú zrýchľovať smerom od seba a hľadaná rýchlosť pozorovateľa je teda taká, že neuvidí elektróny zrýchľovať. No a to nastane presne vtedy, keď sa bude pozorovateľ vzďaľovať od elektrónov rýchlosťou svetla, lebo vtedy budú „zamrznuté" v jednom časovom momente a teda ich zrýchľovať neuvidí.

Poznámky po opravení

Gravitačná sila, ktorou na seba elektróny pôsobia – aspoň taká tá klasická – je v tejto úlohe zanedbateľná. Nebolo cieľom úlohy uvažovať relativistickú gravitačnú silu – ak ste ju do svojich výpočtov zahrnuli, samozrejme na škodu to nebolo ale na plný počet bodov to nebolo vyžadované.

Viacerí ste v úlohe uvažovali akou rýchlosťou sa sprostredkováva elektromagnetická interakcia a teda ako rýchlo musia elektróny pred ňou utekať aby ich nedobehla, čo je tiež zaujímavá úvaha. Riešenie Jožka Csipesa dokonca predviedlo Lorentzove transformácie pre sústavu spojenú s elektrónmi a laboratórnu sústavu. Nakoľko je toto riešenie podľa môjho skromného názoru veľmi pekné, po dohode s riešiteľom si zaslúžilo svoje miesto aj vo vzorovom riešení: `https://fks.page.link/36-2-1-6`

1.7 Violet, indigo, blue, green, yellow, orange, red

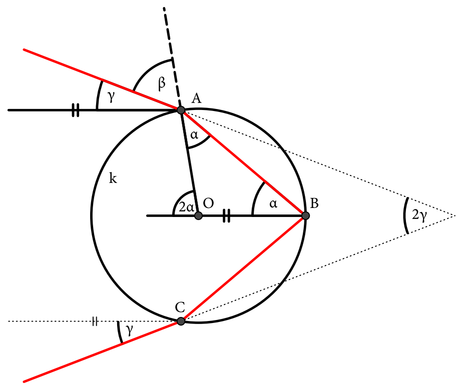
vzorák **Majo**, opravoval **Majo**

Počas „cesty" lúča sa stanú 3 zaujímavé veci: lom, odraz a zase lom. Tieto javy popisujú Zákon lomu a Zákon odrazu. Menej populárna časť z týchto zákonov hovorí, že zlomený či odrazený lúč ležia v rovine určenej dopadajúcim lúčom a kolmicou na povrch v mieste dopadu. Preto je táto úloha len dvojrozmerná, hoci vodná kvapka je trojrozmerná. Touto rovinou je rovina obsahujúca dopadajúci lúč a stred guľovej kvapky[1].

Všimnime si ešte jednu vec. Vyšlime z bodu, v ktorom nastal odraz, dva lúče. Jeden proti smeru dopadajúceho lúča a druhý v smere odrazeného lúča. Tieto dva lúče sú navzájom symetrické podľa priamky spájajúcej stred gule a bod, v ktorom sa lúč odrazí. Celá situácia tak musí byť symetrická podľa tejto priamky.

Teraz si už vieme nakresliť pekný obrázok toho, čo sa udeje:

[1] Stred gule totiž zakaždým leží na kolmici dopadu.



Obrázok 4: *Dráha lúča kvapkou.*

Už na obrázku sme si označili kružnicu, niekoľko bodov a niekoľko uhlov. Označili sme si:

- k kružnicu, ktorú vytne rovina, v ktorej sa nachádzajú lúče na povrchu kvapky,
- O stred guľovej kvapky[2],
- A bod, kde nastal prvý lom,
- B bod, kde nastal odraz,
- C bod, kde nastal druhý lom,
- α uhol ABO,
- β uhol dopadajúceho lúča a priamky AO,
- γ uhol dopadajúceho lúča a priamky BO[3].

Nás bude najviac zaujímať ešte iný uhol – uhol dopadajúceho a vystupujúceho lúča. Ten vieme vyjadriť ako súčet dvoch uhlov. Uhla, ktorý zviera dopadajúci lúč s priamkou BO, a uhla, ktorý zviera vystupujúci lúč s priamkou BO. Pre prvý z týchto uhlov máme meno γ a druhý má zo symetrie podľa priamky BO tiež veľkosť γ. Potrebujeme preto maximalizovať uhol 2γ[4].

Hoci γ je ten uhol, ktorý potrebujeme nejako vyjadriť, máme o ňom málo informácií. O uhloch α a β vieme toho povedať viac. Trojuholník OAB je totiž rovnoramenný, a teda aj uhol OAB má veľkosť α. Môžeme vidieť, že pri bode A je β uhol dopadajúceho lúča a α uhol zlomeného lúča. Zo Snellovho zákona[5] preto máme

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = n. \tag{1.7.1}$$

Tu $n = 1{,}331$ je relatívny index lomu na rozhraní voda-vzduch.

[2] Keďže sa nachádzame v rovine obsahujúcej O, je to súčasne stred kružnice k.

[3] Na obrázku je znázornený pri rovnobežke s priamkou BO cez bod A.

[4] Teoreticky by sa mohlo stať, že γ bude väčšia ako 45°, a teda by bol uhol 2γ väčší ako 90°. Vtedy by sme za uhol dopadajúceho a vystupujúceho lúča brali jeho doplnok do 180°. Ak by sa toto stalo, tak pri prechode zo stavu „svietime priamo do O“, kedy $2\gamma = 0°$, do stavu s $2\gamma > 90°$ by sme niekde prešli stavom, v ktorom $2\gamma = 90°$, pretože γ sa mení spojito. $2\gamma = 90°$ by potom bolo hľadaným maximom. V skutočnosti ale bude platiť $\gamma < 45°$.

[5] Toto je iný názov pre Zákon lomu.

Stále však potrebujeme nejako vyjadriť γ. Pozrime sa na uhly pri bode A. Uhly γ a β spolu tvoria uhol medzi kolmicou dopadu a rovnobežkou s BO. Vďaka rovnobežnosti s BO vieme tento uhol preniesť na súhlasný uhol k bodu O. Tento uhol je susedný k uhlu AOB, a preto má veľkosť 2α. Preto

$$\gamma = 2\alpha - \beta. \tag{1.7.2}$$

V podstate by nám v tomto momente stačilo vyjadriť napríklad β z rovnice 1.7.1 a nájsť maximum γ ako funkcie α. Vyjadrenie β by ale nebolo veľmi pekné a ani by neviedlo k o nič krajšiemu riešeniu. Preto sa touto cestou nevydáme[6]. To nám ale vôbec nebráni vnímať β ako nejakú funkciu α. Zatiaľ ju nijako bližšie nešpecifikujeme, ale vieme, že pre ňu platí rovnica 1.7.1.

Tým pádom sa nám ale podarilo vyjadriť γ ako funkciu jednej premennej[7]. Potrebujeme nájsť jej maximum. Na hľadanie extrémov funkcií jednej premennej máme veľmi silné kladivo – derivácie[8].

Aby pre nejaký uhol α nadobúdala funkcia $\gamma(\alpha)$ extrém, musí byť jej derivácia podľa α nulová. Derivovaním vzťahu 1.7.2 dostávame podmienku

$$0 = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\alpha} = 2 - \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}. \tag{1.7.3}$$

Potrebujeme ešte z rovnice 1.7.1 vyjadriť deriváciu β podľa α, preto zderivujme aj ju. Pritom nesmieme zabudnúť derivovať $\sin\beta$ ako zloženú funkciu:

$$\frac{\mathrm{d}(\sin\beta)}{\mathrm{d}\alpha} = n\frac{\mathrm{d}(\sin\alpha)}{\mathrm{d}\alpha},$$

$$\cos\beta\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha} = n\cos\alpha,$$

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha} = n\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

Po dosadení do (1.7.3) dostávame

$$2 - n\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = 0 \quad\Rightarrow\quad 2\cos\beta = n\cos\alpha. \tag{1.7.4}$$

Spolu s upravenou rovnicou (1.7.1) tak riešime sústavu

$$2\cos\beta = n\cos\alpha,$$

$$\sin\beta = n\sin\alpha.$$

Pri jej riešení by nám pomohlo, keby sme vedeli dať dokopy členy obsahujúce n. Keď si spomenieme na vzorček $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ako dobrý nápad na úpravu vyzerá umocnenie oboch strán rovnice na druhú a sčítanie – zbavíme sa totiž premennej α:

$$4\cos^2\beta + \sin^2\beta = n^2.$$

[6] Každopádne Ti odporúčam si to vyskúšať. Ak vieš derivovať čokoľvek, tak je to dokonca jednoduchšia cesta.
[7] T. j. $\gamma = 2\alpha - \beta(\alpha)$.
[8] Ak Ťa toto slovo zaskočilo tak silno, že si sa práve od preľaknutia takmer zadusil večerou, tak sa Ti ospravedlňujem.

Keď znova použijeme vzorček[9] $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, po pár úpravách prídeme k tomu, že

$$\begin{aligned} 4\cos^2\beta + (1 - \cos^2\beta) &= n^2 \\ \cos^2\beta &= \frac{n^2 - 1}{3} \\ \cos\beta &= \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}} \\ \beta &= \arccos\sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}} = 59°31'36''. \end{aligned}$$

Využitím (1.7.4) vieme ľahko nájsť aj α:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{2}{n}\cos\beta = \frac{2}{n}\sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}} = \sqrt{\frac{4n^2 - 4}{3n^2}}, \\ \alpha &= \arccos\sqrt{\frac{4n^2 - 4}{3n^2}} = 40°21'21''. \end{aligned}$$

Napokon z (1.7.2) máme hľadanú veľkosť uhla 2γ:

$$2\gamma = 4\alpha - 2\beta = 4\arccos\sqrt{\frac{4n^2 - 4}{3n^2}} - 2\arccos\sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}} \doteq 42°22'11''.$$

Na to, aby bol uhol dopadajúceho a vystupujúceho lúča čo najväčší, musíme na kvapku zasvietiť pod uhlom $\beta = 59°31'36''$. Uhol dopadajúceho a vystupujúceho lúča v tomto prípade bude $2\gamma = 42°22'11''$.

[9] Všimni si, že v skutočnosti využívame aj to, že uhol α má veľkosť najviac 90°.