Fyzikálny korešpondenčný seminár
XXXVI. ročník, 2020/2021
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 2. kola zimnej časti

2.1 Nad vecou

vzorák **Patrik**, opravoval **Patrik**

Pri svietení svetla na sklo istá čast svetla prejde, časť sa odrazí a zvyšok svetla sa pohltí.

Pozrime sa najprv na situáciu, pri ktorej je vonku tma. Keď sedíme v električke, tak v nej svieti svetlo, ktoré je spravidla oveľa jasnejšie ako vonkajšie svetlo. Výsledkom toho je, že odraz vnútorného prostredia od skla uvidíme jasnejšie ako vonkajšie prostredie. Ak by sme v noci stáli vonku, tak by svetlo odrazené z vonkajšieho prostredia bolo oveľa menej jasné ako svetlo prepustené z vnútorného prostredia.

Pozrime sa teraz na prípad, keď je ráno. Vonku je značne viac svetla ako v električke, a teda vidíme, že to bude fungovať presne naopak. Keď stojíme vonku, svetlo odrazené od skla je omnoho jasnejšie ako svetlo, ktoré prechádza z tmavej električky. Keby sme sa nachádzali v električke, bolo by svetlo, ktoré by prišlo z vonkajšieho prostredia oveľa jasnejšie ako svetlo, ktoré by sa odrazilo z interiéru električky. Preto by sme videli vonkajšie prostredie lepšie ako odraz električky.

2.2 Kocúrkovo

vzorák **Lucka**, opravoval **Hovorca**

Na to, aby sme vypočítali sily lán, ktoré pôsobia na písmeno O potrebujeme napísať rovnice, v ktorých budú tieto sily vystupovať. Hneď na začiatok sa zbavíme jednej rovnice. Keďže písmeno je po celý čas vo vodorovnej polohe, tak vieme že moment sily je nulový a teda sila od ľavého lana sa rovná sile od pravého). Tu sa však musíme na chvíľu pozastaviť a urobiť zopár predpokladov. Táto úloha sa dala preto riešiť viacerými spôsobmi, ktoré závisia od toho aké predpoklady uvažujeme. Predstavme si, že písmeno O tlačí na lano silou $-\overrightarrow{F}$ a teda lano tlačí na písmeno rovnako veľkou, ale opačne orientovanou silou $\overrightarrow{F}$, ktorej veľkosť chceme vypočítať. Ak by sme poznali smer sily $\overrightarrow{F}$, tak by sme vedeli z geometrie písmena a stožiara napísať rovnicu, v ktorej by vystupovala. Avšak na to, aby mohla takáto situácia nastať musia byť splnené nasledovné predpoklady: hrany písmena musia byť zaoblené a nezanedbateľne hrubé (uvažujeme 3D objekt nie 2D) a trenie medzi lanom a písmenom je nulové. Uvažujme malý kúsok nehmotného lana. Keďže náš kúsok lana sa nijak nenaťahuje ani netrhá, vieme z toho usúdiť, že veľkosti síl, ktoré pôsobia na lano z susedných malých kúskov musia byť rovnako veľké. Z týchto vlastností vyplýva, že sila F má smer daný osou uhla, ktorý zviera dolná a horná časť lana.[1]

Skúsme teraz nájsť rovnicu, v ktorej bude vystupovať sila $\overrightarrow{F}$. Asi najjednoduchšia cesta bude napísať si rovnicu, ktorá popisuje všetky sily pôsobiace na písmeno. Okrem sily od lana nám na písmeno pôsobí ešte aj gravitačná sila, avšak treba si uvedomiť, že všetky tieto sily majú rôzny smer, takže s nimi budeme pracovať ako s vektormi. Zavedieme si x-ovú os rovnobežne s písmenom O (prechádzajúcou cez body, v ktorých je písmeno pripevnené)a

[1] Náš malý kúsok lana tlačí na písmeno malou silou $\delta\overrightarrow{F}$. Ak by sme zistili silu $\delta\overrightarrow{F}$, potom by už len stačilo spočítať všetky takéto malé sily a tak by sme zistili celkovú silu $\overrightarrow{F}$. Sčítaním síl od susediacich dielikov lana na náš malý kúsok získame silu $\delta\overrightarrow{F}$. Dotyčnicové zložky sa vyrušia a teda zostane nám iba zložka smerujúce kolmo na povrch písmenka. Ak teraz opäť vektorovo sčítame všetky takéto malé zložky $\delta\overrightarrow{F}$, tak dostaneme celkovú silu $\overrightarrow{F}$ smerujúca v smere osi uhla, ktorý zviera dolná a horná časť lana.

y-ovú os prechádzajúcu tyčou. Teraz si rozložme jednotlivé sily do smerov nami zadefinovaných osí (samozrejme bude potrebné použiť trochu trigonometrie).

Všeobecne je naša rovnica zadaná ako

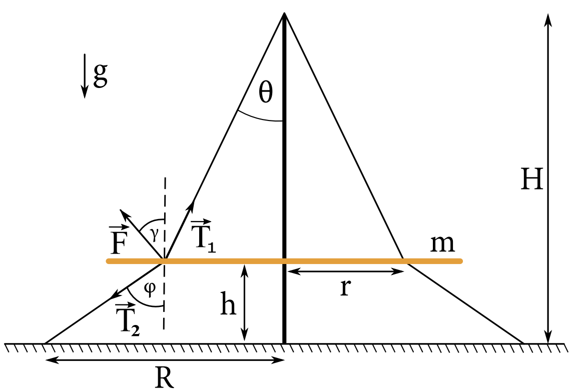
$$\vec{F_g} + \vec{F} = \vec{0}. \tag{1.2.1}$$

V smere osi y

$$-mg + 2F_y = 0 \tag{1.2.2}$$

a v smere osi x

$$F_x - F_x = 0. \tag{1.2.3}$$



Tretia rovnica (1.2.3) nám nič nové nepovie, iba, že $F_x = F_x$. V druhej rovnici (1.2.2) je F vynásobené 2, pretože písmeno držia dve laná. Na pravých stranách našich 3 rovníc je 0 ($\vec{0}$), pretože písmeno si iba hovie a nehýbe z čoho vyplýva, že celková sila je nulová.

Poďme si teraz vyjadriť silu F pomocou zadaných hodnôt. Sila F pôsobí pod uhlom γ vzhľadom na y-ovú os, takže môžeme napísať $F_y = F\cos(\gamma)$. Zároveň vieme, že $\gamma = \frac{\theta-\varphi}{2} + 90$. Rovnicu (1.2.2) vieme prepísať ako

$$-mg + 2F\cos(\gamma) = 0, \tag{1.2.4}$$

kde

$$\cos(\gamma) = \sin(\frac{\varphi-\theta}{2}) = \frac{\sqrt{1-\cos(\varphi)\cos(\theta)-\sin(\varphi)\sin(\theta)}}{\sqrt{2}}.$$

Takže výsledok je

$$F = \frac{mg}{2\cos(\gamma)} = \frac{mg}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \cos(\varphi)\cos(\theta) - \sin(\varphi)\sin(\theta)}}, \tag{1.2.5}$$

pričom $\cos(\theta) = \frac{H-h}{\sqrt{r^2+(H-h)^2}}$, $\sin(\theta) = \frac{r}{\sqrt{r^2+(H-h)^2}}$, $\cos(\varphi) = \frac{h}{\sqrt{(R-r)^2+h^2}}$ a $\sin(\varphi) = \frac{R-r}{\sqrt{(R-r)^2+h^2}}$.

Pár poznámok na záver:

Viacerí z vás úlohu pochopili tak, že bolo potrebné vypočítať sily od spodnej a hornej časti lana. Ak si napíšeme rovnicu pre všetky sily pôsobiace na naše písmeno dostaneme všeobecne

$$-mg + 2T_{1y} - 2T_{2y} = 0, \tag{1.2.6}$$

avšak v našom prípade platí, že $T_1 = T_2 = T$ z dôvodov, ktoré sme uviedli už na začiatku, preto dostávame rovnicu

$$-mg + 2T\cos(\theta) - 2T\cos(\varphi) = 0, \tag{1.2.7}$$

z toho vyplýva, že

$$T = \frac{mg}{2(\cos(\theta) - \cos(\varphi))}. \tag{1.2.8}$$

Ďalšiu malú poznámku by som venovala tomu, že k rovnici (1.2.4) sa dalo dopracovať aj cez momenty síl. Keďže si môžme vybrať ľubovoľný bod, vyberme si napr. bod, v ktorom sa lano dotýka písmena. Vieme, že v tomto bode je moment sily nulový, a preto môžme napísať rovnicu pre momenty síl ako

$$\vec{r} \times \vec{F_g} + 2\vec{r} \times \vec{F} = 0, \tag{1.2.9}$$

po rozpísaní vektorového súčinu dostávame

$$-mgr + 2F\cos(\gamma)r = 0, \tag{1.2.10}$$

alebo $-mgr + 2T\cos(\theta)r - 2T\cos(\varphi)r = 0$

po vydelení r dostávame rovnicu (1.2.8).

Na záver by som chcela spomenúť ešte iný spôsob riešenia tejto úlohy, a to pomocou virtuálnych prác. Pri tomto postupe nepotrebujeme robiť žiadne ďalšie predpoklady na rozdiel od prvého prístupu. Majme teda všeobecný prípad, čiže písmeno nemusí byť na vnútornom okraji zaoblené a medzi lanom a písmenom môže pôsobiť trecia sila. To znamená, že vo všeobecnosti sily T_1 a T_2 nie sú rovnaké. To, čo potrebujeme nájsť je uhol γ, ktorý nepoznáme. Povedzme teda, že písmeno si už hovie vo svojej rovnovážnej polohe. Princíp virtuálnych prác nám hovorí, že ak vykonáme malé myslené posunutie v okolí rovnovážnej polohy, tak celková práca je nulová. Čo to ale znamená v našom prípade? Na bod, v ktorom sa lano dotýka obruče, pôsobí sila od lana $T_1\sin(\theta) - T_2\sin(\varphi) = -\Delta T$. To však spôsobí napätie v písmene O a preto sa začne defromovať, takže si predstavme, že tento bod sa posunie o δr (zväčšenie vzdialenosti o δr medzi tyčou a bodom dotyku), avšak v dôsledku toho písmeno klesne o malú výšku

δh. Čiže práca, ktorú by sme vykonali pri posunutí δr sa rovná zmene potenciálnej energie a preto môžme napísať rovnosť

$$2\Delta T\delta r = mg\delta h. \tag{1.2.11}$$

ΔT je vynásobené faktorom 2, pretože na písmene sa nachádzajú dva body dotyku.

Ak by sme teda našli vzťah medzi δr a δh, tak by sme vedeli túto rovnicu vyriešiť. Ale ako nájsť takúto rovnicu? Svietielkom na konci tunela by mohla byť konštantná dĺžka lán bez ohľadu na polohu písmena.

$$l = \sqrt{(H-h)^2 + r^2} + \sqrt{h^2 + (R-r)^2} \tag{1.2.12}$$

$$l = \sqrt{(H-h+\delta h)^2 + (r+\delta r)^2} + \sqrt{(h-\delta h)^2 + (R-r-\delta r)^2} \tag{1.2.13}$$

Celkom nepekný výraz, avšak nezabúdajme, že pracujeme s malými posunutiami, preto prichádza na rad zanedbávanie. Vieme, že platí nasledujúce priblíženie

$$\sqrt{x+\delta x} = \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{\delta x}{x}} \approx \sqrt{x}(1+\frac{\delta x}{2x}) = \sqrt{x} + \frac{\delta x}{2\sqrt{x}}. \tag{1.2.14}$$

[2]

Použime túto aproximáciu v rovnici (1.2.13) a zanedbajme členy rádu δx^2. Dostaneme tak rovnicu

$$l = \sqrt{(H-h)^2 + r^2} + \frac{(H-h)\delta h + r\delta r}{\sqrt{(H-h)^2 + r^2}} + \sqrt{h^2 + (R-r)^2} - \frac{h\delta h + (R-r)\delta r}{\sqrt{h^2 + (R-r)^2}}. \tag{1.2.15}$$

Ak teraz dáme do rovnosti rovnice (1.2.12) a (1.2.15) dostávame

$$\frac{(H-h)\delta h + r\delta r}{\sqrt{(H-h)^2 + r^2}} = \frac{h\delta h + (R-r)\delta r}{\sqrt{h^2 + (R-r)^2}}, \tag{1.2.16}$$

pričom v rovnici spoznávame trigonometrické funkcie, ktoré sme popísali už pri vzťahu (1.2.5). Vyjadrime si δr a dosaďme do rovnice (1.2.11)

$$T_1 \sin(\theta) - T_2 \sin(\varphi) = \frac{mg}{2}\frac{\sin(\theta) - \sin(\varphi)}{\cos(\theta) - \cos(\varphi)}. \tag{1.2.17}$$

Takže teraz máme dve rovnice o dvoch neznámych - (1.2.17) spolu aj s rovnicou síl vo vertikálnom smere (1.2.7). Po ich vyriešení dostávame prekvapujúci výsledok

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_approximation

$$T_1 = T_2 = \frac{mg}{2}\frac{1}{\cos(\theta) - \cos(\varphi)},$$

čo znamená, že aj bez našich predpokladov sa sily T_1 a T_2 rovnajú, takže dostávame rovnaké riešenie ako v prvom prípade.

2.3 Rýchlo a zbesilo

vzorák **Mary**, opravovala **Lucka**

Riešenie problému rozdelíme na dve časti:

1. Keď voda vyjde z potrubia na vzduch:

Na čiastočky vody sa môžeme pozrieť ako na teleso, ktoré bude konať zvislý vrch nahor.

2. Keď je voda v potrubí:

Bude sa jednať o Bernouliho rovnicu.

1. Voda po výstupe z potrubia

Jedná sa o zvislý vrh nahor a môžeme si ľahko odvodiť, že najvyšší bod, do ktorého voda môže vyjsť je

$$H_{max} = \frac{v_0^2}{2g} \tag{1.3.1}$$

kde v_0 je rýchlosť vody tesne po tom, čo opustí potrubie a g je gravitačné zrýchlenie. Asi najrýchlejší spôsob je odvodenie pomocou zákona zachovania energie, ktorý hovorí, že súčet kinetickej a potenciálnej energie je konštantný. Ak si teda vyberieme nulovú výšku vo výške zemského povrchu, tak v tomto bode má čiastočka kvapky potenciálnu energiu nulovú a naopak v najvyššom bode má kvapka nulovú kinetickú energiu. Keďže tieto dve energie sa musia rovnať dostávame rovnicu pre H_{max}. Iný spôsob odvodenia. Čiže nám treba len zistiť rýchlosť v_0, ktorou voda opúšťa potrubie.

2. Voda v potrubí

V potrubí bude platiť Bernoulliho rovnica (v podstate zákon zachovania energie):

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 \tag{1.3.2}$$

Hĺbku h_1, v ktorej je prvá časť potrubia zvolíme ako referenčnú hĺbku, a teda $h_1 = 0$. Tlak p_1 máme zadaný. Tlak v oblasti 2, čiže v oblasti, kde voda opúšťa potrubie, bude približne rovný atmosférickému tlaku. Hĺbka, resp. výška h_2 sa meria vzhľadom na hĺbku prvej časti potrubia (ktorú sme si zvolili $h_1 = 0$), a teda zo zadania $h_2 = 2$ m. Jediné neznáme ostávajú rýchlosti. Avšak vieme, že z nestlačiteľnosti kvapalín vyplýva rovnica kontinuity

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

Hoci obsahy priamo nepoznáme, vieme aký je ich pomer, $S_1 : S_2 = 3$, pretože veľkosť diery na povrchu (S_2) je tretinová oproti prierezu prívodného potrubia (S_1). Čiže pre rýchlosť v_2 platí

$$v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2$$

Tento výraz dosadíme do Bernoulliho rovnice (Rovnica 1.3.2) aj spolu s $h_1 = 0$ a zistíme, že máme rovnicu s jednou neznámou v_2, pre ktorú dostávame výraz:

$$v_2^2 = \left((p_1 - p_2) - \rho g h_2\right) \frac{2}{\rho} \frac{1}{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2} \tag{1.3.3}$$

Tiež si všimneme, že rýchlosť v_2 je rýchlosť v_0, ktorou voda opúšťa potrubie pri povrchu. Čiže už len dosadíme Rovnica 1.3.3 do Rovnica 1.3.1 a dostaneme výsledok. Po vyčíslení je $v_2^2 = 540\ \mathrm{m^2 s^{-2}}$ a po dosadení do Rovnica 1.3.1 vyjde $H_{max} = 27$ m, kde sme použili $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

Iný pohľad na problém

V predchádzajúcom riešení sme brali tlak 360 kPa ako tlak prúdiacej kvapaliny po ustálení. Avšak iný pohľad by bol, že 360 kPa je „pokojový tlak“. Tlak, ktorý je v potrubí, keď voda netečie.

Pôvodných 360 kPa pozostávalo z tlaku vo vode a $\rho g h_1$. Keď sa hydrant odtrhne (ako keby otvoríme kohútik hydrantu), voda v potrubí sa začne hýbať v dôsledku čoho sa zníži tlak. Avšak pôvodná energia (áno, 360 kPa predstavuje energiu) sa musí zachovať. Preto

$$360\ \mathrm{kPa} = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1,$$

kde p_1 predstavuje nový tlak, keď sa už kvapalina hýbe s rýchlosťou v_1.

Použitím Bernoulliho rovnice (Rovnica 1.3.2) dostávame

$$360\ \mathrm{kPa} = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2,$$

čiže

$$360\ \mathrm{kPa} = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2,$$

kde p_2 je atmosférický tlak, $h_2 = 2$ m a jedinou neznámou ostáva rýchlosť v_2, ktorú potom vložíme do Rovnica 1.3.1 a dostaneme hľadaný výsledok.

Koment 1: Ak by si chcel(a) lepšie porozumieť Bernouliho rovnici a čo sa vlastne deje, odporúčam tento odkaz na sekciu v Khan Academy. Je tam veľmi podobný príklad. Koment 2: Uznávali sme obe riešenia.

2.4 Nudné prednášky

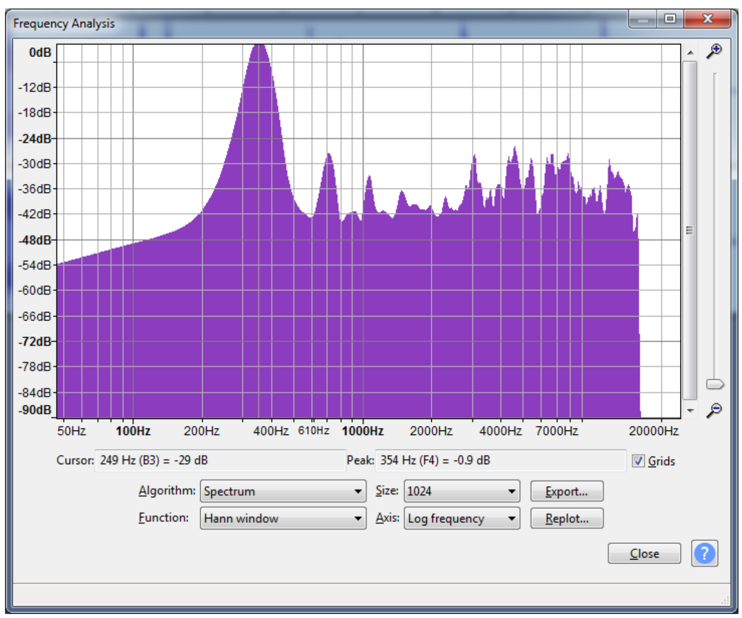
vzorák **Marcel**, opravoval **Marcel**

Zadanie úlohy pomerne jasne určuje čo by sme mali odmerať. Potrebujeme odmerať závislosť tónu, ktorý fľaša vydáva keď fúkame do jej hrdla od výšky vzduchového stĺpca vo fľaši. Ako vždy, keď meriame závislosť dvoch vecí, mali by sme sa snažiť nemeniť nič okrem týchto dvoch vecí. To znamená nemeniť fľašu (celkom jednoduché), nemeniť polohu fľaše voči prúdu vzduchu (s trochou lepiacej pásky je to celkom jednoduché) a mať stabilný zdroj prúdu vzduchu. To sme zariadili tak, že sme do fľaše nefúkali ústami ale ofukovacou pištoľou z kompresora pripojenou na regulovaný výstup. Tento výstup dáva konštantný tlak bez ohľadu na tlak v kompresore. Ofukovaciu pištoľ sme uchytili vo zveráku, aby sa nehýbala. Aby sme s fľašou nehýbali, počas experimentu sme do nej iba lievikom dolievali vodu zafarbenú modrým potravinárskym farbivom, aby bolo lepšie vidieť hladinu.

Čo sa týka samotných výsledkov, zvuk bol zaznamenávaný na mobil, kvôli tomu že má dobrý mikrofón. Na zaznamenávanie výšky vzduchového stĺpca slúžil fotoaparát na statíve. Tieto dve stopy sme následne v počítači synchronizovali.

Spracovanie nameraných dát prebiehalo najprv v Adobe Premiere Pro, kde sme audio stopu z telefónu zosynchronizovali s video stopou z fotoaparátu, zaznamenali miesta, ktoré treba analyzovať (fľaša vydáva zvuk), a tieto miesta následne analyzovali v Audacity. Pomocou možnosti `Analyze -> Plot Spectrum` sme si vykreslili histogram frekvencií a našli frekvenciu ktorá sa vyskytovala najviac.

Typické výsledky vyzerali približne takto (Audacity za nás aj nájde peak, ktorý je v tomto prípade v 354 Hz)



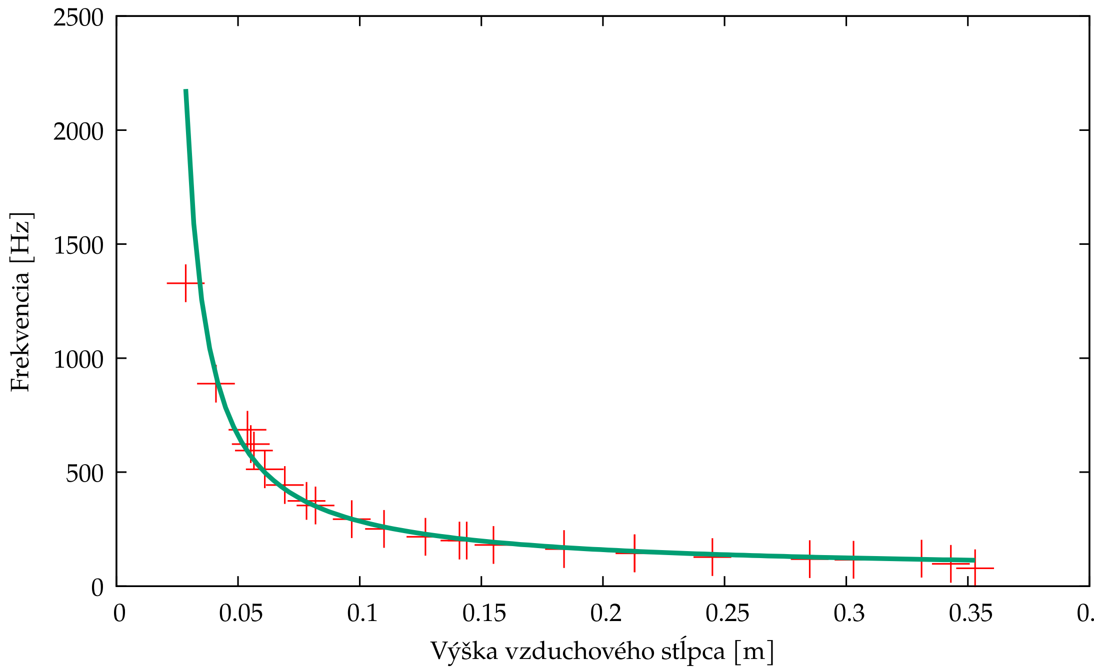
Obrázok 1: *Typické výsledky frekvenčnej analýzy*

Zo zaznamenaného tónu fľaše sme ignorovali prvú chvíľku (približne 0,2 s), kvôli tomu, že zo začiatku redukovaný výstup nedáva konštantný tlak, ale mierne vyšší a až po chvíli sa ustáli na konštantný. Merania sme následne zapísali do tabuľky a do grafu. Fľašu sme naplnili 3 krát, dokopy sme počas toho urobili 24 meraní.

Výška vzduchového stĺpca [cm]	Frekvencia [Hz]
35,3 cm	79 Hz
34,3 cm	98 Hz
33,1 cm	121 Hz
30,3 cm	116 Hz
28,5 cm	119 Hz
24,5 cm	128 Hz

Výška vzduchového stĺpca [cm]	Frekvencia [Hz]
21,3 cm	144 Hz
18,4 cm	163 Hz
15,5 cm	181 Hz
14,4 cm	200 Hz
14,1 cm	200 Hz
12,7 cm	217 Hz
11 cm	251 Hz
9,7 cm	294 Hz
8,2 cm	354 Hz
7,8 cm	374 Hz
6,9 cm	444 Hz
6,1 cm	513 Hz
5,7 cm	595 Hz
5,5 cm	623 Hz
5,4 cm	686 Hz
4,1 cm	888 Hz
2,9 cm	1328 Hz

Následne sme merania zakreslili do grafu:



Obrázok 2: *Graf závislosti tónu od výšky vzduchového stĺpca.*

Hodnoty sme fitli funkciou $f(x) = a/(x + c) + b$, keďže teoretická očakávaná závislosť je $f = k\frac{v}{l}$, kde f je frekvencia, v je rýchlosť zvuku, l je výška vzduchového stĺpca a k je konštanta.

Na záver je ešte slušné spomenúť chyby merania. Výška vzduchového stĺpca bola pomocou kamery odčítavaná s presnosťou na milimetre a frekvencia bola meraná z mikrofónu telefónu pomocou Audacity s presnosťou, akou zaznamenáva mikrofón.

Asi najväčšia chyba merania bola ale v tom, že aby sme fľašou nehýbali počas merania, sme museli nastaviť jej správnu polohu hneď na začiatku. To ale pri nízkych tónoch nebolo jednoduché, lebo sme tak nízke tóny nepočuli dostatočne hlasno. Problém bol aj, že tieto nízke, rovnako ako aj vysoké frekvencie už mikrofón nezaznamenával správne.

2.5 Blší kolotoč

vzorák **Hovorca**, opravoval **Hovorca**

Než sa pustíme do riešenia samotnej úlohy, objasnime si, čo sa nás vlastne zadanie pýta. Máme spočítať preťaženie. Preťaženie je v istom zmysle len obyčajné zrýchlenie, avšak udáva sa v násobkoch tiažového zrýchlenia g. Na človeka v pokoji na Zemi tak pôsobí preťaženie 1 g, technicky vzaté teda nejde o preťaženie. Ak ale sedí napríklad v rakete a smeruje na Mesiac, pocíti pri vzlete výrazne väčšie preťaženie.

Inak to nie je ani s blškou vo Vladkovom aute. Našou snahou bude identifikovať, s akým zrýchlením sa pohybuje blška. V tomto bode isto začínajú blikať výstražné kontrolky vo vašich hlavách, ktoré sa pýtajú „A v ktorej vzťažnej sústave?“. Skutočne, táto otázka je kľúčová pre vyriešenie úlohy. Blška sa nachádza v neinerciálnej sústave pevne spojenej s tachometrom. Ručičku tachometra pritom považujeme za jednu z osí tejto sústavy, zvyšné dve kolmé osi (ako je srdcu blízke) orientujeme v smere kolmom na tachometer a v smere otáčania sa ručičky tachometra.

V tejto sústave nás bude zaujímať preťaženie (lebo v tejto sústave sa blška cíti byť). Definujeme ešte inerciálnu sústavu, tá bude spojená so Zemou. Neskôr sa zamyslíme, či je takáto definícia dobrá :).

Pokúsme sa lepšie charakterizovať, čo sa vlastne deje v neinerciálnej sústave. Po prvé, v neinerciálnej sústave pôsobí rovnaká reálna sila, ako v inerciálnej. Touto silou je sila tiažová, jej zrýchlenie už poznáme – $\vec{g}$.

Po druhé si zahrajú tzv. neinerciálne (fiktívne) sily. Tieto sily sú štyri. Zrýchlenie, ktoré cíti blška, sa dá vyjadriť nasledovným vzťahom:

$$\vec{a}' = \frac{\vec{F}}{m} - \vec{a_0} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - \vec{\varepsilon} \times \vec{r}'$$

Komplikovaný vzťah by sme mali napísaný, poďme si ho aj vysvetliť, pekne člen po člene. Najprv však dodajme, že čiarkované vektory sú vzhľadom na neinerciálnu sústavu.

Prvý člen je $\frac{\vec{F}}{m}$. $\vec{F}$ je tu reálna sila, ktorá pôsobí na blšku, vydelená hmotnosťou blšky nám dáva to slávne tiažové zrýchlenie. Tento člen je teda identicky rovný $\vec{g}$.

Druhý člen je $-\vec{a_0}$. Tento člen zodpovedá za zrýchlenie neinerciálnej sústavy vzhľadom na inerciálnu – ide o zrýchlenie auta. Zo zadania vieme, že má veľkosť $a_0 = \frac{300\ \mathrm{km/h}}{10\ \mathrm{s}} = \frac{25}{3}\mathrm{m/s^2}$. Toto zrýchlenie prislúcha sile, ktorú normálne poznáme pod názvom zotrvačná. Vektoruchtivý čitateľ si akiste domyslí, že toto zrýchlenie má smer proti (pozor na to mínus!) pohybu auta. Je to presne tá „sila, ktorá nás tlačí do sedačiek“ keď na to dupneme :).

Tretí člen, $-2\vec{\omega} \times \vec{v}'$, je slávny aj pod názvom Coriolisova sila – teda presnejšie jej príslušné zrýchlenie. $\vec{\omega}$ je tu uhlová rýchlosť ručičky tachometra, $\vec{v}'$ je rýchlosť blšky v sústave spojenej s tachometrom. Nakoľko sa však blška v tejto sústave (vzhľadom na ručičku tachometra) vôbec nehýbe, tento člen je rovný nule.

Štvrtý člen, $-\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)$, si častejšie predstavíme ako tzv. odstredivé zrýchlenie, zrýchlenie odstredivej sily. Pripomeňme si že $\vec{r}'$ je vektor v sústave tachometra smerujúci k blške, teda je to vektor ručičky tachometra. Vektor uhlovej rýchlosti, smerovo zhodný s vektorom otáčania (určený známym pravidlom pravej ruky), je kolmý na $\vec{r}'$, a vektorové súčiny (alebo iné pravidlo, tiež pravej ruky) nám prezradia, že smer tejto sily je smer ručičky tachometra, smer „od stredu“ tachometra, odkiaľ sa aj berie názov odstredivá. Pripomeňme, že tento smer sa počas pohybu mení! Ktorý smer nás vo výsledku bude zaujímať si povieme až trochu neskôr. Veľkosť uhlovej rýchlosti je $\frac{300°}{10\ \mathrm{s}} = \frac{\frac{5}{3}\pi}{10\ \mathrm{s}} = \frac{\pi}{6}\mathrm{s^{-1}}$, ručička tachometra má dĺžku 0,05 m, teda veľkosť tohoto člena je $\frac{0{,}05\pi^2}{36}\mathrm{m/s^2} = \frac{5\pi^2}{3600}\mathrm{m/s^2}$. To už je celkom málo, ale stále to budeme brať v úvahu.

Piaty člen je $-\vec{\varepsilon} \times \vec{r}'$. Príslušná sila sa nazýva Eulerova. Vidíme, že $\vec{\varepsilon}$, ktorý je uhlovým zrýchlením tachometra, je zo zadania rovný nule, teda aj celý člen je nulový.

Teraz už vieme, ktoré neinerciálne členy skutočne hrajú rolu – zotrvačné a odstredivé zrýchlenie. Pridá sa aj reálne tiažové zrýchlenie. Najväčšia veľkosť výsledného zrýchlenia by bola vtedy, keby všetky vektory smerovali rovnakým smerom. To však dosiahnuť nevieme – jediné, čo vieme ovplyvniť, je smer vektora odstredivého zrýchlenia. Vieme ho sklopiť čo najviac do smeru tiažovej sily (do smeru zotrvačnej sily ho sklopiť nevieme, na tú bude vždy kolmý), a to vtedy, keď ručička tachometra smeruje čo najviac nadol - pri rýchlostiach 0 a 300 km/h. Zo zadania poznáme uhol, ktorý pri takejto rýchlosti (napr. tej väčšej) vektory zvierajú, dokážeme teda vektor odstredivého zrýchlenia rozložiť do smeru tiažovej sily a smeru kolmého na obe zvyšné zrýchlenia. Sčítaním vektorov v tomto prípade dostaneme číselný výsledok približne rovný (uvažujúc $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$) $a' = 12{,}8726\ \mathrm{m/s^2} = 1{,}3122$ g.

Teraz by sme si mohli povedať, že to stačí. Avšak zadanie nás urguje, aby sme každý efekt buď započítali, alebo prehlásili za neškodný. Čo sme teda ešte nezapočítali? Uviedli sme Zem ako inerciálnu sústavu, čo tak celkom nebude. Pre potreby nášho výpočtu je to ale dobré priblíženie, ako uvidíme nižšie.

Zem nie je rovná. Zem je guľa a auto po nej ide nejakou rýchlosťou, čo znamená, že sa pohybuje s dostredivým zrýchlením. Proti tomu je rovnaká „odstredivá“ sila, ako sme už opísali, ale jej zrýchlenie sa nám tentoraz ľahšie vyjadrí ako $\frac{v^2}{R}$, a smer má proti tiažovému zrýchleniu. Ak ho započítame aj pri maximálnej rýchlosti 300 km/h, opravu na tiažové zrýchlenie robí na treťom desatinnom mieste. Väčšej chyby sa teda už dopúšťame nezobrazím presnej hodnoty g. Oprava na výsledku vzhľadom na tento efekt sa prejaví na štvrtom desatinnom mieste, číselný výsledok bude 1,3122 g. Tu príde na rad otázka, čo už zanedbať a čo ešte nie. Ak ste zanedbali tento efekt, treba si uvedomiť, že efekt odstredivej sily na tachometri je rádovo rovnaký. Potom by bolo potrebné zanedbať aj ten. Je dôležité zanedbávať „všade rovnako“, nemôžeme z dvoch rovnako vážnych efektov jeden zarátať a druhý vynechať. :)

Zem, ako guľa, sa točí okolo svojej osi. Našťastie, tu trochu zavádzam, toto sme započítali :). Tento efekt je už započítaný v hodnote tiažového zrýchlenia. Teda nás nemusí trápiť, že by sme ho obišli – ale nech tu explicitne je. V hodnote ale nie je započítané, že auto sa hýbe – teda tu bude pôsobiť Coriolisova sila vzhľadom na otáčanie sa Zeme. Asi ale nikoho neprekvapí, že tento efekt je skutočne zanedbateľný. Inak by sme predsa museli kompletne prerobiť naše ponímanie tiažového zrýchlenia pre telesá pohybujúce sa klasickými rýchlosťami :).

Zem obieha okolo Slnka. Tu si dovolíme tvrdiť, že tento efekt nespôsobuje preťaženie voči Zemi. Presne preto pre teleso v pokoji uvažujeme preťaženie 1 g.

Efektov sa dá nájsť skutočne veľa, tie vyššie opísané by sa dali považovať za najviac súvisiace s úlohou. Z vašich riešení chcem ešte oceniť počítanie odporu vzduchu blšky pri pohybe na tachometri, tento efekt skutočne nenapadol ani mne :)

Pozn.: V tomto vzorovom riešení neuvádzame odvodenie vzťahu pre neinerciálne sily. Rovnako to ani nepovažujeme za nutnú súčasť riešenia, teda za neprítomnosť odvodenia body strhávať nebudeme. Ak by vás zaujímalo odvodenie, s trochou porozumenia vektorom a deriváciám odporúčam text prednášok Doc. RNDr. Vladimíra Černého, v ktorom nájdete podrobné odvodenie.

2.6 MagneTyč

vzorák **Nina**

Máme magnetické pole tvaru valca, ktorého os je zhodná s osou z v danej súradnicovej sústave. Magnetická indukcia $\vec{B}$ tohto poľa je potom daná ako lineárna rastúca funkcia $\vec{B}(\vec{r})$, ktorej smer je zhodný so smerom $\vec{o} \times \vec{r}$, kde $\vec{o}$ je vektor v smere osi z, začínajúci v počiatku súradnicovej sústavy, a $\vec{r}$ je vektor udávajúci polohu. Z toho, čo máme zadané o $\vec{B}(\vec{r})$ je jasné, že ju môžeme zapísať ako $\vec{B}(\vec{r}) = \alpha \cdot \left(\vec{o} \times \vec{r}\right)$ pre nejaké $\alpha > 0$. Vektor $\vec{o}$ je vektor v smere osi z, čiže bude mať tvar $(0, 0, o_z)$ pre nejaké $o_z > 0$. Konštanty α a o_z nemáme nijak bližšie určené a ani ich nebudeme už ďalej potrebovať v našich výpočtoch inak, ako v rámci $B(\vec{r})$, preto ich môžme hneď na začiatku zlúčiť do jednej konštanty, ktorá by bola ich súčinom a túto odteraz označovať o_z.

Máme teda

$$\begin{aligned}B(\vec{r}) &= \vec{o} \times \vec{r}\\ &= (0,\, 0,\, o_z) \times \left(r_x,\, r_y,\, r_z\right)\\ &= \left(-o_z \cdot r_y,\, o_z \cdot r_x,\, 0\right)\\ &= o_z \cdot \left(-r_y,\, r_x,\, 0\right).\end{aligned}$$

Z toho je jasné, že magnetické pole vo valci bude mať smer obiehania okolo osi z a v smere osi z bude nulové.

Pozrime sa teraz na silu pôsobiacu na nabité častice v takomto magnetickom poli. V elektromagnetickom poli pôsobí na častice Lorentzova sila $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$, kde q je náboj častice, $\vec{E}$ je intenzita elektrického poľa, $\vec{v}$ je rýchlosť častice a $\vec{B}$ je magnetická indukcia. V našom prípade je intenzita elektrického poľa $\vec{E} = 0$, pretože tam nemáme žiadny vodič pod prúdom alebo iný zdroj elektrického poľa, takže nám zostáva

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\\ &= q \cdot \left(\vec{v} \times \left(o_z \cdot \left(-r_y,\, r_x,\, 0\right)\right)\right)\\ &= q \cdot o_z \cdot \left(\vec{v} \times \left(-r_y,\, r_x,\, 0\right)\right).\end{aligned}$$

Posledné neznáme v našich rovniciach, na ktoré sme sa ešte nepozreli, sú poloha a rýchlosť častice. O počiatočnej polohe vieme len to, že častica bude vo vzdialenosti r_0 od osi valca. Keďže zatiaľ sa celá úloha ukazuje ako invariantná na otočenie okolo osi z alebo posun po osi z, môžeme si ako počiatočnú polohu častice zvoliť $r_0 = (r_0,\, 0,\, 0)$. O počiatočnej rýchlosti vieme, že je rovnobežná s osou z ale s opačným smerom, preto $v_0 = (0,\, 0,\, v_{0_z})$ pre nejaké $v_{0_z} < 0$.

Môžeme si všimnúť, že takto je y-ová súradnica pre polohu aj pre rýchlosť nulová. Navyše, ak do sily $\vec{F}$ dosadíme túto polohu a rýchlosť s nulovými y-ovými súradnicami, tak aj sila v y-ovom smere bude nulová. Hľa:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q \cdot o_z \cdot \left(\vec{v} \times \left(-r_y,\, r_x,\, 0\right)\right)\\ &= q \cdot o_z \cdot \left((v_x,\, 0,\, v_z) \times (0,\, r_x,\, 0)\right)\\ &= q \cdot o_z \cdot (-v_z r_x,\, 0,\, v_x r_x)\\ &= q \cdot o_z \cdot r_x \,(-v_z,\, 0,\, v_x).\end{aligned}$$

Naozaj y-ová súradnica sily zostala nulová, čo nám ukazuje, že častica sa bude celý čas hýbať v rovine $y = 0$ a meniť sa bude len r_x a r_z. Pohyb častice teda vieme vykresliť na rovinu $y = 0$ a nepotrebujeme riešiť žiadne 3D.

Poďme sa pozrieť, čo ešte z rovníc vieme vyčítať o krivke, po ktorej sa bude častica pohybovať. Vektor sily $\vec{F}$ a vektor rýchlosti $\vec{v}$ sú na seba kolmé, čo spôsobí, že veľkosť rýchlosti častice sa počas pohybu nebude meniť a meniť sa bude len jej smer (pozri rovnomerný pohyb po kružnici). Táto nemennosť $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$ znamená, že ak by sme z $\vec{F}$ odstránili r_x, tak veľkosť sily pôsobiacej na časticu by sa tiež nemenila a bola by stále kolmá na jej rýchlosť, čo by spôsobilo, že častica by sa v magnetickom poli pohybovala po kružnici.

Prítomnosť r_x v tomto vzorci nám potom napovedá, že čím ďalej od osi valca častica bude, tým rýchlejšie sa bude meniť jej smer (dráha bude viac zakrivená) a naopak, čím bližšie sa k osi dostane, tým menej sa bude jej dráha zakrivovať. Tiež môžeme nahliadnuť, že smer, do ktorého bude častica zatáčať, sa zmení iba pri prechode osou valca (Pohyb je plynulý, takže musí pri prechode z otáčania sa jedným smerom na opačný v nejakom momente ísť rovno, čiže s nulovým zrýchlením, čo sa stane pri prechode osou, keď $r_x = 0$. Zmení sa tu aj znamienko pri r_x, čo spôsobí zmenu smeru.).

Ak sa pozrieme do času $t = 0$ a dosadíme do $\overrightarrow{F}$ konkrétne hodnoty, získame $\overrightarrow{F}_0 = e \cdot o_z \cdot r_{x_0}\left(-v_{z_0}, 0, 0\right)$. Na prvý pohľad vidíme, že $\overrightarrow{F}_0$ pôsobí v x-ovom smere. Konštanty e a v_z sú záporné, zatiaľ čo ostatné sú kladné, takže $\overrightarrow{F}_0$ pôsobí v zápornom x-ovom smere, takže elektrón sa bude otáčať smerom k osi. Tu sa môžu stať dve veci:

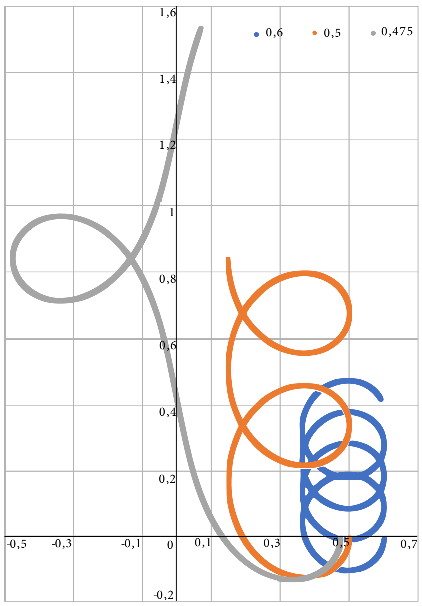
1. Elektrón zvládne zmeniť smer o 180° skôr ako dosiahne os valca a začne sa otáčať smerom od osi valca. V tomto prípade zvyšok otočenia o ďalších 180° má istú spätnú symetriu k prvej časti pohybu, takže vieme spraviť učený odhad a povedať, že elektrón nadobudne opäť počiatočný smer v presne r_0 vzdialenosti od osi valca a pritom sa bude nachádzať opačným smerom než vyrážal (bližšie pri osi sa otáča pomalšie, takže v opačnom smere trávi viac času). Vieme si to predstaviť ako taký krúživý pohyb s celkovým posunom dozadu (ako keď sa na pružinku z pera pozriete šikmo).

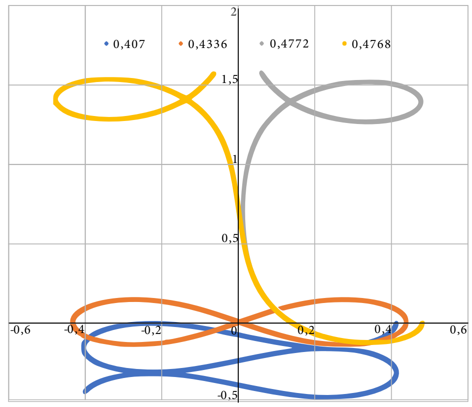
2. Elektrón prejde skôr osou valca ako by zvládol zmeniť smer o celých 180°. V takom prípade sa pred osou elektrón prestáva točiť k nej, v momente, keď prejde cez os pôjde rovnomerne priamočiaro a za osou sa začne zase točiť k osi (ale tentokrát opačným smerom, lebo už je z druhej strany osi). Pohyb elektrónu za osou má tiež istú symetriu k pohybu pred ňou. Je to daná tým, že v rovnakej vzdialenosti od osi na jednej a druhej strane má rovnakú v_z, ale opačnú v_x, a teda čo ho predtým v x-vom smere spomaľovalo, ho teraz zrýchľuje a naopak. Zároveň sa ale vymenili aj smery od a k osi, takže situácia sa akoby preklopila cez os. Elektrón v tomto prípade môže chodiť z jednej strany osi z na druhú (ako napríklad funkcia $\sin(z)$).

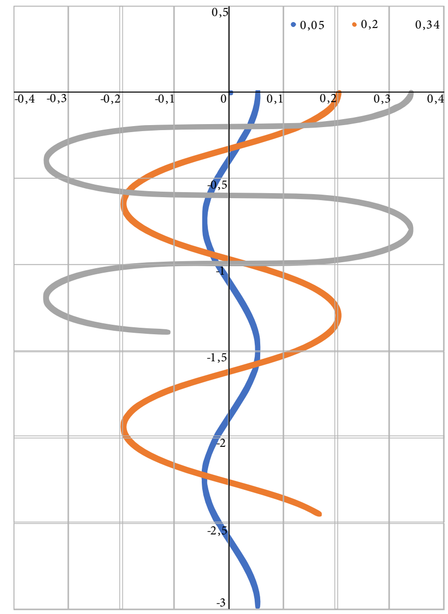
Máme teda nejaký odhad toho, ako by sa častica mohla hýbať a vieme aká sila $\overrightarrow{F} = q \cdot o_z \cdot r_x\left(-v_z, 0, v_x\right)$ na ňu bude pôsobiť v ľubovoľnom momente. Z toho potom môžeme odvodiť vzťahy, ktoré budeme následne nahadzovať, do našej simulácie:

$$
\begin{aligned}
r_0 &= \left(r_{x_0}, 0, 0\right)\\
v_0 &= \left(0, 0, v_z\right)\\
a_i &= \frac{e o_z r_{x_i}}{m_e} \cdot \left(-v_{z_i}, 0, v_{x_i}\right)\\
r_{i+1} &= r_i + v_i \mathrm{d}t\\
v_{i+1} &= v_i + a_i \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Nasledujúce trajektórie vznikli simuláciou, pričom každá prislúcha inej počiatočnej r_0. Všetky z týchto trajektórií zobrazujú pohyb elektrónu v priebehu 3 s. Tiež je dobré si všimnúť, že všetky sú rovnako dlhé (lebo sme mali konštantnú rýchlosť, len smer sa menil). Ako vstupné údaje som okrem toho použila $\mathrm{d}t = 10^{-3}$ s, $v = 1$ m/s a $o_z = 10^{-10}$ kg/(s^2 mA). Dráhy rovnakých tvarov sa dajú získať menením počiatočnej rýchlosti alebo konštanty o_z.







Z týchto grafov vidíme, že s počiatočnou vzdialenosťou 0,05 m, bola perióda približne 1 s a ak túto vzdialenosť necháme rásť, rásť nám bude aj perióda, a to až do momentu, kedy elektrón prestane prechádzať osou valca. V tom momente sa perióda zmenší na polovicu (prestanú sa striedať časti pohybu naľavo a napravo od osi, pohyb, ktorý by sme predtým prisúdili polperióde, zrazu tvorí celú periódu) a začne naspäť klesať.

Prečo je to tak? Pre prostredné vzdialenosti je to ťažko určiť, nakoľko tieto trajektórie sú menej stabilné. Zo vzorca $\vec{F} = q \cdot o_z \cdot r_x\,(-v_z,\, 0,\, v_x)$ si odvodíme vzorec pre zrýchlenie $\vec{a} = \frac{q \cdot o_z \cdot r_x}{m_e}\,(-v_z,\, 0,\, v_x)$, ktorý nemá pekné všeobecné riešenie.

Ak však v tomto vzorci predpokladáme niektoré z okrajových podmienok, vieme získať viac. Zoberme si situáciu, keď počiatočné r_0 je veľmi malé voči v_0. Potom zjavne počas celého pohybu bude v_z skoro konštantná a blízka v_0. To vytvorí $a_x = \frac{-q \cdot o_z \cdot v_z \cdot r_x}{m_e}$, kde jediná výrazne sa meniaca premenná je r_x. Môžeme teda tento pohyb aproximovať kmitavým harmonickým pohybom s periódou $2\pi\sqrt{\frac{m_e}{q \cdot o_z \cdot v_0}}$

Zoberme si aj situáciu z opačného konca spektra. Majme počiatočné v_0, ktoré je veľmi malé voči r_0. Potom r_x sa počas pohybu bude meniť len veľmi málo, nakoľko dostredivé zrýchlenie vytvárané magnetickou indukciou ho stočí späť skôr, ako sa zvládne priblížiť k osi. Ak zoberieme r_x konštantné, tak ho môžeme nahradiť r_0 a zo vzorca $\vec{a} = \frac{q \cdot o_z \cdot r_0}{m_e}\,(-v_z,\, 0,\, v_x)$ vidíme, že $\vec{a}$ je konštantne veľké (lebo v bola konštantne veľká) a kolmé na v. Ide teda o rovnomerný pohyb po kružnici, ktorého dostredivé zrýchlenie bude všade rovnako veľké $|a_r| = \frac{q \cdot o_z \cdot r_0}{m_e}\sqrt{v_z^2 + v_x^2}$. Elektrón sa teda bude pohybovať po kružnici s polomerom $R = \frac{v^2}{a} = \frac{v_0 m_e}{q o_z r_0}$ a perióda jeho pohybu bude $T = 2\pi\frac{R}{v} = 2\pi\frac{m_e}{q o_z r_0}$.

2.7 Ako hlboko sme klesli II. - Až na dno

vzorák **Dvojka, Hovorca**, opravoval **Majo**

Čo sa vlastne deje, keď Lucka ponára pohár do čaju? Nuž, vzduch vo vnútri pohára sa stláča, a to izotermicky (keďže ho tam ponára pomaly). Nás zaujíma, ako bude toto stláčanie prebiehať a ako ovplyvní výšku hladiny čaju po dotlačení pohára na dno.

Dej ponárania si vieme rozdeliť na dve časti. V prvej časti ešte pohár nie je celý ponorený a nejaká jeho časť vytŕča z hladiny. V druhej časti je pohár ponorený celý a už iba klesá na dno. Môžete sa spýtať: prečo nás zaujíma prvá časť deja? Nestačilo by povedať, že objem vzduchu v pohári jednoducho umiestnime na dno pohára a zistíme, ako veľmi sa stlačí? Nestačilo. Všimnite si totiž, že v prvej časti deja hladina v odmernom valci stúpa (keďže na to, aby sa objem ponorenej časti vzduchu v pohári nezväčšoval, by musela byť hustota čaju nekonečná), v druhej časti deja sa však objem ponorenej časti vzduchu (ktorý je teraz ponorený celý) zmenšuje. Teda hladina v odmernom valci dosiahne maximálnu výšku v okamihu, keď bude pohár akurát celý ponorený. A pokiaľ by sa stalo, že sa v tom momente nejaká časť čaju preliala von z odmerného valca, treba to zarátať. Najprv teda vyrátame, o koľko stúpne hladina, keď je pohár tesne pod hladinou.

Než sa pustíme do práce s číslenými hodnotami, použijeme označenie. Nazvime si výšku pohára h a výšku odmerného valca H. Označme si L výšku hladiny čaju v odmernom valci. Označme si l výšku vzdušného stĺpca v pohári. Taktiež si označme P tlak vzduchu v pohári a V objem vzduchu v pohári. Hustotu čaju (zhodnú s hustotou vody) označme ρ. Ďalej označme S_p obsah podstavy pohára a S_v obsah podstavy odmerného valca. Zaveďme objem pohára $V_0 = S_p h$, ktorý je zhodný s počiatočným objemom vzduchu, a tlak $P_0 = P_A$ ako počiatočnú hodnotu tlaku vzduchu v pohári rovnú hodnote atmosférického tlaku.

Ponorme pohár do čaju. V rovnovážnom stave platí $P_A + \rho l g = P$ a zo stavovej rovnice pre izotermický dej máme $PV = P_0 V_0$. Po dosadení a úprave obdržíme

$$V = \frac{P_A V_0}{P_A + \rho l g}$$

Platí $V = S_p l$. Po dosadení tohto a ešte hodnoty V_0 máme rovnicu

$$\rho g l^2 + P_A l - P_A h = 0$$

Rovnicu vyriešime vzhľadom na l. Z dvoch koreňov je kladný len jeden:

$$l = \frac{-P_A + \sqrt{P_A^2 + 4 P_A h \rho g}}{2\rho g}$$

To je výška vzdušného stĺpca v pohári. Zmena výšky hladiny v odmernom valci bude teda $\Delta L = \frac{V}{S_v} = \frac{S_p}{S_v} l$. Po dosadení zadaných hodnôt vyčíslime $\Delta L = 4{,}9525\,\mathrm{cm}$ a rovno vidíme, že čaj sa skutočne z odmerného valca vyleje, keďže rozdiel medzi L a H je veľký len štyri centimetre. Povedzme teda, že odmerný valec je naplnený až po okraj (teda nastavíme $\Delta L = 4\,\mathrm{cm}$) a pozrieme sa na druhú časť deja: zatláčanie pohára nadol.

Prv, než sa vrhneme na rátanie druhej časti deja, musíme si predefinovať zopár veličín. Keďže sa nám čaj prelial, skomplikoval sa vzťah medzi ΔL a l. Preto si nastavme $L = H = 100\,\mathrm{cm}$ a povedzme, že ΔL je na začiatku druhej časti deja nulové. Taktiež si zapamätáme hodnotu výšky vzdušného stĺpca v pohári hneď na začiatku druhej časti deja, ktorú sme vypočítali pred chvíľou: $l_0 = 9{,}9050\,\mathrm{cm}$. Môžme tak napísať nový vzťah: $\Delta L = \frac{S_p}{S_v}(l - l_0)$, z čoho vidíme, že ΔL bude záporné (hladina klesne).

Keď pohár klesne až na dno odmerného valca, bude vzdialenosť vrchu vzdušného stĺpca v ňom od hladiny čaju vo valci presne $H + \Delta L - h$. Výška čajového stĺpca, ktorý tlačí na vzdušný stĺpec, je $H + \Delta L - h + l$. Napíšeme si teda rovnicu tlakovej rovnováhy: $P_A + \rho g(H + \Delta L - h + l) = P$. Zo stavovej rovnice vieme, že $Pl = P_A h$. Keď to všetko dosadíme spolu s výrazom pre ΔL, dostaneme rovnicu

$$l^2\rho g\left(1+\frac{S_p}{S_v}\right)+l\left(P_A+\rho g\left(H-h-\frac{S_p}{S_v}l_0\right)\right)-P_A h=0$$

Riešenie tejto rovnice vzhľadom na l má jeden kladný koreň, ktorý je

$$l=\frac{-\left(P_A+\rho g\left(H-h-\frac{S_p}{S_v}l_0\right)\right)+\sqrt{\left(P_A+\rho g\left(H-h-\frac{S_p}{S_v}l_0\right)\right)^2+4\rho g\left(1+\frac{S_p}{S_v}\right)P_A h}}{2\rho g\left(1+\frac{S_p}{S_v}\right)}$$

Po vyčíslení obdržíme hodnotu $l = 9{,}1275$ cm. Z toho zistíme, že $\Delta L = -0{,}3888$ cm, teda hladina čaju bude vo výške 99,6112 cm.