Fyzikálny korešpondenčný seminár
XXXVI. ročník, 2020/2021
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 1. kola zimnej časti

1.1 Dlhé diely

vzorák **Marcel**, opravoval **Marcel**

Zamyslime sa najskôr nad spôsobom, ako kvapalinový teplomer funguje. Teplomer si môžeme predstaviť ako valec, v ktorom je nejaká kvapalina. Kedysi sa používala ortuť, tá je dnes z dôvodu, že je jedovatá, nahradená liehom, gallistanom, alebo inými kvapalinami. Určite ste sa v škole učili, že teplomer funguje na základe tepelnej rozťažnosti, a teda, čím má v ňom kvapalina vyššiu teplotu, tým má väčší objem. Možno ste sa aj učili, že to funguje tak, že ak máme teleso s objemom V a koeficientom objemovej rozťažnosti β, tak objem telesa pri zmene teploty o t vypočítame nasledovne

$$V_{ohriate} = (1 + t\beta)V,$$

a teda rozdiel objemov je

$$\Delta V = t\beta V$$

Toto v preklade znamená, že zmena objemu je priamo úmerná objemu telesa, rozdielu teplôt a koeficientu rozťažnosti. Objem kvapaliny v teplomeri sa zmení o toto ΔV a kvôli tomu kvapalina vystúpi do väčšej výšky. [1]

Ako by sme mohli ovplyvniť veľkosť dielikov na teplomeri? Ak by sme ich chceli zväčšiť, tak nám asi ako prvé napadne toto: ak zmenšíme prierez valca, znamená to, že ak sa objem kvapaliny zväčší o nejaké ΔV, tak sa výška hladiny zväčší o viac ako keby bol prierez väčší.

Problém však je, že ak zmenšíme prierez valca, v ktorom je kvapalina, tak zmenšíme aj jej objem, a keďže rozdiel objemov (ΔV) je priamo úmerný jej objemu, neroztiahne sa o ΔV ale o menej.

Dá sa to ukázať aj zo vzorčekov, ale my sa nad tým skúsime zamyslieť inak. Predstavme si, že máme nejaký valec naplnený kvapalinou, a pri zmene teplôt o Δt sa v ňom zvýši hladina o d. Teraz zväčšíme prierez valca na dvojnásobok, ohrejeme kvapalinu o Δt a pokúsime sa zistiť, o koľko vystúpila vyššie. My si avšak môžeme predstaviť, že namiesto zväčšenia prierezu valca na dvojnásobok, sme dali dva také isté valce vedľa seba. V každom z nich hladina stúpne o rovnaké d. A pozorovali by sme to isté v prípade, ak by sme nedali dva rovnaké valce vedľa seba, ale iba by sme zdvojnásobili prierez toho pôvodného.

Dobre, ale ako sa to potom v tých teplomeroch robí? Veď predsa bežne vidíme teplomery s rozdielnymi veľkosťami dielikov. Pointa je, že naša úvaha o zmene prierezu bola správna, ak ho zmenšíme, tak sa naozaj zväčší vzdialenosť medzi dielikmi, ale iba ak zachováme objem pôvodnej kvapaliny. To je dôvod prečo je na spodku teplomerov nádržka s kvapalinou, a to je aj spôsob ako meniť vzdialenosť medzi dielikmi – meníme pomer $\frac{\text{prierez}}{\text{objem}}$ kvapaliny.

[1] Tento vzťah je v skutočnosti, rovnako ako veľa vecí vo fyzike len veľmi dobrá aproximácia a môže sa stať, že sa koeficient tepelnej rozťažnosti mení s teplotou. Pre naše, rovnako aj ako pre väčšinu praktických účelov, nám ale takáto aproximácia stačí

1.2 Ako hlboko sme klesli

vzorák **Želé**, opravovala **Lucka**

Ako pri väčšine príkladov z mechaniky, zistime si, aké sily nám pôsobia na ktoré telesá. Pozrime sa najprv na prázdnu nádobu vo vode. (Pre zjednodušenie budem menšiu nádobu nazývať iba nádoba). Ako prvá každému hneď napadne gravitačná sila. Keďže nádoba sa po určitom čase po ponorení ustáli, musí na ňu pôsobiť ešte ďalšia sila, ktorá je rovnako veľká, len opačne orientovaná, nazývaná ako vztlaková sila. Tí pozornejší si všimnú, že by sme vedeli použiť Archimedov zákon. Ten nám vraví, že ak ponoríme teleso do kvapaliny, tak ho kvapalina nadľahčuje a pôsobí naň vztlakovou silou, ktorá sa rovná tiaži kvapaliny s rovnakým objemom ako je objem ponorenej časti telesa. Čiže v našom prípade je ponorenou časťou telesa nádoba odo dna až do výšky h'.

Môžeme tak zistiť hmotnosť nádoby:

$$\begin{aligned} F_g &= F_{vz} \\ m_n g &= \rho_v V_v g \\ m_n g &= \rho_v h' k S g \\ m_n &= \rho_v h' k S \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Teraz zistime výšku v hladiny vody v nádobe po naliatí maximálneho objemu vody tak, aby sa neponorila. Opäť použijeme Archimedov zákon:

$$\begin{aligned} F_g &= F_{vz} \\ (m_n + m_v) g &= \rho_v V_v g \\ m_n + m_v &= \rho_v h k S \\ m_v &= \rho_v h k S - m_n \end{aligned}$$

Po dosadení $m_v = \rho_v k S v$ a m_n z rovnice 1.2.1, dostávame

$$\rho_v k S v = \rho_v k S (h - h')$$

a teda $v = h - h'$.

Vyšiel nám podozrivo pekný výsledok a patrilo by sa vedieť prečo. Nečakane, pri tejto úvahe opäť použijeme Archimedov zákon. Na to však potrebujeme vedieť objem vytlačenej kvapaliny, čo je v tomto prípade $V_v = kS(h - h')$. Dostávame tak rovnicu $m_v = \rho_v kS(h - h')$, pričom $m_v = \rho_v kSv$, čiže $v = h - h'$. Stačí si uvedomiť, že priliatie vody do malej nádoby nezmení rozdiel hladín, pretože zvýšenie hladiny vody v malej nádobe o x spôsobí zväčšenie tiažovej sily, ktoré musí byť vyrovnané podľa Archimedovho zákona zväčšením vztlakovej sily, ktoré zodpovedá ponoreniu malej nádoby voči hladine vo veľkej nádobe o x. To však platí len za predpokladu, že obidve kvapaliny majú rovnakú hustotu.

Konečne sa dostávame k záveru. Výšku hladiny väčšej nádoby H vzhľadom na jej dno vypočítame pomocou súčtu objemu vody v nej a objemu vody vytlačeného nádobou.

$$V = V_v + V_n$$

$$HS = hS + hkS$$

$$H = h + hk$$

Nakoniec ešte od H odpočítame $h - v = h'$ a vyjde nám náš hľadaný výsledok $h + hk - h'$.

1.3 Hydrolevitácia

vzorák **Hovorca** a **Patrik**, opravovali **Hovorca** a **Patrik**

Na úvod tejto úlohy sa zamyslime, ako sa sústava správa energeticky. Kužeľ sa nehýbe, z čoho vyplýva, že nekoná prácu, no taktiež, že na ňom práca nie je konaná. Keďže platí zákon zachovania energie (ZZE), tak celková energia vody bude stále rovnaká.

Avšak, ak je energia vody stále rovnaká, znamená to predsa, že tesne pred a tesne po odklonení vody, kedy je rozdiel h zanedbateľne malý, musí mať voda rovnakú kinetickú energiu, a teda rovnakú rýchlosť. (pod m myslíme malý element vody)

$$E = E_k + E_p \Rightarrow E_1 = E_{k_1} + mgh$$
$$\Rightarrow E_2 = E_{k_2} + mgh$$

a keďže $E_1 = E_2$ tak

$$E_{k_1} = \frac{mv^2}{2} = E_{k_2}$$

Vieme, do akej výšky sa voda dostane, keď nemá v ceste prekážku, takže vieme vyrátať celkovú energiu vody. Zo ZZE vieme, že táto energia bude stále rovnaká, a to aj vo výške h, v ktorej bude hračka levitovať.

$$E_{\mathrm{H_2O}} = mgH = mgh + \frac{mv^2}{2}$$

Z tohto vzťahu si vieme vyjadriť rýchlosť vody, ktorá naráža do hračky.

$$v = \sqrt{2g(H - h)} \tag{1.3.1}$$

Vieme, že je hračka v pokoji a teda podľa 1. Newtonovho zákona musí byť súčet síl rovný 0. Prúd vody pôsobí nejakou silou $F_{\mathrm{H_2O}} = F_g$. Vidíme, že po zrážke je hybnosť vody iná, a preto niečo muselo spôsobiť túto zmenu. (Nezmení sa veľkosť hybnosti vody ale jej smer) Hračka pôsobí podľa 3. Newtonovho zákona na vodu rovnako veľkou reakciou F'_{H_2O}, a preto môžeme povedať, že zmena hybnosti vody je krytá reakciou prekážky. Z toho vidíme:

$$F_{H_2O} - F_g = F_{H_2O} - F'_{H_2O} = 0$$

$$F'_{H_2O} = F_g$$

$$F'_{H_2O} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = M \cdot g$$

Keďže sa voda po zrážke odrazí v horizontálnom smere symetricky, tak nás bude zaujímať iba čo sa deje s vertikálnou zložkou. Malý element vody mal pred zrážkou hybnosť $p_1 = mv_1$ a po zrážke hybnosť $p_2 = mv_2$. Rozdiel hybností preto bude $\Delta p = m\Delta v$. Vertikálnu zložku vody po zrážke vyrátame ako $v \cdot \cos(\alpha)$, a teda rozdiel rýchlosti je: $v(1 - \cos(\alpha))$.

$$M \cdot g = \frac{m \cdot v \cdot (1 - \cos(\alpha))}{t} \tag{1.3.2}$$

Poznáme objemový prietok Q, z ktorého si vieme vyjadriť hmotnosť ako

$$Q = \frac{V}{t}$$

$$V = \frac{m}{\rho}$$

$$m = Q \cdot \rho \cdot t \tag{1.3.3}$$

Po dosadení 1.3.1 a 1.3.3 do 1.3.2 dostávame:

$$M \cdot g = Q \cdot \rho \cdot \sqrt{(2g(H - h))} \cdot (1 - \cos(\alpha))$$

$$\sqrt{(2g(H - h))} = \frac{M \cdot g}{Q \cdot \rho \cdot (1 - \cos(\alpha))}$$

$$h = H - \frac{M^2 \cdot g}{2 \cdot Q^2 \cdot \rho^2 \cdot (1 - \cos(\alpha))^2}$$

Poďme si intuitívne overiť, či je náš výsledok správny. Keď budeme zvyšovať H, tak voda strieka do vyššej výšky, a teda má viac energie, čiže hračka bude levitovať vyššie. Čím väčšia hmotnosť hračky, tým nižšie bude levitovať, lebo odčítame väčšie číslo. So zväčšujúcim sa prietokom výška rastie. Ak zvýšime hustotu, tak do hračky bude narážať viac častíc, a teda výška narastá. Čím je väčšia hodnota uhla, tým je menší kosínus a výraz 1 − cos je väčší, teda voda vystrekne vyššie. Môžeme si to predstaviť tak, že ak by sa voda odrážala pod 180° uhlom, tak by všetku svoju vertikálnu energiu odovzdávala hračke, čo by bolo vlastne maximum energie, ktorú jej vie dať. Vidíme, že intuitívne nám vzorec vyšiel, a teda sme týmto vyrátali výšku h, v ktorej bude hračka levitovať.

1.4 Povrchná špongia

vzorák **Krtko**, opravoval **Krtko**

1.5 Mravec mravec, ide ti koniec!

vzorák **Nina**, opravovala **Nina**

Prvá rozumná vec, ktorú by sme mali o Ferdovej kanojke zistiť, je hĺbka jej počiatočného ponoru, t.j. v čase, keď sa zakliesnila, ale ešte v nej nebola žiadna voda. A keď už budeme pri tom, prečo si túto hĺbku nespočítať rovno pre ľubovoľný moment po zakliesnení. Kanojka je v každom momente v takej hĺbke (výške), aby sa tiažová sila potápajúca kanojku rovnala vztlakovej sile nadnášajúcej kanojku, t.j. $F_g = F_{vz}$.

Tiažová sila pôsobiaca na kanojku aj s Ferdom je

$$F_g = (m_1 + m_2)g,$$

kde m_1 je hmotnosť Ferda aj s kanojkou a m_2 hmotnosť vody natečenej do kanojky. Vztlaková sila nadnášajúca kanojku je $F_{vz} = Sp_h$, kde p_h je tlak v hĺbke h. Na výpočet tlaku v hĺbke h nám však vzorec $p = \rho gh$ stačiť nebude. Voda v Hrone totiž tečie, zatiaľ čo Ferdova kanojka vzhľadom na breh stojí. Na pomoc si preto vezmeme Bernoulliho rovnicu. Tá nám hovorí, že ak kvapalina prúdi ustálene, tak súčet $\frac{p}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} + gh$ je na každom jej mieste rovnaký. Nastavme si $h = 0$ na hladine. Potom súčet na hladine bude $\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh = \frac{v_0^2}{2}$. Súčet v hĺbke h má byť rovný súčtu na hladine, čiže

$$\frac{v_0^2}{2} = \frac{p_h}{\rho} + \frac{v_h^2}{2} + gh = \frac{p_h}{\rho} + \frac{(v_0 - h/10\ \mathrm{s})^2}{2} + gh.$$

Následne z toho vyjadrený tlak bude

$$p_h = \rho\left(\frac{v_0^2 - (v_0 - h/10\ \mathrm{s})^2}{2} - gh\right) = \rho\left(v_0 h/10\ \mathrm{s} - \frac{(h/10\ \mathrm{s})^2}{2} - gh\right).$$

Vztlaková sila pôsobiaca na kanojku ponorenú do hĺbky h teda bude

$$\begin{aligned} F_{vz} &= Sp_h \\ &= S\rho\left(v_0 h/10\ \mathrm{s} - \frac{(h/10\ \mathrm{s})^2}{2} - gh\right). \end{aligned}$$

Spomeňme si teraz, že chceme aby $F_g = F_{vz}$ a dosaďme:

$$\begin{aligned} F_g &= F_{vz} \\ (m_1 + m_2)g &= S\rho(v_0 h/10\ \mathrm{s} - \frac{(h/10\ \mathrm{s})^2}{2} - gh) \end{aligned}$$

Tu vidíme, že jediná neznáma v tomto vzťahu je h a navyše je to kvadratická rovnica pre h. Upravíme ju teda a zistíme jej korene.

$$0 = h^2 + h(-20\,\mathrm{s} \cdot v_0 + 200\,\mathrm{s}^2 \cdot g) + \frac{200\,\mathrm{s}^2 \cdot (m_1 + m_2)g}{S\rho}$$

$$h = 10\,\mathrm{s} \cdot v_0 - 100\,\mathrm{s}^2 \cdot g \pm \sqrt{(10\,\mathrm{s} \cdot v_0 - 100\,\mathrm{s}^2 \cdot g)^2 - \frac{200\,\mathrm{s}^2 \cdot (m_1 + m_2)g}{S\rho}}$$

Ak za m_2 v tomto vzorci dosadíme 0, získame hĺbku ponoru lodičky v čase, keď ešte v kanojke nie je voda, t.j. v momente keď sa zakliesnila. Za ostatné premenné dosaďme podľa zadania $v_0 = 50$ cm, $g = 1000\,\mathrm{cm/s^2}$, $S = 20\,\mathrm{cm^2}$, $m = 2$ g a $\rho = 1\,\mathrm{g/cm^3}$. Týmto získame dva výsledky, z ktorých jeden bude hĺbka ponoru v momente, keď sa kanojka zakliesnila.

Získané výsledky sú približne −198 999 cm a −0,1 cm. Najprv si všimnime, že oba výsledky sú záporné, to je fajn, keďže hĺbke (výške) h sme 0 nastavili na hladinu, t.j. pod hladinou je výška záporná. Ďalej sedliacky rozum našepkáva, že pri hĺbke skoro −2 km by kanojka aj s Ferdom už dávno neplávala na hladine. Oproti tomu ponor −0,1 cm je pri výške boku kanojky 2 cm úplne v poriadku, a teda

$$h = -99\,500\,\mathrm{cm} + \sqrt{(-99\,500\,\mathrm{cm})^2 - 10\,000\,\mathrm{cm^2/g} \cdot (m_1 + m_2)}$$

$$h = -99\,500\,\mathrm{cm} + \sqrt{9\,900\,230\,000\,\mathrm{cm} + 10\,000\,\mathrm{cm^2/g} \cdot m_2}.$$

Teraz už poznáme ponor kanojky v závislosti od hmotnosti vody natečenej do vnútra. Ďalším krokom by preto malo byť zistiť, akou rýchlosťou bude do kanojky vtekať voda. Tu si opäť zavoláme na pomoc Bernoulliho rovnicu. Ale pozor, okolo kanojky už nejde o nevírové prúdenie, preto ju tentokrát nepoužijeme na celý objem vody s ktorým počítame. O Bernoulliho rovnici však vieme, že platí aj vo vírovom prúdení, ak je ustálené a uvažujeme pritom len kvapalinu pozdĺž jednej z prúdnic. Zoberme si teda jednu z prúdnic vtekajúcich do vnútra kanojky (tu prúdenie nie je síce úplne ustálené, avšak zmeny v prúdniciach budú dostatočne malé na to, aby išlo o dobrú aproximáciu). Na tej už Bernoulliho rovnica platiť bude. Zároveň môžme nahliadnuť, že táto prúdnica ide, predtým ako sa dostane ku kanojke, aj časťou rieky, kde prúdenie ešte považujeme za nevírové. Potom je na nej súčet Bernouliho rovnice rovnaký ako bol na hladine a teda

$$\frac{v_0^2}{2} = \frac{p_{h_2}}{\rho} + \frac{v_v^2}{2} + gh,$$

kde p_{h_2} je tlak spôsobený vodou, ktorá už natiekla do kanojky. Potom $p_{h_2} = \rho g h_2$, kde $h_2 = \frac{m_2}{S\rho}$ je výška hladiny vody v kanojke vzhľadom na dno, t.j. táto bude narozdiel od h kladná. Z toho vieme odvodiť, že

$$
\begin{aligned}
v_v &= \sqrt{v_0^2 - \frac{2p_{h_2}}{\rho} - 2gh} \\
&= \sqrt{v_0^2 - 2gh_2 - 2gh} \\
&= \sqrt{v_0^2 - 2g\left(\frac{m_2}{S\rho} + h\right)}
\end{aligned}
$$

Rýchlosť vtekania vody teda závisí od okrem zo zadania pevne daných veličín, len od hmotnosti vody v kanojke m_2 a hĺbky ponoru h. Hĺbka ponoru h však závisí len od hmotnosti vody v kanojke a teda po dosadení za h bude rýchlosť závisieť len od m_2.

Označme si hmotnostný tok vody cez dierku ako Q, potom $Q = \frac{\pi d^2 v_v}{4}$ a platí vzťah

$$
\begin{aligned}
m_{2,T} &= \int_0^T Q \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^T \frac{\pi d^2}{4} v_v \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^T \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{v_0^2 - 2g\left(\frac{m_{2,T}}{S\rho} + h\right)} \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Keď dosadíme $h = -99\,500\ \mathrm{cm} + \sqrt{9\,900\,230\,000\ \mathrm{cm} + 10\,000\ \mathrm{cm^2/g} \cdot m_2}$ získame

$$
m_{2,T} = \int_0^T \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{v_0^2 - 2g(\frac{m_{2,T}}{S\rho} + -99\,500\ \mathrm{cm} + \sqrt{9\,900\,230\,000\ \mathrm{cm} + 10\,000\ \mathrm{cm^2/g} \cdot m_{2,T}})} \,\mathrm{d}t
$$

čo je nie veľmi pekná diferenciálna rovnica. Ako sa však spomína v zadaní, túto riešiť nepotrebujeme. Namiesto toho si pomôžeme nejakou tou výpočtovou technikou [2].

A čo si to vlastne chceme naprogramovať? Poznáme vzťah pre hĺbku ponoru v závislosti od hmotnosti vody v kanojke

$$
h = -99\,500\ \mathrm{cm} + \sqrt{9\,900\,230\,000\ \mathrm{cm} + 10\,000\ \mathrm{cm^2/g} \cdot m_2},
$$

vzťah pre rýchlosť vtekania vody v závislosti od hĺbky ponoru a hmotnosti vody v kanojke

$$
v_v = \sqrt{v_0^2 - 2g(\frac{m_2}{S\rho} + h)}.
$$

Aby sme tento kruh uzavreli, potrebujeme nejak z rýchlosti vody určiť, koľko vody natečie do kanojky. Vieme, že $m_{2,T} = \int_0^T \frac{\pi d^2}{4} v_v \,\mathrm{d}t$, ale toto predsa počítať nechceme.

[2] Excel, OpenOffice Calc, naprogramujem si to vo svojom obľúbenom programovacom jazyku…

Môžeme si však všimnúť, že hmotnosť vody v kanojke sa musí v čase meniť plynule (pretože voda do kanojky priteká časom postupne). Potom sa m_2 vo vzťahu pre h mení plynule a teda aj h sa musí v čase meniť plynule. Podobne potom h a m_2 sa menia plynule vo vzťahu pre v_v a teda aj v_v sa mení v čase plynule.

Z toho, že rýchlosť nám v čase neskáče, ale mení sa plynule vyplýva, že hmotnosť vody natečenej do kanojky za prvú sekundu môžeme aproximovať tak, že okamžitú rýchlosť v_v nahradíme konštantnou rýchlosťou v_0 z času 0 s. Potom

$$m_{2,1\ \mathrm{s}} \doteq \int_0^{1\ \mathrm{s}} \frac{\pi d^2}{4} v_0 \,\mathrm{d}t = \frac{\pi d^2}{4} v_0 \cdot 1\ \mathrm{s}.$$

Následne by sme mohli hmotnosť vody natečenej do kanojky za druhú sekundu spočítať tak, že spočítame novú hĺbku ponoru (voda natečená do kanojky nám ju trochu ponorí) a z nej novú rýchlosť natekania vody na začiatku prevej sekundy $v_{1\ \mathrm{s}}$ a z nej opäť aproximujeme hmotnosť vody natečenej v druhej sekunde, atď. (Áno, teraz prichádza tá chvíľa, keď by bolo už vhodné, si to túkať skôr do Excelu ako do bežnej kalkulačky. Veď robiť tento výpočet ručne by bolo naozaj náročné, kto vie kedy to dotečie, preto by bolo lepšie proces automatizovať a naprogramovať si to).

Pri výpočte v_1 si môžeme všimnúť, že nárast hmotnosti kanojky za prvú sekundu spôsobil nárast rýchlosti vtekania vody. Z toho môžeme usúdiť, že priemerná rýchlosť vtekania vody počas prvej sekundy bola vyššia ako v_0 a teda, že aj množstvo natečenej vody by pri presnom výpočte bolo tiež väčšie. Na druhej strane, vidíme, že rýchlosť sa zmenila z počiatočnej $v_0 = 50{,}01\ \mathrm{cm}$ na $v_1 = 50{,}03\ \mathrm{cm}$. To nie je zase až tak veľa.

Napriek tomu by sa však dalo argumentovať, že zvyšujúca sa hmotnosť kanojky s vodou vnútri nám zvýši rýchlosť vtekania vody a to zase spätne zvýši koľko vody bude v kanojke, čiže tieto dva procesy sa budú navzájom podporovať.

Aby sme aj tento proces vzájomného ovplyvňovania sa rýchlosti vtekania vody a prírastku vody v kanojke čo najlepšie zachytili, môžeme si interval s ktorým počítame rozdeliť na menšie kusy. Po poradí od prvého v každom z nich najprv spočítame prírastok vody do kanojky za daný interval a následne, v ďalšom intervale, už počítame s kanojkou zaťaženou aj vodou z predchádzajúceho intervalu. Zjavne takýto výsledok je presnejší.

Skúsme si teda porovnať, ako nám narastie rýchlosť za prvú sekundu, ak si ju rozdelíme na intervaly dĺžky 0,5 s, 0,2 s,0,1 s alebo 0,01 s. Prekvapivo rozdiel nie je vôbec veľký, ba skôr naopak. Rozdiel medzi rýchlosťami v prvej sekunde počítanými s intervalmi veľkosti 1 s a 0,01 s má prvú efektívnu cifru až na ôsmom mieste za desatinou čiarkou. Ak tento pokus zopakujeme pre rýchlosti v 10. sekunde, rozdiel rýchlostí bude mať prvú efektívnu cifru na 7. mieste za desatinou čiarkou. To pre nás znamená, že aj keď sa narásť hmotnosti vody v kanojke a rýchlosť vtekania do nej tvoria previazaný systém, tento systém je stabilný a teda naša aproximácia bude celkom presná.

A že koľko nám to teda vyšlo? S intervalmi dĺžky 1 s sa výsledok javil niekde medzi 92 s až 93 s. Pri desatine sekundy bol medzi 92,4 s a 92,5 s a pri stotine medzi 92,49 s a 92,5 s. Môžeme teda Ferdovi oznámiť, že na to aby sa naučil plávať mu zostáva len niečo okolo 92,49 s.

1.6 Bob the builder

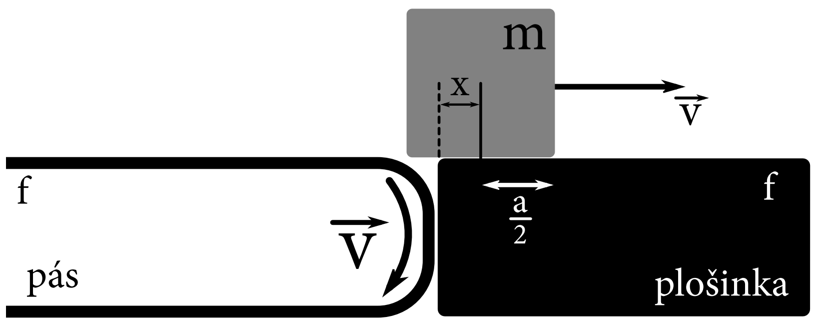
vzorák **Dvojka**, opravoval **Dvojka**

Predstavme si najprv, čo očakávame, že sa s kockou stane: chvíľu sa povezie na bežiacom pásme, a keď sa dostatočne vytrepe na plošinku, začne brzdiť, až úplne zastaví. Počas tohto deja na ňu budú pôsobiť dve sily: trecia sila od bežiaceho pása $F_{\rightarrow}$ a trecia sila od plošinky $F_{\leftarrow}$.

Trecia sila má zopár vtipných vlastností – napríklad nikdy nevybudzuje pohyb. Inými slovami, pás na kocku nebude pôsobiť väčšou trecou silou než plošinka, pokiaľ sa bude kocka pohybovať rýchlosťou v (teda voči pásu stáť), a plošinka nebude na kocku pôsobiť väčšou trecou silou než pás od chvíle, keď kocka zastaví.

Druhá časť predošlej vety znamená, že maximálnu vzdialenosť kocka dosiahne v okamihu svojho prvého zastavenia, a od toho okamihu zotrvá v pokoji – prvá časť predošlej vety je však o niečo zložitejšia. Aby sme pochopili jej význam, musíme si vyjadriť maximálne veľkosti oboch trecích síl. Vieme, že maximálna veľkosť trecej sily povrchu na kocku, ktorá na ňom spočíva celá, je mgf, a tiež vieme, že táto maximálna veľkosť je priamo úmerná veľkosti styčnej plochy kocky a povrchu. (Keďže kocka pôsobí všade rovnakým tlakom. Kebyže je to čudnejší tvar, napríklad pologuľa, bolo by to zložitejšie.)

Zaveďme si teda súradnicu x, ktorá vyjadruje vzdialenosť medzi okrajom plošinky a stredom spodnej hrany kocky rovnobežnej so smerom pohybu kocky.



Potom očividne

$$F_{\rightarrow max} = mgf\frac{\frac{a}{2} - x}{a}, F_{\leftarrow max} = mgf\frac{\frac{a}{2} + x}{a}$$

Spomeňme si, že trecia sila nevybudzuje pohyb. Pokiaľ $F_{\leftarrow max} \leq F_{\rightarrow max}$, pre skutočné trecie sily bude platiť $F_{\leftarrow} = F_{\rightarrow}$ a kocka zotrvá v pohybe rýchlosťou v. Akonáhle ale nastane $F_{\leftarrow max} > F_{\rightarrow max}$, kocka začne spomaľovať. Ako vieme rýchlo zistiť, do tejto dynamickej fázy sa dostane, keď $x > 0$, teda polovica kocky bude na plošinke. Od chvíle, keď sa kocka dotkne plošinky, po začiatok brzdenia prejde čas $t_0 = \frac{a}{2v}$. Keď bude kocka brzdiť, obe trecie sily nadobudnú svoje maximálne hodnoty, a teda pohybová rovnica $F = ma$ pre kocku bude vyzerať nasledovne:

$$F_{\rightarrow} - F_{\leftarrow} = -2mgf\frac{x}{a} = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

V tomto na prvý pohľad zbadáme rovnicu harmonického oscilátora, ktorej riešením je funkcia času:

$$x(t) = A\sin\sqrt{2\frac{gf}{a}}t + B\cos\sqrt{2\frac{gf}{a}}t$$

Pozrime sa na okrajové podmienky našej rovnice: V čase $t = 0$ s práve začala fáza brzdenia, teda

$$x(0\ \mathrm{s}) = 0, v_{\mathrm{kocka}}(0\ \mathrm{s}) = \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0\ \mathrm{s}} = v$$

Z prvej podmienky okamžite vidíme, že $B = 0$. Aby sme využili druhú, zderivujme $x(t)$ podľa času, aby sme vyjadrili rýchlosť kocky v_{kocka} ako funkciu času, a pozrime sa na jej hodnotu, keď $t = 0$ s:

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{kocka}}(t) &= \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \\ v_{\mathrm{kocka}} &= A\sqrt{2\frac{gf}{a}}\cos\sqrt{2\frac{gf}{a}}t \\ v_{\mathrm{kocka}}(0\,\mathrm{s}) &= A\sqrt{2\frac{gf}{a}} \\ v &= A\sqrt{2\frac{gf}{a}} \\ A &= v\sqrt{\frac{a}{2gf}} \end{aligned}$$

Vidíme teda, že amplitúda nášho harmonického oscilátora je $v\sqrt{\frac{a}{2gf}}$. Keďže však trecia sila nikdy nevybudzuje pohyb, vieme, že po dosiahnutí prvého maxima výchylky sa náš „oscilátor“ uvedie do pokoja, kde zotrvá. My chceme, aby toto nastalo, keď $x \geq \frac{1}{2}a$, keďže vtedy je kocka celá na plošinke. Keďže amplitúda je úmerná rýchlosti pásu, najmenšia rýchlosť pásu v, pre ktorú táto podmienka bude platiť, bude taká, že $x = \frac{1}{2}a$. Teda

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a &= v\sqrt{\frac{a}{2gf}} \\ v &= \sqrt{\frac{gfa}{2}} \end{aligned}$$

Vieme teda už rýchlosť pásu, stačí nám už len zistiť, ako dlho bude trvať fáza brzdenia. Inými slovami, kedy dosiahne výraz $\sin\sqrt{2\frac{gf}{a}}t$ maximum (pre najmenšie kladné t)? Nuž, keď

$$\sqrt{2\frac{gf}{a}}t = \frac{\pi}{2}$$

Inými slovami, keď

$$t = \pi\sqrt{\frac{a}{8gf}}$$

Už k tomu len prirátajme čas od dotyku kocky a plošinky po začiatok brzdenia a obdržíme výsledok

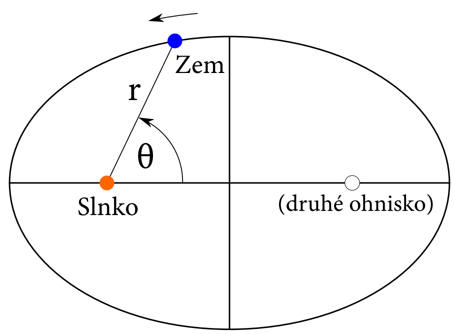
$$T = t_0 + t = \sqrt{\frac{a}{2gf}} + \pi\sqrt{\frac{a}{8gf}} = \sqrt{\frac{a}{2gf}}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

1.7 Radi(k)álne riešenie

vzorák **Majo**, opravoval **Majo**

Zem sa okolo Slnka pohybuje po elipse, pričom Slnko leží v jednom z ohnísk. V tejto úlohe sa tak budeme musieť vysporiadať s pohybom po elipse[3]. Aby sme ho vedeli popísať, potrebujeme vedieť popísať polohu Zeme vzhľadom na Slnko. Musíme preto vybrať nejaké vhodné súradnice. Milovníkov kartézskych súradníc hneď sklameme, pretože tie nepoužijeme. Ako to už býva pri pohybe po niečom kruhovitom, oplatí sa používať polárne súradnice. Ich stred si umiestnime do Slnka, teda do ohniska elipsy.

Polohu Zeme vzhľadom na Slnko tak budeme popisovať dvojicou (r, θ), kde r predstavuje vzdialenosť Zeme a Slnka a θ je orientovaný uhol, ktorý zviera úsečka spájajúca Zem a Slnko s úsečkou, ktorá spája ohniská elipsy (v jednom z nich je Slnko). Za kladný uhol určíme ten, v ktorom Zem obieha okolo Slnka.



Keď už máme zadefinované polárne súradnice, pripomeňme si, že obe zložky polohy r aj θ sa budú neustále meniť. Na druhej strane úloha od nás chce zistiť, kedy je radiálna rýchlosť najväčšia. V reči týchto súradníc to znamená, že chceme vedieť, kedy sa r najrýchlejšie mení[4].

My navyše vieme, že máme danú elipsu. Preto poznáme dĺžky jej osí a, b, a teda aj jej excentricitu e[5]. Pre danú elipsu tak musíme byť schopní vyjadriť závislosť r od θ.

Preto uvažujme trojuholník tvorený ohniskami a Zemou. Vzdialenosť Zem-Slnko je $r(\theta)$. Vzdialenosť ohnísk je $2ae$. Napokon, pre každý bod elipsy platí, že súčet jeho vzdialeností od ohnísk je rovný $2a$. Preto je vzdialenosť Zeme od druhého ohniska elipsy rovná $2a - r(\theta)$. Z kosínusovej vety pre zmienený trojuholník tak dostávame:

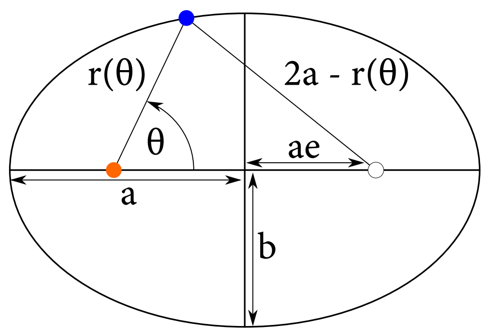
[3] Hlboký povzdych.
[4] V tomto vidno najväčšiu výhodu polárnych súradníc oproti kartézskym v tejto úlohe - priamo pracujeme s r.
[5] Ak neviete, čo tieto písmenká znamenajú, tak si to môžete pozrieť napríklad tu: https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse.

$$(2a - r(\theta))^2 = r(\theta)^2 + (2ae)^2 - 2(2ae)r(\theta)\cos\theta$$

$$4a^2 - 4ar(\theta) + r(\theta)^2 = r(\theta)^2 + 4a^2e^2 - 4aer(\theta)\cos\theta$$

$$a - r(\theta) = ae^2 - er(\theta)\cos\theta$$

$$r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1 - e\cos\theta}$$



Tým máme vyjadrenú vzdialenosť radiálnej vzdialenosti r od uhla θ. Derivovaním tohto vzťahu podľa času, dostávame vzťah pre radiálnu rýchlosť[6]:

$$\dot{r}(\theta) = \frac{a(1-e^2)(e\sin\theta)\dot{\theta}}{(1 - e\cos\theta)^2}$$

Z praktických dôvodov, ktoré uvidíme neskôr, si tento vzťah upravme tak, aby obsahoval aj $r(\theta)$:

$$\dot{r}(\theta) = \frac{r(\theta)e\sin(\theta)\dot{\theta}}{1 - e\cos\theta}$$

Pozorný čitateľ si už mohol všimnúť dve veci. Prvou z nich je, že sa nám vo vzťahu objavila $\dot{\theta}$, teda uhlová rýchlosť v danom čase. Jej sa v ďalšom priebehu budeme chcieť zbaviť. Druhá vec, ktorú si čitateľ mohol všimnúť, je, že doteraz bolo toto vzorové riešenie len o matematike. Zišlo by sa tak použiť nejakú fyziku. Fyzikov Pavlovov reflex by sa mal pri úlohe s planétami hneď snažiť používať Keplerove zákony. Teraz príde náramne vhod druhý Keplerov zákon[7]. Jedna z formulácií druhého Keplerovho zákona je, že obsah plochy, ktorú opíše sprievodič za nejaký malý čas $\mathrm{d}t$, je rovnaká pre každý takýto časový interval. Matematicky, $\dot{S} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ je konštanta.

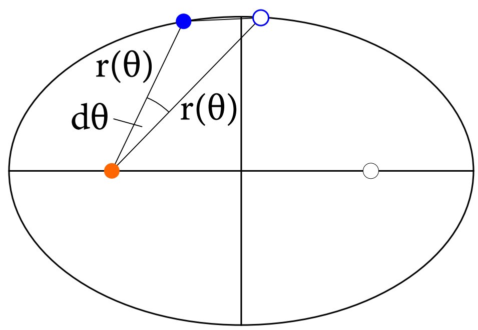
Aby sme vedeli využiť, čo nám povedal druhý Keplerov zákon, potrebujeme vypočítať $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$. V tomto svete nekonečne malých vyzerá táto plôška ako rovnoramenný trojuholník s ramenami dĺžky $r(\theta)$ a uhlom oproti základni $\mathrm{d}\theta$. Tento trojuholník má preto obsah:

[6] Ak je vám z tohto zle, tak sa na to nepozerajte.
[7] Zvyšok úlohy potom bude už len znova matematika.

$$dS = \frac{1}{2}r^2(\theta)\sin d\theta$$

Keďže $d\theta \to 0$, tak $\sin d\theta = d\theta$ a môžeme písať:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2(\theta)\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2(\theta)\dot{\theta}$$



Podľa druhého Keplerovho zákona je preto $\frac{1}{2}r^2(\theta)\dot{\theta}$ konštantné. Keď nasčítame takéto plôšky pre všetky časové intervaly dt z periódy obehu Zeme T, dostaneme [8]:

$$\frac{S}{T} = \frac{1}{2}r^2(\theta)\dot{\theta}$$

Navyše o elipse vieme $S = \pi ab$ a o Zemi vieme T. Do vyjadrenia pre $\dot{r}(\theta)$ sa nám zíde vedieť hodnotu $r(\theta)\dot{\theta}$, tak ju odtiaľto vyjadrime:

$$r(\theta)\dot{\theta} = \frac{2\pi ab}{r(\theta)T}$$

A dosaďme do vyjadrenia pre $\dot{r}(\theta)$, do ktorej hneď potom dosaďme aj vyjadrenie $r(\theta)$:

$$\dot{r}(\theta) = \frac{2\pi abe\sin\theta}{T(1-e\cos\theta)r(\theta)}$$

$$\dot{r}(\theta) = \frac{2\pi be\sin\theta}{T(1-e^2)}$$

Konečne máme vyjadrenie radiálnej rýchlosti, v ktorom je jediná premenná uhol θ. Ostatné členy sú konštanty. Najväčšia radiálna rýchlosť sa preto dosahuje v extrémnych hodnotách $\sin\theta$. To sú hodnoty 1 a -1, ktoré sa líšia len v tom, že v jednom prípade sa takou rýchlosťou Zem približuje a v druhom vzďaľuje Slnku. Tieto hodnoty sa nadobúdajú vtedy, keď $\theta = \frac{\pi}{2}$ a keď $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

[8] Formálne by sme to mali zapísať ako integrály $\int_0^S dS = \frac{1}{2}r^2(\theta)\dot{\theta}\int_0^T dt$.

Takže najvyššia radiálna rýchlosť sa dosahuje vtedy, keď sa Zem nachádza v takom bode, že úsečka spájajúca Zem a Slnko je kolmá na hlavnú os jej eliptického pohybu.