Riešenia 3. kola letnej časti

3.1 Proti vetru v povetrí

vzorák **Marcel**, opravoval **Marcel**

Ako prvú vec si skúsme uvedomiť, prečo vlastne také lietadlo letí. Dôvod je ten, že na krídlach, ktoré sú ofukované vzduchom, vzniká vztlak[1]. Na to, aby sme úspešne vyriešili tento príklad, tak o aerodynamike a mechanike letu potrebujeme vedieť, ešte vedieť jednu vec, a to, že ako vyzerá vzorec na vztlakovú silu:

$$F_l = \frac{1}{2}\rho C_l S v^2$$

Z tohto vzorca vidíme, že vztlaková sila závisí od hustoty prostredia, v ktorom sa teleso pohybuje, koeficientu vztlaku, plochy krídla, a rýchlosti.

Ešte si je treba si uvedomiť, že lietadlo musí zrýchľovať, aby dosiahlo nejakú rýchlosť, pri ktorej vytvára dostatočne veľa vztlaku na to, aby sa odlepilo od zeme (vztlak musí byť väčší ako tiaž lietadla).

Kľúčová myšlienka pri riešení tejto úlohy je ale to, že ako môžeme vidieť zo vzorca, vztlak závisí od rýchlosti *prostredia* v ktorom sa teleso hýbe.

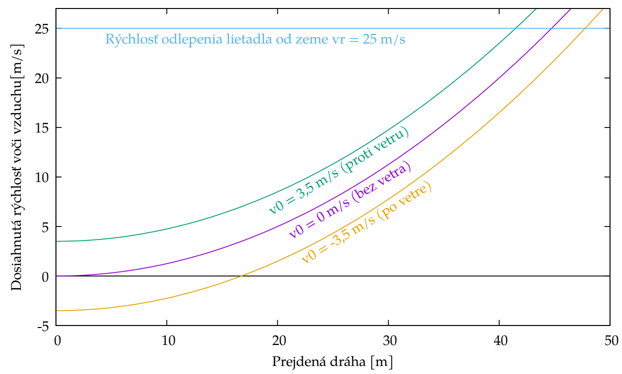
Predstavme si nasledujúcu situáciu: Chcete si zaplávať v rieke, alebo nejakej inej tečúcej vode. Viete plávať nejakou rýchlosťou v_1, a rieka tečie nejakou rýchlosťou v_2. Začnete teraz plávať proti prúdu, rýchlosťou v_1. Čo sa to ale deje? Proti Vám tečie prúd vody, a teda vo výsledku sa voči brehu hýbete len rýchlosťou $v_1 - v_2$. Samozrejme, prípade, ak by ste plávali s prúdom, sa voči brehu hýbete rýchlosťou $v_1 + v_2$.

Rovnako je to aj s lietadlom. V prípade, ak sa lietadlo postaví na začiatok dráhy, a proti nemu fúka vietor rýchlosťou v_2, tak ak ešte voči zemi stojí ($v_1 = 0$ m/s), tak sa voči vzduchu hýbe rýchlosťou v_2.

Samozrejme, v prípade, ak sa lietadlo postaví po vetre, teda vietor mu fúka do chrbta, tak jeho rýchlosť voči vzduchu, ak voči zemi stojí, je $ - v_2$.

Skúsme si teda nakresliť graf, kde znázorníme závislosť rýchlosti lietadla voči vzduchu od prejdenej vzdialenosti za predpokladu, že zrýchľuje konštantným zrýchlením.

[1] Nie hydrostatický.



Obrázok 1: *Graf závislosti rýchlosti voči vzduchu od prejdenej vzdialenosti.*

Ako môžeme z grafu vidieť, a je to aj intuitívne zrejmé, tak ľubovoľnú rýchlosť dosiahneme na menšej vzdialenosti, ak už na začiatku ideme nejakou nenulovou rýchlosťou.

To teda znamená, že ak lietadlo štartuje a pristáva proti vetru, tak sa rozbehne na rýchlosť, kedy sa môže odlepiť od dráhy (odborne na rýchlosť rotácie) na kratšej vzdialenosti, teda potrebuje kratšiu vzletovú a pristávaciu dráhu. Okrem tohto má pristátie a vzlet proti vetru aj ďalšiu výhodu, a to, že voči zemi môže lietadlo klesať, resp. stúpať pod strmším uhlom.

To, že prečo sa to deje si ale už nepovieme, ale môžete si to premyslieť na domácu úlohu :)

Z tohto dôvodu teda lietadlá štartujú, aj pristávajú väčšinou proti vetru. Výnimky tvoria len situácie, keď je dráha do kopca, sú v zostupovej rovine nejaké prekážky, a podobne…

Poznámka k riešeniam

Takmer všetci ste správne odhadli, že je lepšie ak je štart a pristátie proti vetru, aj keď len veľmi málo z Vás správne odôvodnilo, že prečo. Je treba si uvedomiť, že vzduch okolo lietadla sa (aspoň pre potreby tejto úlohy) hýbe len jedným smerom, a nie tak, že časť vzduchu sa hýbe týmto a časť opačným smerom. Najpodstatnejšia myšlienka správneho riešenia, ktorú len málo z vás spomenulo bola, že lietadlo letí voči vzduchu, a nie voči zemi.

3.2 Počítanie peňazí

vzorák **Jaro**, opravoval **Ralbo**

Uvažujme $N + 1$ mincí[2] postavených na seba. Očíslujme si ich zdola nahor a napíšme si pohybovú rovnicu pre každú z nich. Je to vskutku jednoduché. Stačí si uvedomiť, že dolná susediaca minca sa snaží mincu trecou silou

[2] Zadanie hovorí o N dňoch a jednej minci za každý deň, pričom jeden deň bol zarátaný dvakrát, teda mincí je o jednu viac než dní.

urýchľovať a horná naopak brzdiť. Potom dostávame sadu rovníc:

$$\begin{aligned}
ma_1 &= F - \cancelto{0}{F_{t0}} - F_{t1};\\
ma_2 &= F_{t1} - F_{t2};\\
ma_3 &= F_{t2} - F_{t3};\\
&\vdots\\
ma_i &= F_{t(i-1)} - F_{ti};\\
&\vdots\\
ma_N &= F_{t(N-1)} - F_{tN};\\
ma_{N+1} &= F_{tN} - \cancelto{0}{F_{t(N+1)}}.
\end{aligned}$$

F je sila, ktorou pôsobí tyčka na spodnú mincu a F_t označuje trecie sily. Sily F_{t0} a $F_{t(N+1)}$ idú do 0, nakoľko je trenie o podložku podľa zadania zanedbateľné a rovnako tak je aj zanedbateľné trenie vrchnej mince o vzduch.

Teraz nám už stačí vyčísliť trecie sily. To môže byť dosť komplikované, nakoľko každá z nich môže nadobúdať hodnoty v intervale $\langle 0; fF_N \rangle$, kde F_N je normálová sila medzi mincami.

Začnime tým, že budeme predpokladať, že mince po sebe prešmykujú. V takom prípade má trecia sila veľkosť práve $F_{ti} = fF_{Ni}$. Potom naša sústava rovníc vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned}
ma_1 &= F - Nmgf;\\
ma_2 &= Nmgf - (N-1)\,mgf = mgf;\\
ma_3 &= (N-1)\,mgf - (N-2)\,mgf = mgf\\
&\vdots\\
ma_i &= (N-i+2)\,mgf - (N-i+1)\,mgf = mgf;\\
&\vdots\\
ma_N &= 2mgf - mgf = mgf;\\
ma_{N+1} &= mgf.
\end{aligned}$$

Okamžite vidíme, že počnúc druhou mincou na každú pôsobí rovnako veľká výsledná sila, a teda vzhľadom na ich rovnakú hmotnosť sa všetky pohybujú s rovnakým zrýchlením. To je ale v rozpore s naším predpokladom, že mince po sebe prešmykujú. Ak sa všetky pohybujú s rovnakým zrýchlením a na začiatku mali rovnakú rýchlosť, tak sa predsa vzhľadom na seba nemôžu pohybovať, a teda k prešmykovanie nedochádza.

To nám celú situáciu výrazne zjednoduší. Ak sa všetky mince počnúc druhou hýbu spoločne, tak nás nemusia zaujímať sily medzi jednotlivými mincami, ale môžeme ich jednoducho nahradiť jediným telesom hmotnosti $M =$

Nm. V takom prípade riešime len problém dvoch telies položených na sebe, a teda môžeme písať stručnejšiu sadu rovníc:

$$ma = F - Mgf;$$

$$MA = Mgf.$$

a teraz označuje zrýchlenie spodnej mince a A zrýchlenie bloku zvyšných mincí, a teda zrýchlenie ktorejkoľvek inej mince. Samozrejme predpokladáme, že blok mincí po spodnej minci prešmykuje, pretože v opačnom prípade by sa nám spodnú mincu nepodarilo vyraziť.

Teraz si už len stačí uvedomiť, že v prípade úspešného vyrazenia mince musí platiť, že spodná minca sa bude pohybovať s väčším zrýchlením než blok zvyšných mincí, čiže

$$\underbrace{\frac{F - Mgf}{m}}_{a} \overset{!}{>} \underbrace{gf}_{A}.$$

Odtiaľ dostávame podmienku

$$F > (m + M)\, gf = (N + 1)\, mgf.$$

Poznamenajme však, že pri takejto nízkej sile sa nám síce teoreticky podarí spodnú mincu vyraziť, no bude to trvať dlho a celá veža mincí pri tom prekoná veľkú vzdialenosť, nakoľko jej zrýchlenie bude len nepatrne menšie od zrýchlenia spodnej mince. V praxi preto musíme požadovať silnejšiu podmienku

$$F \gg (m + M)\, gf = (N + 1)\, mgf.$$

3.3 Ďalekohľad, ktorý nezväčšuje?

vzorák **Jaro**, opravoval **Kubo**

Na úvod si zopakujme, čo o zobrazovaní šošovkami vieme a budeme to potrebovať pre vyriešenie tejto úlohy. Zobrazovanie šošovkami popisuje tzv. zobrazovacia rovnica

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a_p} + \frac{1}{a_o},$$

kde f je ohnisková vzdialenosť šošovky, a_p je predmetová vzdialenosť, t.,j. vzdialenosť predmetu od šošovky, a a_o je obrazová vzdialenosť, čiže vzdialenosť obrazu od šošovky. Pre priečne zväčšenie šošovky platí $Z = -\frac{a_o}{a_p}$. Toť vše. Vskutku jednoduché, nie? Teraz to už len stačí dať správne dokopy.

Nech ohnisková vzdialenosť objektívu Kvíkovho Keplerovho ďalekohľadu je f_1 a ohnisková vzdialenosť okuláru f_2. Pre každý slušný Keplerov ďalekohľad platí, že $f_1 > f_2$. Ďalej označme vzdialenosť pozorovaného predmetu od objektívu ďalekohľadu ako a, obrazovú vzdialenosť objektívu a_1 a obrazovú vzdialenosť okuláru a_2. Vzhľadom na to, že obrazové ohnisko objektívu má splývať s predmetovým ohniskom okuláru, je predmetová vzdialenosť okuláru $f_1 + f_2 - a_1$. Kvík pozoruje vzdialené objekty, preto zrejme $a \gg f_1, f_2$.

Zostavme si jednotlivé rovnice:

- zobrazovacia rovnica objektívu:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1};$$

- zobrazovacia rovnica okuláru:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_1 + f_2 - a_1} + \frac{1}{a_2};$$

- priečne zväčšenie objektívu:

$$Z_1 = -\frac{a_1}{a};$$

- priečne zväčšenie okuláru:

$$Z_2 = -\frac{a_2}{f_1 + f_2 - a_1}.$$

Zo zobrazovacej rovnice objektívu dostávame

$$a_1 = \frac{af_1}{a - f_1}$$

a zo zobrazovacej rovnice okuláru

$$a_2 = \frac{f_2\left(f_1 + f_2 - a_1\right)}{f_1 - a_1}.$$

Zadanie nám našepkáva, že priečne zväčšenie sústavy šošoviek je rovné súčinu priečnych zväčšení jednotlivých šošoviek sústavy. Postupnými úpravami dostávame

$$Z = Z_1 \cdot Z_2 = \frac{a_1 a_2}{a\left(f_1 + f_2 - a_1\right)} = \frac{\frac{\cancel{a}f_1}{a-f_1} \cdot \frac{f_2\cancel{(f_1+f_2-a_1)}}{f_1-a_1}}{\cancel{a}\cancel{\left(f_1 + f_2 - a_1\right)}} = \frac{f_1 f_2}{\left(a - f_1\right)\left(f_1 - \frac{af_1}{a-f_1}\right)} = \frac{f_1 f_2}{af_1 - f_1^2 - af_1} = \frac{f_1 f_2}{-f_1^2} = -\frac{f_2}{f_1}.$$

Znamienko mínus vo výsledku nám prezrádza, že obraz je prevrátený. Nás ale zaujíma najmä absolútna hodnota tohto výrazu, ktorá je menšia než 1, a teda obraz je naozaj zmenšený.

To bola tá ľahšia časť úlohy. Zistili sme, že Kvík sa vo výpočtoch nepomýlil, alebo sme sa pomýlili aj my spolu s ním. Vychádzajme z toho, že sme chybu vo výpočtoch nespravili – veď sme predsa nejakí fyzici! V takom prípade potrebujeme prísť na to, kde nastáva problém.

Zamyslime sa nad tým, čo znamená priečne zväčšenie. Udáva nám, koľkokrát je obraz väčší v porovnaní s predmetom. Ak nám vyšlo priečne zväčšenie menšie ako 1, znamená to, že obraz je menší než predmet. Znamená to ale, že musíme vidieť pozorovaný objekt ako zmenšený? Nie! Teda nie nutne. To predsa závisí aj od toho, ako ďaleko sa od nás obraz nachádza. Veď aj napríklad tento vzorák sa vám bude čítať lepšie z vášho smartfónu, ktorý práve držíte v rukách, ako z monitoru počítača v susedovom okne cez ulicu.

To, ako veľký sa nám pozorovaný objekt zdá, nezávisí od jeho veľkosti, ale od zorného uhla, pod ktorým ho vidíme. Nájdime si teda zorný uhol α, pod ktorým Kvík vidí skutočný objekt, a zorný uhol α', pod ktorým vidí jeho obraz v ďalekohľade.

Nech A je skutočná veľkosť objektu, ktorý sa od Kvíkovho oka nachádza vo vzdialenosti $a + f_1 + f_2$. Potom by ho bez ďalekohľadu videl pod zorným uhlom

$$\alpha = \left|\frac{A}{f_1 + f_2 + a}\right|,$$

kde α je zorný uhol v radiánoch.[3] Ten istý objekt vidí cez ďalekohľad pod zorným uhlom

$$\alpha' = \left|\frac{Z \cdot A}{a_2}\right|,$$

keďže obraz vzniká vo vzdialenosti a_2 od okuláru ďalekohľadu, čo je zároveň aj jeho vzdialenosť od oka, a je Z-krát zväčšený. Zväčšenie ďalekohľadu je potom

$$M = \frac{\alpha'}{\alpha} = \left|Z \cdot \frac{f_1 + f_2 + a}{a_2}\right|.$$

Ako vidíme, potrebujeme si vyjadriť obrazovú vzdialenosť okuláru pomocou predmetovej vzdialenosti objektívu. Postupne dostávame

$$a_2 = \frac{f_2\left(f_1 + f_2 - a_1\right)}{f_1 - a_1} = \frac{f_2\left(f_1 + f_2 - \frac{af_1}{a-f_1}\right)}{f_1 - \frac{af_1}{a-f_1}} = \frac{f_2\left(af_1 - f_1^2 + af_2 - f_1f_2 - af_1\right)}{af_1 - f_1^2 - af_1} = \frac{f_2\left(-f_1^2 + af_2 - f_1f_2\right)}{-f_1^2}.$$

Po dosadení do výrazu pre zväčšenie ďalekohľadu dostávame

$$M = \left|-\frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{f_1 + f_2 + a}{\frac{f_2\left(-f_1^2 + af_2 - f_1f_2\right)}{-f_1^2}}\right| = \left|\frac{f_1\left(f_1 + f_2 + a\right)}{-f_1^2 + af_2 - f_1f_2}\right|.$$

Za predpokladu, že pozorovaný objekt je dostatočne vzdialený, platí $a \gg f_1, f_2$, resp. $af_2 \gg f_1^2, f_1f_2$, preto

$$M \approx \frac{af_1}{af_2} = \frac{f_1}{f_2} > 1.$$

Uhlové zväčšenie Keplerovho ďalekohľadu nám vyšlo väčšie ako 1, takže ďalekohľad funguje.

Zhodou okolností nám vyšlo, že uhlové zväčšenie ďalekohľadu pri pozorovaní vzdialených objektov je

$$M \approx \frac{f_1}{f_2} = \frac{1}{Z},$$

čo je prevrátená hodnota priečneho zväčšenia. Ako je to možné? Pozrime sa na výraz pre obrazovú vzdialenosť okuláru. Za predpokladu pozorovania ďalekých objektov platí

$$a_2 = \frac{f_2\left(-f_1^2 + af_2 - f_1f_2\right)}{-f_1^2} \approx \frac{af_2^2}{-f_1^2} = -\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 a = -Z^2 a.$$

Znamienko mínus hovorí len, že obraz vzniká pred okulárom. Nás zaujímajú hlavne absolútne hodnoty. Zistili sme, že obraz je Z^2-krát bližšie, takže to dokonale sedí. Obraz je síce Z- krát zmenšený, lenže je až Z^2-krát bližšie, preto ho vidíme pod Z-násobne väčším zorným uhlom, a teda ho vidíme zväčšený.

[3] Toto platí dostatočne dobre pre vzdialené objekty, ktoré vidíme pod malým zorným uhlom, pretože pre ne platí $\tan\alpha \approx \alpha$. V opačnom prípade by sme sa museli hrať s tangensami zorného uhla.

3.4 Neostrihaná

vzorák **Krtko**, opravoval **Krtko**

3.5 Hygiena nadovšetko!

vzorák **Majo**, opravoval **Majo**

Na úvod si povedzme, že aby celá úloha bola v súlade s tým, čo z reálneho života očakávame, tak musí platiť $T_1 > T_2 > T_3$[4] a označme τ hľadaný čas, počas ktorého sa môže Marcel sprchovať. Zrekapitulujme si, čo sa v tejto úlohe deje.

Začiatok. Na začiatku máme v bojleri vodu s teplotou T_1 a objemom V a máme neobmedzene veľa vody s teplotou T_3.

Sprchovanie. Keď sa Marcel sprchuje, tak sa používa voda z bojlera, ktorá má v čase t teplotu $T(t)$. Tá sa dopĺňa vodou s teplotou T_3 a zároveň sa ohrieva s výkonom P. Voda, ktorá odtečie z bojlera sa ďalej zmieša s vodou s tepolotou T_3 tak, aby mala teplotu T_2 a odtečie.

Koniec. Na konci sa už Marcel nevie sprchovať vodou s teplotou T_2, takže v poslednom momente, kedy sa ešte mohol sprachovať musela byť v bojleri voda s teplotou T_2.

Z tohto si môžeme všimnúť niečo, čo by nám vedelo uľahčiť riešenie. Stavy na začiatku a na konci sú veľmi pekne a jednoducho popísateľné. Na druhej strane sa počas sprchovania dejú dosť šialené veci[5]. V závislosti od toho, či sa rozhodneme pustiť sa do toho, čo za fyzika sa počas sprchovania deje, sa dá prísť k jednoduchému, ale aj ku komplikovanému riešeniu.

Riešenie pomocou porovnania stavu na začiatku a na konci

Ako sme si povedali, počas sprchovania sa deje divokejšia fyzika. Preto by sme sa jej popisovaniu najradšej vyhli. Ako? Stačí si všimnúť, že nejaká fyzikálna veličina sa aj počas sprchovania správa pomerne slušne. Tou veličinou, je zmena vnútornej energie.

Máme totiž mrť vody s teplotou T_3, a tak môžeme počítať, o koľko väčšiu vnútornú energiu má všetka voda oproti tomu, keby mala všetka voda teplotu T_3. Popis toho, čo sa deje počas sprchovania bude mimoriadne jednoduchý. Bojler koná prácu a tým zvyšuje vnútornú energiu o $W(t) = Pt$.

V jednotlivých fázach sprchovania vieme rozdiel vnútornej energie poľahky vypočítať.

Začiatok. Máme iba vodu s objemom V a teplotou T_1. Tá má oproti vode s teplotou T_3 vnútornú energiu vyššiu o

$$\Delta U_z = V\rho c(T_1 - T_3)$$

Sprchovanie. Ako sme si už povedali, počas sprchovania koná bojler prácu $W(t) = Pt$. Počas celého sprchovania trvajúceho čas τ tak vykoná prácu

$$W(\tau) = P\tau$$

Koniec. Na konci máme v bojleri vodu s objemom V a teplotou T_2. Navyše nám za čas τ odtiekla voda s objemom $Q\tau$ a s teplotou T_2. Všetka voda má tak na konci vnútornú energiu oproti vode s teplotou T_3 vyššiu o

[4] Je samozrejme odporúčané rozmyslieť si, čo by sa dialo v iných prípadoch.

[5] Pochopiteľne, z fyzikálneho hľadiska.

$$\Delta U_k = V\rho c(T_2 - T_3) + Q\tau\rho c(T_2 - T_3)$$

Bojler konal prácu, ktorá sa využila na zvýšenie vnútornej energie vody, takže máme ešte vzťah:

$$\Delta U_z + W(\tau) = \Delta U_k$$

Stačí nám už len dosadiť hodnoty a vyjadriť τ:

$$V\rho c(T_1 - T_3) + P\tau = V\rho c(T_2 - T_3) + Q\tau\rho c(T_2 - T_3)$$

$$\tau(Q\rho c(T_2 - T_3) - P) = V\rho c(T_1 - T_2)$$

$$\tau = \frac{V(T_1 - T_2)}{Q(T_2 - T_3) - \frac{P}{\rho c}}$$

Tým sa nám podarilo nájsť čas sprchovania a sme hotoví. Či? Ešte by sa patrilo zamyslieť sa, či to, čo nám vyšlo, dáva fyzikálne zmysel. Mohlo by sa totiž pokaziť to, že menovateľ tohto zlomku by bol nulový alebo dokonca záporný. V tom prípade máme nerovnosť

$$P \geq Q\rho c(T_2 - T_3)$$

Ak túto nerovnosť ešte pranásobíme časom t (nemusí to byť ten istý ako τ), tak dostávame nerovnosť

$$Pt \geq Qt\rho c(T_2 - T_3)$$

Ľavá strana tejto nerovnosti zodpovedá tomu, koľko vnútornej energie dodá bojler vode za čas t. Pravá strana zas hovorí, o koľko väčšiu vnútornú energiu má voda, ktorá vytiekla za čas t, oproti vode s teplotou T_3. Každopádne to ale reprezentuje to, koľko vnútornej energie stratila voda v bojleri. Ak je teda táto nerovnosť splnená, tak bojler stíha zohrievať vodu dostatočne rýchlo, aby mala stále rovnakú teplotu alebo sa voda ešte viac zohrievala[6], a teda sa Marcel bude môcť sprchovať ľubovoľne dlho.

To by nás ale nemalo prekvapiť ani z výrazu pre τ. Pre hodnoty menovateľa blízke nule totiž dostávame ľubovoľne veľké hodnoty τ. Pre záporné hodnoty by bojler nemusel ísť na plný výkon a aj nižší výkon (taký, aby bol menovateľ nulový) zabezpečí, že sa Marcel bude môcť sprchovať ľubovoľne dlho.[7]

[6] Najneskôr tu by mala v čitateľovi začať blikať fyzikálna kontrolka. Z toho, čo sme odvodili totiž vyplýva, že by sme po istom časemohli v bojleri dostať vodu s ľubovoľne veľkou teplotou. Samozrejme tu ale tajne zanedbávame množstvo fyziky. Na jednej strane predpokladáme, že sa voda nevyparí. Na druhej strane predpokladáme, že bojler nemá tepelné straty.

[7] Celé sa to dá ešte povedať z inej strany. Výraz na pravej strane rovnosti pre τ totiž hovorí, koľko času uplynie, kým voda v bojleri dosiahne teplotu T_2. Ak výjde nejaké kladné τ, tak to hovorí, že teplota T_2 sa niekedy dosiahne. V tomto prípade tento časový úsek predstavuje to, ako dlho sa môže Marcel sprchovať. V prípade, že ale nevýjde žiadne kladné riešenie, tak voda v bojleri nikdy nedosiahne teplotu T_2, a tak sa Marcel bude môcť sprchovať ľubovoľne dlho.

Takže odpoveď na úlohu znie, že pokiaľ platí $P \geq Q\rho c(T_2 - T_3)$, tak sa Marcel môže sprchovať ľubovoľne dlho. V opačnom prípade sa môže sprchovať po dobu[8]:

$$\tau = \frac{V(T_1 - T_2)}{Q(T_2 - T_3) - \frac{P}{\rho c}}$$

Riešenie pomocou popisovania zmien teplôt pri sprchovaní

Prejdime k náročnejšiemu riešeniu, v ktorom pomocou rovníc popíšeme, čo sa deje počas sprchovania. Najprv si označme zopár veličín. Začnime tým, že si označme $T_1(t)$ teplotu vody v bojleri v čase t. Ďalej označme $Q_1(t)$ objemový prietok vody, ktorá vyteká z bojlera, a $Q_3(t)$ objemový prietok vody, s ktorou sa táto voda zmiešava. Na to, aby bol výsledný prietok Q, musí platiť tento vzťah:

$$Q = Q_1(t) + Q_3(t)$$

Na to, aby bola výsledná teplota vody T_2, musí byť zas splený tento vzťah:

$$QT_2 = Q_1(t)T_1(t) + Q_3(t)T_3$$

V týchto dvoch rovniciach máme dve neznáme, $Q_1(t)$ a $Q_3(t)$, ktoré vieme jednoducho vyjadriť ako:

$$Q_1(t) = Q\frac{T_2 - T_3}{T_1(t) - T_3}$$

$$Q_3(t) = Q\frac{T_1(t) - T_2}{T_1(t) - T_3}$$

Tieto vyjadrenia sa nateraz uložme do zásoby.

Doteraz sme sa pozerali na celý systém, zamerajme sa teraz na to, čo sa stane v bojleri. Zišlo by sa nám vedieť, ako sa mení teplota vody v ňom v závislosti od času. Uvažujme teda nejaký malý časový úsek Δt. V čase t sa v bojleri nachádza voda s teplotou $T_1(t)$ a vypúšťa sa objemovým prietokom $Q_1(t)$. Chceli by sme vedieť teplotu vody v čase $t + \Delta t$. Za časový úsek Δt odtečie voda s teplotou $T_1(t)$ a s objemom $Q_1(t)\Delta t$. Naopak pritečie voda s rovnakým objemom $Q_1(t)\Delta t$, ale s teplotou T_3. Takže voda v bojleri príde o energiu $Q_1(t)\Delta t\rho c(T_1(t) - T_3)$. Na druhej strane ju ale zohreje bojler, a tak získa energiu $P\Delta t$. Pre rozdiel tepelných energií vody v bojleri v časoch t a $t + \Delta t$ tak platí:

$$V\rho c T_1(t + \Delta t) - V\rho c T_1(t) = -Q_1(t)\Delta t\rho c(T_1(t) - T_3) + P\Delta t$$

Skôr ako s touto marhou niečo spravíme, vytiahnime ešte zo šuflíka vzťah pre $Q_1(t)$ a upravme celú rovnosť na trochu krajší tvar:

[8] Z tohto vzťahu sa navyše dá veľmi krásne popísať aj to, čo sa deje pre prípady, keď neplatí $T_1 > T_2 > T_3$.

$$V\rho c T_1(t+\Delta t) - V\rho c T_1(t) = -Q\Delta t \rho c(T_2 - T_3) + P\Delta t$$

Chceli sme vedieť, ako sa za nejaký malý časový úsek mení teplota vody v bojleri. Presne to nám povie takýto vzťah, ktorý vieme z tejto rovnice vymlátiť:

$$\frac{T_1(t+\Delta t) - T_1(t)}{\Delta t} = \frac{\frac{P}{\rho c} - Q(T_2 - T_3)}{V}$$

Tu sme dostali niečo priam úžasné. Zmena teploty v bojleri za nejaký malý časový úsek vôbec nezávisí od času, čiže je v čase konštantná. Takže teplota vody v bojleri musí klesať lineárne. To znamená, že takýto vzťah bude platiť aj pre ľubovoľne dlhý úsek. Napríklad aj ten od času $t = 0$ (začiatok) až po čas $t = \tau$ (koniec). Vtedy navyše platí $T_1(0) = T_1$ a $T_1(\tau) = T_2$. Odvodený vzťah sa nám tak upraví do tvaru:

$$\frac{T_1(\tau) - T_1(0)}{\tau - 0} = \frac{T_2 - T_1}{\tau} = \frac{\frac{P}{\rho c} - Q(T_2 - T_3)}{V}$$

Odtiaľto už poľahky vyjadríme hľadané τ:

$$\tau = \frac{V(T_1 - T_2)}{Q(T_2 - T_3) - \frac{P}{\rho c}}$$

Na záver už len spravíme diskusiu o fyzikálnom význame tohto vyjadrenia podobne ako v prvom riešení a sme hotoví.

Riešenie pomocou ťažkých kladív[9]

Osoby, ktoré sú už zmierené, že v pozícii fyzika budú často musieť narábať s integrálmi a deriváciami, si isto v predošlom riešení všimli, že keď pošleme Δt do nuly, tak výraz

$$\frac{T_1(t+\Delta t) - T_1(t)}{\Delta t} =: \frac{dT_1}{dt}$$

nie je ničím iným ako len deriváciou tepoloty vody v bojleri podľa času. Po prenásobení pôvodného vzťahu, ktorý sme dostali v druhom riešení dt tak môžeme smelo integrovať[10]:

$$dT_1 = \frac{\frac{P}{\rho c} - Q(T_2 - T_3)}{V} dt$$

[9] Čítať len na vlastné riziko!

[10] Veľmi vágne povedané je integrál súčtom cez maličké veci. Integrálom vieme teda nasčítať maličké dT_1 a dt. Keď je v nejakom čase t teplota T, tak sa nám na v našom vzťahu nasčítajú na ľavej strane teploty tak, že stúpli z teploty T_1 na teplotu T, a na pravej strane časy tak, že stúpli z času 0 na čas t. Na tomto je aj veľmi dobre vidno, prečo sa tu oplatí uprednostniť určitý integrál pred neurčitým

$$\int_{T_1}^{T} dT_1 = \frac{\frac{P}{\rho c} - Q(T_2 - T_3)}{V} \int_0^t dt$$

Keďže nás zaujímajú hodnoty v čase τ, kedy je teplota vody v bojleri T_2, tak nás v skutočnosti zaujímajú tieto integrály:

$$\int_{T_1}^{T_2} dT_1 = \frac{\frac{P}{\rho c} - Q(T_2 - T_3)}{V} \int_0^\tau dt$$

A po ich výpočte máme:

$$T_2 - T_1 = \frac{\frac{P}{\rho c} - Q(T_2 - T_3)}{V}\tau$$

$$\tau = \frac{V(T_1 - T_2)}{Q(T_2 - T_3) - \frac{P}{\rho c}}$$

Tretíkrát sme dospeli k tomu istému výsledku, tak to asi nebude náhoda.

Odpoveď

Na záver ešte zopakujme, čo je teda riešením úlohy. Pokiaľ platí $P \geq Q\rho c(T_2 - T_3)$, tak sa Marcel môže sprchovať ľubovoľne dlho. V opačnom prípade sa môže sprchovať po dobu:

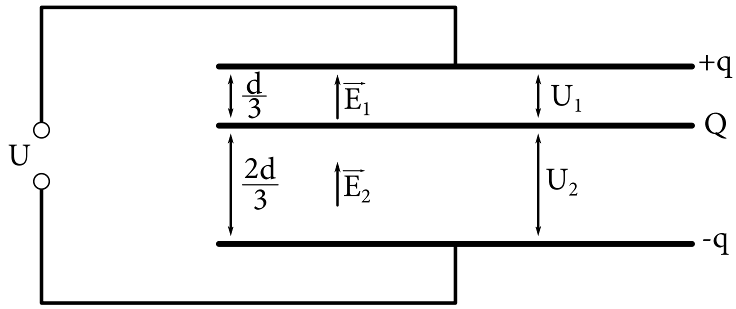
$$\tau = \frac{V(T_1 - T_2)}{Q(T_2 - T_3) - \frac{P}{\rho c}}$$

3.6 Dosková hra

vzorák **Jaro**, opravoval **Jaro**

Uvažujme vodivú dosku s plochou S nabitú nábojom Q. Takáto doska okolo seba vytvára homogénne elektrické pole veľkosti $E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$.[11] Nás bude zaujímať, aké pole vzniká vo vnútri kondenzátora. Na to využijeme princíp superpozície, a teda že výsledné pole od dosiek kondenzátora a vloženej dosky je rovné súčtu polí od jednotlivých dosiek. Zároveň si uľahčíme prácu tým, že budeme rovno riešiť podúlohu b) a riešenie podúlohy a) dostaneme zadarmo položením $U = 0$. Tak teda poďme na to!

[11] Toto je pravda pre nekonečnú rovinnú dosku, no rovnako dobre to platí aj v blízkosti dosky konečnej veľkosti do vzdialenosti dostatočne menšej než je lineárny rozmer dosky. Dá sa to ukázať napríklad použitím Gaussovho zákona alebo zintegrovaním. Ani jedno z toho nebudeme robiť, nakoľko to považujeme za známy/ľahko dohľadateľný fakt.



Obrázok 2: *Intenzity a napätia v kondenzátore*

V dôsledku prítomnosti zdroja a nabitej vodivej platne vo vnútri kondenzátora sa nabijú dosky kondenzátora. Vzhľadom na to, že obvod je uzavretý, musí byť súčet náboja na hornej a dolnej doske kondenzátora nulový. Nech je na hornej doske náboj $+q$, potom na dolnej doske musí byť náboj $-q$.

Zvoľme si za kladný smer intenzity smer nahor. Vieme, že intenzita má smer od kladného náboja k zápornému. Nech je v kondenzátore nad vloženou platňou intenzita E_1 a pod ňou intenzita E_2. Príspevok k intenzite E_1 od hornej dosky kondenzátora je $-\frac{q}{2\varepsilon_0 S}$, od vloženej platne $+\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$ a od dolnej dosky kondenzátora $-\frac{q}{2\varepsilon_0 S}$. Výsledná intenzita je teda $E_1 = \frac{Q-2q}{2\varepsilon_0 S}$. Analogicky jednotlivé príspevky k intenzite E_2 sú postupne $-\frac{q}{2\varepsilon_0 S}$, $-\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$ a $-\frac{q}{2\varepsilon_0 S}$ a výsledná intenzita je $E_2 = -\frac{Q+2q}{2\varepsilon_0 S}$.

Napätie medzi dvomi bodmi v homogénnom elektrickom poli E je $V = El$,kde l je vzdialenosť týchto dvoch bodov v smere intenzity. V našom prípade máme na začiatku medzi hornou doskou kondenzátora a vloženou platňou napätie $U_1 = E_1 \frac{d}{3} = \frac{d(Q-2q)}{6\varepsilon_0 S}$ a medzi vloženou platňou a dolnou doskou kondenzátora napätie $U_2 = E_2 \frac{2}{3} d = -\frac{d(Q+2q)}{3\varepsilon_0 S}$. Zároveň podľa druhého Kirchhoffovho zákona má platiť $U_1 + U_2 = U$. Tým pádom možno ľahko dopočítať, že $q = -\left(\frac{Q}{6} + \frac{\varepsilon_0 SU}{d}\right)$.

Keď presunieme platňu vo vnútri kondenzátora, nejaký náboj pretečie medzi doskami kondenzátora. Označme si nové náboje na doskách kondenzátora $+q'$ a $-q'$. Nové intenzity sú potom $E_1' = \frac{Q-2q'}{2\varepsilon_0 S}$ a $E_2' = -\frac{Q+2q'}{2\varepsilon_0 S}$ a nové napätia $U_1' = E_1' \frac{2}{3} d = \frac{d(Q-2q')}{3\varepsilon_0 S}$ a $U_2' = E_2' \frac{d}{3} = -\frac{d(Q+2q)}{6\varepsilon_0 S}$. Stále musí platiť druhý Kirchhoffov zákon $U_1' + U_2' = U$, teda môžeme dopočítať, že $q' = \frac{Q}{6} - \frac{\varepsilon_0 SU}{d}$.

Náboj, ktorý pri presúvaní nabitej platne pritiekol z dolnej dosky kondenzátora na hornú, je rovný rozdielu náboja po presúvaní a náboja pred presúvaním, teda $\delta q = q' - q = \frac{Q}{3}$. Výsledok nezávisí od napätia U, preto je toto výsledok oboch podúloh.

3.7 Vyliečená

vzorák **Adam**, opravoval **Adam**

Označme objem vody v nádobe $\mathcal{V}$. Objem vzduchu pred a po potiahnutí je potom $V - \mathcal{V}$, respektíve $5V - \mathcal{V}$ Potrebujeme si rozmyslieť, čo sa dialo počas Hovorcovho ťahu s vodou a vzduchom v pieste. Predpokladať, že Hovorca spakruky zvládne sprostredkovať izobarickú expanciu je trochu precenenie jeho síl, že izochorickú zas podcenenie. Na to, aby bola expanzia izotermická, by zas musela byť veľmi pomalá, čo zadanie nijak nenaznačuje. Z jednoduchých termodynamických dejov sa ako najlepší model javí adiabatická expanzia, bola by v súlade s predpokladom konečnej tepelnej vodivosti stien piestu a Hovorcovej trpezlivosti. O tlaku vzduchu po expanzii teda hovorí vzťah:

$$p\left(5V - \mathcal{V}\right)^{\kappa} = p_{atm.}\left(V - \mathcal{V}\right)^{\kappa}$$

O vode je zas kvôli jej vlastnostiam (veľká tepelná kapacita a malá stlačiteľnosť) rozumné predpokladať, že nezmení (veľmi) svoj objem ani teplotu. Zostáva zúžitkovať vzťah z Wikipédie odporučený zadaním, pričom $T = 293{,}15$ K je teplota vody pri ktorej chceme aby vrela, a $T_{atm.} = 373.15$ je teplota varu vody pri atmosferickom tlaku. Potom:

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{atm.}} = \frac{R}{\Delta H_{vap}} \ln \frac{p_{atm.}}{p}$$

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{atm.}} = \frac{\kappa R}{\Delta H_{vap}} \ln \frac{5V - \mathcal{V}}{V - \mathcal{V}}$$

$$\mathcal{V} = \frac{e^{\frac{\Delta H_{vap}}{\kappa R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{atm.}}\right)} - 5}{e^{\frac{\Delta H_{vap}}{\kappa R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{atm.}}\right)} - 1} V$$

Keďže vzduch je zväčša tvorený dvojatómovými molekulami, $\kappa \approx \frac{7}{5}$ a tabuľková hodnota merného skupenského tepla vyparovania vody je $\Delta H_{vap} = 40\,660$ J/mol, výsledok je:

$$\mathcal{V} \approx 0{,}66 \text{ ml}$$