Riešenia 2. kola letnej časti

2.1 Fúra roboty

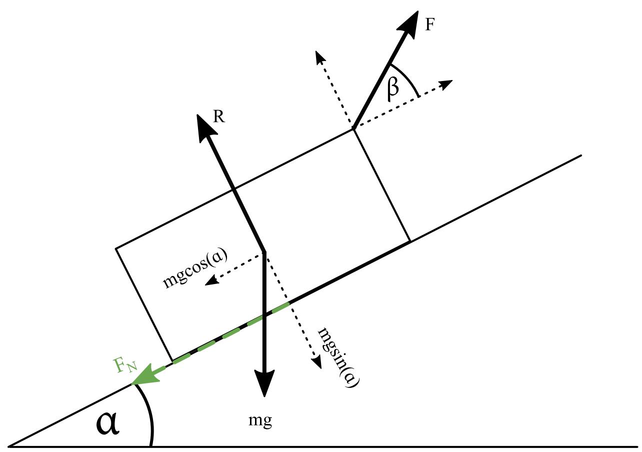
vzorák **Mary**, opravovala **Mary**

Ťahať fúrik je ľahšie.

Jednoduché vysvetlenie je také, že keď fúrik tlačíme, tak časť sily pôsobí kolmo na teleso, ktorá sa prenáša cez teleso a prispieva k tlakovej sile telesa na podložku, čím sa zvýši trecia sila, a preto musíme vyvinúť väčšiu silu a teda viac práce, aby sme teleso posunuli.

Trenie, v našom prípade dynamické, je určené dvomi veličinami: 1. nerovnosťami povrchu, skryté v koeficiente dynamického trenia f; 2. tlakovou silou medzi telesami. Keď tlačíme, tak túto tlakovú silu zvyšujeme. Naopak, ak ťaháme, tak ju znižujeme.

Prípad ťahania



Obrázok 1: *Sily, keď ťaháme*

$$F_x : F\cos(\beta) = mg\sin(\alpha) + F_N f$$

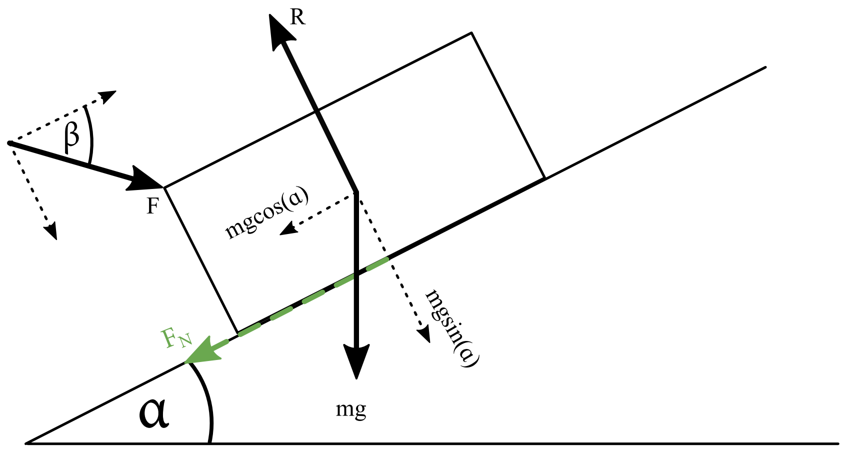
$$F_y : F\sin(\beta) = R - F_n$$

Z druhej rovnice vyjadríme silu F_N pôsobiacu kolmo na podložku. V prípade, ak by na teleso pôsobila len gravitačná sila, potom by táto sila F_N bola rovná tiaži telesa, teda kolmej zložke gravitačnej sily pôsobiacej na teleso. Avšak, ak teleso ťaháme, potom $F_N = N - Fsin(\beta)$. Dosadíme do prvej rovnice a vyjadríme silu F, ktorou teleso musíme ťahať.

$$F\cos(\beta) = mg\sin(\alpha) + f(mg\cos(\alpha) - F\sin(\beta)),$$

$$F = \frac{mg(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha))}{\cos(\beta) + f\sin(\beta)}.$$

Prípad tlačenia



Obrázok 2: *Sily, keď tlačíme*

$$F_x : F\cos(\beta) = mg\sin(\alpha) + F_N f$$

$$F_y : -F\sin(\beta) = R - F_n$$

Opäť vyjadríme z y-ovej zložky silu $F_N = F\sin(\beta) - N$, dosadíme do prvej rovnice a upravíme

$$F = \frac{mg(\sin(\alpha) + f\cos(\alpha))}{\cos(\beta) - f\sin(\beta)}.$$

Teda vidíme, že sila je v prípade tlačenia väčšia, lebo menovateľ je väčší. Preto by sme pri rovnakom posunutí s museli vykonať väčšiu prácu. Keďže Jaro si toto vedel spočítať, fúrik nahor netlačil, ale ťahal.

Komentár opravovateľa

Mary bolo ľuto dať veľa ľuďom naozaj málo bodov, lebo obdobne to nikto nemal riešené, tak k hodnoteniu pristúpila nasledujúco:

V hodnotení sa nakoniec bralo do úvahy to, či ste správne zachytili pointu ako to, že keď tlačíme, tak časť sily pôsobí do kopca, čím sa zvyšuje tiaž telesa a teda trecia sila. Na druhej strane, keď ťaháme, tá časť sily, ktorá inak tlačí do zeme, teraz už tam nie je. Tiež sa bralo ak bola zmienka o trecej sile, hoci tam nešiel plný počet bodov.

Celkové zloženie hodnotenia sa nakoniec vyformovalo takto: úvaha 5 b : všelico ste pisali, niečo bolo viac a niečo menej relevantné.

všeobecnosť 2 b : keď bola zmienka aj o iných uhloch ako len rovnobežných s kopcom (dá sa tak ťahať-tlačiť? …). Tiež snaha riešiť to všeobecne, bez konkrétnych čísel.

obrázok: 1 b

sily: 1 b

2.2 Do zlého počasia

vzorák **Marcel**, opravoval **Marcel**

Na začiatok treba priznať jednu vec, a to, že síce bolo v zadaní napísané, že voda prská rovno hore, Krtkovi na chrbát, ale pravdou samozrejme je, že voda prská (takmer) na všetky strany. Poďme sa teraz spolu pozrieť, že prečo sa niečo takéto deje.

Najprv povedzme, že prečo vlastne z kolesa fŕka voda, a že prečo proste všetka neostane na zemi. Koleso, ako sa odvaľuje po zemi sa namáča do vody, a nejaká voda na ňom ostáva. Keďže na bežnom kolese je nejaký dezén, ktorý je hrboľatý, tak v ňom sa nejaká voda zachytí. Druhý dôvod je, že guma z ktorej plášť je, nie je dokonale hladká, tak nejaká voda ostáva na plášti. (Jednoducho pneumatika nemá nezmáčavý povrch.) Odborne, ide o to, že voda sa snaží minimalizovať svoju energiu. A povrchové napätie (a teda povrchová energia) vody, pneumatiky a vzduchu je najmenšie práve vtedy, keď je voda prilepená na kolese.

Prečo by ale malo niečo od kolesa odfrkávať? Naše koleso sa točí nejakou uhlovou rýchlosťou, a rovnakou uhlovou rýchlosťou sa točí aj voda, ktorá na plášti ostane. Na vodu, rovnako ako na celé koleso pôsobí nejaká odstredivá sila, ktorá tú vodu ťahá od stredu kolesa, čo spôsobuje že voda odfŕkava z kolesa.

Ak ste niekedy videli motorku, alebo bicykel ísť po vode, tak ste si mohli všimnúť, že voda sa oddeľuje od kolesa najmä v strede behúňa, v mieste najviac vzdialenom od stredu kolesa. Prečo sa to ale deje? Keďže voda má nejaké povrchové napätie, tak to, čo urobí, keď na ňu začne pôsobiť odstredivá sila nie je, že by odfrkla ako kvapka preč, ale že začne odtekať smerom od stredu kolesa, čo sa na oblých bicyklových a motorkových pneumatikách dá veľmi dobre, keďže môže odtekať do najvzdialenejšieho bodu behúňa. Z tohoto miesta už nemá kam ďalej odtiecť, a teda keď sa jej tam nahromadí dosť na to, aby utvorila kvapku, tak odtiaľ odfrkne.

Ako ďalší dôvod, prečo voda z kolesa odfrkne by sa asi dalo uviesť to, že v momente ako sa voda dostane na koleso tak je pri zemi, a má rýchlosť voči zemi a aj voči vzduchu (ak nepredpokladáme nejaký vietor) nulovú. Postupne ako sa točí po obvode kolesa, tak získava voči vzduchu nejakú rýchlosť, a teda ju môže vzduch z povrchu kolesa sfúknuť. Nedá sa ale úplne jednoducho povedať, že ako veľký vplyv bude mať tento fakt na odfukovanie kvapiek z plášťa, lebo vrstva vzduchu tesne pri plášti bude pri relatívne hrubom bicyklovom dezéne dosť turbulentná.

Ako ste viacerí správne napísali, ak by Krtko išiel pomalšie, tak by voda odfrkávala smerom dozadu, lebo by takmer všetka mala čas odtiecť na kraj kolesa, odkiaľ by odfrkla.

Na záver ešte spomenieme jednu vec, ktorá môže spôsobiť to, že Krtko vidí, že voda odfrkáva smerom k nemu. Totiž, ak by voda odfrkávala všetkými smermi, tak by Krtko aj tak vnímal, že voda fŕka najmä smerom k nemu, lebo tie kvapky, ktoré sa hýbu priamo k nemu sa z jeho pohľadu nehýbu, len sa zväčšujú, a teda je ich vidieť oveľa lepšie, ako tie, ktoré sa hýbu kolmo.

2.3 Samoštúdium

vzorák **Jaro**, opravovala **Terka**

Začnime tým, že si uvedomíme, čo sa tu deje. Akonáhle začneme nafukovať balónik, tak začne rásť jeho objem, pričom jeho hmotnosť sa takmer nemení. To znamená, že efektívne zväčšujeme vztlakovú silu pôsobiacu na balónik, pričom tiažová sila sa nemení. V istom momente je vztlaková sila dostatočne veľká na to, aby balónik vyplával. Ak budeme pokračovať v nafukovaní, balónik sa bude viac a viac vynárať, až konečne dosiahne nami požadovaný pomer ponorenej a vynorenej časti. Pekne priamočiare, že? Tak si to poďme zrátať!

Podľa Archimedovho zákona na teleso ponorené do kvapaliny pôsobí vztlaková sila, ktorej veľkosť je rovná tiaži vytlačenej kvapaliny. Nech k-tina objemu balóna je ponorená. Potom z Archimedovho zákona dostávame

$$kV\varrho = m, \tag{1.3.1}$$

kde V je objem balónika, m je jeho hmotnosť (aj s pieskom) a ϱ je hustota vody. Odtiaľ vieme priamo vyjadriť objem balónika čisto len pomocou známych veličín a dopočítať objem vzduchu v balóniku nie je problém, takže sa zdá, že máme vyhrané. Ale je tomu tak naozaj? Nezabúdajme, že naša nádoba je síce dostatočne veľká, čo sa týka plochy, no má len obmedzenú hĺbku. Patrilo by sa teda ešte overiť, či sa do nej takto nafúknutý balónik vôbec zmestí. Na to potrebujeme zistiť, ako hlboko musí byť balónik ponorený, aby bola ponorená práve k-tina jeho objemu, resp. ako vysoko prečnieva nad hladinou.

Nech výška guľového odseku prečnievajúca nad hladinu je v. Objem vynorenej časti je zrejme $(1-k)\,V$, kde $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Zároveň tento objem vieme vyjadriť čisto len pomocou jeho výšky a polomeru gule[1]

$$(1-k)\,V = \pi v^2 \left(r - \frac{v}{3}\right). \tag{1.3.2}$$

Dosadiac príslušný výraz za V sa vieme po drobných úpravých dopracovať k nasledovnej rovnici:

$$k = 1 - \frac{3}{4}\left(\frac{v}{r}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{v}{r}\right)^3. \tag{1.3.3}$$

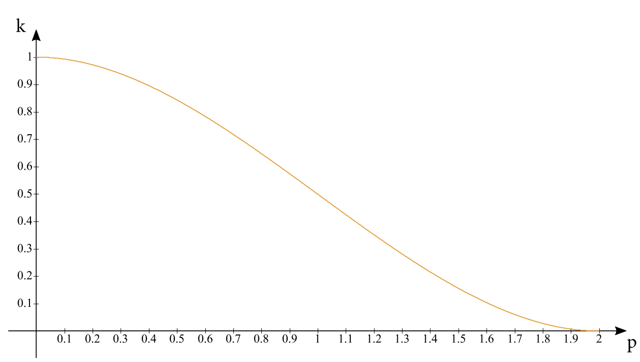
Jedinou neznámou v tejto rovnici je v, ktoré sa práve snažíme zistiť. Nanešťastie ide o kubickú rovnicu, ktorú nevieme jednoducho vyriešiť. Preto to trochu obídeme. Zaveďme si parameter

$$p = \frac{v}{r}, \tag{1.3.4}$$

ktorý vyjadruje pomer medzi výškou balónika nad hladinou a jeho polomerom. Potom možno uvedenú rovnicu prepísať na:

$$k = 1 - \frac{3}{4}p^2 + \frac{1}{4}p^3. \tag{1.3.5}$$

Táto rovnica dáva do súvisu parameter k s parametrom p, takže ich môžeme medzi sebou kedykoľvek zamieňať. Odteraz budeme teda k považovať za funkciu parametra p a budeme to zapisovať $k\,(p)$.



Obrázok 3: *Závislosť parametrov k a p*

[1] Je to objem guľového odseku, na ktorého výpočet existuje vzorček, ktorý ak nevieme, nájdeme si ho v tabuľkách.

Vráťme sa späť k Archimedovmu zákonu. Vyjadrime si z neho polomer balónika

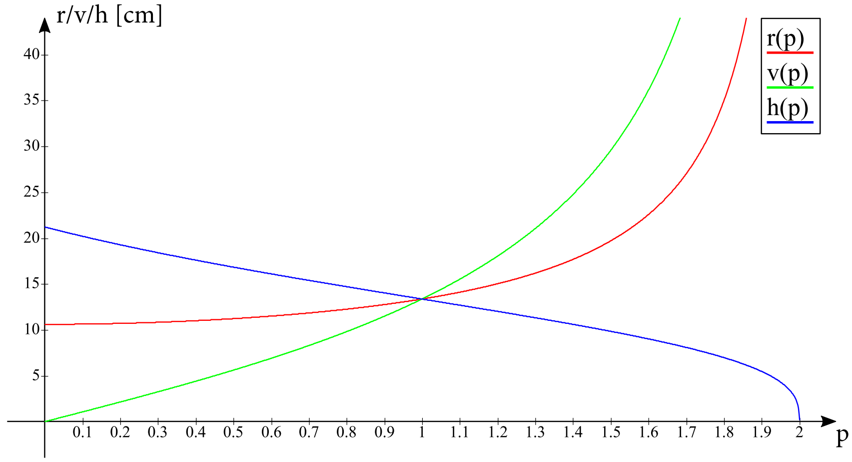
$$r(p) = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\varrho k(p)}}. \tag{1.3.6}$$

Výška guľového odseku nad hladinou je potom z definície

$$v(p) = pr(p) = p\sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\varrho k(p)}} \tag{1.3.7}$$

a hĺbka, do ktorej siaha balónik je

$$h(p) = 2r(p) - v(p) = (2-p)\,r(p) = (2-p)\sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\varrho k(p)}}. \tag{1.3.8}$$



Obrázok 4: *Polomer balónika, ponor a prečnievanie nad hladinu od p*

Teraz už máme všetko potrebné na to, aby sme vedeli túto úlohu vyriešiť. Začnime časťou a). Nad hladinou má vytŕčať $\frac{1}{4}$ balónika. To znamená, že $k = 0{,}75$. Zistíme, aká hodnota parametra p tomu zodpovedá. Keďže to nevieme urobiť analyticky, urobíme to numericky. Vykreslíme si závislosť $k(p)$ a z grafu odčítame príslušnú hodnotu. Zisťujeme, že $p \approx 0{,}6527$. Teraz už vieme dopočítať príslušnú hĺbku ponoru podľa Rovnica 1.3.8 $h \approx 15{,}7303$ cm, čo je menej než hĺbka vody v nádobe, takže všetko je v poriadku. Nič nám teda nebráni v tom, dopočítať objem vzduchu v balóniku, ktorý je rovný samotnému objemu balóniku zmenšenému o objem piesku, čiže

$$V_a = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{m}{\rho}, \tag{1.3.9}$$

kde $r \approx 11{,}6754$ cm je polomer balónika vypočítaný podľa Rovnica 1.3.6 a ρ je hustota piesku. Konečne dostávame $V_a \approx 3{,}809$ l.

Presuňme sa na časť b). Tu budeme postupovať úplne rovnako. Nad hladinou má teraz pretŕčať $\frac{1}{5}$ objemu, teda $k = 0{,}8$. Numericky nájdeme, že tomu zodpovedá hodnota parametra $p \approx 0{,}5743$. Hĺbka ponoru je potom $h \approx 16{,}2915$ cm. A tu narážame na problém. Hĺbka vody v nádobe je predsa len 16 cm! Čo to presne znamená?

Vráťme sa v našich úvahách úplne na začiatok. Tam sme hovorili, že balónik nafukujeme, až v istom momente vypláva, a potom pokračujeme v nafukovaní, až vytŕča požadovaná časť balónika. Tento predpoklad teraz ale zjavne nie je splnený, a teda balónik musí pretŕčať o požadovanú časť objemu ešte pred tým, než sa odlepí odo dna. To nám paradoxne uľahší prácu, pretože Rovnica 1.3.5 musí byť splnená stále a my predsa vieme, že ponorených je presne $h = 16$ cm balónika. Z definície totiž $v = pr$ a zároveň $h + v = 2r$, teda balónik treba nafúknuť na polomer $r = \frac{h}{2-p} \approx 11{,}2226$ cm. Tomu zodpovedá podľa Rovnica 1.3.9 objem vzduchu $V_a \approx 3{,}064$ l.

2.4 Roztopašná zábavka

vzorák **Marcel**, opravoval **Marcel**

Je zhruba jasné, že čo, a ako máme v tejto úlohe merať. Zdôraznime si ale niektoré veci, ktoré by nám mohli nepríjemne ovplyniť presnosť merania.

My sme meranie realizovali tak, že sme ohrievali vodu s ľadom v hrnci na sklokeramickej varnej platni. A z toho by mohla vzniknúť prvá chyba merania, ktorú sa nám ale podarilo odstrániť (táto chyba sa týka aj indukčných platní). Táto platňa má nastaviteľné úrovne výkonu/teploty (v stupňoch od 0 po 9). Prvá chyba, ktorej sme sa mohli dopustiť by bola, že budeme dávať hrniec s ľadom na platňu tak, že bude rozohriata na rôzne teploty. Tento problém sme odstránili tým, že sme pri každom meraní zapli platňu na stupeň 8, a počkali, kým prvý krát prestane hriať (už dosiahla teplotu, na ktorú sa mala ohrievať, a teda vypla ohrev, zapne ho, až keď klesne teplota pod nejakú hodnotu). Tí z Vás, ktorí ste ohrievali vodu s ľadom na plynovom sporáku, ste toto nemuseli riešiť.

Druhá, súvisiaca chyba mohla nastať tak, že hrniec, v ktorom ste to ohrievali mal rôznu počiatočnú teplotu v priebehu meraní. My sme tento nedostatok odstránili tak, že sme pred všetkými meraniami hrniec ochladili na teplotu vody, (ktorej teplota na začiatku bola 13 °C počas meraní nekolísala o viac ako 1 °C).

Rovnako ako hrniec a platňa, tak aj voda, ktorú sme ohrievali musela mať v priebehu meraní rovnakú teplotu, a toto sme vyriešili jednoducho tak, že sme pred každým meraním merali teplotu vody, aby bola rovnaká.

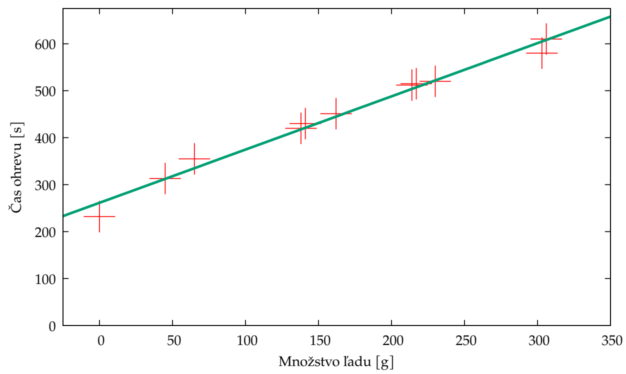
Super, po tomto všetkom máme rovnaké vstupné podmienky pre každé meranie.

Čo sa týka ľadu, ktorý sme topili, tak sme množstvo ľadu vážili, z toho dôvodu, že v ľade celkom rady ostávajú bublinky vzduchu, ktoré zväčšujú objem ľadu.

Tabuľka nameraných hodnôt (asi ju netreba komentovať):

Množstvo ľadu [g]	Čas ohrevu [s]
0 g	232 s
45 g	313 s
65 g	355 s
138 g	420 s
141 g	430 s
162 g	451 s
214 g	512 s
217 g	515 s
230 g	520 s
303 g	580 s
306 g	610 s

A graf z týchto nameraných hodnôt:



Obrázok 5: *Graf závislosti času ohrievania od hmotnosti ľadu.*

Čo sme mali ďalej urobiť je, pokúsiť sa odhadnúť skupenské teplo topenia ľadu.

Vyhodnotenie nameraných dát

Teplo, ktoré musí byť dodané našej zmesi ľadu s vodou je rovné teplu, ktoré musí byť dodané na ohriatie tejto zmesi na teplotu 80 °C, plus teplu, ktoré je treba na roztopenie toho množstva ľadu a teplu, ktoré je potrebné na ohriatie hrnca. Zapísané do rovnice to vyzerá asi takto:

$$Q = c_{vody}m_{vody}\Delta t_{vody} + c_{vody}m_{ľadu}\Delta t_{vody\,z\,ľadu} + c_{ľadu}m_{ľadu}\Delta t_{ľadu} + l_{ľadu}m_{ľadu} + c_{hrnca}m_{hrnca}\Delta t_{hrnca}$$

Keďže na začiatku máme hrniec aj s vodou ustálený na rovnakú teplotu, tak vieme túto rovnicu zjednodušiť:

$$Q = \Delta t_{vody}\left(c_{vody}m_{vody} + c_{hrnca}m_{hrnca}\right) + m_{adu}\left(c_{vody}\Delta t_{vody\,z\,ľadu} + c_{ľadu}\Delta t_{ľadu} + l_{ľadu}\right)$$

Nás ale viac ako teplo, zaujíma čas, ktorý nám bude trvať toto teplo dodať. Ak teda rovnicu predelíme výkonom variča, tak dostaneme:

$$t_{ohrevu} = \Delta t_{vody}\frac{c_{vody}m_{vody} + c_{hrnca}m_{hrnca}}{P} + m_{ľadu}\frac{c_{vody}\Delta t_{vody\,z\,ľadu} + c_{ľadu}\Delta t_{ľadu} + l_{ľadu}}{P}$$

Z tohoto vidíme, že keďže prvý člen pravej strany rovnice sa nemení, a druhý člen rastie priamo úmerne s množstvom ľadu, tak aj čas by mal rásť priamo úmerne s množstvom ľadu, čo sa zhoduje s tým, čo sme namerali.

Skúsme teda nejako vyjadriť čas. Zo šikovne urobeného prvého merania času, ktorý sa zohrieva voda bez ľadu vieme určiť prvý člen, a ostanú nám už iba druhý. Bohužiaľ, ako vidíme z toho, ako tento člen vyzerá, ani ak by sme zanedbali teplo potrebné na ohriatie ľadu, tak z toho nevieme zistiť nič lepšie ako skupenské teplo topenia ľadu predelené výkonom variča.

Jediná možnosť je teda nejako zistiť výkon variča. Zo štítku na varnej platni vieme zistiť jej príkon, ale bohužiaľ nevieme zistiť straty pri ohreve.

Druhá možnosť, ako by sa dal zistiť výkon variča je, že zanedbáme teplo potrebné na ohrev hrnca, a teplo potrebné na ohrev ľadu na teplotu 0 °C, a zistíme si tepelnú kapacitu vody a z prvého merania si vypočítame výkon variča

Po dosadení nám teda vyjde výkon variča ako:

$$P = \frac{\Delta t_{vody} c_{vody} m_{vody}}{t_{ohrevu}} = \frac{\Delta(80 - 13) \cdot 4200 \cdot 0{,}5}{232} = 606\ \mathrm{W}$$

Teraz teda môžeme pri všetkých meraniach vypočítať skupenské teplo topenia ľadu:

Množstvo ľadu [g]	Čas ohrevu [s]	Skupenské teplo [J/kg]
45 g	313 s	334 909 J/kg
65 g	355 s	334 853 J/kg
138 g	420 s	335 174 J/kg
141 g	430 s	335 149 J/kg
162 g	451 s	335 180 J/kg
214 g	512 s	335 207 J/kg
217 g	515 s	335 209 J/kg
230 g	520 s	335 241 J/kg
303 g	580 s	335 304 J/kg
306 g	610 s	335 251 J/kg

Priemerná hodnota skupenského tepla topenia ľadu je teda 335 148 J/kg, čo v porovnaní s tabuľkovou hodnotou 334 000 J/kg je celkom presný výsledok.

Lepšie vyhodnotenie nameraných dát

Celkom veľkým problémom takéhoto vyhodnocovania nameraných dát je to, že sme všetky merania vyhodnocovali na základe prvého merania bez ľadu. Tento problém sa dá vyriešiť, ak si všimneme, že členy v tejto rovnici:

$$t_{ohrevu} = \Delta t_{vody} \frac{c_{vody} m_{vody} + c_{hrnca} m_{hrnca}}{P} + m_{ľadu} \frac{c_{vody} \Delta t_{vody\,z\,ľadu} + c_{ľadu} \Delta t_{ľadu} + l_{ľadu}}{P}$$

vieme rozdeliť na tie, ktoré závisia od $m_{ľadu}$, a tie ktoré nie. Ak sa nad tým zamyslíme, tak si môžeme uvedomiť, že sa to celkom nápadne podobá na rovnicu priamky, kde

$$a = \Delta t_{vody} \frac{c_{vody} m_{vody} + c_{hrnca} m_{hrnca}}{P}$$

$$b = \frac{c_{vody} \Delta t_{vody\,z\,ľadu} + c_{ľadu} \Delta t_{ľadu} + l_{ľadu}}{P}$$

Ak sa teraz dopustíme toho, že rovnako ako pred tým zanedbáme teplo potrebné na ohrev hrnca a teplo potrebné na ohrev ľadu, tak pri použití hodnôt, ktoré sme použili ako parametre rovnice priamky, ktorou sme fitovali náš graf ($b = 261{,}309$, $a = 1{,}133\,22$), dostaneme, že:

$$\frac{c_{vody}}{P} = 7{,}8$$

$$\frac{l_{ľadu}}{P} = 706{,}51$$

Následne môžeme použiť tabuľkovú hodnotu hmotnostnej tepelnej kapacity vody $c = 4200$ JK/kg, z čoho vieme zistiť výkon variča ako $P = 538$ W, a skupenské teplo topenia ľadu ako $l_{ľadu} = 380\,760$ J/kg.

Tento postup, má oproti riešeniu predtým tú výhodu, že nie sú všetky výsledky závislé od jedného merania.

Chyby merania

Čo sa týka presnosti merania, tak meranie teploty bolo realizované teplotnou sondou pripojenou na multimeter, so vzorkovaním 1 °C, v rozsahu 0 – 400 °C presnosťou 1 %, hmotnosť bola zisťovaná kuchynskou váhou s prenosťou a vzorkovaním 1 g.

Samotné merania boli teda robené dostatočne presne. Čo ale robené presne nebolo bolo to, že sme zanedbávali niektoré veci, ako napríklad teplo potrebné na ohrev hrnca, alebo ohrev ľadu na 0 °C.

Dôvodom, prečo sme to mohli urobiť je to, že teplo, potrebné na ohriatie hrnca a ľadu je oproti teplu potrebnému na ohriatie vody výrazne nižšie a ľad potrebujeme ohriať iba o pár stupňov, na rozdiel od vody.

Samozrejme, na výsledkoch merania sa to prejaví tak, že teplo na ohriatie hrnca započítame do tepla na ohriatie vody, a teda nám vyjde menší výkon varnej platne.

Teplo potrebné na ohriatie ľadu tiež zanedbávame, a to sa zarátava do tepla potrebného na roztopenie ľadu, takže nám toto teplo vyjde väčšie.

2.5 Prísavka

vzorák **Jaro**, opravoval **Jaro**

V prvom rade si predstavte takú tú klasickú prísavku na stenu, na ktorú si možno aj vy vešiate uteráky. Máte? Tak teraz sa spoločne zamyslime, ako taká prísavka vlastne funguje. Ak sa nám to podarí, máme spolovice vyhrané.

Ako sa taká prísavka používa? Vyhliadneme si hladkú plochu – napríklad obkladačku, nadýchame na prísavku, a potom ju celou silou pritlačíme k vyhliadnutému povrchu – až tak, že z dutiny prísavky vytlačíme (takmer) všetok vzduch a prísavka sa tak dotýka obkladačky (takmer) celým svojím povrchom.

Prečo to robíme? Pointa spočíva v tom, že keď prísavku dobre pritlačíme, vytlačíme z jej dutiny väčšinu vzduchu. Keď ju potom uvoľníme, v dutine zostane tlak $p \ll p_a$. Na vonkajšej strane prísavky je však stále tlak p_a, takže na prísavku pôsobí výsledná tlaková sila

$$F_p = (p_a - p)\, S \approx p_a S,$$

ktorá ju pritláča ku stene.

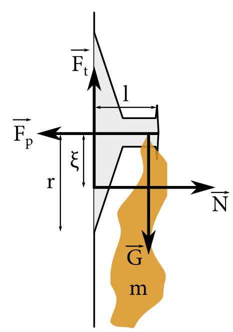
Prísavka však nevyzerá, že by smerom k stene zrýchľovala. To preto, že aj stena pôsobí na prísavku rovnako veľkou silou opačného smeru. Poznamenajme, že toto silové pôsobenie nie je rovnomerné na celej ploche prísavky, ale spojite sa mení, pričom väčšia sila pôsobí na jej spodnú časť. Nás však presné rozloženie plošných síl nemusí zaujímať a nahradíme ich jedinou výslednou silou N, ktorej pôsobisko je niekde pod stredom prísavky. Tento poznatok sa nám hodí neskôr.

A akáže to sila zabraňuje prísavke v spadnutí? Dobre hádate – je ňou trenie! Prísavka tlačí na stenu normálovou silou veľkosti F_p, takže jej spadnutiu zabraňuje trecia sila, pre ktorú platí

$$F_t \leq fF_p.$$

Aby nám prísavka nezrýchľovala ani vo zvislom smere, musí byť presne rovná sile, ktorá prísavku ťahá k Zemi, a síce tiaži uteráku alebo čohokoľvek, čo ste si na ňu zavesili,[2] teda

$$F_t = mg.$$



Obrázok 6: *Sily pôsobiace na prísavku*

Teraz je to už jednoduchá úloha zo statiky. Aby bola prísavka v pokoji, musí byť výslednica síl pôsobiacich na prísavku nulová. V horizontálnom smere máme

$$F_p = N \implies N = p_a S,$$

čo nám neprezrádza nič, čo by bolo pre nás zaujímavé. Z rovnováhy síl vo vertikálnom smere sa však dozvedáme, že trecia sila je rovná tiaži závažia, a keď uvážime, že trecia sila je zhora ohraničená, dostávame podmienku

$$mg \leq fF_p \implies m \leq \frac{fp_a S}{g}.$$

Tým sme vyriešili sily. Nezabúdajme však, že na to, aby bolo teleso v rovnováhe, musíme uspokojiť ešte momenty síl. Vyberme si bod, vzhľadom na ktorý budeme momenty počítať. Ten môže byť úplne ľubovoľný, no nezabúdajme, že ak si raz jeden zvolíme, už ho nemôžeme zmeniť.

Zvoľme si napríklad stred plochy, ktorou sa prísavka dotýka o stenu. V takom prípade je moment tlakovej sily, ktorá pritláča prísavku o stenu, ako aj moment trecej sily, nulový. Vďaka tejto šikovnej voľbe nám zostávajú poriešiť ešte momenty dvoch síl – tiaže závažia a normálovej sily od steny.

[2] Predpokladáme, že hmotnosť prísavky je voči závažiu zanedbateľná.

Vieme, že prísavka pretŕča od steny do vzdialenosti l. Môžeme predpokladať, že zhruba v tejto vzdialenosti je zavesený uterák, či iné závažie, preto veľkosť momentu tiaže je

$$M_G = mgl.$$

Poďme teraz na moment normálovej sily od steny. Už skôr sme prediskutovali, že sila od steny nie je rovnomerne rozložená na celej ploche prísavky, ale jej výslednica je mierne posunutá nadol. Teraz už vidíme prečo. Ak by vychýlená nebola, jej moment by bol nulový a nič by nezabraňovalo tomu, aby závažie prísavkou otáčalo, ako sa mu zachce. Ak by bola vychýlená nahor, tak by jej moment mal rovnaký smer ako tiaž, a teda by k otáčaniu ešte prispievala. Jediným riešením teda naozaj je, že výslednica normálovej sily od steny je posunutá nadol.[3] Nech je teda posunutá od jej stredu nadol o ξ. Potom veľkosť momentu normálovej sily od steny je

$$M_N = N\xi.$$

Z rovnováhy momentov síl dostávame

$$mgl = N\xi.$$

Uvážme, že moment tiaže závažia je priamo úmerný hmotnosti závažia m, a teda nie je de facto nijako obmedzený. Na druhej strane moment sily od steny je zhora ohraničený rozmermi prísavky. Normálová sila je totiž striktne rovná tlakovej sile, ktorou je prísavka pritláčaná, teda $N = p_a S$, čo je nemenná hodnota, a jej rameno je zhora ohraničené polomerom prísavky

$$\xi \leq r.$$

Keď si to dáme dokopy, dostaneme podmienku

$$mgl \leq p_a S r \implies m \leq \frac{p_a S r}{gl}.$$

Poďme si to zosumarizovať. Ak uvažujeme prísavku kruhového tvaru, pre ktorú $S = \pi r^2$, tak pre nosnosť prísavky sme našli dvojicu podmienok

$$\begin{aligned} m &\leq \frac{\pi f r^2 p_a}{g}; \\ m &\leq \frac{\pi r^3 p_a}{gl}. \end{aligned}$$

Teoretická maximálna nosnosť prísavky je teda

$$m_{\max} = \frac{\pi r^2 p_a}{g} \cdot \min\left\{f, \frac{r}{l}\right\}.$$

Skúsme si to vyčísliť: nech $r \approx l \approx 2$ cm, $p_a \approx 10^5$ Pa, $g \approx 10$ m/s^2 a $f \approx 0{,}5$ – potom $m_{\max} \approx 6$ kg.

###Komentár k riešeniam

[3] Poznamenajme, že toto nie je účelové rozhodnutie steny, ktorá si len tak z roztopaše povie – hej uterák, ty by si rád prísavku otočil, ale ja ti v tom zabránim, lebo môžem. V skutočnosti presné rozloženie síl vyplýva z toho, ako je prísavka namáhaná, a tam, kde prísavka viac tlačí na stenu, aj stena viac tlačí na prísavku.

Úloha bola pomerne jednoduchá a mnohí z vás sa aj dopracovali k správnemu výsledku. Napriek tomu zvyčajne nemáte plný počet bodov. Rozhodol som sa totiž úlohu hodnotiť prísne a body som strhával, ak sa vo vašej argumentácii objavila nejaká chyba alebo ak nebolo odargumentované niečo, čo podľa môjho názoru odargumentované byť malo. Veď ako sa hovorí – dokonalosť sa dosahuje detailami, ale dokonalosť nie je detail. Týmto chválim Štefana Slavkovského, ktorý ako jediný uspokojil moje náročné očakávania.

Poďme si postupne prejsť najčastejšie chyby:

- Väčšina ste správne identifikovali, že prísavka sa môže buď zošuchnúť alebo odlepiť. Niektorí však pozabudli na druhú možnosť a vyšetrovali tak len roovnováhu síl a na momenty pozabudli.

- Pri vyšetrovaní prvej možnosti robilo najväčší problém trenie. Niektorí ste uvádzali, že prísavka sa nezošuchne, pokiaľ je trecia sila väčšia než tiaž závažia. Po chvíľke zamyslenia by vám malo byť jasné, že je to nezmysel, pretože v takom prípade by výsledná sila pôsobiaca na prísavku vo vertikálnom smere bola nenulová, a teda trecia sila by mala urýchľovať prísavku nahor. Trecia sila musí byť samozrejme rovná tiaži zaveseného telesa, a tá nerovnosť pochádza z podmienky, že trecia sila je menšia, nanajvýš rovná súčinu normálovej sily a súčiniteľa statického trenia.

- Častou chybou bolo, že ste uvádzali, že na prísavku pôsobia tri sily, pričom ste zabúdali na normálovú silu od steny. V takom prípade ste nemali dosiahnutú rovnováhu síl v horizontálnom smere, čo napríklad znamená, že vám tlaková sila vzduchu urýchľuje prísavku cez stenu. Okrem toho to malo neskôr pri vyšetrovaní momentov síl ďalekosiahle dôsledky.

- Ak ste aj na normálovú silu od steny nezabudli, zakresľovali ste ju do stredu prísavky. Potom, keď ste robili bilanciu momentov, tak ste ju vynechali. Keby ste ju však započítali, tak by mala mať presne rovnako veľký moment ako tlaková sila vzduchu, len opačného smeru, takže vo výsledku by sa mali vyrušiť a nemal by tam byť žiaden moment, ktorý by kompenzoval moment tiaže závažia.

- Mnohí ste uvádzali, že moment tiaže závažia má byť menší ako moment tlakovej sily vzduchu, prípadne že sa tieto momenty majú v hraničnom prípade rovnať. To je v princípe správne, no body som strhával za to, že nebolo odargumentované, prečo do výpočtu neberieme moment normálovej sily od steny. Ak povieme, že moment tiaže má byť menší ako moment tlakovej sily, znamená to, že momenty nie sú v rovnováhe? Potom by sa mala predsa prísavka začať otáčať smerom do steny. Ak povieme, že v hraničnom prípade sú momenty v rovnováhe, tak čo potom, keď zavesíme na prísavku ľahšie závažie? Vtedy sa nám pokazí rovnováha a začne sa prísavka otáčať do steny? Nie. Vtip je v tom, že vy, čo ste toto napísali, ste zvyčajne celý čas ignorovali normálovú silu od steny. Keby ste ju uvažovali, tak vám to nie len porieši rovnováhu síl v horizontálnom smere, ale zároveň aj zabezpečí, že momenty budú vždy v rovnováhe (pokiaľ prísavka neodkväcne) a všetko bude v súlade s kostolným (ehm, Newtonovým) poriadkom. Ale prečo ste potom dostali správny výsledok aj napriek tomu, že ste ignorovali takú dôležitú silu. Nuž, keď na prísavku zavesíme nejaké závažie, pôsobisko normálovej sily od steny sa posunie pod stred prísavky. Čím ťažšie závažie zavesíme, tým nižšie sa toto pôsobisko posunie. V hraničnom prípade, ktorý nás zaujíma, sa pôsobisko normálovej sily posunie až na spodný okraj prísavky, a teda v tomto prípade je jej moment nulový, lebo má rameno nulovej dĺžky. A práve za absenciu takéhoto zdôvodnenia som strhával body, v inak správnych riešeniach, asi najčastejšie.

2.6 Reálna fyzika

vzorák **Dušan**, opravoval **Dušan**

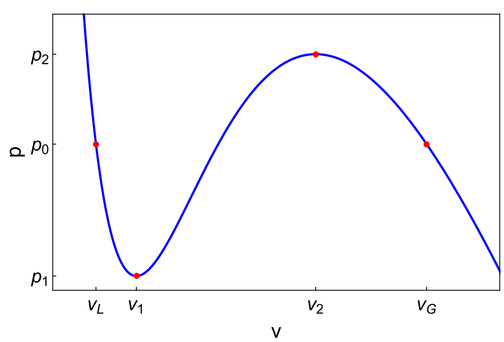
Na začiatok sa asi patrí zdôrazniť, že v celom vzoráku budeme študovať metastabilitu a fázové prechody spôsobené zmenou tlaku. V škole ste sa asi stretli s tými, ktoré sú spôsobené zmenou teploty. V tomto prípade však bude naozaj názornejšie študovať izotermické procesy. Na výsledku to nič nezmení.

Rovnica, ktorú sme uviedli v zadaní sa nazýva van der Waalsova stavová rovnica a popisuje vzťah medzi stavovými veličinami v neideálnom plyne. Rozdiely oproti stavovej rovnici ideálneho plynu sú dva. Ako prvé to je parameter b, ktorý označuje minimálny objem molekúl, na ktorý ich možno stlačiť. A ďalej to je parameter a, ktorý zohľadňuje korekciu k tlaku spôsobenú interakciou medzi molekulami. Vzhľadom na obe tieto korekcie možno aspoň kvalitatívne popísať van der Waalsovou stavovou rovnicou okrem plynu aj kvapaliny v blízkosti fázového rozhrania kvapalina - plyn. To v tejto úlohe aj patrične využijeme.

Začnime teda tým, že zavedieme objem jedného molu častíc $v = \frac{V}{n}$. Potom prejde van der Waalsova stavová rovnica do tvaru

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2},$$

v ktorom sa nám bude lepšie hovoriť o termodynamických fázach. Veď n predsa nepoznáme a fáza je aj tak určená stavovými veličinami p, v, a T. Načrtnime si teraz závislosť tlaku tekutiny od objemu, pre hodnoty stavových veličín blízko fázového prechodu.



Obrázok 7: *Závislosť tlaku tekutiny od objemu podľa van der Waalsovej stavovej rovnice blízko fázového rozhrania*

Graf si žiada pomerne podrobné vysvetlenie. Krivka na prvý pohľad ukazuje ako sa budú pri izotermickom deji, napríklad kompresii, správať zvyšné stavové veličiny. Je zjavné, že pri tlakoch menších ako p_1 bude mať tekutina veľký objem, takže bude v plynnej fáze. Naopak pri tlakoch väčších ako p_2 sa bude realizovať kvapalná fáza. Pre tlaky medzi p_1 a p_2 van der Waalsova stavova rovnica hovorí, že tekutina môže mať tri objemy. Čudné, že? Pravdou je, že v tomto intervale tlakov sú stabilné dve fázy, kvapalná aj plynná. Pre objemy menšie ako v_1 je to kvapalná fáza a pre objemy väčšie ako v_2 zas plynná fáza. Oblasť medzi týmito objemami, kde je krivka $p(v)$ rastúca, je nefyzikálna. Predstavte si, že v nejakej oblasti tekutiny vznikne fluktuácia s vyššou hustotou častíc, a teda v lokálne klesne. To by znamenalo, že klesne tlak, čo povedie k ďalšiemu rastu hustoty v tejto oblasti, pretože naokolo je tlak tekutiny vyšší. Podobne fluktuácie s nižšou hustotou ako priemerná sa budú ďalej vyprázdňovať. Takýto systém sa teda spontánne rozpadne na zmes hustých a riedkych oblastí. Odborne sa tomu hovorí spinodálna dekompozícia.

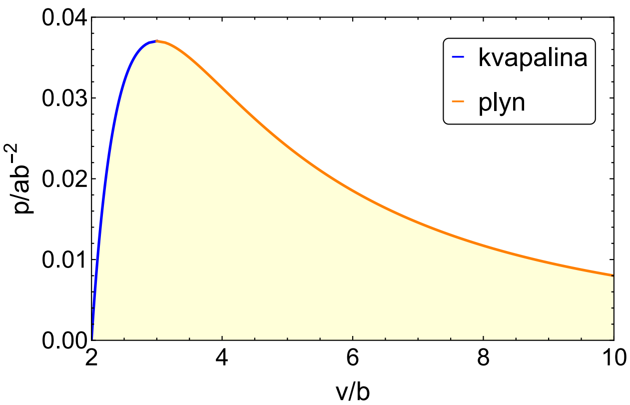
Vráťme sa ale späť k otázke fázového prechodu. Kedy teda nastáva? Odpoveďou je, že pri dostatočne nízkej teplote, pre ktorú sme načrtli závislosť tlaku od objemu, kdekoľvek v intervale tlakov $\langle p_1, p_2 \rangle$. A prečo sa potom štandardne kreslia vo fázových diagramoch ostré rozhrania medzi fázami? To je preto, že do fázových diagramov sa zakresľujú oblasti, v ktorých sú fázy globálne stabilné, to znamená s najmenšou (voľnou) energiou. Tomu sa tu však nebudeme venovať, nám stačí vedieť, že takýto fázový prechod medzi stavmi v termodynamickej rovnováhe by nastal na našom grafe pri tlaku p_0. Vtedy má kvapalná a plynná fáza rovnakú energiu a tekutina môže pri tlaku p_0 nadobúdať objem kdekoľvek medzi v_L a v_G.

Keď to teda zhrnieme, kvapalná fáza je globálne stabilná pri tlakoch väčších ako p_0 a plynná fáza je globálne stabilná pri tlakoch menších ako p_0. Čo sa teda deje na tých zvyšných intervaloch, kde sú fázy stabilné? Ako už asi tušíte, tam sú iba lokálne stabilné, alebo teda metastabilné. To znamená, že tieto fázy môžu existovať, ale prežijú iba malé fluktuácie v hustote, respektíve energii. Akákoľvek väčšia fluktuácia spôsobí fázový prechod do globálne stabilnej fázy. Kvapalnej fáze medzi tlakmi p_1 a p_0 sa hovorí prehriata kvapalina a naopak plynnej fáze medzi tlakmi p_0 a p_2 sa hovorí podchladený plyn.

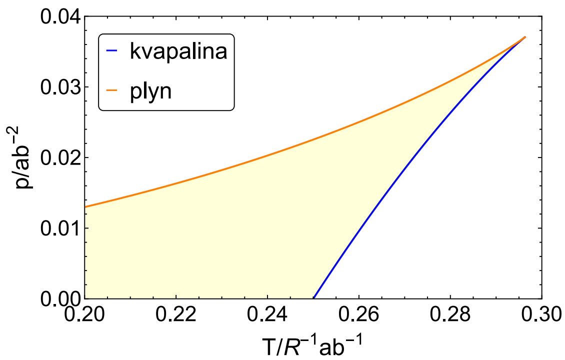
No dobre, a čo ak je teplota veľmi vysoká? Vtedy bude krivka $p(v)$ monotónne klesať. Tam bude pre daný tlak existovať iba jeden prípustný objem a teda iba jedna fáza a žiadne fázové rozhranie. A to je presne to, čo by sme mali aj čakať. Pri teplotách a tlakoch vyšších ako sú tie kritického bodu sa plynná a kvapalná fáza nedajú rozlíšiť, a systém sa nachádza vo fáze superkritickej tekutiny.

V tomto momente by sme už mali rozumieť tomu, čo hovorí van der Waalsova stavova rovnica o fázových prechodoch a metastabilite. Zostáva nám tie oblasti/hranice metastability už iba nájsť. Presnejšie, pre hranicu metastability kvapalnej a plynnej fázy musíme postupne určiť body $[p_1, v_1]$ a $[p_2, v_2]$ pri rôznych teplotách. To už je práca pre cvičené opice. Zafixujeme T a začneme binárne vyhľadávať objem v, pre ktorý tlak p dosahuje lokálne extrémy. Tí šikovnejší na to použijú počítač, a tí ešte šikovnejší funkciu $p(v)$ zderivujú položia rovnú nule a vyriešia kubickú rovnicu.

Keďže som ten najšikovnejší, ja som si to zderivoval a kubickú rovnicu za mňa vyriešil počítač. Výsledky sú zakreslené okrem p–v diagramu aj v štandardnom p–T diagrame. Keďže hodnoty a a b sa môžu meniť a my ich nepoznáme, patrí sa na osi grafov vynášať hodnoty stavových veličín ako násobky prirodzených hodnôt systému, t.j. tlaku $\frac{a}{b^2}$, objemu b, a teploty $\frac{1}{R}\frac{a}{b}$. Modrou farbou je v grafoch vyznačená hranica metastability kvapalnej fázy, oranžovou je hranica metastability plynnej fázy, a žltou farbou je vyznačená celá oblasť, v ktorej može byť tekutina podľa van der Waalsovej stavovej rovnice metastabilná. Termodynamické fázové rozhranie tam samozrejme zakreslené nie je, keďže to z van der Waalsovej stavovej rovnice nevieme zistiť.



Obrázok 8: *Oblasť metastability vo fázovom p–V diagrame*



Obrázok 9: *Oblasť metastability vo fázovom p–T diagrame*

Na záver upozorníme ešte na dve veci. Hodnoty stavových veličín v kritickom bode sa dajú zistiť z van der Waalsovej stavovej rovnice presne. Vyjde $p_c = \frac{1}{27}\frac{a}{b^2}$, $T_c = \frac{8}{27}\frac{a}{Rb}$. V skutočnosti pri nízkych teplotách a vysokých tlakoch nebude kvapalina metastabilná. V tejto oblasti van der Waalsova stavová rovnica neplatí a na termodynamický popis systémov treba použiť úplne iné teórie, keďže sa tu zväčša realizuje pevná fáza hmoty.

2.7 Satelitné sledovanie

vzorák **Maťo G.**, opravoval **Maťo G.**

Predtým, ako sa pustíme do riešenia, si skúsme napísať v bodoch ako rozumieme úlohe:

1. Protóny budú vyletovať zo Slnka do všetkých smerov rovnako, a teda ich počet na jednotku plochy bude klesať so štvorcom vzdialenosti. (Podobne ako svetelné lúče.)
2. Zrážky sú nepružné, preto sa *energia nezachováva*. Dokonca, protóny sa kvôli nepružnosti „nalepujú na satelit“, čím sa hmotnosť satelitu zvyšuje.[4] Na zistenie toho, ako sa bude satelit urýchľovať nám pomôže zákon zachovania hybnosti, ktorý platí aj pri neelastických zrážkach.
3. Hmotnosť jedného protónu je omnoho menšia ako hmotnosť satelitu. Toto je dôležité v tom, že nám to môže zjednodušiť inak škaredé výrazy.
4. Tým, že na satelit budú dopadať protóny, budú ho urýchlovať smerom od Slnka. Ako sa bude od Slnka vzďaľovať, počet dopadajúcich protónov sa bude zmenšovať. To bude zase meniť jeho urýchlovanie, čo bude meniť jeho vzdialenosť… Mohli by sme pokračovať donekonečna. Ako sa dá takáto vec zrátať? Jednou možnosťou je to nasimulovať v počítači (na to musíme však poznať presné číselné údaje, čo nevieme) alebo, našťastie, matematika prináša aparát, ktorý je vytvorený na riešenie takýchto problémov – *diferenciálne rovnice*. Nakoniec teda môžeme čakať, že budeme musieť spočítať nejakú diferenciálnu rovnicu.

Toľko ku prvotným insightom, teraz hor sa do riešenia!

Začnime tým, že sa pozrieme na zrážky. Ak po k-tom náraze bude mať satelit rýchlosť u_k, jeho celková hmotnosť bude $M + km$ a pre $(k+1)$-ty náraz platí zákon zachovania hybnosti

$$(M + km)u_k + mv = (M + (k+1)\,m)\,u_{k+1}$$

[4] Tu by sme sa však mali pozastaviť: Je takýto predpoklad reálny? Ako vieme, protóny nie sú nabité a teoreticky by mohli byť držané na satelite iba vďaka pôsobeniu iných interakcii (konkrétne pomocou strong interaction). Tá však jednak pôsobí na krátke vzdialenosti v jadrách atómov a naviac pridávanie daľších neutrónov do jadier väčšinou spôsobuje nestabilitu jadier. Preto by sme prakticky mohli predokladať, že každé jadro „unesie“ len zopár ďalších protónov – alebo že hmotnosť pridaných protónov je oveľa menšia ako hmotnosť satelitu.

Ak vyjadríme u_{k+1} a následne odpočítame z oboch strán u_k, aby sme získali zmenu rýchlosti; po premasírovaní výrazov dostaneme:

$$u_{k+1} - u_k = \frac{m}{M + (k+1)m} \cdot (v - u_k)$$

Všimnime si teraz čo nám táto rovnica hovorí. V prvom rade v menovateli máme $M + (k+1)m$, čo je celková hmotnosť satelitu po $(k+1)$-om náraze (teda aj so všetkými nalepenými protónmi). Keďže ale hmotnosť protónu je veľmi malá, je vlastne jedno, či budeme používať hmotnosť *po* alebo *pred* nárazom tohto jedného protónu. Preto môžeme výraz v menovateli interpretovať ako hmotnosť pri k-tom náraze M_k

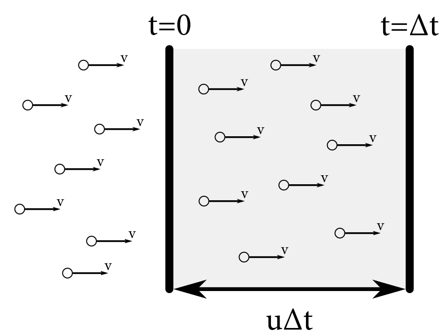
$$u_{k+1} - u_k \approx \frac{m}{M_k} \cdot (v - u_k)$$

Ďalej v druhej časti výrazu vidíme $(v - u_k)$, čo je relatívna rýchlosť satelitu a protónov. Totiž, čím rýchlejšie sa bude satelit pohybovať, tým slabší efekt budú mať jednotlivé nárazy. Prvú časť máme za sebou – vieme, čo sa stane pri jednej zrážke.

Koľko protónov narazí do satelitu každú sekundu, ak sa nachádza vo vzdialenosti r? Protóny len tak nezanikajú, a teda platí štandardný argument[5]: počet protónov, čo dopadne na plochu S vo vzdialenosti r je úmerný pomeru plochy S a sféry s polomerom r. Matematicky zapísané:

$$N = \frac{S}{4\pi r^2} n$$

Toto by však platilo len pre stacionárny satelit – pre unikajúci je v skutočnosti počet narazených protónov menší! Predstavte si to takto: kebyže sa satelit hýbe tak rýchlo ako protóny, žiadne na ňu reálne nedopadnú, satelit ide predsa „s prúdom“. Ak chceme naozaj spočítať narazený počet protónov za čas Δt, od počtu $N\Delta t$ musíme odpočítať počet protónov vo vyšrafovanej ploche na obrázku, lebo im satelit uletel a oni ho nestihli dobehnúť.



Obrázok 10: *Obrázok protónov*

Keďže dĺžka plochy je $u\Delta t$, protóny potrebujú čas $\frac{u\Delta t}{v}$ na jej prejdenie, a teda od predošlého počtu musíme tieto protóny odpočítať; t.j. odpočítať $N\frac{u\Delta t}{v}$. Počas krátkeho časového úseku Δt ich takto narazí $N\Delta t(1 - u/v)$. Preto zrýchlenie satelitu bude:

$$a(t) = \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} = (N\Delta t(1 - u/v))\frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta t}$$

[5] Podobne sa dá argumentovať aj dôvod, prečo intenzita svetla, elektrické a aj gravitačné pole klesajú ako $1/r^2$, ak predpokladáme, že tieto polia nezanikajú. Na wikipédii to nájdete ako *Inverse square law*.

Po dosadení za pravú stranu dostaneme rovnicu:

$$u'(t) = \frac{N(r)m}{M(t)v}(v - u(t))^2$$

kde $M(t) = \int_0^t N(r)m\,\mathrm{d}t$ a zároveň $N(r) = \frac{Sn}{4\pi r^2}$. Toto je veľmi komplikovaná diferenciálna rovnica, ktorá zrejme nemá pekné analytické riešenie. Čo môžeme spraviť je zjednodušiť ju nejakými aproximáciami. Jednou z nich je, že môžeme predpokladať, že hmotnosť satelitu sa veľmi nebude meniť v čase. Je totiž nepravdepodobné, že by jeho hmotnosť výrazne narástla. Druhou approximáciou bude, že jeho vzdialenosť od Slnka sa veľmi nezmení (t.j., satelit je tak ďaleko od Slnka, že zmena polohy bude zanedbateľná voči jeho počiatočnej vzdialenosti od Slnka). Preto aproximujeme $N(r)$ tak, že za r dosadíme iba jeho *počiatočnú* polohu. Takto sa nám písmenká N, M zmenia na konštanty a mi dostávame sympatickejšiu diferenciálnu rovnicu:

$$u'(t) = \frac{Nm}{Mv}(v - u(t))^2$$

Takáto rovnica sa dá riešiť celkom jednoducho. Rozpíšeme $u'(t) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ a separujeme premenné:

$$\frac{\mathrm{d}u}{(v-u)^2} = \frac{Nm}{Mv}\mathrm{d}t$$

a zintegrujeme obe strany. Integračné limity nastavíme tak, že začínajú od $t = 0$ a $u = 0$, lebo na počiatku sa satelit nehýbe. [6]

$$\int_0^u \frac{\mathrm{d}u}{(v-u)^2} = \frac{Nm}{Mv}\int_0^t \mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{v-u} - \frac{1}{v} = \frac{Nm}{Mv}t$$

Nakoniec dostaneme:

$$u(t) = v\frac{Nmt}{Nmt + M}$$

kde $N = \frac{Sn}{4\pi r_0^2}$.

Komentár ku riešeniam: Viacerí ste sa snažili zarátať aj gravitačné pole Slnka, čo vôbec nie je zlý krok, no výsledok bol, že diferenciálnu rovnicu vám to len skomplikovalo ešte viac – tak, že záchranou bolo iba numerické riešenie. V našom vzoráku sme ju nespomenuli, lebo aj tak neskôr zanedbávame zmenu vzdialenosti od Slnka, čím by bol jej efekt presne vyrušený odstredivou silou. Ak by sme spravili iné zanedbanie – kebyže zanedbáme rýchlosť rakety voči rýchlosti protónov a zmenu polohy tam necháme, gravitačná sila by bola nezanedbateľnou časťou rovnice. Pri hodnotení vašich riešení sme najmä dbali na správnosť fyziky pri nárazoch protónov a taktiež na konzistentnosti zanedbaní. Táto úloha bola naozaj veľmi ťažká a každému, kto sa ju aj pokúsil riešiť patrí gratulácia.

[6] Ak sa vám toto zdá veľmi náhodné, dá sa to riešiť aj neurčitým integrálom, pridaním integračnej konštanty, ktorej hodnotu by sme zistili úplne nakonci z podmienky $u(0) = 0$.