Riešenia 2. série letnej časti

2.1 Bulvárna potopa

vzorák **Jaro**, opravoval **Jimi**

Peťo si prednedávnom vo svojom obľúbenom bulvárnom denníku prečítal vetu: „Vedci predpovedajú, že topenie obrovských ľadových krýh plávajúcich na vode v dôsledku globálneho otepľovania zdvihne hladinu svetového oceánu o jeden meter.“ Vysvetlite za pomoci vašich znalostí z fyziky, ako presne sa zdvihne hladina svetového oceánu pri roztopení ľadových krýh plávajúcich na vode.

Predstavme si ľadovú kryhu o objeme V plávajúcu na hladine oceánu. Keďže nevykazuje žiadne zrýchlenie, musia sa všetky na ňu pôsobiace sily navzájom kompenzovať. Zrejme jedinými relevantnými silami pôsobiacimi vo vertikálnom smere sú tiažová sila $F_G = V\varrho_l g$ pôsobiaca nadol a Archimedova vztlaková sila $F_{vz} = V'\varrho_v g$ pôsobiaca nahor, kde V' je objem ponorenej časti kryhy. Z rovnosti síl dostávame podmienku

$$V\varrho_l = V'\varrho_v.$$

Teraz si predstavme, že kryhu z vody vytiahneme. Na základe uvedenej rovnosti dostaneme, že vo vode zostane diera[1] s objemom zodpovedajúcim ponorenej časti kryhy $V' = \frac{\varrho_l}{\varrho_v}V$.

Zamyslime sa nad tým, aký objem vody vznikne roztopením ľadu s objemom V_l. Ľahko nahliadneme, že to, čo sa musí pri roztápaní zachovať, je hmotnosť. Z rovnosti hmotnosti ľadu pred roztopením a vzniknutej vody dostaneme

$$V_l\varrho_l = V_v\varrho_v,$$

čo je ale úplne identická rovnica, akú sme dostali aj pre rovnosť síl.[2] To znamená, že voda vzniknutá roztopením ľadu práve zaplní „dieru“, ktorá po ľade vznikla, a teda hladina vody sa vôbec nezdvihne.

Vo všetkých doterajších úvahách sme však ticho predpokladali, že hustota morskej vody je blízka hustote sladkej vody, a teda to, že sme ich nerozlišovali, nijako neovplyvní výsledok. No je to naozaj oprávnený predpoklad? To vieme jednoducho overiť. Všetky naše výpočty boli správne, akurát musíme rozlišovať hustotu sladkej ϱ_{sv} a morskej ϱ_{mv} vody. V rovnici pre rovnováhu síl použijeme hustotu morskej vody, keďže kryha pláva v oceáne a v rovnici pre zachovanie hmotnosti použijeme hustotu sladkej vody, pretože predpokladáme, že ľad neobsahuje žiadne soli, a preto sa roztopí na sladkú vodu. Máme teda rovnice $V\varrho_l = V'\varrho_{mv}$ a $V_l\varrho_l = V_v\varrho_{sv}$. Zaujíma nás rozdiel medzi objemom vzniknutej vody roztopením ľadu a objemom „diery“. Triviálny výpočet dáva[3]

$$\Delta V = V_v - V' = \frac{\varrho_l}{\varrho_{sv}}V_l - \frac{\varrho_l}{\varrho_{mv}}V = \varrho_l V_l\frac{\varrho_{mv} - \varrho_{sv}}{\varrho_{mv}\varrho_{sv}}.$$

Ak chceme vypočítať zdvihnutie hladiny oceánov, tak to ešte podelíme plochou oceánov, čiže $\Delta h = \frac{\Delta V}{S}$. Teraz už len zoberieme tabuľky alebo otvoríme prehliadač a vyhľadáme potrebné konštanty. Ak uvážime plochu oceánov 361 miliónov km^2 a objem morského ľadu na Zemi 620 tisíc km^3, tak dostaneme $\Delta h \approx 3{,}84$ cm.

Znamená to ale, že vedci nevedia fyziku? Vôbec nie. To len bulvár prekrúca skutočnosť, aby si zvýšil čítanosť, alebo len nemá cit pre detail. Napríklad pôvodný výrok mohol znieť, že v dôsledku roztápania ľadovcov sa

[1] Teda zostala by, keby ju okolitá voda hneď nezaliala.

[2] To však nie je žiadnym prekvapením, pretože práve toto je obsahom Archimedovho zákona: „Teleso ponorené do kvapaliny je nadľahčované vztlakovou silou, ktorej veľkosť sa rovná ***tiaži vytlačenej kvapaliny***.“

[3] Položíme $V = V_l$, čo predstavuje objem morských ľadovcov na Zemi.

zdvihne hladina svetového oceánu o meter. Tu sa nikde nespomínajú ľadové kryhy plávajúce na vode. A preto mravné poučenie na záver – neverte všetkému, čo čítate v novinách.

Toto je všetko, čo ste mali urobiť. Môžeme sa však ešte pokúsiť overiť, či jeden meter je realistický odhad, ak by sme brali do úvahy všetky ľadovce, nie len ľadové kryhy. Z podmienky pre rovnosť hmotností dostávame, že roztopením ľadu vznikne voda s objemom $V_v = \frac{\varrho_l}{\varrho_v} V_l$. Pre zdvihnutie hladiny dostávame vzťah

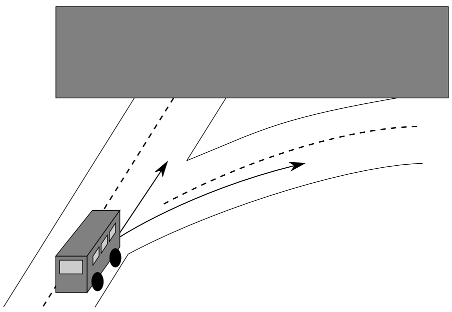
$$h < \frac{V_v}{S} = \frac{\varrho_l V_l}{\varrho_v S},$$

kde S je plocha oceánov na Zemi.[4] Z geografie vieme, že je to približne 361 miliónov km^2. Po chvíli googlenia[5] zistíme, koľkožeto je vlastne na Zemi ľadu[6]. V takom prípade dostaneme horný odhad $h \lessapprox 75\,\mathrm{m}$. Ak by sme chceli dolný odhad, tak môžeme zobrať za S plochu celej Zeme, t.j. 510 miliónov km^2.[7] V takomto prípade dostaneme dolný odhad $h \gtrapprox 52\,\mathrm{m}$. Vidíme, že tieto hodnoty sú ďaleko vyššie než v tlači uvedený jeden meter. V skutočnosti ten jeden meter je predpoveď extrémneho modelu do roku 2100.

2.2 V núdzi zaboč doprava

vzorák **Jaro**, opravovala **Denda**

Filip cestuje autobusom domov do rodného Kubína, keď tu zrazu z ničoho nič sa pred autobusom kolmo na smer cesty objaví obrovský dlhý betónový múr[8]. Čo má Filip ako znalec mechaniky autobusárovi poradiť, aby mali čo najväčšiu šancu na prežitie (t.j. pôsobilo na nich čo najmenšie preťaženie)? Je výhodnejšie nechať autobus smerovať kolmo na stenu múru a začať brzdiť, alebo naopak stočiť autobus tak, aby tesne lízol múr?



Obrázok 1: *Autobus*

Čo to zase od nás chcú? Vraj zrátať nejaké preťaženie. Ale čo to preťaženie vlastne je? V skutočnosti to nie je žiadna veda. V jednoduchosti možno povedať, že preťaženie, v anglickej terminológii označované aj ako *g-force*, je zrýchlenie, ktoré na objekt pôsobí, vyjadrené v násobkoch tiažového zrýchlenia g.[9] Dohodnime sa, že ho budeme označovať α a vypočítame ho podľa vzťahu $\alpha = \frac{a}{g}$. Tak napríklad preťaženie voľne položeného telesa na Zemi je $\alpha = 1\,g$. Teraz to možno vyzerá, že si sami protirečíme, keď sme povedali, že je to zrýchlenie. Veď voľne položené teleso očividne nezrýchľuje. Lenže treba si uvedomiť, že na teleso skutočne pôsobí tiažová sila a v pohybe mu bráni len sila od podložky. Z toho dôvodu by možno bola výhodnejšia definícia preťaženia $\alpha = \frac{F}{mg}$. Nulové preťaženie má teda teleso v beztiažovom stave alebo aj teleso padajúce voľným pádom bez

[4] Znak nerovnosti je tam preto, lebo uvažujeme, že sa plocha oceánov nezmení. Pravdou však je, že sme na guli a jej povrch je úmerný štvorcu polomeru, a navyše dôjde k zaplaveniu časti pevniny.

[5] napríklad tu: http://www.johnstonsarchive.net/environment/waterworld.html

[6] Stačí brať len pevninský ľad, keďže ľad plávajúci na oceáne nespôsobí významné zdvihnutie hladiny oceánov, ako sme už skôr ukázali.

[7] Aj keď je asi ťažko uveriteľné, že by voda rovnomerne zaplavila celú Zem, aj napríklad taký Mount Everest.

[8] Čo vám povieme, autobusár je degeš.

[9] Presnejšie povedané, preťaženie je to, čo cítime, keď zrýchľujeme (resp. to, čo by teleso cítilo, keby mohlo).

odporu vzduchu.[10] Zrejme má zmysel uvažovať aj o smere, v ktorom pôsobí. Nás bude zaujímať len dodatočné preťaženie vplyvom jazdy v autobuse a preťaženie 1 g od tiažovej sily nebudeme uvažovať.[11]

Nech sa autobus pohyboval rýchlosťou v_0. V zadaní sa píše, že sa pred autobusom zrazu zjavil múr. Povedzme, že šofér zareagoval, keď bol múr vo vzdialenosti d. Máme prešetriť dve možnosti:

1. autobus pokračuje rovno a brzdí;
2. šofér strhne volant a autobus sa múru vyhne.

Chceme zistiť, v ktorom prípade pôsobí na autobus menšia sila (t.j. menšie zrýchlenie).

V prvom prípade je rozumné predpokladať, že zrýchlenie je konštantné a autobus zastal tesne pred múrom[12] Tým pádom vyšetrujeme rovnomerne spomalený pohyb. Napíšme si kinematické rovnice, ktoré ho popisujú:

$$d = v_0 t - \frac{1}{2} a_1 t^2 \quad \text{a} \quad v = v_0 - a_1 t.$$

Vylúčením času a položením $v = 0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$[13] dostávame $a_1 = \frac{v_0^2}{2d}$, a teda preťaženie je

$$\alpha_1 = \frac{v_0^2}{2dg}.$$

V druhom prípade je najvýhodnejšie, ak sa autobus pohybuje po kružnicovom oblúku, kedy sa jedná o konštantné dostredivé zrýchlenie. Ak by sme zvolili inú trajektóriu, tak na kompenzáciu rovnejších častí by niekde musel byť úsek s ostrejšou zákrutou, v ktorej, nakoľko zrýchlenie nepriamo úmerne závisí od polomeru krivosti[14], by pasažieri, a teda aj Filip, boli vystavení väčšiemu preťaženiu. Tak isto by malo byť zrejmé, že ak by sme chceli meniť aj rýchlosť, preťaženie by sme iba zbytočne zvýšili a my chceme nájsť spôsob, pri ktorom bude na Filipa pôsobiť čo najmenšie preťaženie.

Aby sa úspešne vyhol múru, musí opísať celú štvrťkružnicu. To znamená, že polomer krivosti jeho trajektórie je práve d. Počas prejazdu sa veľkosť rýchlosti nemení, no mení sa jej smer. Na autobus musí pôsobiť dostredivé zrýchlenie veľkosti $a_2 = \frac{v_0^2}{d}$, aby sa pohyboval po uvedenej trajektórii, preto v tomto prípade dosahuje preťaženie hodnotu

$$\alpha_2 = \frac{v_0^2}{dg}.$$

Porovnaním vypočítaných preťažení zisťujeme, že je bezpečnejšie pokračovať v smere jazdy a začať brzdiť, keďže

$$\alpha_2 = 2\alpha_1.$$

Prečo je to tak? Vráťme sa k výpočtu a poďme počítať čas. Nakoľko už poznáme základné vzorčeky, jednoduchými úpravami zistíme, že v prvom prípade zastavil za $t_z = \frac{2d}{v_0}$. V druhom prípade už vieme, že prešiel štvrťkružnicu dĺžky $s = \frac{2\pi d}{4}$ konštantnou rýchlosťou v_0. Nakoľko svoju rýchlosť nemenil, môžeme použiť

[10] Vyplýva to z ekvivalencie vzťažných sústav. Ak by sme boli zatvorení v padajúcom výťahu, tak by sme zrýchľovali rovnako ako výťah, a teda by sme nepôsobili na podlahu výťahu, čiže je to ekvivalentné tomu, keby sme boli v beztiažovom stave. A teraz si predstavme, že naše telo je ten výťah. Ak padáme voľným pádom, tak naše orgány padajú rovnako a nepôsobia na steny nášho tela, čiže preťaženie v takom prípade je nulové. Ak však stojíme pevne na Zemi, tak naše orgány tlačia práve tiažovou silou, preto je preťaženie $\alpha = 1\,g$.

[11] Keďže je rovnaké v oboch prípadoch.

[12] Filip je živý a zdravý, takže k zrážke nedošlo, no a čím dlhšia je brzdná dráha, tým je menšie zrýchlenie.

[13] Pretože autobus má na dráhe d zastaviť.

[14] Z tohto dôvodu tiež chceme, aby autobus šiel po kružnici, na ktorej tesne lízne stenu.

vzťah: $t = \frac{s}{v_0} = \frac{\pi d}{2v_0}$. A keďže $\frac{\pi}{2} < 2$, je zrejmé, že vybočenie zobralo pasažierom menej času ako ubrzdenie, čo však z hľadiska preťaženia až tak pozitívne nie je. Za tento čas autobusár nielenže eliminoval svoju rýchlosť v smere na múr,[15] ale aj zrýchlil na rýchlosť, ktorou smeroval na múr v smere rovnobežnom s múrom!

Zamyslime sa ešte nad tým, či na tom ale vôbec záleží z praktického hľadiska. Principiálne nie je možné pri jazde autobusom dosiahnuť väčšie zrýchlenie než $a = fg$, kde f je koeficient statického trenia medzi kolesami a vozovkou,[16] a teda maximálne možné preťaženie, ktoré možno zažiť v autobuse je $\alpha = f$. Koeficient statického trenia medzi asfaltom a gumou dosahuje hodnoty okolo 0,5, takže pri jazde nie sme vystavení väčšiemu preťaženiu než 0,5 g. Takéto preťaženie však neublíži ani vajíčkam, z ktorých si chce Filip pripraviť na večeru omeletu. Zdravý človek by mal zniesť bez ujmy preťaženie až do 10 g.[17] Skutočný význam teda nemá porovnávať preťaženia, keďže tie principiálne nemôžu byť vysoké, ale dráhy, na ktorých sme schopní vykonať brzdný alebo vyhýbací manéver pri maximálnom možnom absolútnom zrýchlení, no a v tomto ohľade je ďaleko efektívnejšie zvoliť brzdenie, keďže potrebná brzdná dráha je polovičná v porovnaní s polomerom zakrivenia pri snahe vyhnúť sa múru.

2.3 Pretekári plní energie

vzorák **MaťoB**, opravoval **MaťoB**

Po novej strašne výhodne postavenej diaľnici sa pretekajú Mišo a Dušan. Uháňajú v dvoch autách rýchlosťou 100 km/h. Zrazu si Dušan povie „tak už dosť“ a zvýši rýchlosť na 200 km/h. Akú zmenu kinetickej energie Dušanovho auta pri tom pozoruje Mišo, a akú pozoruje Kubo stojaci na zemi ťukajúc si na čelo? Kto z nich pozoruje skutočnú zmenu kinetickej energie a prečo? Koľko energie (benzínu) minulo skutočne Dušanove auto pri zrýchlení?

Nebudeme chodiť dlho okolo horúcej kaše a rovno si spočítajme, akú zmenu kinetickej energie pozoruje Mišo a akú Kubo. Rýchlosť 100 km/h si pracovne označme v.

Mišo vidí, že trabant zrýchlil z 0 na v. Kubo pre zmenu videl, že Dušanovo auto zrýchlilo z v na $2v$. Zmena kinetickej energie je v Mišovej sústave $\Delta E_{\text{Mišo}} = \frac{1}{2}mv^2$ v Kubovej sústave je to $\Delta E_{\text{Kubo}} = \frac{3}{2}mv^2$. Hmm… dostávame dva rôzne výsledky. Zároveň je jasné, že Dušanovo auto nemohlo minúť rôzne množstvo benzínu, podľa toho, kto sa na auto pozerá. V aute ubudlo nejaké jednoznačne určené množstvo benzínu. Zdravý rozum naznačuje, že by množstvo spáleného benzínu malo byť úmerné zmene kinetickej energie, ktorú pozoroval Kubo. Prečo je to tak? Na to si o chvíľu odpovieme :).

V sústavej spojenej s Kubom, Zem stále voči Kubovi stojí, keďže je nohami pevne na Zemi, Mišovo auto nemení svoju rýchlosť a jediné čo zmení svoju rýchlosť je Dušanovo auto. Celková zmena energie sústavy je teda $\frac{3}{2}mv^2$. Čo ak by sa však na celú situáciu pozeral aj Maťo voľne sa vznášajúc v éterickom priestore okolo Zeme? Uvidí nejaký rozdiel?

Áno! Niečo nám tu totiž uniká. Ak má Dušanovo auto spolu s Mišovým autom a Kubom pevne stojacim na Zemi byť naozaj uzavretou sústavou, tak sa musí zachovávať nie len energia, ale aj **hybnosť** (keďže na sústavu nepôsobia žiadne vonkajšie sily).[18]

Ak teda Dušanovo auto zrýchli, tak musí aj udeliť nejakú hybnosť samotnej Zemi s hmotnosťou M. Kubo tento efekt neuvidí, keďže on je nohami pevne spojený so Zemou, takže nevie zaznamenať rýchlosť Zeme voči nemu (tá je z definície jeho sústavy vždy nula). Ak by však situáciu pozoroval aj spomínaný Maťo v éterickom priestore okolo Zeme, tak by uvidel, že aj Zem získa nejakú rýchlosť v_{zem}. Platí totiž (z Maťovho pohľadu)

[15] Z čoho samého by už malo byť zrejmé, že sa viac oplatí 1. možnosť a navyše ani nespomaľoval v tomto smere rovnomerne.

[16] Pretože za zrýchlenie vďačíme trecím silám s vozovkou a pri snahe dosiahnuť absolútne vyššie zrýchlenie by zákonite došlo k šmyku.

[17] Takémuto preťaženiu sú bežne vystavení napríklad akrobatickí piloti.

[18] Vplyv gravitácie od Slnka, iných planét a ďalšie efekty môžeme teraz v úvahe pokojne ignorovať. K rovnakému paradoxu by sme sa dopracovali vo vesmíre neobsahujúce nič len Miša, Dušana a Kuba. Napriek tomu, že by tento vesmír bol značne chudobný :)

jednoduchý zákon zachovania hybnosti:

$$\underbrace{0}_{\text{poč. hybnosť Zeme}} + \underbrace{mv}_{\text{poč. hybnosť Dušanovho auta}} = \underbrace{Mv_{\text{zem}}}_{\text{hybnosť Zeme}} + \underbrace{m2v}_{\text{kon. hybnosť Dušanovho auta}},$$

$$v_{\text{zem}} = -\frac{m}{M}v.$$

Celková zmena energie sústavy (z pohľadu Maťa udržujúceho si nadhľad) je rovná (pre $m << M$):

$$\Delta E = \frac{1}{2}m(2v)^2 + \frac{1}{2}M\left(-\frac{m}{M}v\right)^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}v^2 \approx \frac{3}{2}mv^2,$$

čo je rovnaká zmena energie, akú uvidí aj Kubo.

Pozrime sa na celú situáciu ešte raz v Mišovej sústave a tentoraz nezabudnime, že z pohľadu Miša uteká pod jeho kolesami aj Zem rýchlosťou $-v$. V Mišovej sústave je na začiatku Dušanovo auto v pokoji, potom zrýchli na rýchlosť v. V Mišovej sústave musí taktiež platiť zákon zachovania hybnosti.

$$-Mv = -Mv' + mv,$$

kde v' je rychlosť ktorou uháňa zem vzhľadom na Miša po Dušanovom zrychlení.

Celková zmena energie je teda

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}M\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 v^2 - \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{3}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}v^2.$$

Dostali sme teda rovnaký výsledok, aký vidí aj Maťo. V prípade veeeľmi ťažkej Zeme oproti autu ($m \ll M$) sa opäť zredukuje na $\frac{3}{2}mv^2$. Vidíme teda, že napriek tomu, že Zem je veľmi ťažká a v takomto obrovskom vesmíre by mala iba naozaj zanedbateľné energie voči trabantu, tak vie pekne zamiešať karty. Všimnite si totiž, že v predchádzajúcej rovnici pri umocnení zátvorky vznikne člen, kde sa vykrátia M. Tento člen zároveň spôsobuje, že už nevzniká paradox medzi rôznymi sústavami.

Poučenie do budúcnosti teda je, že v rôznych sústavách môžeme namerať rôzne kinetické energie, musíme si však ale dať pozor na interpretáciu výsledkov. A ak narábame s veličinami ako množstvo spáleného benzínu, tak si treba dobre rozmyslieť, či mi náhodou nejaká energia v mojich rovniciach neuniká… Napríklad, ako v tomto prípade, kinetická energia samotnej Zeme.

2.4 Bublinkový mikroskop

vzorák **Pľyš**, opravoval **Pľyš**

Určte závislosť zmenšenia (zväčšenia) obrazu predmetu ležiaceho na dne misky pri zvislom pohľade naň cez (pol-)bublinu plávajúcu na vode (alebo slabom mydlovom roztoku) od polomeru bubliny a pokúste sa vysvetliť, prečo vlastne k zmenšeniu dochádza.

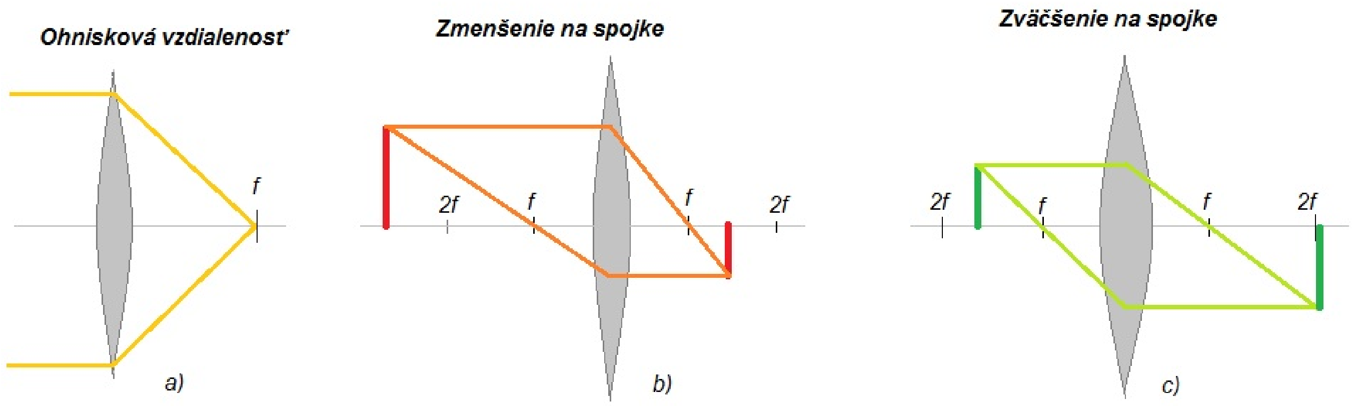
Teória

Všetci ste určite prišli na to, že v tejto úlohe ide o šošovky. Poznáme dva základné druhy šošoviek – spojky a rozptylky. *Spojky* majú jednu alebo obe strany vypuklé, teda konvexné, a rozptylky ich majú presne naopak „priehlbinové“, čiže konkávne. Keď si predstavíme tvar bubliny na vode, je hneď jasné, že nás budú zaujímať práve tie konvexné.

To, aký obrázok vidíme (zväčšený, zmenšený, nezmenený), úzko súvisí s *ohniskovou vzdialenosťou*. To je vzdialenosť od stredu šošovky, v ktorej sa stretnú dva rovnobežné zväzky lúčov prechádzajúcich cez hrany šošovky.

Teda cez body najviac vzdialené od optickej osi, ktorá prechádza stredom šošovky rovnobežne s týmito lúčmi. Označujeme ju f. Táto vzdialenosť samozrejme môže byť pre rôzne šošovky rôzna.

Pokiaľ je predmet, na ktorý sa cez šošovku pozeráme, vzdialený od šošovky viac než $2f$, vidíme ho zmenšený. Ak je však v takej veľkej vzdialenosti, že sa nám javí ako nekonečne veľká v porovnaní s ohniskovou vzdialenosťou, predmet neuvidíme, lebo je „nekonečne malý“. Ak by bol v intervale $f < x < 2f$, javil by sa nám väčší a v $x = 2f$ by mal rovnakú veľkosť ako v skutočnosti. Problém nastáva, ak by sme predmet umiestnili do vzdialenosti $x \leq f$. Vtedy neuvidíme skutočný obraz, teda lúče sa za šošovkou nespoja.

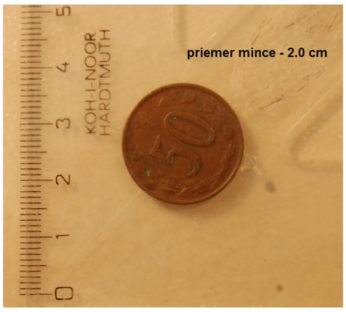


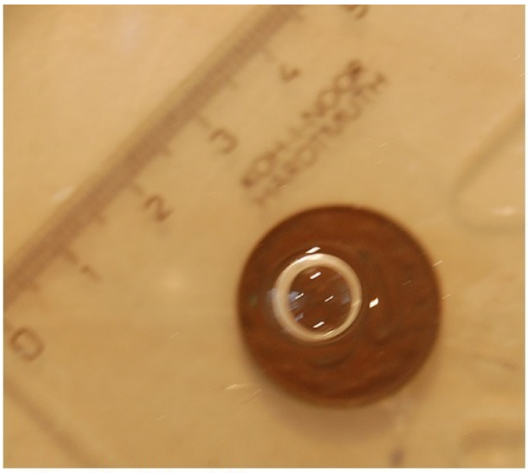
Obrázok 2: *Rôzne typy šošoviek*

Pozor ale! Bubliny môžno pokladať za šošovky len v trocha divokom priblížení, ktoré si my teraz môžeme dovoliť. V skutočnosti je bublina veľmi neideálnym typom šošovky. Napríklad jej spodná hrana – tá na ktorej bublina stojí na vode – je oveľa menej vypuklá než vrchná, ktorá má až sférický tvar.

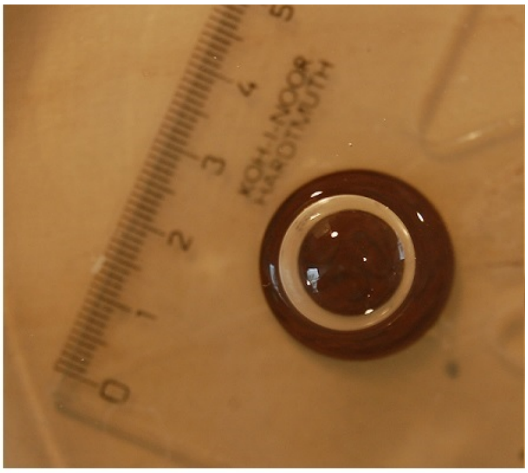
Experiment

Postupovali sme nasledovne: Pod dno nádoby sme umiestnili pravítko a mincu, aby sme si boli v ľubovoľnom prípade istí mierkou. Nádobu sme vybrali s nízkym dnom ale veľkou plochou, pretože napríklad vo väčšom pohári nám mali bubliny tendenciu odbiehať k okrajom. Naplnili sme ju vodou do výšky niekoľko centimetrov. Na slamku s lyžičkou sme si dali trocha tekutého mydla a fúkali sme cezeň bubliny kúsok pod hladinou. Bolo to síce zdĺhavé, lebo bubliny nechápali, že majú zostať presne nad mincou, až kým nezačujú šťuknutie fotoaparátu, no nakoniec sme to nejak zvládli a výsledok vidno na nasledujúcich obrázkoch.

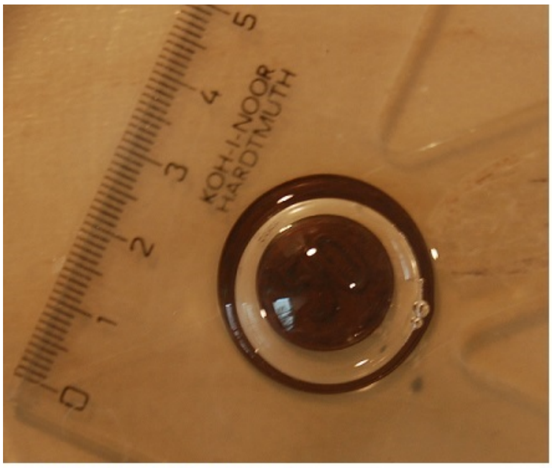




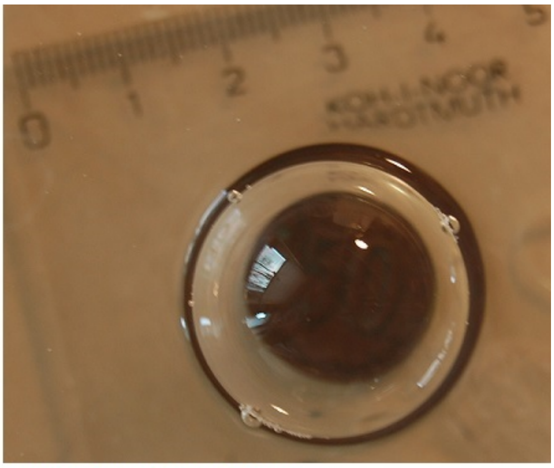
veľkosť bubliny: 1.0 cm
veľkosť obrazu: 0.7 cm



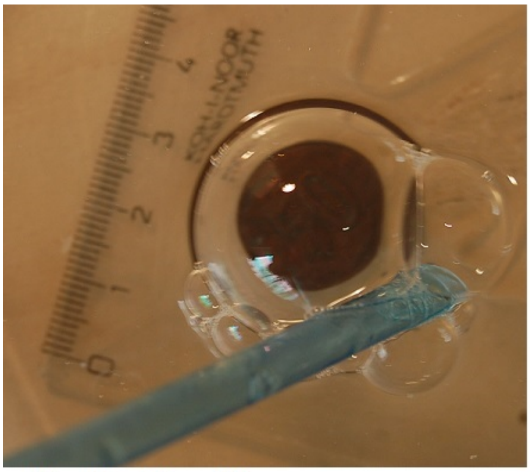
veľkosť bubliny: 1.5 cm
veľkosť obrazu: 1.0 cm



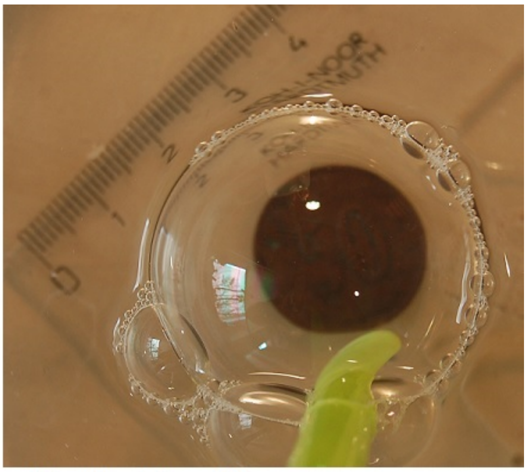
veľkosť bubliny: 2.3 cm
veľkosť obrazu:1.5 cm



veľkosť bubliny: 2.6 cm
veľkosť obrazu: 1.9 cm



veľkosť bubliny: 3.0 cm
veľkosť obrazu: 2.0 cm



veľkosť bubliny: 3.8 cm
veľkosť obrazu: 2.0 cm

N	p_{bublina} [cm]	p_{obraz} [cm]
1	1,0	0,7
2	1,5	1,0
3	2,3	1,5
4	2,6	1,9
5	3,0	2,0
6	3,8	2,0

Z obrázkov je zrejmé, že obraz mince v bubline je menší, než v skutočnosti, až po najväčšiu bublinu, v ktorej má už skutočnú veľkosť. Takže závislosť veľkosti obrázku od priemeru bubliny je zhruba lineárna – čím je väčšia bublina, tým väčší je obraz, až kým nenadobudne skutočnú veľkosť. To nastane pri priemere bubliny približne 1,25-krát väčšom, než je veľkosť pozorovaného predmetu, ako možno zistiť z tabuľky. Zdôraznime ešte, že celý experiment sme robili pri konštantnej výške hladiny, ako bolo spomenuté v zadaní. Pre inú hĺbku vody by sme nedosiahli tých našich 1,25. Čo je ale na celej veci podstatné, dostali sme zhruba *lineárnu závislosť*.

2.5 Rozmarné výpary

vzorák **Vladko**, opravoval **Vladko**

FeFero by chcel pomôcť s úlohou do školy. Dokázali by ste mu pomôcť? Skúste odhadnúť rozmer molekúl vody na základe znalosti merného skupenského tepla vyparovania.

Na vyriešenie tejto úlohy môžete použiť aj iné konštanty pre vodu okrem samotného rozmeru molekúl vody.

Ako zadanie hovorí, budeme sa venovať mernému skupenskému teplu vyparovania. Je to fyzikálna konštanta, ktorá hovorí, koľko tepla musíme „zaplatiť", aby jeden kilogram látky prešiel fázovou premenou, napr. vyparovaním. Táto konštanta býva často interpretovaná ako *merné skupenské teplo varu*, čo je spôsobené faktom, že ak privedieme kvapalinu do varu, tak jej teplota nestúpa nad bod varu, a všetka energia dodaná systému spôsobuje vyparovanie (toto platí, ak je tlak okolia konštantný).

Musíme sa zamyslieť, ako také vyparovanie prebieha. Postupne sa od vodnej hladiny odtŕhavajú molekuly a uvoľňujú sa do priestoru. Ak vzniknutá vodná para má mať rovnakú teplotu, ako mala v kvapalnom stave, je potrebné si zodpovedať otázku, kam ide energia dodaná v podobe skupenského tepla vyparovania. Odpoveď znie: na zväčšenie povrchu látky.

Vieme, že príroda sa snaží dostať do stavu s minimálnou energiou. Keďže aj s povrchom rozhrania voda–vzduch sa spája energia (konkrétne povrchové napätie), aj voda sa snaží minimalizovať svoju energiu, teda zoskupuje do kvapiek, aby mala čo najmenší povrch. Medzimolekulové sily môžu za to, že molekuly v povrchovej vrstve sú priťahované smerom do vnútra kvapaliny. Mierou takéhoto priťahovania je povrchové napätie σ. Medzi zmenou energie povrchovej vrstvy ΔE a zmenou povrchu vrstvy ΔS platí vzťah

$$\Delta E = \sigma \Delta S i.$$

Zatvorme teoretické okienko a poďme robiť myšlienkový experiment. Majme vodu s hmotnosťou m. Pre jednoduchosť nech je tvaru kocky s hranou $\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}$. Ak tvar molekuly aproximujeme kockou s hranou a, tak povrch látky po vyparení bude $N \cdot 6a^2$, kde N je počet molekúl. Z ich nestlačiteľnosti vyplýva $Na^3 = \frac{m}{\rho}$. V našom modeli je všetka energia potrebná na vyparenie vložená do zväčšenia povrchu, teda platí:

$$ml_v = \sigma \left(6Na^2 - 6\left(\frac{m}{\rho}\right)^{\frac{2}{3}}\right),$$

$$ml_v = \sigma \left(6\frac{m}{\rho a^3}a^2 - 6\left(\frac{m}{\rho}\right)^{\frac{2}{3}}\right),$$

$$\frac{ml_v}{6\sigma} = \frac{m}{\rho a} - \left(\frac{m}{\rho}\right)^{2/3}.$$

Keď sa pozrieme na rozdiel na pravej strane, vidíme, že menšiteľ je o niekoľko rádov menší ako menšenec, a teda ho môžeme v prospech krajšieho výsledku zanedbať.[19] Po úprave dostávame rádový odhad veľkosti molekuly

$$a = \frac{6\sigma}{\rho l_v} \approx 2 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}.$$

Na celom výpočte je obdivuhodné a krásne, že sme potrebovali poznať iba makroskopické veličiny ako hustotu, merné skupenské teplo vyparovania, či povrchové napätie. Niekomu by sa mohlo zdať nahradenie tvaru molekuly vody kockou za príliš nepresnú aproximáciu, ale je zjavné, že takéto priblíženie nemení rád odhadu. Autorom opísanej úvahy je americký teoretický fyzik rakúskeho pôvodu Victor Frederick Weisskopf (1908 – 2002).

2.6 Do kameňolomu s ním!

vzorák **Jaro**, opravoval **Jaro**

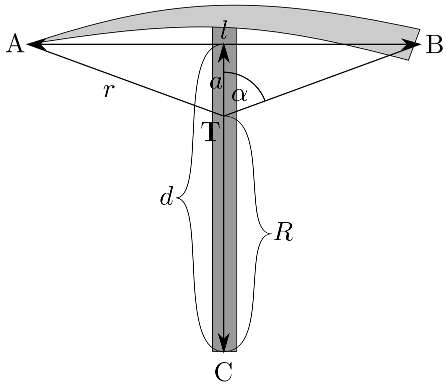
Samec hádže svoj obľubený čakan tvaru písmena „T“ rýchlosťou v kolmo na zvislú stenu[20]*. Pokúste sa odhadnúť podmienku pre uhlovú rýchlosť, ktorá musí byť splnená, keď poznáme dĺžku l kovovej časti, dĺžku d drevenej časti, hmotnosť m drevenej časti, hmotnosť kovovej časti M a požadujeme, aby sa čakan mohol zapichnúť do steny, t.j. železná časť krompáča sa dotkla steny skôr, ako by to stihla drevená časť?*

Uvažujme, že čakan sa pohybuje iba v rovine určenej vektorom rýchlosti a vektorom tiažového zrýchlenia. V takom prípade vieme popísať jeho pohyb veľmi jednoducho. Vieme predsa, že každý pohyb možno rozložiť na translačný pohyb a rotačný pohyb okolo ťažiska. Pre účely popisu pohybu čakana preto potrebujeme nájsť polohu jeho ťažiska.

Uvažujme čakan tvaru písmena „T“, pričom poznáme rozmery a hmotnosti násady a samotného kovového čakana. Zo symetrie čakana dostávame, že jeho ťažisko leží na osi násady vo vzdialenosti a od spojnice drevenej a kovovej časti. Jednoduchým výpočtom dostávame, že $a = \frac{M \cdot 0 + m \cdot \frac{d}{2}}{M+m} = \frac{md}{2(M+m)}$.

[19] Teda zanedbávame energiu povrchovej vrstvy vody v kvapalnej fáze. Takisto sme sa práve zbavili výčitiek svedomia, keď sme len tak povedali, že kvapalina bola v tvare kocky a nie valca či gule.

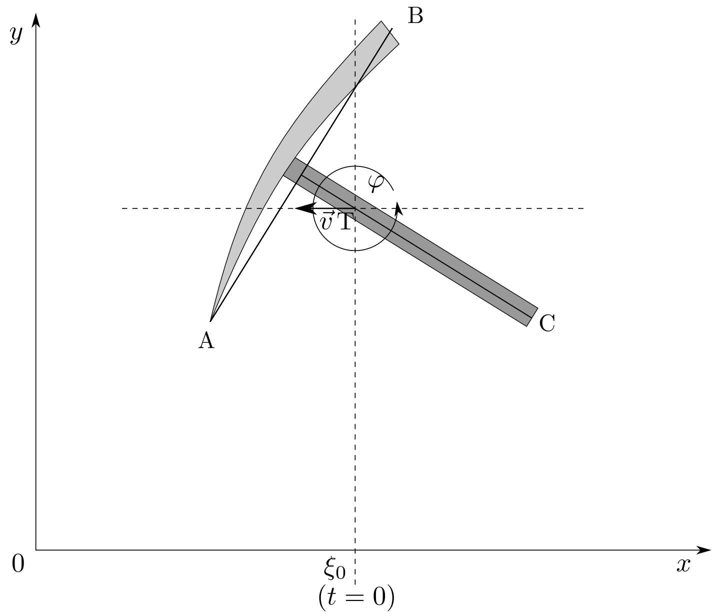
[20] To znamená, že počiatočná rýchlosť krompáča má smer kolmý na stenu.



Obrázok 3: *Model čakana*

Pri riešení tohto príkladu je potrebné sledovať štyri význačné body: ťažisko, hroty čakana a dolný koniec násady, na obrázku postupne označené písmenami T, A, B, C. Z toho dôvodu je potrebné popísať ich polohu na čakane. Dolný koniec násady leží vo vzdialenosti $R = d - a$ od ťažiska. Hroty čakana sa nachádzajú vo vzdialenosti $r = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + a^2}$ a s násadou zvierajú ostrý uhol $\alpha = \arctan \frac{l}{2a}$.

Teraz už môžeme pristúpiť k matematickému popisu problému. Zaveďme súradnicovú sústavu tak, že x-ová os je kolmá na stenu a pretína ju práve v bode $x = 0$, pričom čakan sa pohybuje len na jej kladnej polosi. Natočenie čakana budeme popisovať uhlom ϕ, ktorý budeme merať od vodorovného smeru (nulový bude vtedy, keď bod C bude úplne vpravo) a jeho kladná orientácia bude proti smeru pohybu hodinových ručičiek (rovnako ako na jednotkovej kružnici pri definovaní goniometrických funkcií). Z toho vyplýva, že keď budeme chcieť x-ovú vzdialenosť bodu od ťažiska, stačí prenásobiť jeho vzdialenosť od ťažiska kosínom uhla, ktorý zviera jeho spojnica s ťažiskom s kladnou polosou x.



Obrázok 4: *Súradnicový systém popisujúci polohu čakana*

Uvažujme, že jediná sila, ktorá na čakan za letu pôsobí, je tiažová sila. Tá však ovplyvňuje iba pohyb v y-ovom smere, ktorý nás nezaujíma. Z toho dôvodu môžeme uvažovať, že čakan vykonáva iba rovnomerný pohyb proti smeru osi x rýchlosťou v a rovnomerný rotačný pohyb okolo ťažiska, ktorý možno popísať rovnicou

$\phi = \omega t + \phi_0$. Nech je v čase $t = 0$ ťažisko čakana vo vzdialenosti ξ_0 od steny. Potom možno pohyb štvorice význačných bodov popísať súborom rovníc (1):

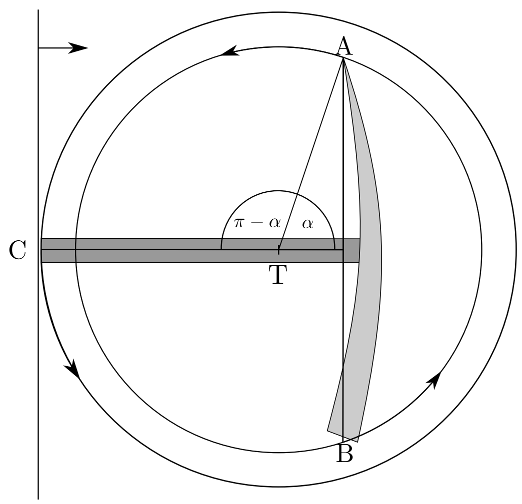
$$x_T = \xi_0 - vt$$

$$x_A = x_T + r\cos(\phi + \alpha + \pi) = \xi_0 - vt - r\cos(\omega t + \phi_0 + \alpha)$$
$$x_B = x_T + r\cos(\phi - \alpha + \pi) = \xi_0 - vt - r\cos(\omega t + \phi_0 - \alpha)$$
$$x_C = x_T + R\cos(\phi) = \xi_0 - vt + R\cos(\omega t + \phi_0)$$

Našli sme rovnice, ktoré presne popisujú pohyb čakana, takže to vyzerá, že sme na dobrej ceste k riešeniu. Alebo že by nie? Keď sa lepšie pozrieme na štruktúru tých rovníc, tak zistíme, že sú to transcendentné rovnice, ktoré sa nedajú analyticky vyriešiť. Chceli by sme totiž zistiť, ktorý z bodov A, B, C prvý narazí do steny, teda jeho súradnica nadobudne 0. Riešenie by teda vyzeralo takto: polož rovnice rovné 0, z každej z nich vyjadri čas a nájdi najmenší z trojice časov. Bod, ktorému tento čas prislúcha, narazí do steny ako prvý. Lenže čas v tých rovniciach vystupuje v argumente kosínu i mimo neho a také rovnice by všeobecne nevyriešil ani Chuck Norris v najlepších rokoch. Potešením nám môže byť aspoň to, že sme našli algoritmus na numerické riešenie úlohy.

V tomto momente by sme to mohli zabaliť – veď sme ukázali, že to vyriešiť nejde. Stále sa však môžeme pokúsiť spraviť rozumné odhady, ktoré by nás priviedli aspoň k približným výsledkom. Ale ľahké to mať rozhodne nebudeme.

Odhady sa nám budú robiť jednoduchšie, keď budeme rozumieť tomu, čo rovnice (1) popisujú. V jednoduchosti možno povedať, že popisujú rovnomerné približovanie bodu T k zvislej priamke a rovnomerné obiehanie bodov A, B, C po kružniciach s polomermi r a R okolo bodu T. Vo vzťažnej sústave spojenej s ťažiskom by sme to videli ako obiehanie bodov po dvoch sústredných kružniciach a približovanie zvislej priamky ku stredu týchto dvoch kružníc, pričom nás zaujíma, ktorý z bodov ako prvý zasiahne priamku.



Obrázok 5: *Geometrická interpretácia hraničnej situácie*

Asi by sme si tipli, že krajnú podmienku dostaneme tak, že bod C v ľavej krajnej polohe tesne minie stenu a zostáva určiť podmienku pre uhlovú rýchlosť, aby priamku zasiahol jeden z bodov A alebo B. Matematicky sa to dá vyjadriť počiatočnými podmienkami:

$$\phi(0) = \pi \;\rightarrow\; \omega \cdot 0 + \phi_0 = \pi \;\rightarrow\; \phi_0 = \pi$$

$$x_C(0) = 0 \;\rightarrow\; \xi_0 + R\cos(\pi) = 0 \;\rightarrow\; \xi_0 = R$$

Potom rovnice (1) prejdú na tvar (2):

$$x_T = R - vt$$

$$x_A = R - vt + r\cos(\omega t + \alpha)$$

$$x_B = R - vt + r\cos(\omega t - \alpha)$$

$$x_C = R - vt - R\cos(\omega t)$$

Pracujme teraz na chvíľu s geometrickou interpretáciou, ktorú sme predostreli. Očakávame, že čakan sa zapichne do steny s najväčšou pravdepodobnosťou, keď k nárazu dôjde v momente, keď bod A alebo B bude v blízkosti jeho ľavej kulminácie. Tento predpoklad je rozumný, ak predpokladáme, že translačná rýchlosť nie je výrazne vyššia než rýchlosť približovania vplyvom rotácie.[21] Čo možno v takom prípade povedať? Hneď vidíme, že ak $r \geq R$, tak je triviálne, že čakan narazí do steny hrotom A. Ale čo ak $r < R$? V takom prípade, kým sa ťažisko priblíži k stene o vzdialenosť $R - r$,[22] čakan sa musí natočiť o uhol približne $\pi - \alpha$, teda možno písať podmienku $\frac{R-r}{v} = \frac{\pi-\alpha}{\omega}$. Keďže ide o krajnú podmienku, pre uhlovú rýchlosť musí približne platiť

$$\omega \geq v\frac{\pi - \alpha}{R - r}.$$

Hornú podmienku dostaneme z podmienky pre zásah hrotom B. V tom prípade analogicky dostávame $\frac{R-r}{v} = \frac{\pi+\alpha}{\omega}$, a teda[23]

$$\omega \leq v\frac{\pi + \alpha}{R - r}.$$

Ale je to naozaj kóšer? Aby to naozaj platilo, tak okamžitá rýchlosť bodu C v čase $t = 0$ musí byť kladná.[24] Okamžitú rýchlosť vypočítame[25] ako

$$v_C(0) = \frac{\Delta x_c}{\Delta t} = \frac{x_c(\Delta t) - x_C(0)}{\Delta t} = \frac{R - v\Delta t - R\cos(\omega\Delta t)}{\Delta t} = -v + R\frac{1 - \cos(\omega\Delta t)}{\Delta t}\bigg|_{\Delta t \to 0} = -v.$$

Vidíme, že bod C sa v prvom momente pohybuje doľava, a tak čakan narazí do steny dreveným koncom. Tento odhad teda nie je dobrý.

Ako ho možno vylepšiť? Povedzme si, že nech nie je v čase $t = 0$ vzdialenosť bodu C od steny nulová, ale nech $x_C(0) = \varepsilon > 0$. V takom prípade nám záporná rýchlosť v_C v prvom momente neprekáža. Súbor rovníc (1) potom prejde na tvar (3):

$$x_T = R + \varepsilon - vt$$

$$x_A = R + \varepsilon - vt + r\cos(\omega t + \alpha)$$

$$x_B = R + \varepsilon - vt + r\cos(\omega t - \alpha)$$

$$x_C = R + \varepsilon - vt - R\cos(\omega t)$$

[21] V takom prípade by sa mohlo stať, že stena bod A ešte nezasiahne, čakan sa pretočí, ale vplyvom vysokej translačnej rýchlosti predsa čakan do steny narazí hrotom A takpovediac naplocho.

[22] Priamka sa stane dotyčnicou vnútornej kružnice.

[23] Ešte lepšia podmienka je, že hraničné situácie nastanú vtedy, keď dvojice bodov A, C alebo B, C narazia do steny súčasne, teda v čase nárazu sú nad sebou. Odtiaľ sa dá z geometrie čakana zistiť uhol, o ktorý sa musel natočiť, aby k takémuto nárazu došlo. Nebudeme si však zbytočne komplikovať život, aj za cenu, že budeme používať menej presný odhad.

[24] Ak by bola záporná, znamenalo by to, že by sa bod C v prvom momente hýbal doľava, lenže v tomto momente je už tesne blízko steny, takže by to znamenalo, že čakan by do steny narazil drevenou časťou ešte skôr, než by sa stihol otočiť.

[25] Tomu, čo sme práve vypočítali, nadávame, že je to derivácia. Samozrejme, v praxi ju tak nikto nepočíta. Existujú nejaké pravidlá a vzorce, ktoré sa treba naučiť, a potom to je už len o dosadzovaní do vzorca.

Ak chceme zasiahnuť stenu hrotom A, musia platiť nasledujúce podmienky. V čase $t = \frac{\pi-\alpha}{\omega}$ musí byť $x_A \leq 0$ a zároveň $x_C \geq 0$ v každom momente $0 \leq t \leq \frac{\pi-\alpha}{\omega}$.[26] Pozrime sa bližšie na podmienku pre pohyb bodu C: $R + \varepsilon - vt - R\cos(\omega t) \geq 0$. Rozdiel $R - R\cos(\omega t)$ je určite kladný, takže stačí požadovať, aby $\varepsilon \geq vt$. Zoberme za t čas potrebný na otočenie čakana o uhol $\pi - \alpha$, teda $\varepsilon = \frac{v}{\omega}(\pi - \alpha)$ a dosaďme to do podmienky pre hrot A. Odtiaľ dostávame podmienku

$$R \leq r,$$

čo nám nič nehovorí o uhlovej rýchlosti. Rovnakú podmienku by sme úplne identickým postupom dostali, aj keby sme uvažovali zásah hrotom B. Dôvodom je fakt, že sme uvažovali príliš hrubý odhad pre ε z podmienky pre bod C. Riešenie teda spočíva v zjemnení odhadu pre ε. To však vôbec nie je jednoduché a vyžaduje si to isté znalosti z vyššej matematiky, preto v čítaní pokračujte len na vlastné riziko.

Pre motivovaných riešiteľov

Pracujme teraz so súborom rovníc (3), presnejšie s podmienkou plynúcou z rovnice pre bod C. Požadujeme, aby v každom momente $x_C \geq 0$. Táto podmienka je ekvivalentná tomu, že minimum funkcie $x_C(t)$ je nezáporné. Musíme teda nájsť minimum tejto funkcie.

Otvorme krátke matematické okienko. Pokiaľ je funkcia diferencovateľná[27], tak extrém môže nadobúdať len na koncoch intervalu alebo tam, kde je jej derivácia rovná nule. Derivácia vlastne udáva smernicu dotyčnice a v mieste minima alebo maxima funkcie je táto dotyčnica rovnobežná s osou x, teda jej smernica je rovná 0. Ak je derivácia kladná, funkcia je tam rastúca, ak záporná, tak je klesajúca. Vybavení týmto matematickým minimom môžeme pokračovať vo výpočtoch.

Chceme nájsť minimum funkcie $x_C(t)$, takže si vypočítajme jej deriváciu a položme ju rovnú 0. Dostávame rovnicu $\dot{x_C}(t_0) = -v + R\omega\sin(\omega t_0) = 0$, odkiaľ $t_0 = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{v}{R\omega}\right)$. Okamžite vidíme podmienku, že $v \leq R\omega$.[28] V čase $t = 0$ je derivácia záporná, teda funkcia $x_C(t)$ klesá až do času t_0, kde nadobúda minimum.[29] Od tohto momentu začne funkcia opäť rásť, takže minimum funkcie je $x_C(t_0) = R + \varepsilon - \frac{v}{\omega}\arcsin\left(\frac{v}{R\omega}\right) - \sqrt{R^2 - \frac{v^2}{\omega^2}}$, čo požadujeme, aby bolo nezáporné, takže odtiaľ dostávame podmienku $\varepsilon \geq R\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{R^2\omega^2}} - 1\right) + \frac{v}{\omega}\arcsin\left(\frac{v}{R\omega}\right)$. Dosaďme do rovníc (3) najmenší možný ε a dostaneme nový súbor rovníc (4):

$$x_T = \sqrt{R^2 - \frac{v^2}{\omega^2}} + \frac{v}{\omega}\arcsin\left(\frac{v}{R\omega}\right) - vt$$

$$x_A = \sqrt{R^2 - \frac{v^2}{\omega^2}} + \frac{v}{\omega}\arcsin\left(\frac{v}{R\omega}\right) - vt + r\cos(\omega t + \alpha)$$

$$x_B = \sqrt{R^2 - \frac{v^2}{\omega^2}} + \frac{v}{\omega}\arcsin\left(\frac{v}{R\omega}\right) - vt + r\cos(\omega t - \alpha)$$

$$x_C = \sqrt{R^2 - \frac{v^2}{\omega^2}} + \frac{v}{\omega}\arcsin\left(\frac{v}{R\omega}\right) - vt - R\cos(\omega t)$$

[26] T.j. v čase $t = \frac{\pi-\alpha}{\omega}$ musí byť hrot A za stenou a počas celého tohto pohybu bod C sa nesmie dostať za stenu.

[27] Jej grafom je hladká krivka bez prerušení a hrán.

[28] Ak táto podmienka nie je splnená, tak derivácia nikde nie je nulová, teda funkcia vo vnútri intervalu nenadobúda extrém, a teda minimum leží na hranici intervalu.

[29] V čase t_0 sa teoreticky môže nachádzať aj inflexný bod. To, či je tam extrém alebo nie, zistíme výpočtom druhej derivácie v tomto čase. Dostaneme $\ddot{x_C}(t_0) = R\omega^2\cos(\omega t_0) = \pm R\omega^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{R^2\omega^2}}$. Pre nás je dôležité, že pre $v \neq R\omega$ je jej hodnota nenulová, a teda je tam skutočne extrém - minimum.

Teraz uvažujme zásah hrotom A, teda musia byť splnené podmienky $x_A\left(t = \frac{\pi-\alpha}{\omega}\right) \leq 0$ a $x_C\left(0 \leq t \leq \frac{\pi-\alpha}{\omega}\right) \geq 0$. Druhá podmienka je splnená automaticky,[30] prvá podmienka po dosadení dáva

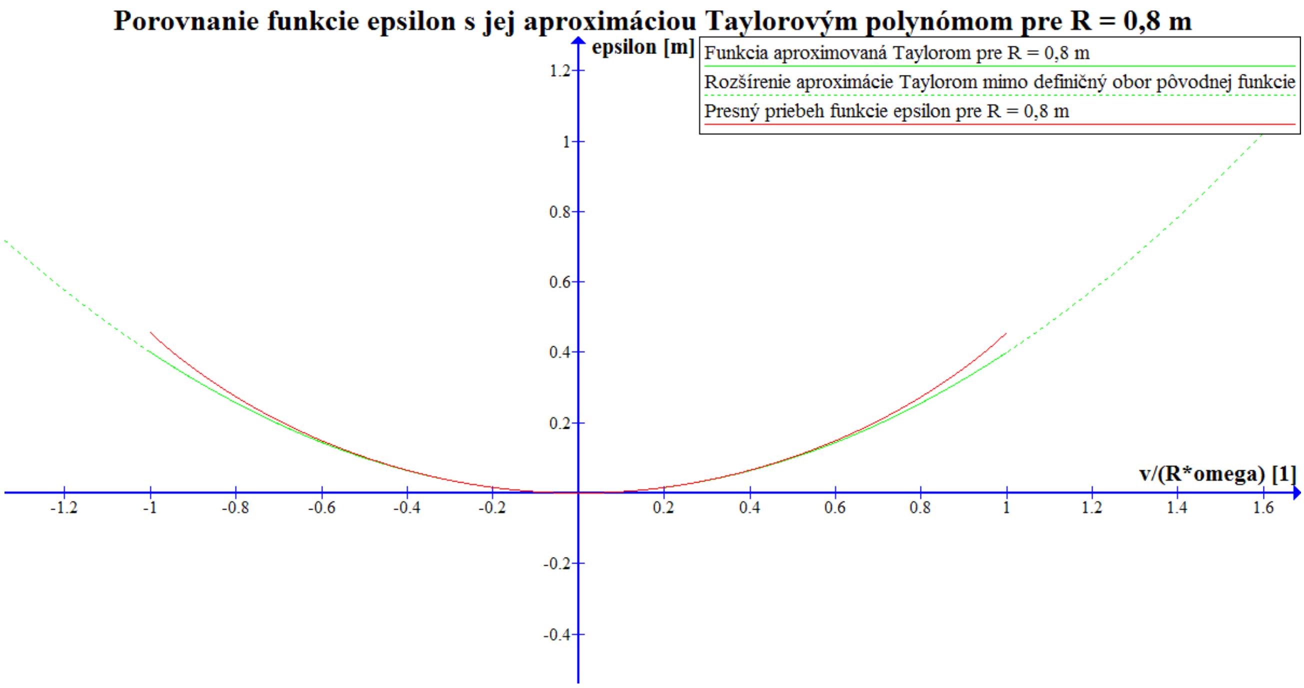
$$\sqrt{R^2 - \frac{v^2}{\omega^2}} + \frac{v}{\omega}\arcsin\left(\frac{v}{R\omega}\right) - \frac{v}{\omega}(\pi-\alpha) - r \geq 0.$$

Ak by sme uvažovali zásah hrotom B, tak úplne analogicky dostaneme

$$\sqrt{R^2 - \frac{v^2}{\omega^2}} + \frac{v}{\omega}\arcsin\left(\frac{v}{R\omega}\right) - \frac{v}{\omega}(\pi+\alpha) - r \geq 0.$$

Dostali sme teda podmienky, ktoré vzájomne zväzujú translačnú rýchlosť čakana a jeho uhlovú rýchlosť, takže už odtiaľ stačí len vyjadriť uhlovú rýchlosť ako funkciu rýchlosti. To však vzhľadom na štruktúru nerovníc nie je možné urobiť všeobecne, ale pre konkrétne hodnoty parametrov to ide urobiť numericky.

Ak by sme predsa len chceli analytický výsledok, môžeme skúsiť rozvinúť nepekné funkcie v tej nerovnici do Taylorovho radu a získať približný výsledok. Taylorov rozvoj dáva približnú hodnotu parametra $\varepsilon \approx \frac{v^2}{2R\omega^2}$. Treba si však uvedomiť, že ide o vysokofrekvenčné priblíženie, teda výsledok je tým presnejší, čím v je menšie oproti $R\omega$. Ak by sme chceli odhadnúť chybu, ktorej sme sa dopustili, stačí vyjadriť zvyšok Taylorovho radu a odhadnúť ho. My to robiť nebudeme, no môžete si to vyskúšať.[31] Namiesto toho si graficky ukážeme, ako sa líši pôvodná funkcia od jej aproximácie Taylorom.



Obrázok 6: *Porovnanie funkcie ε s jej aproximáciou Taylorovým radom*

Následne rovnice (4) prejdú na tvar (5):

$$x_T \approx R + \frac{v^2}{2R\omega^2} - vt$$

[30] ε sme volili tak, aby bola splnená.
[31] Iniciatíve sa medze nekladú.

$$x_A \approx R + \frac{v^2}{2R\omega^2} - vt + r\cos(\omega t + \alpha)$$
$$x_B \approx R + \frac{v^2}{2R\omega^2} - vt + r\cos(\omega t - \alpha)$$
$$x_C \approx R + \frac{v^2}{2R\omega^2} - vt - R\cos(\omega t)$$

Z úplne identických podmienok pre zásah hrotom A, aké sme už použili, dostaneme kvadratickú nerovnicu

$$(R - r)\,\omega^2 - v(\pi - \alpha)\,\omega + \frac{v^2}{2R} \le 0.$$

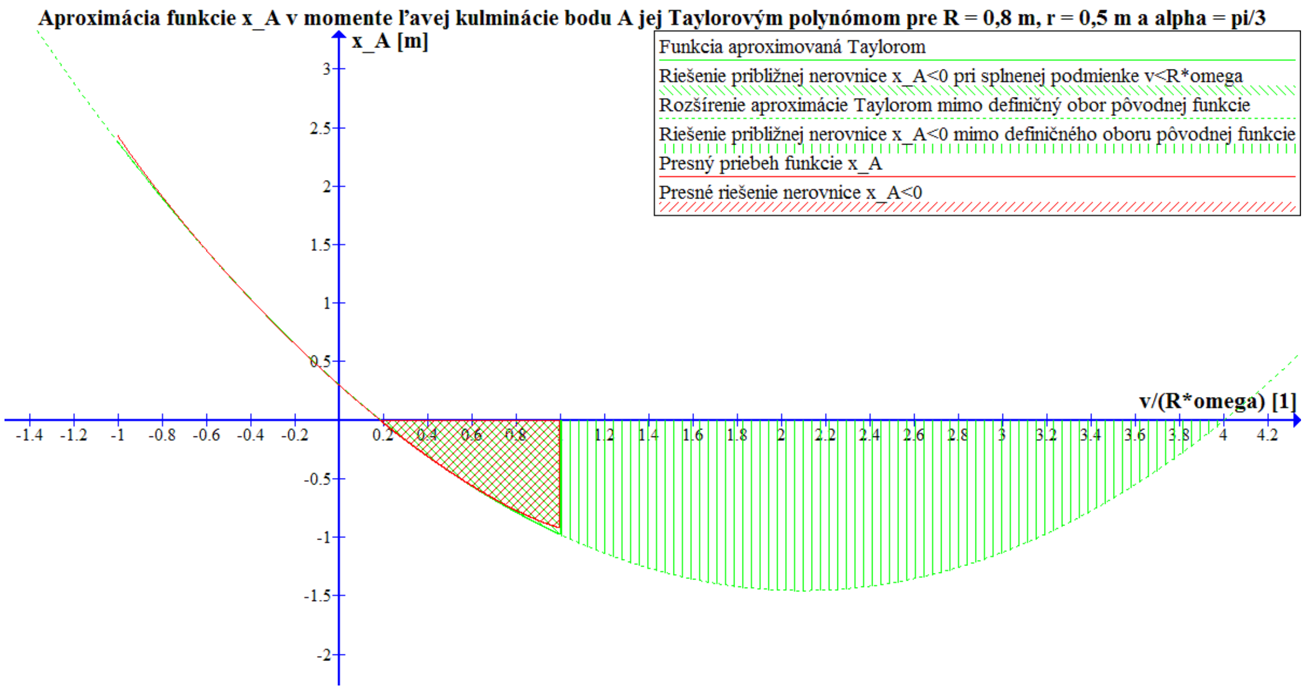
Nulové body sú

$$\omega_{+,-} = \frac{v}{2}\frac{\pi - \alpha}{R - r}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2(R - r)}{R(\pi - \alpha)^2}}\right).$$

Koeficient pred ω^2 je kladný, preto grafom funkcie je parabola tvaru „U“, a teda funkcia je záporná pre $\omega \in \langle\omega_-; \omega_+\rangle$. Úplne analogicky sa dopracujeme k podmienke pre zásah hrotom B. V tom prípade dostaneme nulové body

$$\omega_{+,-} = \frac{v}{2}\frac{\pi + \alpha}{R - r}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2(R - r)}{R(\pi + \alpha)^2}}\right)$$

a opäť $\omega \in \langle\omega_-; \omega_+\rangle$. Stále však nesmieme zabúdať na podmienky, ktoré sme použili pri odvodení tohto výsledku, predovšetkým $v < R\omega$ (viď graf).



Obrázok 7: *Porovnanie riešenia nerovnice $x_A < 0$ pre presné a približné vyjadrenie funkcie x_A*

Overme ešte, čo sa stane, keď $v \ge R\omega$. Vráťme sa späť k súboru rovníc (3). Za tohto predpokladu funkcia $x_C(t)$ nadobúda minimum na hranici intervalu,[32] teda v prípade zásahu steny hrotom A možno priamo položiť

[32] Prvá derivácia nikdy nie je nulová.

$t_0 = \frac{\pi-\alpha}{\omega}$. V tom prípade z podmienky $x_C(t_0) \geq 0$ dostaneme podmienku $\varepsilon = \frac{v}{\omega}(\pi - \alpha) - R(1+\cos(\alpha))$. Dosaďme ju do podmienky $x_A\left(t = \frac{\pi-\alpha}{\omega}\right) \leq 0$ a po krátkej úprave dostaneme $-R\cos(\alpha) - r \leq 0$, čo je samozrejme vždy platná nerovnosť. Na základe toho možno tvrdiť, že ak $v \geq R\omega$ a bod C míňa stenu vo vzdialenosti aspoň

$$\varepsilon \geq \frac{v}{\omega}(\pi - \alpha) - R(1+\cos(\alpha)),$$

tak vždy zasiahneme stenu hrotom čakana. Horné obmedzenie pre vzdialenosť dostaneme, keď budeme uvažovať zásah hrotom B. Úplne identickým spôsobom sa dopracujeme k podmienke

$$\varepsilon \leq \frac{v}{\omega}(\pi + \alpha) - R(1+\cos(\alpha)).$$

Samozrejme, toto obmedzenie mi hovorí, že ak ε je z uvedeného intervalu, tak čakan zasiahne stenu kovovou časťou. Opačná implikácia však neplatí. Stále sa môže stať, že aj pre nejaké ε, ktoré neleží v tomto intervale, čakan zasiahne stenu kovovou časťou. Stačí si prečítať prvú poznámku pod čiarou k tejto úlohe, kde sme o takejto situácii uvažovali.

Hodnotenie

A čo bolo teda treba spraviť, aby ste získali veľa bodov? V prvom rade bolo treba preukázať fyzikálny nadhľad do problému a pokúsiť sa situáciu popísať. Za to ste mohli získať základné body. Ako ste mohli vidieť, táto úloha nemá žiadne správne riešenie, preto nemožno jednoznačne povedať, že toto je dobre a toto nie. Pri udeľovaní ďalších bodov sa bude brať do úvahy, aké odhady ste použili a ako ste zhodnotili, v čom sú dobré a kde zlyhávajú. Samozrejme sme od vás neočakávali také presné odhady, ako sme urobili my. Pri hodnotení sme sa držali zásady, že najlepší zo všetkých odhadov ohodnotíme plným počtom bodov[33] a ďalšie bodovanie odstupňujeme podľa kvality použitých odhadov. Takže, ak by ste všetci použili aj ten najmenej presný odhad a mali ho správne, tak všetci môžete získať plný počet bodov.

2.7 Portrét ako od Da Vinciho

vzorák **Kvík**, opravoval **Kvík**

Tento príklad je interaktívny. Vyžaduje si internetový prehliadač s podporou JavaScriptu. Zadanie nájdete na našich stránkach.

1.3 Prvá úloha

Čo by sa muselo v systéme zmeniť, aby sa častica v portréte nachádzala pod osou x? Ako by sa zmenila jej trajektória v portréte?

Stačilo by jej udeliť rýchlosť v smere doľava (teda v našich súradniciach zápornú). Potom by sa samozrejme musela hýbať aj v portréte smerom doľava.

2.2 Častice s trením

Kde v portréte nakoniec skončia nakoniec všetky častice? Prečo?

Celkom zjavne skončia na osi x, teda v miestach, ktoré zodpovedajú nulovej hybnosti a teda aj rýchlosti. No a je to samozrejme preto, že ich trenie za nejaký čas zabrzdí (aj keď prísne vzaté to bude trvať nekonečne dlho).

3.1 Trenie

Môžu sa dve trajektórie vo fázovom portréte pretínať (okrem prípadov, keď oba objekty zastanú v tom istom bode)? Ak áno, za akých okolností? Ak nie, prečo?

[33] Ak bude aj dobre okomentovaný.

V Newtonovskej mechanike platí, že ak poznáme všetky pôsobiace sily a počiatočné podmienky (teda polohu a rýchlosť), dokážeme predpovedať budúcu polohu telesa v ľubovoľnom čase. Poloha častice v portréte nám udáva práve obe počiatočné podmienky, pôsobiace sily sú zase pevné dané tým, aký systém skúmame. Ak by sa teda dve trajektórie pretli, znamenalo by to, že priesečníku, teda jednému stavu v prítomnosti, prislúchajú dva rôzne budúce vývoje. No a to Newtonovská mechanika nepripúšťa. Líšiť sa môžu v prípade, že na častice pôsobia rôzne veľké sily, ale potom nemajú spoločný portrét. Preto neustále zdôrazňujeme, čo je *jeden portrét*, a čo je *viac portrétov na jednom obrázku* – podobne môžeme do jedného grafu kresliť viacero funkcií, ale nesmieme si to mýliť s jednou funkciou a tvrdiť, že funkcia nadobúda viacero hodnôt.

3.3 Náhodné s trením

Je možné nejak zariadiť, aby sa objekt v kladnej polrovine portrétu podľa p pohol smerom doľava?

Tu by už malo byť zrejmé, že určite nie – znamená to totiž, že jeho hybnosť je kladná a teda súradnica polohy v čase musí rásť. Rýchlosť sa síce tiež môže meniť v závislosti od pôsobiacej sily, takže sa častica v portréte môže pohybovať rôzne hore a dolu, nikdy však nemôže nastať pohyb smerom doľava. V takom prípade by pravdaže častica musela prejsť do zápornej polroviny.

Bonus: Aké sú všetky povolené smery v kladnej polrovine?

Toto je trochu zákerné. Určite sa môžeme hýbať v ľubovoľnom smere, v ktorom súradnica x rastie a určite sa nikdy nemôžeme pohnúť tak, aby klesala. Čo ale s pohybmi v smere osi p? Sú síce teoreticky možné, ale je na ne nutné nekonečné zrýchlenie. Niečo také v prírode pozorovať nevieme. Na druhej strane môžeme mať napríklad model častice v krabici (úloha 6.3), kde dochádza k dokonale pružným zrážkam. V takomto modeli (ktorý ale úplne nezodpovedá skutočnosti!) to možné je. Závisí teda na tom, čo si v rámci nášho modelu dovolíme.

4.1 Jeden LHO

Prečo sú v portréte dva priesečníky s osou x aj s osou p? Čomu zodpovedajú ich súradnice?

Priesečník s osou x značí nulovú hybnosť, teda častica v portréte nimi prejde v okamihoch, keď je jej rýchlosť nulová a teda výchylka maximálna. Priesečník s osou p zase samozrejme značí nulovú polohu a teda maximálnu veľkosť rýchlosti a hybnosti. No a LHO za jednu periódu dvakrát prejde dolnou úvraťou a rovnako dvakrát maximalizuje svoju výchylku.

5.1 Rôzne rýchlosti

Je tu prítomné trenie?

Zjavne nie, alebo je také veľmi malé, že ho môžeme ignorovať.

Ide o jeden fázový portrét, alebo to musí byť viacero portrétov kreslených cez seba?

Sú to iba rôzne vychýlené identické harmonické oscilátory… a teda by sme mali hneď vedieť, že to je jeden portrét.

5.3 Rôzne trenie

Vizuálne skúste približne určiť, ktorý z oscilátorov je kriticky tlmený (stačí napísať približne, napríklad „piaty zdola“).

Stačí sa pozerať iba na skutočný systém (nie na portrét): celá dolná polovica zjavne stihne prekmitnúť na druhú stranu, silno červené oscilátory sú zase brzdené až príliš. Viditeľne najrýchlejšie sa k osi blíži približne tridsiaty piaty zhora.

6.2 Veľký portrét

Aký je podstatný rozdiel oproti prípadu 4.3? Čo vieme povedať o perióde pohybu takéhoto oscilátora?

Hlavný rozdiel je, že uhlová rýchlosť v portréte už závisí od počiatočnej výchylky. Teda oscilátory nekmitajú s rovnakou frekvenciou, ale sa postupne rozchádzajú a perióda bude tým kratšia, čím je výchylka menšia. Je to preto, že pri väčších silách pôsobí na oscilátor výrazne väčšia sila.

6.3 Veľa oscilátorov

Ako by vyzeral portrét v limite $n \to \infty$? Akému fyzikálnemu systému to zodpovedá?

Tu sa stačilo poriadne zamyslieť a pozrieť sa na portrét. Mali by ste vidieť, že čím je kyvadlo červenšie, tým viac sa jeho portrét blíži k obdĺžniku. Aký pohyb by mu zodpovedal? Pohyb po zvislých stranách by musel byť nekonečne rýchly, teda náhle zmení smer na opačný. Druhou možnosťou je pozrieť sa na potenciál a uvedomiť si, že limitou x^{n+1} je potenciál, ktorý je nulový na intervale $[-1; 1]$ a nekonečne veľký inde. Častica na konštantnom potenciáli je voľná (nepôsobí na ňu žiadna sila, veď aj $x^n = 0$), do nekonečne veľkého sa zase nikdy nemôže dostať, takže sa odrazí. Systém teda zodpovedá voľnej častici na úsečke (alebo ak chcete, v jednorozmernej krabici :-)), pričom od okrajov sa pružne odráža. Najvrchnejší oscilátor sa už na takú časticu celkom podobá.

7.1 Matematické kyvadlo

Koľkokrát väčšiu rýchlosť by sme museli udeliť modrému kyvadlu, aby zastalo na vrchole?

Pozrieme sa na jeho potenciálnu energiu. V simulácii má akurát dosť kinetickej energie na to, aby vystúpalo do výšky r. My ale chceme $2r$. Tiažové pole je homogénne, takže potrebuje zjavne dvakrát väčšiu kinetickú energiu. Tá ale od rýchlosti závisí kvadraticky, takže potrebuje mať $\sqrt{2}$-krát väčšiu rýchlosť.

7.2 Dve kyvadlá

Čím sa podstatne líšia od LHO?

Mali by ste vedieť, že pre malé výchylky sa matematické kyvadlo správa ako LHO. Naše výchylky síce nie sú veľmi veľké, ale po chvíľke behu sa predsa ukáže rozdiel: perióda opäť závisí od výchylky. Na rozdiel od prípadu 6.2 sa tu ale sila s rastúcou výchylkou naopak zmenšuje (zamyslite sa, ako presne), takže kyvadlo s väčšou výchylkou kmitá trochu pomalšie.

7.3 Rôzne energie

Ktoré z kyvadiel sa najviac podobá na harmonický oscilátor? Odkiaľ to vieme a čím sú si vlastne podobné?

Samozrejme tmavozelené, pretože preň platí priblíženie malých uhlov najlepšie. Na LHO sa podobá preto, že vracajúca sila je úmerná $\sin \varphi$, a to sa pre malé výchylky takmer rovná φ.

Pri ktorom z kyvadiel môžeme tiažové pole zanedbať? Z čoho to vidíme?

Striktne vzaté pri žiadnom, ale najbližšie k tomu má žlté. Má dosť veľa energie na to, aby sa voľne točilo a prechádzalo hornou úvraťou. Jeho rýchlosť sa síce trochu mení (cestou nahor premieňa svoju kinetickú energiu na potenciálnu), ale vidíme to len z portrétu, na samotnom systéme to takmer nevidno.

8.3 Kyvadlá s trením

Na koľko nezávislých riešení sa súbor kyvadiel rozlezie? Čo ich odlišuje a aké sú ich súradnice v portréte?

Celkom zjavne na tri. Odlišujú sa počtom celých obrátok, ktoré stihli vykonať, než stratili priveľa energie trením. Ich súradnice zodpovedajú postupne žiadnej, jednej alebo dvom celým obrátkam, takže musia byť $\varphi = 0$, 2π a 4π.

9.2 Oscilátory

Ako by sme mohli Liouvillovu vetu sformulovať inak? Aká vlastnosť celého systému sa zachováva?

Ak sa zachováva hustota bodov v každom bode, musí sa nutne zachovať objem kontinua (skúste porozmýšľať, ako to súvisí s nestlačiteľnou kvapalinou). Pekne to vidieť na príklade 9.1.

9.3 Matematické kyvadlá

Platí Liouvillova veta aj v tomto prípade? Prečo?

Na prvý pohľad to nemusí byť zrejmé, ale ak si simuláciu necháme chvíľu bežať, zistíme, že kyvadlá spomaľujú a teda sa celková energia systému nezachováva. Ľubovoľné kyvadlo preto časom stratí všetku svoju energiu a teda v portréte skončí na osi φ (a dokonca vždy v bode so súradnicou $\varphi = 2k\pi$). „Plocha" troch bodov je nulová, takže Liouvillova veta tu nemôže platiť. Naozaj, nutnou podmienkou jej platnosti je zachovanie mechanickej energie systému.