Fyzikálny korešpondenčný seminár
XXXV. ročník, 2019/2020
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 2. kola zimnej časti

2.1 Odvážna váha

vzorák **Nina**, opravovala **Nina**

Adam chce zvážiť svoju digitálnu váhu na nej samej? Bežná digitálna váha sa skladá z vrchnej časti (na ktorú kladieme veci, ktoré chceme zvážiť), spodnej časti (tela váhy) a vážiaceho zariadenia ktoré ich spája. Označme si hmotnosť vrchnej časti m_1 a hmotnosť spodnej m_2.

A ako taká váha funguje? Majme váhu položenú na jej spodnej časti, zapneme ju, a položíme na ňu predmet s hmotnosťou m, ktorý chceme odvážiť. Vážiace zariadenie vo vnútri váhy potom zaznamená nárast tlakovej sily, ktorá naň pôsobí, a to o tiažovú silu $m{\cdot}g$, ktorá na dané teleso pôsobí. Váha potom vypíše hmotnosť m prislúchajúcu zmene tlakovej sily $m \cdot g$, ktorá na ňu pôsobí.

Keď váhu držíme za jednu z jej častí, tak tiažová sila druhej časti pôsobí ako tlaková/ťahová na vážiace zariadenie a stláča/rozťahuje ho medzi vrchnou a spodnou časťou. Pokiaľ váhu v tejto polohe zapneme(alebo vynulujeme či stlačíme TARE), tak váha bude hmotnosť prislúchajúcu tejto sile odpočítavať od všetkých nasledujúcich vážení až do jej opätovného vynulovania.

Váhu môžeme mať v jednej zo 4 polôh:

a) P_1: Položenú na spodnej časti hore hlavou
   - Vrchná časť pôsobí na vážiace zariadenie tlakovou silou $m_1 \cdot g$

b) P_2: Položenú na vrchnej časti dole hlavou
   - Spodná časť pôsobí na vážiace zariadenie tlakovou silou $m_2 \cdot g$

c) P_3: Zavesenú za vrchnú časť hore hlavou
   - Spodná časť pôsobí na vážiace zariadenie ťahovou silou $m_2 \cdot g$

d) P_4: Zavesenú za spodnú časť dole hlavou
   - Vrchná časť pôsobí na vážiace zariadenie ťahovou silou $m_1 \cdot g$

Ak v jednej z týchto polôh váhu vynulujeme, váha bude od najbližšieho vynulovania, odpočítavať od každého váženia sily, ktoré na ňu pôsobili, keď sme ju nulovali. Ak ju potom presunieme do inej polohy, na váhu budú pôsobiť iné sily a ona nám ukáže hmotnosť zodpovedajúcu rozdielu síl pôsobiacich na vážiace zariadenie v týchto polohách (sily v 2. polohe mínus sily v 1. polohe). Napr. ak by sme váhu vynulovali položenú na jej spodnej časti(keď na jej vážiace zariadenie tlačiť $m_1 \cdot g$ tiažová sila vrchnej časti) a potom ju obrátili na jej vrchnú časť (keď bude na jej vážiace zariadenie tlačiť $m_2 \cdot g$ tiažová sila jej spodnej časti), tak nám ukáže hmotnosť zodpovedajúcu rozdielu síl $m_2 \cdot g - m_1 \cdot g$, čiže $m_2 - m_1$ rozdiel prislúchajúcich hmotností.

Urobme si na rozdiely týchto hmotností tabuľku tak, že riadky budú zodpovedať polohe, v ktorej sme váhu vynulovali a stĺpce polohe, v ktorej sme hmotnosť na váhe merali.

	P_1	P_2	P_3	P_4
P_1		$-m_1 + m_2$	$-m_1 - m_2$	$-2m_1$
P_2	$-m_2 + m_1$		$2m_2$	$-m_2 - m_1$
P_3	$m_2 + m_1$	$2m_2$		$m_2 - m_1$
P_4	$2m_1$	$m_1 + m_2$	$m_1 - m_2$	

Ako vidíme, najľahšie by nám bolo vynulovať váhu v P_3 (zavesenú za vrchnú časť) a potom hmotnosť odčítať v P_1 (kým je váha položená hlavou hore). Vtedy by nám váha priamo vypísala celú svoju váhu. Rovnako dobre by sme dopadli pre dvojicu P_4, P_2 (zo závesu za spodok dole hlavou, do položenia na vrchnú časť dole hlavou), alebo hoc aj len vymenením poradia polôh, keď hmotnosť dostaneme s opačným znamienkom.

K správnemu výsledku sa vieme pravdaže dostať aj inou kombináciou vážení, z ktorých by sme dostali sústavu lineárnych rovníc, ktoré už len potrebujeme vyriešiť pre m_1 a m_2 a tieto sčítať.

2.2 Meranie trenia

vzorák **Majo**, opravoval **Majo**

Na úvod sa zamyslime, prečo by sa hmotný bod umiestnený na vrchu briežka mal začať pohybovať. Pozrime sa, aké sily naň pôsobia. Pôsobí naň tiažová sila $F_G = mg$. Tá sa dá rozložiť na dve zložky. Rozkladá sa na tlakovú zložku $F_T = mg\cos\alpha$, ktorá pôsobí v smere kolmom na briežok, a na pohybovú zložku $F_p = mg\sin\alpha$, ktorá pôsobí v smere rovnobežnom s briežkom.

Keďže hmotný bod pôsobí nejakou tlakovou silou na briežok, zo zákona akcie a reakcie vieme povedať, že aj briežok musí pôsobiť na hmotný bod rovnako veľkou, ale opačnou normálovou silou $F_N = mg\cos\alpha$. Z toho ale máme, že trecia sila, ktorá bráni hmotnému bodu v pohybe, má veľkosť najviac $F_t \leq fF_N = mgf\cos\alpha$. Ak ale platí, že pohybová zložka tiažovej sily F_p je menšia, ako táto trecia sila, Majov hmotný bod sa nikdy nepohne. Vtedy platí

$$F_p \leq F_t$$

$$mg\sin\alpha \leq mgf\cos\alpha,$$

$$f \geq \tan\alpha$$

Ak teda platí, že koeficient šmykového trenia f je aspoň $\tan\alpha$, Majov hmotný bod sa nepohne. To ale znamená, že v tomto prípade Majo nevie presne určiť, akú hodnotu má koeficient šmykového trenia f.

Ako je to ale v prípade, že $f < \tan\alpha$? V tom prípade je výsledná sila, ktorá pôsobí na Majov hmotný bod v smere pohybu, nenulová. Keďže rozdiel týchto síl nezávisí od polohy hmotného bodu na briežku, na hmotný bod bude v každom bode jeho pohybu po briežku pôsobiť sila s nenulovou veľkosťou v smere jeho pohybu. Takže určite nezastaví na briežku, ale niekde na rovinke.

Zamyslime sa, aké sily pôsobia na hmotný bod na rovinke. Stále pôsobí tiažová sila $F_G = mg$. Tá ale teraz celá zodpovedá tlakovej zložke F_T[1], a teda čo do veľkosti aj normálovej sile F_N. Na hmotný bod tak pôsobí trecia sila s veľkosťou $F_t = mgf$, ktorá pôsobí proti smeru pohybu hmotného bodu. V tomto prípade ale nemáme pohybovú zložku tiažovej sily, ktorá by pôsobila na hmotný bod, a tak je trecia sila jediná, ktorá má vplyv na to, ako sa bude hmotný bod pohybovať. A keďže je jej veľkosť nenulová, hmotný bod niekedy určite zastať musí.

[1] akoby sme do predošlého výrazu $F_T = mg\cos\alpha$ dosadili $\alpha = 0°$

Keď už sme sa zamysleli kvalitatívne nad tým, čo sa v tejto situácii deje, poďme všetko vyjadriť kvantitatívne. Prípad, kedy by bolo $f \geq \tan\alpha$ sme už vyriešili, a tak riešme už iba to, čo sa stane, ak $f < \tan\alpha$. V tomto prípade hmotný bod zastaví niekde na rovinke. Ak si túto výšku zvolíme ako hladinu nulovej výšky (a teda aj nulovej potenciálnej energie), potenciálna energia hmotného bodu na vrchole briežka musela byť $E_p = mgh$. V tomto momente sa hmotný bod nehýbal, a teda mal nulovú kinetickú energiu. Jeho celková mechanická energia E tak na začiatku bola rovná jeho potenciálnej energii E_p. Na konci je bod na rovinke, takže má nulovú potenciálnu energiu. Navyše sa nehýbe, čiže má nulovú kinetickú energiu. Mechanická energia tohto bodu na konci je teda nulová. To znamená, že v priebehu svojho pohybu musel stratiť energiu $E = E_p$.

Hmotný bod mohol stratiť svoju energiu iba pri tom, ako konal prácu, prípadne ju získať, ak by na ňom bola konaná nejaká práca. Prácu na hmotnom bode konala iba tiažová sila, a to na dráhe h (lebo hmotný bod prekonal výškový rozdiel h). To ale v skutočnosti zodpovedá tomu, že na začiatku mal potenciálnu energiu $E_p = mgh$. Túto energiu už máme zahrnutú v našich myšlienkach. Na druhej strane strácal hmotný bod svoju energiu tak, že musel prekonávať treciu silu. V danom okamihu síce trecia sila pôsobila na hmotný bod, ale zo zákona akcie aj reakcie musel aj hmotný bod pôsobiť silou na podložku. A keďže touto silou pôsobil na nejakej dráhe, konal prácu, a teda strácal energiu.

Takto strácal energiu na dvoch úsekoch – na briežku a na rovinke. Keď bol na briežku, mala trecia sila (a teda aj reakčná sila) veľkosť $F_t = mgf\cos\alpha$ a táto sila pôsobila na dráhe $s = \frac{h}{\sin\alpha}$. Takže hmotný bod na tomto úseku stratil energiu

$$E_1 = mgfh\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = mgfh\cot\alpha.$$

Na rovinke mala trecia sila veľkosť $F_t = mgf$ a pôsobila na dráhe $s = l - h\cot\alpha$ (táto dráha je kladná, a teda má zmysel iba vtedy ak $l > h\cot\alpha$, čiže ak $\frac{h}{l} < \tan\alpha$). Na tejto časti tak hmotný bod stratil energiu

$$E_2 = mgf(l - h\cot\alpha) = mgfl - mgfh\cot\alpha.$$

Celková strata energie hmotného bodu teda je

$$E = E_1 + E_2 = mgfh\cot\alpha + mgfl - mgfh\cot\alpha = mgfl$$

Vieme, že táto strata energie sa má rovnať potenciálnej energii na začiatku, a teda má platiť

$$mgh = mgfl.$$

Odtiaľ už jednoducho vyjadríme veľkosť f (všimnime si, že vďaka podmienke $\frac{h}{l} < \tan\alpha$ sme stále v prípade $f < \tan\alpha$)

$$f = \frac{h}{l}.$$

Tým sme zistili, že ak pre koeficient šmykového trenia f platí $f < \tan\alpha$, vieme ho vypočítať ako $f = \frac{h}{l}$, a že inak ho zo zadaných informácií vypočítať nevieme.

2.3 Závažná expanzia

vzorák **Maťo G.**, opravoval **Adam**

Ukážeme si riešenie dvoma spôsobmi: cez stavovú rovnicu a takisto cez prvý termodynamický zákon.

Riešenie pomocou stavovej rovnice

Sústava je na začiatku a aj na konci v pokoji. To znamená, že sily sú v rovnováhe. Nech tlak okolia je p_0 a tlak vo vnútri p, potom pre oba časy platí rovnováha síl,

$$\underbrace{pS}_{\text{sila nahor}} = \underbrace{p_0 S + mg}_{\text{sila smerom nadol}} . \tag{1.3.1}$$

Ak dosadíme stavovú rovnicu $pV = Nk_\mathrm{B}T$ za p:

$$\frac{NkT}{H} = p_0 S + mg,$$

kde H je výška plynu. Túto rovnicu teraz prenásobíme do tvaru

$$\frac{NkT}{p_0 S + mg} = H.$$

Pozrime sa čo táto rovnica hovorí. Odvodili sme ju len z rovnosti síl, a teda bude platiť aj na začiatku a aj na konci. Všetky hodnoty premenných zostávaju však rovnaké, až na H a T, ktoré sa počas deja zmenia.

Označme teda počiatočné hodnoty indexom 1 (H_1, T_1), a konečné indexom 2 (H_2, T_2). Takto dostaneme dve rovnice:

$$\frac{NkT_1}{p_0 S + mg} = H_1,$$

$$\frac{NkT_2}{p_0 S + mg} = H_2.$$

Ak teraz odčítame prvú rovnicu od druhej, dostaneme výsledok

$$\boxed{\Delta H = \frac{Nk\Delta T}{p_0 S + mg}}.$$

Riešenie pomocou zákona zachovania energie

Na začiatok napíšeme prvý zákon termodynamický (ktorý je iba prepísaním zákona zachovania energie),

$$\Delta U = Q - W.$$

Čo nám tento zákon hovorí? Každý plyn sa skladá z veľkého množstva voľných molekúl. Súčet energií týchto molekúl voláme vnútorná energia U. Podľa zákona zachovania energie, keď s plynom nič nerobíme, celková energia by sa nemala meniť. Toto samozrejme neplatí, ak nejakým spôsobom energiu do plynu dodávame, alebo ju odoberáme. Prvý termodynamický zákon vraví, že zmena tejto energie je rovná rozdielu dodaného tepla a práce, ktorú plyn vykoná

Bežne platí, že kinetická energia týchto molekúl je väčšia ako ich celková potenciálna energia. Čo teda ako správny fyzici spravíme je, že potenciálnu energiu zanedbáme. Táto aproximácia sa bežne nazýva *ideálny plyn*, t.j. plyn v ktorom medzi časticami nie sú žiadne sily (žiadne sily = žiadna potenciálna energia). Potom môžeme zmenu vnútornej energie napísať ako:

$$\Delta U = C_V \Delta T,$$

kde C_V je tepelná kapacita plynu *pri konštantnom objeme*. (Tá sa dá spočítať ako súčin *mernej* tepelnej kapacity a hmotnosti.)

Teplo Q máme zadané v zadaní a už nám stačí iba spočítať prácu plynu W – tú spočítame separátne. Vieme, že práca plynu sa spočíta ako tlak plynu krát zmena objemu. Taktiež, sústava je počas pohybu v rovnováhe, a preto môžeme nahradiť tlak plynu vovnútri súčtom sily závažia a tlaku okolitého vzduchu (podľa rovnice 1.3.1)

$$W = p \underbrace{S\Delta H}_{\Delta V} = (mg + p_0 S)\Delta H.$$

Ak to všetko pospájame dohromady, výsledok je

$$\boxed{\Delta H = \frac{Q - C_V \Delta T}{mg + p_0 S}}. \tag{1.3.2}$$

Prečo nám vyšli rozličné výsledky? (bonus)

Oba uvedené výsledky sú správne, no druhý má v sebe zopár maličkých detailov. Viac pochopíte, keď sa začneme zamýšlať, ako vyjadriť teplo Q. Bežne sa totiž učí, že teplo je $Q = C\Delta T$ (znova používame iba tepelnú kapacitu, nie mernú tepelnú kapacitu), a tak to vyzerá že čitateľ rovnice 1.3.2 bude nula! Výsledok by potom bol zcela iste zle!

Trik je v tom, že pre plyn existuje mnoho **rôznych tepelných kapacít** a vždy musíme použiť tú, ktorá popisuje dej, ktorý sa vykonáva. V našom prípade overíme dve možnosti:

1. teplo pridáme okamžite, a plyn následne expandne na konečnú veľkosť,
2. teplo pridávame pomaly, kým sa plyn rozpína.

V prvom prípade pridávame teplo kým plyn zostáva na mieste a nexpanduje. Preto v tom prípade by sme mali použit **tepelnú kapacitu pri konštantnom objeme**. Rovnica 1.3.2 nám dá vysledok nula. Tento výsledok je však **nepravdivý**. Totižto vzťah pre prácu plynu $ W = p ”ΔV$ platí iba pre *reverzibilné* procesy. Tento proces však *nie je* reverzibilný – keby ho nahráme na video, a to pustíme odzadu, vidíme, že plyn sa *sám odseba* stlačí, a až potom od neho zoberieme prebytočné teplo. Aký má byť teda výsledok v tomto prípade? Ukazuje sa, že riešenie cez stavovú rovnicu stále platí, lebo tam sme žiadne predpoklady o reverzibilite nespravili. Viac už to však rozoberať nebudeme, lebo táto téma sa stane veľmi rýchlo viac komplikovanou ako je rozsah tohto vzoráku. (Kľúčové slovo pre záujemcov: entropia plynu.)

V druhom prípade tlak expanduje tak, že si drží rovnaký tlak ako na začiatku (vždy je v rovnováhe). V tom prípade musíme použit **tepelnú kapacitu pri konštantnom tlaku**. V tomto prípade nám však rovnica 1.3.2 dá:

$$\Delta H = \frac{(C_p - C_V)\Delta T}{mg + p_0 S}$$

a toto môžeme upraviť pomocou takzvaného *Mayerovho vzťahu* pre rozdiel tepelných kapacít:

$$\Delta H = \frac{N k_B \Delta T}{mg + p_0 S}$$

čo je rovnaký výsledok ako z prvého postupu! Svet je zachránený, aspoň teda v prípade, kedy teplo pridávame reverzibilne.

2.4 Úloha o kole

vzorák **Krtko** a **Kubo Kliment**, opravoval **Krtko**

Riešenie Kuba Klimenta bolo natoľko dobré, že po opravení zopár detailov som sa rozhodol ho použiť ako vzorák.

Keďže mechanický výkon nevieme merať priamo, tak pred samotným meraním sa musíme najprv zamyslieť nad tým, ako ho zmerať nepriamo, teda aké čo najlepšie merateľné veličiny na to vieme využiť. Mechanický výkon je daný ako práca, alebo teda dodaná energia E za nejaký čas t. Keďže nás zaujíma okamžitý mechanický výkon, budeme sa pozerať len na nejaký veľmi malý kúsok koly[2] a bude nás zaujímať, koľko energie mu za aký čas dodali mentosky[3]. Kinetická energia, ktorú mentosky (resp. natlakovaná fľaša) dodajú kole, sa v prípade zvislého postavenia fľaše rýchlo premení na potenciálnu tým, že kola vyletí do určitej výšky h, preto vieme túto energiu vypočítať ako $E = mgh$.

Ešte ale potrebujeme vedieť, ako dlho fľaša túto energiu E nejakému tomu malému kolovému telesu dodávala. Tento čas závisí od objemového prietoku koly hrdlom fľaše, jeho rýchlosť vieme vypočítať z počiatočnej kinetickej energie kolového telesa. Povedzme, že fľaša zo svojho hrdla vystrelila kolové teleso hmotnosti m, ktoré vyletelo do výšky h, v tomto momente premenilo teleso všetku svoju kinetickú energiu na potenciálnu, o ktorej vieme, že jej veľkosť je $E_p = mgh$, preto zo ZZE:

$$E_k = E_p$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

Takže v momente, keď kola vyletela z hrdla fľaše (a mala ešte nulovú potenciálnu energiu), mala prietokovú rýchlosť $v = \sqrt{2gh}$. Teda vieme vypočítať, a preto aj nepriamo zmerať prietokovú rýchlosť koly. Nás ale zaujíma čas, za ktorý mentosky dodajú kolovému telesu energiu $E = mgh$.

Predstavme si kolové teleso ako valec s podstavami veľkosti prierezu hradla fľaše a výškou l, ktoré bude urýchlené hrdlom fľaše von. Ak budeme kolu vo fľaši považovať za homogénnu nestlačiteľnú kvapalinu pod tlakom bez turbulentných prúdov, dostaneme, že kola sa vo fľaši (až na hrdlo) nehýbe a iba jej časť v hrdle je tlakom vystreľovaná von bez toho, aby výrazne ovplyvňovala zvyšok objemu (okrem postupnej zmeny tlaku/objemu). Takže bez ujmy na všeobecnosti môžeme uvažovať, že kolové teleso je urýchľované, a teda je mu dodávaná energia až vtedy, keď sa nachádza v hrdle fľaše, teda vtedy, keď bude jeho vrchná podstava úplne na konci hrdla. To znamená, že mu je energia dodávaná práve čas, za ktorý sa dostane celé teleso von z fľaše, teda, kým prejde dráhu l rýchlosťou v, z čoho $t = \frac{l}{v}$. Takže pre dostatočne malé kolové teleso - teleso s výškou l blížiacou sa k nule, si vieme vyjadriť okamžitú zmenu energie za čas, a teda aj okamžitý mechanický výkon fľaše s mentoskami.

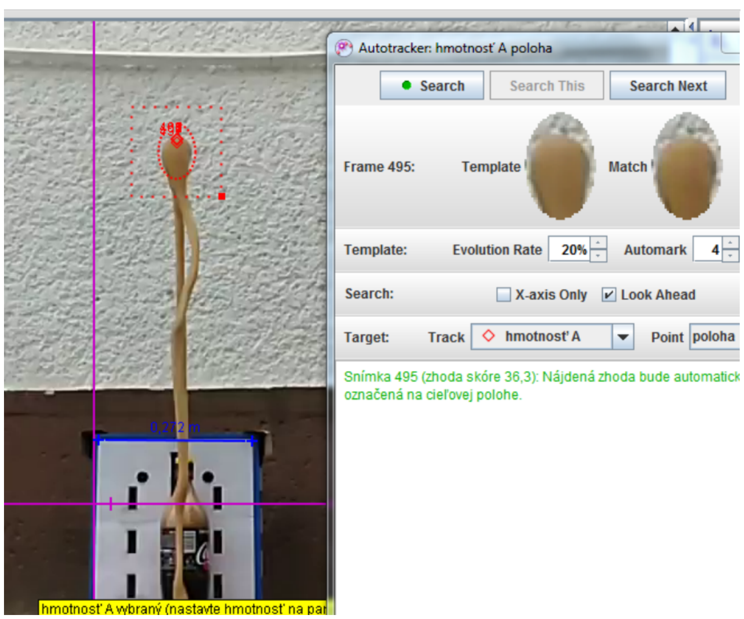
[2] s nejakým objemom dV

[3] V celom texte budem písať, že mentosky dodajú kole energiu, v skutočnosti však iba uvoľnia jej potenciálnu (tlakovú) energiu CO^2 na tlak a následne kinetickú energiu koly, takto sa to ale lepšie opisuje.

$$\begin{aligned}
P &= \frac{E}{t} \\
&= mgh \cdot \frac{v}{l} \\
&= V\rho gh \cdot \frac{\sqrt{2gh}}{l} \\
&= \frac{Sl\rho gh\sqrt{2gh}}{l} \\
&= \sqrt{2}S\rho\left(gh\right)^{\frac{3}{2}} \\
P &= \sqrt{2}\pi r^2\rho\left(gh\right)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

kde r je polomer hrdla fľaše, ρ je hustota koly, g je gravitačné zrýchlenie a h je zmena výšky koly. Tým dostávame, že ak považujeme gravitačné zrýchlenie za konštantu, nám stačí zmerať polomer r, hustotu ρ a výšku h. Keďže pred vhodením mentosiek fľaša nebýva úplne plná, výšku h uvažujeme od jej počiatočnej hladiny.

Samotné meranie prebiehalo nasledovne: Nakúpil som si veľa rovnakých fliaš Coca-Coly Zero (bez cukru) 1,25 l a rovnakých balení cukríkov mentos mint. Najprv som testoval, ako výrazne reagujú s kolou, na základe čoho som sa rozhodol do nej pri meraniach vhadzovať vždy 4 kusy, aby bola reakcia výraznejšia a lepšie merateľná. Výšku prúdu koly som meral tak, že som ju z väčšej vzdialenosti (kvôli minimalizácií skreslenia) natáčal na video, ktoré som potom neskôr spracoval v programe Tracker.



Zo začiatku som nechával kolu striekať priamo hrdlom fľaše s polomerom $r_0 = 10{,}97 \pm 0{,}27$ mm, potom bol ale prúd veľmi široký, dosahoval dosť nízku maximálnu výšku a preto boli merania nepresné. Preto som na ďalšie merania hrdlo fľaše zúžil redukciou s s otvorom s polomerom $r = 6{,}92 \pm 0{,}31$ mm. Maximálna výška prúdu koly sa u jednotlivých fliaš dosť líšila, priemerná nameraná hodnota mi vyšla $h = 75{,}3 \pm 10{,}7$ cm. Hustotu Coca-Coly Zero som si vedel nájsť aj na internete, ale pre účely odhadu chyby výsledku som si ju tiež zmeral (cez objem a hmotnosť): $\rho = 1002 \pm 19$ kg/m^3. Z nameraných hodnôt dostávame maximálny okamžitý mechanický výkon:

$$\boxed{P = 4{,}279 \pm 1{,}380 \text{ W}}$$

Môžeme vidieť, že nameraný výkon má pomerne veľkú odchýlku, tá ale aspoň nie je väčšia ako nameraná hodnota. Pre fľašu s otvoreným hrdlom (otvorom s polomerom r_0) mi vyšiel maximálny okamžitý výkon len 1,16 W, ale odchýlka viac ako jeden a pól krát väčšia ako samotná nameraná hodnota, takže meranie s menším otvorom bolo ešte celkom presné.

Nepresnosti merania:

Veľa nepresností (aproximácií) nastalo už v teórií, pretože som uvažoval až moc dokonalú kolu bez vnútorného prúdenia či akéhokoľvek pohybu. Rovnako som neuvažoval odpor vzduchu, kvôli ktorému sa nepremenila všetka kinetická energia na len potenciálnu, ale aj na teplo a zvuk, kvôli čomu neplatí $E_k = E_p$. Ďalej som si ani nezmeral gravitačné zrýchlenie pre danú lokalitu a počítal som so známou hodnotou pre Slovensko: $g = 9{,}81$ m/s^2. Meranie samotné bolo napriek veľkej odchýlke (spôsobenej rozdielom jednotlivých fliaš) celkom presné, keďže ho za mňa vykonával počítač. Meranie však nebolo veľmi relevantné, pretože výkon koly s mentoskami závisí od konkrétnej fľaše, jej objemu, množstva CO_2, ktorý z nej už vyprchal a samozrejme aj počtu mentosiek. Teda som zmeral len výkon v mojich konkrétnych podmienkach.

K bonusu:

Celkovú mechanickú energiu, ktorú kola získa vhodením mentosiek vieme vypočítať buď jednoducho ako zmenu tlaku vynásobenú objemom fľaše $E = V\Delta p$ alebo ako súčet kinetických energií dodaných jednotlivým malým kolovým telesám, teda ako $E = V'\rho g\overline{h}$, kde V' je objem vytlačenej koly z fľaše alebo teda aspoň tej, ktorá sa v priebehu reakcie posunula o nejakú nenulovú výšku h vyššie, a $\overline{h}$ priemerná výška do ktorej bola vytlačená kola. Túto energiu sa mi však už nepodarilo zmerať (nestihol som), lebo som nemal prístup k manometru a druhý spôsob by bol veľmi nepresný.

2.5 Lenivý tvor

vzorák **Hovorca**, opravoval **Hovorca**

Poďme sa pozrieť na jednotlivé možné výsledky, ktoré boli v zbierke napísané a skúsiť si odôvodniť, či by mohli alebo nemohli byť správne.

$$1. \qquad v \leq (M+m)\sqrt{\frac{F}{M+\frac{m}{2}} - g} \cdot l^2$$

Jedným z najdôležitejších nástrojov každého fyzika na odhaľovanie nesprávnych výsledkov je rozmerová (jednotková) analýza. Napríklad **ak výraz na ľavej strane rovnice má jednotky (rozmer) v metroch za sekundu a výraz na pravej strane nie, asi niečo nehrá**. Rozmer výrazu na ľavej strane nie je ťažké určiť, sú to už spomínané metre za sekundu. Poďme sa pozrieť na výraz na pravej strane. Časť $(M+m)$ má zjavne rozmer hmotnosti, teda kilogramy. Časť $\sqrt{\frac{F}{M+\frac{m}{2}} - g}$ je trochu komplikovanejšia, ale rýchlo zistíme, časť v tvare zlomku má rozmer zrýchlenia (sila deleno nejaká hmotnosť) a aj g má rozmer zrýchlenia, teda meter za sekundu štvorcovú. Celá odmocnina má teda rozmer „odmocnina z metra" za sekundu. Už tu vidíme, že čosi nehrá, lebo odmocina z metra neznie moc dobre. Posledná časť, l^2, má rozmer metrov švorcových. Celá pravá strana tak má rozmer $\frac{kg \cdot m^2 \cdot \sqrt{m}}{s}$, čo rozhodne nie sú metre za sekundu. Tento výsledok preto určite nie je správny.

$$2. \qquad v \leq \frac{M+m}{m}\sqrt{\left(\frac{F}{M-m} - g\right)l}$$

Pri druhom výsledku nám rozmerová analýza výsledku nepomôže. Obidve strany majú rozmer metrov za sekundu. Skúsime na to ísť inak. Použijeme niečo, čomu sa hovorí extrémne prípady, ďalší veľmi užitočný nástroj každého fyzika. **Čo ak by situácia mala nejakú špecifickú vlastnosť?** Niečo je nulové, veľmi veľké (ba priam nekonečné) alebo naopak malé… Extrémne prípady môžu byť niekoľkých typov a ako sa neskôr ukáže, viacero z nich použijeme pri riešení. Preto sa teraz budeme sústrediť len na jeden. Konkrétne sa pozrieme, čo by sa dialo, keby mal projektil rovnakú hmotnosť, ako kvádrik? Taká situácia je úplne reálna, prečo by nemohol mať? Problémom tohoto vzorca je však, že ak $m = M$ tak zlomková časť pod odmocninou má v menovateli nulu. Teda by celá táto odmocnina išla teoreticky „do nekonečna". Teda by sme dostali $v \leq \infty$. Čiže rýchlosť by mohla byť ľubovoľná. Ale asi by sme očakávali, že aj pre túto situáciu bude existovať nejaká rýchlosť, pri ktorej sa lanko pretrhne. Tento výsledok teda nebude veľmi správny…

$$3. \qquad v \leq \frac{M-m}{m}\sqrt{\left(\frac{F}{M+m} - g\right)l}$$

Presúvame sa na tretí výsledok. Opäť nám sedí rozmerová analýza. Použijeme teraz iný extrémny prípad, ba rovno dva extrémy. Najprv si uvedomme, že ak F bude veľmi veľké, ba čo teoreticky až „$F = \infty$", tak by sa lanko nemalo pretrhnúť nikdy. Opäť teda vezmime prípad, kedy $m = M$. Uvidíme, že celý výraz začína nulou, teda dostávame podmienku $v \leq 0$. No my sme si povedali, že silu môžeme ľubovoľne zväčšovať tak, aby sa lanko neptretrhlo. Dalo by sa na to pozrieť aj tak, že v tomto výsledku sa lanko pretrhne aj keď do neho projektil nenarazí, ale my vieme, že samotný kvádrik na lanku visel podľa zadania bez pretrhnutia. V obidvoch pohľadoch je tento výsledok nesprávny.

$$4. \qquad v \leq \frac{M+m}{m}\sqrt{\left(\frac{F}{M+m} - g\right)l}$$

Dostali sme sa k štvrtému výsledku. Rozmerová analýza sedí, už ukázané extrémne pohľady zdá sa vydržia. Presuňme si teda tento výsledok na koniec a potom sa pozrieme, či ho predsa len nevieme nejako vylúčiť.

$$5. \qquad v \leq \frac{M+m}{m}\sqrt{\left(\frac{Mg}{m} - g\right)l}$$

Piaty výsledok dokonca vylúčime veľmi jednoducho. Vôbec totiž nezávisí od sily F! To asi nebude správne. To by totiž znemanalo, že bez ohľadu na to, akú silu lanko vydrží, lanko sa pretrhne pri rovnakej hraničnej rýchlosti. My však vieme, že lanko sa pretrhne preto, že sila, ktorou naň pôsobí kvádrik s projektilom, je väčšia ako F. Lenže v našom výsledku je sila jednoznačne daná parametrami M, m a l. Poučenie teda je, že **ak očakávame, že výsledok**

závisí od nejakej veličiny, tak by ju asi mal obsahovať - najmä ak vieme ukázať, že od danej veličiny skutočne závisí.

$$6. \qquad v \leq \frac{M+m}{m}\sqrt{\left(g - \frac{F}{M+m}\right)l}$$

Šiesty výsledok je zaujímavý. Použijúc rozmerovú analýzu je všetko v poriadku. Pozrime sa však na výraz pod odmocninou. Aby výsledok dával zmysel - teda aby šlo o reálnu fyzikálnu situáciu - mal by byť kladný. Vieme, že l je kladné, lebo ide o dĺžku lana. Výraz teda bude kladný vtedy, keď $(M + m)\, g > F$. To znamená, že tiažová sila, ktorá pôsobí na kvádrik s projektilom je väčšia ako F. Ale čo ak to tak nebude? Predsa F môže byť ľubovoľne veľké, **nemalo by preň existovať žiadne horné ohraničenie**. Navyše si pozorný čitateľ rýchlo všimne, že čím väčšiu silu F lanko vydrží, tým menší bude výsledný celkový výraz. Ale my by sme očakávali, že to bude naopak - **čím väčšiu silu lanko vydrží, tým väčšou rýchlosťou do neho môžeme strielať projektily**. Tento výsledok preto tiež nebude správny.

$$7. \qquad v \leq \frac{M+m}{M}\sqrt{\left(\frac{F}{M+m} - g\right)l}$$

Siedmy, posledný výsledok. Tu použijeme ešte jeden trik - predstavíme si, že niečo neexistuje. Konkrétne pôjde o projektil samotný. V podstate sa to dá považovať za extrémny prípad keď $m = 0$. Ak budeme do kvádrika „strieľať projektil nulovej hmotnosti“, asi by sme očakávali, že sa nič nestane. A to **bez ohľadu na to, akou rýchlosťou ho vystrelíme**. Zjednodušme teda náš výraz ak $m = 0$. Dostaneme

$$v \leq \sqrt{(\frac{F}{M} - g)l}.$$

Očakávali by sme, že pre v teraz nebude existovať žiadny limit. Ale existuje. Jedinou možnosťou je, že by tento výraz nedával zmysel. Ale keďže predpokladáme, že sila F je väčšia ako tiažová sila pôsobiaca na kvádrik samotný Mg (inak by sa lanko pretrhlo aj bez strieľania a vtedy nemá veľmi zmysel riešiť úlohu), tak výraz zmysel dáva vždy. Tento výsledok preto nebude správny.

Vráťme sa teda k štvrtému výsledku. Vidíme, že závisí od všetkých veličín, ktoré by sme vo výsledku mohli očakávať. Ak budeme zvyšovať silu F, ktorú lanko vydrží, bude sa aj hraničná rýchlosť v, pri ktorej sa lako pretrhne. Ak si predstavíme, že do kvádrika nič nevystrelíme ($m = 0$), tak výraz nedáva zmysel (v menovateli je 0, čiže sa celý výraz ide „do nekonečna“), čo znie pomerne rozumne, pretože limit pre v vtedy nemá existovať. Výraz pod odmocninou je kladný len ak je $F > (M + m)g$, čo celkom dáva zmysel, lebo ak lanko neudrží hmotnosť kvádrika s projektilom, tak by pretrhnutie lanka nastalo bez ohľadu na rýchlosť a teda nemá zmysel riešiť úlohu „aká bude rýchlosť“. Všetky naše zbrane zdá sa zlyhali. Znamená to, že výsledok je určite správny? Rozhodne nie! Iba vieme, že by mohol byť - narozdiel od ostatných výsledkov. Ako zistíme, či skutočne je správny? Bez počítania úlohy samotnej len veľmi ťažko :) Našťastie, zadanie od nás chce len toľko, aby sme určili, či správny môže alebo nemôže byť. Zvedavému čitateľovi prezradíme, že tento výsledok skutočne je výsledkom zadanej úlohy. Všetky metódy, ktoré sme naznačili vo vzorovom riešení však čitateľovi vrelo odporúčame aplikovať na akékoľvek výsledky, ku ktorým sa vo fyzike dopracuje - často je to jednoduchý spôsob, ako odhaliť, že sme niečo nevypočítali správne :)

2.6 Pod tlakom

vzorák **Jaro**, opravoval **Jaro**

Našou úlohou je nájsť atmosférický tlak na planéte. Prv než sa pustíme do zložitých úvah, použime techniku, ktorá nás nestojí takmer žiadnu námahu a v prípade, že ho nie je možné určiť, nám môže ušetriť kopu času. Ide o rozmerovú analýzu.

Chceme určiť tlak, ktorého rozmer je $[p] = \mathrm{kg}/(\mathrm{m\,s}^2)$, a vieme merať dĺžku (rozmer m), hmotnosť (rozmer kg) a teplotu (rozmer K). Pomocou týchto veličín potrebujeme nakombinovať výraz rozmeru tlaku. To sa na prvý pohľad zdá ako nemožné, keďže nikde nevystupuje čas. Nezabúdajme však na konštanty.

Vieme merať teplotu a tu sa nám núka Boltzmannova konštanta, ktorá v kombinácii s teplotou dáva $[kT] = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$. Alebo vieme, že na planéte je rovnaké tiažové zrýchlenie ako na Zemi, teda poznáme veličinu rozmeru $\mathrm{m/s}^2$. Čiže rozmerová analýza pripúšťa, že určiť tlak je možné. Musíme sa teda nad úlohou zamyslieť detailnejšie.

Zamyslime sa najskôr, čo nám ukáže váha, keď na ňu položíme nafúknutý balónik. Bude to hmotnosť elastického materiálu M, z ktorého je balónik vyrobený, plus hmotnosť vzduchu vo vnútri m, mínus vztlak $V\rho_a$,[4] kde V je objem balónika a ρ_a je hustota atmosféry. Matematicky zapísané

$$\mu = M + m - V\rho_a = M + V\rho - V\rho_a = M + V\left(\rho - \rho_a\right),$$

kde ρ je hustota vzduchu vo vnútri balónika, ktorá je väčšia než hustota vzduchu vonku kvôli stláčaniu balónikom.

Nájdime, čomu je rovná hustota vzduchu vo vnútri balónika. Využijeme, že tlak je aditívna veličina, a teda tlak vo vnútri p je súčtom atmosférického tlaku p_a a tlaku od balónika p_e[5]

$$p = p_a + p_e.$$

Tlak od balónika závisí od miery nafúknutia balónika, t.j., od jeho polomeru r. Vieme ho určiť, ak poznáme, ako závisí elastická energia $E_e\left(r\right)$ od polomeru. Ak poznáme elastickú energiu, tak vieme určiť silu $F_e\left(r\right)$, ktorou balónik stláča vzduch vo vnútri.[6] Ak energia závisí od polomeru, potom aj sila závisí od polomeru. No a tlak elastickej sily od balónika je potom $p_e\left(r\right) = \frac{F(r)}{4\pi r^2}$.

Na záver nájdime, ako závisí hustota vzduchu od tlaku. Podľa stavovej rovnice $pV = NkT$. Postupnými úpravami dostávame

$$p = \frac{NkT}{V} = \frac{nN_AkT}{V} = \frac{mR_mT}{M_mV} = \rho\frac{R_m}{M_m}T,$$

teda $\rho = \frac{M_m}{R_mT}p$.

To nám umožňuje vyjadriť hmotnosť ukázanú na váhe pomocou tlakov

$$\mu = M + \frac{M_mV}{R_mT}\left(p - p_a\right).$$

[4] Toto možno tvrdiť, pretože tiažové zrýchlenie na planéte je rovnaké ako na Zemi, na ktoré bola váha kalibrovaná. Ak by nebolo, tak váha by ukazovala hodnotu, ktorá by sa líšila od skutočnej hmotnosti konštantným faktorom rovným pomeru tiažového zrýchlenia na Zemi a na planéte. To by však nebol problém – stačilo by aplikovať túto korekciu. Jej veľkosť by sme určili jednoducho – napríklad tak, že by sme odvážili seba predpokladajúc, že svoju skutočnú hmotnosť poznáme.

[5] Pretože platí rovnováha síl cez vnútorný povrch balónika $p_aS + p_eS = pS$, kde S je povrch balónika.

[6] Ako presne vypočítame silu, nás nemusí veľmi zaujímať. No pre zvedavcov uveďme, že elastická energia je rovná práci, ktorú treba vykonať pri nafukovaní balónika. To znamená, že ak máme balónik nafúknutý na polomer r a chceme ho nafúknuť ešte o $\mathrm{d}r$, tak tým vykonáme prácu $F\left(r\right)\mathrm{d}r$, čiže zvýšime energiu o $\mathrm{d}E_e = F\left(r\right)\mathrm{d}r$. Odtiaľ $F\left(r\right) = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r}$.

Lenže z rovnováhy tlakov cez vnútorný povrch balónika $p = p_a + p_e$, teda

$$\mu = M + \frac{M_m V}{R_m T}\left(p_a + p_e - p_a\right) = M + \frac{M_m V}{R_m T} p_e,$$

čo nezávisí od atmosférického tlaku, preto uvedenou metódou nie je možné určiť atmosférický tlak.

2.7 Sladké potešenie

vzorák **M&M** a **Jaro**, opravoval **Adam**

Predstavme si situáciu, že do obvodu cez bod A bude pritekať prúd I a v nekonečne bude obvod uzemnený. Keďže každá hrana plastu má odpor R a celý plást je symetrický na otočenie o 120°, prúd sa začne deliť rovnomerne, tj. do každého z troch hrán začínajúcich v A potečie prúd $I/3$. Teraz zoberme druhý prípad nechajme z nekonečna pritekať prúd do bodu B kde bude vytekať. Analogicky, každou hranou bude susednou s B bude pritekať prúd $I/3$.

Teraz keď tieto dva modely cez seba sčítame, t.j. v každej hrane bude tiecť prúd $I_A + I_B$ kde I_A (resp. I_B) je prúd, ktorý tečie hranou v modeli prítoku do A (je prúd, ktorý tečie hranou v modeli výtoku v B). Nezabudnime však na smer tečenia prúdu. Teda treba uvažovať, že ak sú opačne orientované a nech $|I_A| > |I_B|$ tak výsledný prúd bude v smere I_A a bude mať veľkosť $I_A - I_B$. Uvedomme si, že v nekonečne už nebudeme mať ani stoku ani zdroj, lebo rozdiely prúdov tam budú nulové.

V hrane AB bude teraz tiecť prúd $I/3 + I/3 = 2I/3$. A čo vo zvyšku? No vieme, že v zdroji A priteká prúd I a v stoke B odteká prúd I takže zvyškom musí dokopy tiecť prúd $I/3$. No a teraz stačí nájsť takú elementárnu schému obvodu, čo rozdelí prúd na $2I/3$ cez rezistor s odporom R a $I/3$ rezistorom s odporom x, tj. sériové zapojenie. No ale, keďže musí platiť $2I/3 \cdot R = x \cdot I$ tak jednoducho vieme dopočítať, že $x = 2R$. Preto schému, na ktorú zjednodušíme plást je paralelne zapojenie dvoch rezistorov jeden s odporom R a druhý s odporom $2R$. Toto zapojenie má celkový odpor

$$\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}} = \frac{1}{\frac{3}{2R}} = \frac{2R}{3}.$$

Teda celkový odpor medzi bodmi A a B vo včeľom plaste je $\frac{2R}{3}$.