Fyzikálny korešpondenčný seminár
29. ročník, 2013/2014
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Vzorové riešenia 2. kola letnej časti 2013/2014

2.1 B0 – Tlamotvárač (opravoval Jimi)

Krokodíl Kaksusko bol na prázdninách u krokodíla Kuba. Jeden večer ticho sedel v špajzi a vyjedal bonbóny. Vtedy začul kroky, tak si rýchlo napchal všetky bonbóny do tlamy. Kaksusko nechcel otvoriť tlamu, a tak si naňho Kubo zobral hydraulický otvárač. Otvárač pozostáva z dvoch piestov naplnených kvapalinou a spojených rúrou, ktorou táto kvapalina môže medzi nimi pretekať. Prvý piest má plochu podstavy $S_1 = 1\,\mathrm{m}^2$. Krokodíl stíska tlamu silou $10000\,\mathrm{N}$.

a.) Vypočítajte, aká musí byť plocha druhého piestu, ak vie Kubo tlačiť silou maximálne $100\,\mathrm{N}$. (2 body)

b.) Aký vysoký musí byť druhý piest otvárača, ak chce Kubo otvoriť ústa na $h = 0{,}5\,\mathrm{m}$? (2 body)

c.) Kubo však nemeria ani z polovice toľko, ako výška piestu z časti b.). Skúste navrhnúť, ako by ste vylepšili hydraulické zariadenie na otváranie tlám tak, aby boli oba jeho piesty vysoké maximálne toľko, ako je priemerný krokodíl dlhý. (5 bodov)

Tlak kvapaliny je v potrubí všade rovnaký. To znamená, že ak stláčame piest o ploche $1\,\mathrm{m}^2$ silou $10\,000\,\mathrm{N}$, tak je v nej tlak $10\,000\,\mathrm{Pa}$. Tento tlak bude pôsobiť na oba piesty, nezávisle od ich plochy. Ak Kubo chce otvoriť Kaksuskovu tlamu, musí vyvinúť rovnaký alebo väčší tlak, ako krokodíl. Vie však pôsobiť len stotinovou silou. Ako teda dosiahne tlak $10\,000\,\mathrm{Pa}$? Ak nevie zvýšiť silu, tak musí zmenšiť plochu. Na akú veľkosť? Postavme si trojčlenku:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}\,,$$

kde F_1 a F_2 sú sily, ktorými pôsobia Kaksusko a Kubo a S_1, S_2 sú plochy ich piestov. Po dosadení hodôt dostávame:

$$\frac{10\,000\,\mathrm{N}}{1\,\mathrm{m}^2} = \frac{100\,\mathrm{N}}{S}\,.$$

Z tejto rovnice nám vyplýva, že Kubo by mal mal použiť piest s plochou $0{,}01\,\mathrm{m}^2$. Za toto číslo ste dostávali prvé dva body.

Kvapalina v potrubí má stále rovnaký objem, lebo je nestlačiteľná. Preto ak sa jeden piest navýši o pol metra, druhý sa musí znížiť. O koľko? No predsa tak, aby bola zmena objemu v oboch piestoch rovnaká, tj. o koľko kvapaliny bude v jednom pieste viac, o toľko kvapaliny bude v druhom pieste menej. Poznáme teda plochy oboch piestov a vieme, že jeden sa má navýšiť o $0{,}5\,\mathrm{m}$. Znova si teda môžme postaviť trojčlenku:

$$S_1 h_1 = S_2 h_2\,.$$

V nej vystupujúce h_1 a h_2 sú zmeny výšky, o ktoré sa musia piesty posunúť. Po dosadení hodnôt:

$$1\,\mathrm{m}^2 \cdot 0{,}5\,\mathrm{m} = 0{,}01\,\mathrm{m}^2 \cdot h_2\,.$$

Z nej si vieme vypočítať, že $h_2 = 50\,\mathrm{m}$.

No, 50 m je oveľa viac, ako meria taký krokodíl nílsky (ktorý človeku napadne keď sa povie „krokodíl") s dĺžkou až 5 m. Potrebujeme teda skrátiť výšku piestu asi na desatinu. Dosiahnuť to dokážem napríklad zmenením plôch piestov. To by sa však zmenila sila, ktorou musí Kubo pôsobiť, alebo by sa skrátila vzdialenosť, do akej otvorí Kaksuskovu tlamu. Našťastie pre Kuba nemusí byť piest orientovaný nahor, ale môže byť napríklad naklonený do strany, kde ho môže tlačiť vodorovne. Môže byť aj zatočený, kým dĺžka zatočenej časti bude 50 m.

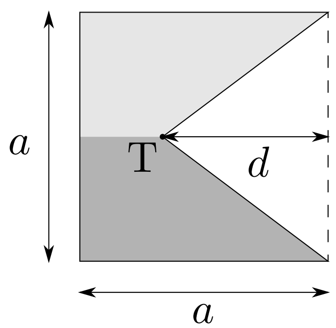
Nikto ale nepovedal že nemôžem do otváraku dočerpávať vodu! Čo ak by otvárak fungoval približne ako pumpa na bicikel?

Predstavme si, že Kubov piest má 5 metrov. Kubo ho začne stláčať. Vždy keď výška kvapaliny v pieste padne pod 3 metre, môžem dočerpať toľko kvapaliny aby bola znova na piatich metroch. Tým pádom môže stláčať kvapalinu o tie isté dva metre koľkokrát chce. Ak teda potlačí svoj piest 25 krát, Kaksuskova tlama bude otvorená. Možností je veľa.

S vašou pomocou má Kubo naspäť svoje cukríky a ani nemusel skákať do výšky (krokodílom to veľmi nejde).

2.2 B1 – Vlajka (opravovala Tinka, vzorák Kubo)

Samko je veľký lokálpatriot. Rozhodol sa to manifestovať vlajkou rodných Levíc. Zobral si teda štvorcový kus papiera s hranou a a vystrihol z neho rovnoramenný trojuholník tak, že jeho základňa bola jedna zo strán štvorca. Potom na jeho veľké prekvapenie zistil, že vrchol trojuholníka oproti základni je zároveň ťažiskom tohto útvaru.

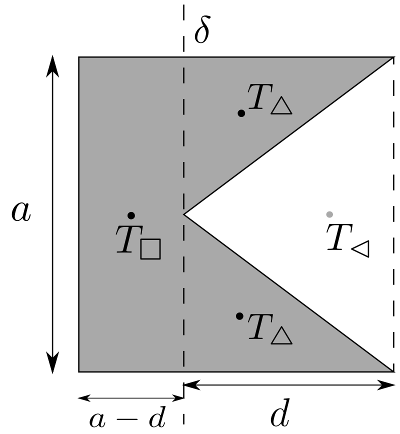


Obr. 1: Vlajka

Nájdite vzdialenosť d stredu základne tohto trojuholníka a ťažiska vlajky.

Zadanie nám prezradilo, že ťažisko T celej Levickej vlajky sa nachádza presne vo vrchole odrezaného trojuholníka. To prakticky znamená, že keď v tomto mieste daný predmet podoprieme, tak sa nijak nepreváži a teda nespadne. Ak sa neprevaži a nespadne, tak to musí znamenať, že sa okolo ťažiska neotáča, čiže musia byť vyrovnané celkové momenty síl všetkých kúsočkov vlajky vzhľadom na takýto bod. To nám hovorí, že ak si vlajku rozrežeme na akékoľvek kúsky (alebo kusiská), tak momenty v ťažiskách týchto kúskov vzhľadom na T budú navzájom vyrovnané.

Úvaha nám napovedá, aby sme si vlajku rozrezali na sympatickejšie tvary, s ktorými sa ľahšie počíta. Jedno zo šikovných delení je napríklad takéto:



Obr. 2: Vlajku sme si osou δ rozdelili na 3 časti: obdĺžnik so stranami a, $a-d$ a dva pravouhlé trojuholníčky s odvesnami $a/2$, d.

Podmienku rovnosti momentu obdĺžnika a trojuholníčkov môžeme zapísať aj takto:

$$M_\square = 2M_\triangle\,.$$

Na určenie týchto momentov potrebujeme jednak vyjadriť hmotnosť daných kúskov oproti celému štvorcu a dvak vyjadriť vzdialenosť ich ťažísk od osi δ. Prvý problém nie je vôbec ťažký, ale pri druhom máme problém, pretože na prvý pohľad nevieme napísať vzdialenosť medzi ťažiskom trojuholníčka $T_\triangle$ a osou δ.[1]

Využijeme teda jeden pekný trik. Vieme, že moment trojuholníčkov sa dá vyrátať aj ako rozdiel momentu ešte celého neobstrihaného obdĺžnika s rozmermi $a\times d$ a odtstrihnutého veľkého trojuholníka.[2] Inak povedané:

$$2M_\triangle = M_\square^* - M_\triangleleft\,.$$

Moment $M_\square^*$ určiť ťažké nie je a moment $M_\triangleleft$ tiež nie, pretože z matematiky vieme, že ťažisko rovnoramenného trojuholníka (s rovnomerne rozloženou hmotnosťou) sa nachadza od vrcholu v dvoch tretinách výšky, ktorá je kolmá na základňu. Problém máme teda vyriešený a môžeme sa pustiť do počítania.

Momenty jednotlivých kúskov získame vynásobením ich plochy a vzdialenosti ich ťažiska od osi δ:

$$\begin{aligned} M_\square &= M_\square^* - M_\triangleleft\,,\\ a\,(a-d)\cdot\frac{a-d}{2} &= ad\cdot\frac{d}{2} - \frac{ad}{2}\cdot\frac{2}{3}d\,,\\ (a-d)^2 &= \frac{d^2}{3}\,. \end{aligned}$$

[1] Na druhý pohľad je to $d/3$.

[2] Na mieste by určite bolo sa spýtať, prečo takéto niečo platí. Nuž, výrazy, ktorými počítame momenty sú lineárne, čo znamená, že môžeme veselo skladať: $M(a+b) = M(a) + M(b)$. Odborne sa toto pravidlo nazýva princíp superpozície.

Odtiaľto už nie je ťažké vyjadriť hľadanú vzdialenosť d ako

$$d = a\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = a\,\frac{3-\sqrt{3}}{2}\,.$$

Plný počet bodov bolo možné získať pochopiteľne iba vtedy, ak sa vám podarilo úplne vyjadriť vzdialenosť d v akomkoľvek exotickom tvare, ktorý dáva rovnaký číselný výsledok s uvedenými vyššie. Postupovať ste mohli rôzne, vo vzoráku sme sa vám pokúšali priblížiť (zrejme) ten najrýchlejší spôsob.

2.3 B2 – Trojnohý stôl (opravoval Jakub)

Nervy má občas Kaja na Andreja riadne. Minule ju naštval tak, že chytila nohu svojho obdĺžnikového stola s hmotnosťou M, dĺžkou a a šírkou b, odtrhla ju a hodila po ňom. Našťastie, nohy Kajinho stola sú zanedbateľne ľahké (teda ťažisko stola ostalo stále na priesečníku uhlopriečok dosky) a Andrej sa uhol. Noha stola preletela von oknom. Kaja, aby predišla prípadnej katastrofe s nestabilným stolom, si do rohu stola oproti chýbajúcej nohe položila jej obľúbený kvetináč so slnečnicou s hmotnosťou m.

Akými silami teraz tlačí každá z troch nôh stola na zem?

Hrany stola si označme A, B, C a D a ťažisko stola T. Uvažujme, že Kaja ulomila nohu pod bodom A. Kvetináč potom musela položiť do protiľahlého bodu C. Tiažová sila, ktorá pôsobí na samotný stôl, pôsobí v ťažisku T a tiažová sila pôsobiaca na kvetináč pôsobí v bode C.

Rovnakou silou (ale opačného smeru), akou pôsobí stôl na jednotlivé nohy, pôsobia aj nohy na stôl. Označme si tieto sily F_B, F_C a F_D a tiažové sily $F_M = Mg$ a $F_m = mg$.

Máme teda tri neznáme sily. K nim budeme potrebovať logicky tri rovnice. Prvou z nich by mohla byť rovnica, ktorá nám hovorí, že súčet všetkých síl je rovný nule (keďže sa stôl nepohybuje).

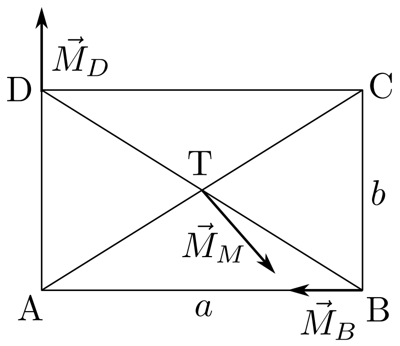
$$F_M + F_m = F_B + F_C + F_D\,.$$

Jednu by sme mali, už nám stačia iba dve. Keďže stôl ani nerotuje, bude zrejme aj súčet momentov síl vzhľadom na ľubovoľný bod nulový. Zoberme napríklad bod C. Vzhľadom na tento bod majú sily F_C a F_m nulový moment síl a ostanú nám iba tri sily. Sila F_B má moment sily $M_B = F_B b$, ktorý je kolmý na silu F_B aj na rameno b[3], t.j. má smer rovnobežný s priamkou AB. Sila F_D má moment sily $M_D = F_D a$, ktorý má smer rovnobežný s priamkou AD. Sila F_M má moment sily o veľkosti

$$M_M = \frac{1}{2} F_M \sqrt{a^2+b^2}\,,$$

pričom tento moment sily má zložky v oboch smeroch, konkrétne v smere rovnobežnom s AB má zložku $M_{Mx} = F_M b/2$ a v smere kolmom na AB je to zložka $M_{My} = F_M a/2$.

[3] Moment sily je vektor ktorý vypočítame ako vektorový súčin $\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$. Moment sily je preto vždy kolmý na silu aj na rameno sily. Navyše, ak sa pozeráme na stôl zhora, tak moment sily musí pôsobiť v smere hodinových ručičiek ak sila pôsobí smerom nahor a proti smeru hodinových ručičiek ak sila pôsobí smerom nadol.



Obr. 3: Momenty síl

Keďže momenty síl musia v oboch smeroch dávať nulový súčet, získavame dve rovnice, ktoré sme potrebovali

$$F_B b = \frac{1}{2} F_M b\,,$$
$$F_D a = \frac{1}{2} F_M a\,.$$

Z týchto troch rovníc veľmi ľahko zistíme riešenie. Na nohu, ktorá leží pod kvetináčom pôsobí iba tiažová sila kvetináča $F_C = mg$ a na zvyšné dve nohy je rovnomerne rozložená tiaž stola $F_B = F_D = Mg/2$. Týmito silami pôsobia aj samotné nohy na zem. Rovnaký výsledok by sme dostali, keby sme počítali momenty síl vzhľadom na ľubovoľný iný bod. Pre ľubovoľný bod totiž musí platiť, že vektorový súčet momentov síl je rovný nule, pretože stôl sa v žiadnom smere neotáča. V každom bode tak dostaneme dve rovnice o dvoch neznámych, pretože momenty síl si môžeme rozložiť do dvoch kolmých smerov. Z týchto rovníc je už potom ľahké získať hľadané sily.

2.4 B3/A1 – Teplovzdušná špionáž (opravoval Mišo)

Dušan sa chystá vypustiť špionážnu sondu, aby mohol špehovať obyvateľov intrákov a posielať najnovšie drby na `drby@fks.sk`. Na to ale bude potrebovať teplovzdušný balón, ktorý odnesie jeho odpočúvacie zariadenie. Zoberte si teda svoj obľúbený veľký sáčok, ideálne tenké vrece na odpadky, a naplňte ho teplým vzduchom.

- Teoreticky odhadnite ťah svojho sáčku, teda maximálnu záťaž, ktorú je schopný uniesť, aby ešte bol schopný vzlietnuť. (2 body)
- Namerajte hodnotu ťahu tohto sáčku. Samozrejme, odhadnite aj chybu svojho merania. (5 bodov)
- Zvyšné dva body získate za fotku svojej aparatúry. Ak ste papieroví riešitelia a nechce sa vám fotku tlačiť, submitnite nám ju vloženú v dokumente formátu .doc alebo .pdf cez `submit.fks.sk`.

Sáčok je nadnášaný vďaka vzlakovej sile podľa Archimedovho zákona:

$$F_{\text{vz}} = V \rho_0 g\,,$$

kde ρ_0 je hustota vzduchu v okolí a V objem sáčku. Na to, aby sa sáčok aj reálne vznášal smerom nahor, F_{vz} musí prekonať tiaž sáčku a vzduchu v ňom $F_G = V\rho g$, kde ρ je tentokrát hustota horúceho plynu v sáčku. Hmotnosť sáčku môžme odvážiť: náš sáčok vážil 10 g

Teraz môžme definovať užitočnú ťahovú silu smerom nahor:

$$F = F_{\text{vz}} - (F_{G\text{vzduch}} + F_{G\text{sáčok}}) = V\Delta\rho g - m_{\text{sáčok}}g\,,$$

kde $\Delta\rho$ je rozdiel hustôt vzduchu vonku a v balóne. Pre číselné hodnoty sa pozrite na internet do tabuliek závislosti hustoty od teploty (tú odmeriame teplomerom). Po prerátaní ťahovej sily na hmotnosť možnej záťaže (vydelením g) nám takto vyšla hodnota približne 13 g pre 25 l sáčok, hustoty vzduchu $\rho(20^\circ\,\text{C}) = 1{,}204\,\text{g.dm}^{-3}$ a $\rho(50^\circ\,\text{C}) = 1{,}060\,\text{g.dm}^{-3}$. Inou možnosťou je výpočet hustoty pomocou stavovej rovnice, ale pre naše potreby je to zbytočné.

Praktické prevedenie experimentu môže vyzerať takto: na spodok sáčku pomocou lepiacej pásky prilepíme nitky, povedzme v štyroch bodoch. Pod otvor umiestnime niekoľko sviečok, ale bez toho, aby sme nimi sáčok zaťažovali. Záťaž môžeme realizovať prilepovaním malých kúsočkov plastelíny na nitku, ako koráliky. V momente keď sa bude sáčok akurát vznášať, tak buď odškrabeme a odvážime plastelínu, alebo odstrihneme nitku aj s plastelínou a odvážime záťaž takýmto spôsobom.

Po odvážení sme zistili, že náš tenký žltý sáčok unesie 8,2 g plastelíny. Meranie sme zopakovali trikrát, ale váhy merajúce len na desatiny gramu ukázali vždy rovnakú hodnotu. Neistota výsledku vnesená vážením je tým pádom polovica najmenšieho dieliku váhy, teda 0,05 g. Pokiaľ by nám pri vážení vyšli rôzne hmotnosti, tak by sme museli počítať tzv. strednú smerodajnú odchýlku, ktorej spôsob výpočtu uvedieme, lebo sa vám v budúcnosti zíde. Tá sa počíta pomocou štandardného vzorca

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i - x_{\text{priemer}})^2}{N(N-1)}}\,,$$

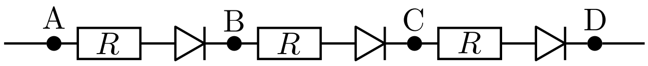
v ktorom N je počet meraní, x_{priemer} je priemerná hodnota všetkých meraní. Jednotlivé namerané hodnoty x_i sčítavame pomocou sumačného znamienka Σ, ktoré predstavuje skrátenú formu zápisu súčtu N členov v zátvorke.

Ďalšia a podľa nás dominantná neistota vzniká naším subjektívnym určením stavu, kedy sa sáčok práve vnáša. Veľkosť tejto chyby môžme odhadnúť napríklad takým spôsobom, že balón naschvál zaťažíme o máličko väčšou hmotnosťou a budeme sledovať ako sa to prejaví na rýchlosti jeho pádu. Inak povedané, subjektívne chyby odhadujeme znova len subjektívne.

Celková neistota nám takto vyšla $\pm 0{,}15$ g. Mnohí z vás uvažovali o vplyve prúdenia teplého vzduchu a prestupu tepla cez sáčok von. Lenže, uvedomme si, že ak stav systému pri našom meraní prehlásime za rovnovážny (čo asi aj trošku bude, keďže sa nám balón má akurát vznášať), tak v tomto meraní celkového stavu systému máme zahrnuté všetky jeho vnútorné deje. To je najpohodlnejší a často jediný spôsob ako „opinkať“ systémy, ktoré su na mikroskopickej úrovni príliš zložité. Zahrnutie prúdenia a vedenia tepla do teórie by vyžadovalo náročnú fyziku a počítačové výpočty.

2.5 B4/A2 – O odporoch a diódach (opravoval Maťo Ch.)

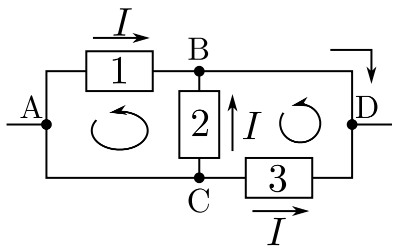
Za tromi horami a tromi dolinami si na stole jedného jednonohého elektrikára hoveli tri diódy a tri odpory. I tu si on jedného dňa pomyslel, že by z nich boli pekné páry. Zostrojil teda svadobný obvod a takto ich do série zapojil:



Obr. 4: Sériové zapojenie odporov a diód

No stále nebol spokojný. Prúd mu mohol tiecť len jedným smerom. I zamyslel sa a vodivo spojil uzol A s uzlom C a uzol B s uzlom D. Nože nám povedzte, ako sa tým zmenil výsledný odpor medzi uzlami A a D v jednotlivých smeroch.

Pred tým, ako sa pustíme do samotného riešenia príkladu, najskôr sa pozrieme, aký by mal obvod odpor v oboch smeroch, ak by v ňom neboli diódy. V druhej časti potom zistíme, čo na prvom výsledku zmenia diódy. Deformáciou vodičov obvodu, pričom s uzlami nič nerobíme, ho ide prekresliť na nasledovné ekvivalentné zapojenie:



Obr. 5: Prekreslené zapojenie bez diód

V oboch naznačených slučkách musí byť súčet úbytkov napätí na odporoch rovný nule, lebo v slučkách nie je žiaden zdroj.[4] Teda máme:

$$U_1 = -U_2 = U_3 \,.$$

Platí tiež Ohmov zákon v tvare $U = R/I$. Nakoľko majú rezistory rovnaký odpor, v kombinácii s predošlou rovnicou to dáva pre prúdy podmienku:

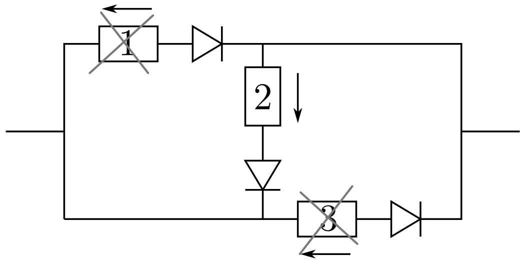
$$I_1 = -I_2 = I_3 \equiv I \quad .$$

Aby sa v žiadnom z uzlov nehromadil náboj, musí byť súčet prúdov vtekajúcich do uzla a vytekajúcich z uzla rovný nule – preto budú vodičmi bez rezistorov pretekať prúdy o veľkosti $2I$.

V ďalšom už pôjde naozaj do tuhého. Pridáme diódy. Ich efekt bude ten, že ak by mal ísť prúd cez diódu v nejakom smere, tak proste nepôjde.[5] Použime ďalej podobnú argumentáciu ako v predošlom prípade bez diód. Zoberme dva prípady.

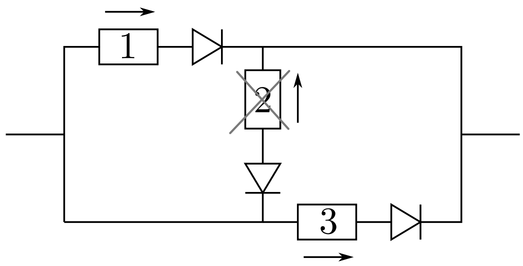
[4] Tejto úvahe sa hovorí 2. Kirchhoffov zákon.

[5] Pozor však! dióda môže aj v závernom smere vytvárať protinapätie. Robí to tak, že sa na nej nahromadí náboj podobne ako na kondenzátore.



Obr. 6: Vplyv diód pri jednom smere prúdu

(i) Prúd tečie cez rezistor 2 smerom dole. Z nulovosti súčtov úbytkov napätí v rovnakých slučkách ako v prípade bez diód dostávame, že prúd netečie cez rezistory 1 a 3. Musel by totiž tiecť v smere, v ktorom je dióda uzavretá. Obvod sa teda redukuje na prostý jeden vodič, na ktorom je rezistor s odporom R. Taký je preto aj odpor sústavy v tomto prípade.



Obr. 7: Vplyv diód pri druhom smere prúdu

(ii) Prúd netečie cez rezistor 2. Nakoľko stredom prúd netečie, zoberieme si teraz slučku obopínajúcu celý obvod. A znova nás čaká milé prekvapenie. Dostávame iba dva paralelne spojené rezistory. Odpor v tomto prípade bude preto

$$R_{\mathrm{celk}} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}\,.$$

2.6 A3 – Moment, a čo hybnosti? (opravovala Tinka, vzorák Mišo H.)

Filip si zobral dve guličky a bodový motorček, ktorý dokáže navíjať nehmotné lanko, ktorého dva konce z neho trčia. Oba konce sú rovnako dlhé a motorček ich vťahuje rovnakou rýchlosťou. Na začiatku Filip odniesol motorček do prázdneho vesmíru a uviazal na konce lanka dve rovnaké hmotné guličky. Roztočil ich tak, že obidve sa točia rovnomerne po kružnici, ktorej stred je motorček. Potom motorček začal vťahovať oba konce lanka. Vieme, že platí zákon zachovania momentu hybnosti, a vďaka nemu tieto guličky zrýchlili na vyššiu rýchlosť.

Aká reálna sila ale spôsobila urýchlenie týchto guličiek?

Prvým podozrivým je motorček. Ten ťahá guličky k sebe prostredníctvom lanka, teda sila pôsobiaca na guličky je *ťahová sila lanka*. Je ale známe, že dostredivá sila telesá neurýchľuje, pretože je kolmá na smer pohybu a teda nekoná prácu.[6] A vyzerá to, že lanko ťahá guličky do stredu, tak skúsme hľadať ďalej.

Vesmír je takmer prázdny, iné sily hľadáme márne. Iba z neinerciálnych sústav hlásia, že vidia rovno štyri sily. Pri týchto silách (zotrvačná, odstredivá, Coriolisova a Eulerova) je ale na mieste sa zamyslieť, či sú reálne. Aký je rozdiel medzi reálnou a nereálnou (fiktívnou) silou?

- Reálna sila predstavuje *vzájomné pôsobenie* dvoch telies, ako to poznáme z Newtonovho zákona akcie a reakcie. Ak lanko ťahá guličky, aj guličky ťahajú lanko opačným smerom. Ak však pociťujeme zotrvačnú silu smerom dopredu v brzdiacom aute, nikoho tým netlačíme dozadu. Zotrvačná sila je fiktívna, pretože v skutočnosti nás dopredu nič (žiadne iné teleso) neťahá. Je iba prejavom spomalenia našej vzťažnej sústavy.
- Reálne sily, na rozdiel od fiktívnych, sú *rovnaké v každej vzťažnej sústave.* Ťah lanka, gravitácia či trenie sa nemenia podľa toho, v akej sme vzťažnej sústave. Ale stojaci pozorovateľ, keď nás vidí brzdiť v aute, zotrvačnú silu nevníma. Naše pohyby vysvetlí tým, že naše telo pokračuje v ceste dopredu, až kým ho sedadlo a bezpečnostné pásy nezastavia.

Pretože guličky zrýchlili aj v inerciálnej vzťažnej sústave, určite existuje reálna sila, ktorá za to môže. Ťah lanka je jediný podozrivý a teda naozaj aj vinný. Ako guličky urýchlil?

Je pravda, že *dostredivá sila* neurýchľuje. Preto kým sa guličky iba krútili dookola, ich rýchlosť sa nemenila a ťah lanka bol dostredivou silou. Ale keď začal ťahať silnejšie, stalo sa nasledovné:

Najprv guličky zabočili viac smerom k motorčeku kvôli vyššej dostredivej sile. Od toho momentu už ale nešli iba dookola, ale sa aj približovali k motorčeku. A to je dôležité: istá zložka ťahovej sily totiž začala pôsobiť *v smere pohybu*, čím guličky *urýchľovala*, konala prácu. Ťah lanka prestal byť len dostredivou silou.[7]

Lanko sme usvedčili, ale bol porušený zákon? Zákon zachovania momentu hybnosti určite nie. Súčet momentov všetkých síl je nulový a moment hybnosti sa zachováva.[8]

A zákon zachovania energie platí tiež. Guličky síce zrýchľujú, ale iba vtedy, keď sa približujú, a vtedy ťahová sila koná prácu. Motorček vtedy míňa energiu, ktorú má kdesi uloženú (v baterkách, palive, natiahnutej gumičke. . .).

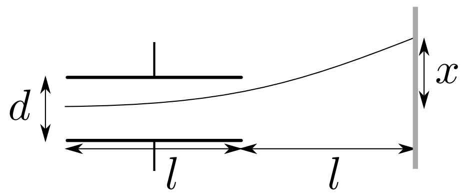
2.7 A4 – Prelet pomedzi platne (opravoval Paťo)

Elektrón letiaci rýchlosťou v blízkou rýchlosti svetla vletel doprostred kondenzátora, paralelne s jeho platňami. Kondenzátor je napájaný napätím U, platne sú dĺžky l a od seba sú vzdialené d. Po prelete kondenzátorom dopadol elektrón na tienidlo vzdialené l od konca kondenzátora. Ako veľmi sa elektrón odchýlil pri dopade od bodu, kam by dopadol, keby tam žiaden kondezátor nebol?

[6] Ak sila nekoná prácu, nemôže meniť kinetickú energiu telesa.

[7] Dostredivá sila je taká, ktorá má smer do stredu kružnice, po ktorej sa teleso práve pohybuje („oskulačná“ kružnica) – teda kolmo na smer pohybu. Motorček je síce v strede lanka, ale nie vždy v strede oskulačných kružníc.

[8] Tento zákon tiež vystupuje ako jedna z pohybových rovníc pre guličky v polárnych súradniciach.



Obr. 8: Trajektória elektrónu

Okrajové javy na kondenzátore môžete zanedbať. Zato relativistické javy nie.

Napätie v kondenzátore bude vytvárať elektrické pole s intenzitou $E = U/d$. Na elektrón bude teda pôsobiť sila vo vertikálnom smere (tento smer si v rámci konzistencie s obrázkom označme za smer x):

$$F_x = eE = \frac{eU}{d}\,,$$

kde e je (elementárny) náboj elektrónu. Ak zanedbávame okrajové javy na kondenzátore, bude platiť, že urýchľovaný bude len vnútri kondenzátora, mimo neho nebude na elektrón pôsobiť žiadna sila a teda bude sa pohybovať rovnomerne priamočiaro.

Áno, Newtonove zákony platia aj v relativite. No musíme si dávať trošku pozor – napríklad vzťah $F = ma$ je v relativite viac ako provokatívny, pretože definovať *relativstické* zrýchlenie je síce možné, ale nepočíta sa s ním bohvieako.

Preto musíme použiť inú, v tomto prípade praktickejšiu formuláciu pomocou hybností. Platí, že časová zmena hybnosti je rovná pôsobiacej sile. V našom prípade

$$F_y = \frac{\Delta m v_y}{\Delta t} = 0\,\mathrm{N}\,, \qquad F_x = \frac{\Delta m v_x}{\Delta t} \neq 0\,\mathrm{N}\,.$$

Je hádam jasné, že hmotnosť v týchto vzťahoch je relativistická. Platí pre ňu, že je oproti *pokojovej* hmotnosti m_0 zväčšená o Lorentzov faktor γ:

$$m = \gamma m_0\,, \qquad \text{kde } \gamma = \frac{1}{1 - v^2/c^2}\,.$$

Člen v v Lorentzovom faktore značí celkovú rýchlosť a je rovný $\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Teraz si môžeme vybrať v postupe dve cesty. Prvá bude rýchlosti naozaj sčítať a úlohu bude počítať exaktne. Druhá cesta sa vykašle na takéto „formality“ a bude uvažovať zdravým rozumom: keďže už vlietavajúci elektrón sa pohybuje relativsticky, tak pre rozumne stanovené rozmery d a l môžeme čakať, že elektrón sa v kondenzátore príliš neohreje, ale preletí ním za veľmi krátky čas.

Za tento čas pole nestihne poriadne zareagovať, a preto sa elektrón v x-ovom smere rozbehne len na malú, *nerelativistickú* rýchlosť. Schválne, overme si to. Ak si dosadíme za $U = 10\,\mathrm{V}$, $l = 30\,\mathrm{cm}$, $d = 1\,\mathrm{cm}$ a $v = 0{,}9c$, dostaneme, že na elektrón pôsobí sila

$$F_x = \frac{eU}{d} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 10\,\mathrm{V}}{0{,}01\,\mathrm{m}} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{N}\,.$$

Ak silu vydelíme $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, dostaneme horný odhad zrýchlenia (v skutočnosti bude elektrón tučnejší, preto zrýchli menej):

$$a_x = F_x/m_0 \approx 1{,}8 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m{,}s^{-2}}\,.$$

Vyzerá to ako veľké zrýchlenie (v skutočnosti to veľké zrýchlenie aj je), no za čas $t = l/v$ urýchli elektrón len na asi 0,07% rýchlosti svetla. Príspevok tejto rýchlosti do celkovej rýchlosti je ešte o niekoľko rádov nižší a teda *zanedbateľný*. Prepokladajme preto, že v je konštantná.

Po tomto predpoklade nezostáva nič iné ako konštatovať, že hybnosť v y smere zostane počas celého pohybu rovnaká. Na druhej strane, v x smere bude elektrón zrýchľovať – no nerelativisticky. V tomto smere preto môžeme použiť obyčajnú fyziku:

$$F_x = m\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = m a_x \quad \Rightarrow \quad a_x = \frac{eU}{\gamma m_0 d}\,.$$

Z tejto rovnice pre rovnomerne zrýchlený pohyb vieme vytrieskať aj prejdenú dráhu

$$s_x = \frac{1}{2} a_x t^2\,.$$

Tým máme pekne popísané všetko, čo sa v situácii deje.

Nás teraz bude zaujímať, ako vyzera v_x a s_x v čase

$$\tau = \frac{l}{v}\,,$$

čo je čas preletu kondenzátorom. Ak predpokladáme, že v čase $t = 0$ boli v_x aj s_x nulové, bude platiť

$$v_x = a_x \tau = \frac{eUl}{\gamma m_0 d v}\,, \qquad s_x = \frac{eUl^2}{2\gamma m_0 d v^2}\,.$$

Ďalší čas τ ubehne, medzi opustením kondenzátoru a nárazom do tienidla. Výchylka sa zväčší o

$${s'}_x = v_x \tau = \frac{eUl^2}{\gamma m_0 d v^2}\,.$$

Teda výsledná výchylka elektrónu v tomto priblížení je

$$x = s_x + {s'}_x = \frac{3}{2}\frac{eU}{\gamma m_0 d v^2} l^2\,.$$

Upozornenie a poučenie: Predvedené riešenie naozaj funguje ako prvotný odhad problému. Na dôsledné fyzikálne riešenie by bolo treba uvažovať, že m nie je konštanta a riešiť nie úplne peknú sadu rovníc a dlhým a nevábne vyzerajúcim výsledkom. Riešitelia, ktorí sa o to pokúsili, dostali samozrejme aj lepšie bodové ohodnotenie.

Na rozumnú kontrolu výsledkov v relativite sa dá použiť overenie tzv. klasickej limity – znamená to, že budeme predpokladať $v \ll c$ a skúsime z rovníc niečo vytrieskať. V tomto prípade sa zmení akurát faktor γ v menovateli na jednotku, čím sa nami vypočítaný vzorec zmení na nerelativistický. Overenie ale už nechávame na vás.