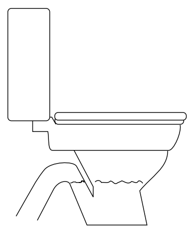
Fyzikálny korešpondenčný seminár
29. ročník, 2013/2014
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Vzorové riešenia 1. kola letnej časti 2013/2014

1.1 B0 – Záhadný záchod (opravoval Samko)

Malý Jurko si púšťal svoju gumenú kačičku v záchode. Zdalo sa mu však, že je tam málo vody. Tak teda nejakú prilial, no hladina sa vôbec nezdvihla. Prečo?

Záchod, to je miesto, kde vzniká nespočetné množstvo dobrých nápadov. Pri riešení tohoto príkladu ste však ani tak nepotrebovali dostať nápad, ale pozrieť sa, ako ten záchod reálne vyzerá. S týmto problémom vám dokonca nepomôže ani prieskumná kačička plávajúca na hladine, pretože chceme vidieť až do útrob nášho záchodu. V tomto momente by vás mohlo napadnúť, že kačičku môžete predsa spláchnuť. Počkať? V žiadnom prípade! Žiadna kačička sa nebude splachovať! Radšej si nájdeme rozumný obrázok záchodu aj s vnútornosťami. Veď predsa, nemusíme vymyslieť záchod, stačí len popísať, ako funguje ten už vymyslený. Nuž hľa, tu je náš záchod:



Obr. 1: Schéma záchoda

Kľúč k úspechu tohto vynálezu je skrytý v rúre, ktorou odteká voda preč. Ak totiž pridáme vodu do záchodu, začne stúpať aj hladina vody na ľavej strane. Môžme si to predstaviť ako takú U-trubicu. Avšak ako vidíme, akonáhle začne stúpať hladina vody, tak táto voda začne odtekať, pretože túži ísť dole kopčekom. A kedy prestane odtekať? No predsa vtedy, keď už nebude môcť odtekať týmto kopčekom, lebo naň akurát nemôže dočiahnuť. To je však taká istá situácia, akú sme mali na začiatku pred spláchnutím. Preto teda výška hladiny zostane úplne rovnaká. Rozdiel by nastal, keby pred spláchnutím nebola v záchode takáto maximálna výška hladiny. To môže byť spôsobené napríklad tým, že dlho nespláchneme záchod a voda sa proste odparí.

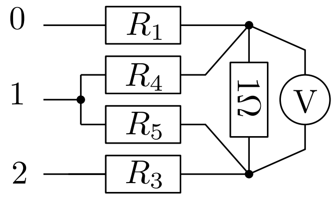
1.2 B1 – Krepá kalkulačka (opravoval Jimi)

Máme kalkulačku. Ale vie iba odčítavať. Aj to len menšie od väčšieho. A aj to len čísla 0, 1 a 2. A vlastne ju ani nemáme. Tak ju navrhnite!

Seminár podporujú:

Mala by vyzerať takto: Krabička v strede má tri kontakty: 0, 1 a 2. Výsledok získame tak, že pripojíme jeden pól zdroja na číslo, ktoré chceme odčítať, a druhý pól na číslo, od ktorého odčítavame. Hľadaný rozdiel sa zobrazí na voltmetri (vo voltoch). Ostáva len jedna otázka. Čo má byť v krabičke s otáznikom, ak máme k dispozícii už len vodiče a rezistory?

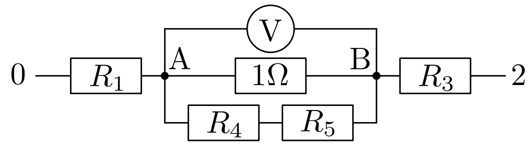
Najprv sa pokúsme navrhnúť nejakú odporovú schému kalkulačky. My sme si zvolili tú na obr. 2 a budeme sa pokúšať dorátať hodnoty jednotlivých odporov v nej. Preto sme ich hodnoty označili vo všeobecnosti premennými. Ak by sa táto schéma ukázala byť zlá a neschopná splniť podmienky zo zadania, jednoducho by sme si vymysleli nejakú inú a rátali odpory pre ňu.



Obr. 2: Navrhnutá schéma

Predpokladáme, že body 0, 1, 2 uzatvárajú obvod, len ak sú napojené priamo na zdroj. To napríklad znamená, že ak zapojíme zdroj do bodov 1 a 2, tak rezistorom R_1 nebude pretekať prúd Inak povedané, odpory na slepých koncoch neprispievajú k odporu konkrétneho zapojenia.

Pri pripojení bodov 0 a 2 na dvojvoltový zdroj tak, aby prúd tiekol z bodu 0 do bodu 2, by voltmeter mal ukazovať 2 V. Vtedy si vieme zapojenie prekresliť na toto zapojenie:



Obr. 3: Schéma pre zapojenie bodov 0 a 2

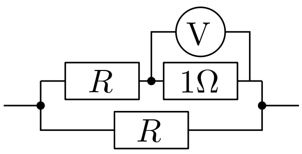
Teda naraz medzi bodmi 0 a 2 a bodmi A a B (uzly, ku ktorým je pripojený voltmeter) má byť napätie 2 V. Napätie na odpore R_1 označme U_1, na odpore R_3 označme U_3. Keďže odpormi R_1 a R_3 preteká prúd I rovnakým smerom, tak na oboch vzniknú kladné napätia $U_1 = IR_1$ a $U_3 = IR_3$, teda pre napätie medzi bodmi 0 a 2 bude platiť, keďže je to len sériové zapojenie:

$$2\,\mathrm{V} = IR_1 + 2\,\mathrm{V} + IR_3\,,$$
$$0 = IR_1 + IR_3\,,$$

Prúd je kladný a odpory nemôžu byť záporné, teda nám ostáva jediná možnosť: $0 = R_1 = R_3$, teda medzi 0 a A a medzi B a 2 sú vlastne len vodiče, tj. bod 0 je totožný s bodom A a bod 2 s bodom B.

To by sme mali zapojenie 0-2, teraz sa pokúsme vyriešiť zapojenia 0-1 a 1-2. Pri oboch zapojeniach by mal voltmeter ukazovať rovnako: 1 V. Môžme si všimnúť, že schémy sú vlastne rovnaké. Rovnaké sú tiež aj napätia na zdroji a voltmetri. Len s tým rozdielom, že odpory R_4

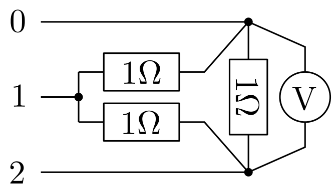
a R_5 si vymenia miesto. Tým pádom musí platiť $R_4 = R_5$. Túto hodnotu odporu si označíme R. Zapojenie si teda vieme prekresliť pre oba prípady takto:



Obr. 4: Schéma pre zapojenie bodov 0 a 1, resp. 1 a 2

Zoberme si hornú vetvu paralelného zapojenia. Napätie na jej koncoch je napätia zdroja, teda 2 V, kým napätie na odpore „1Ω" je podľa voltmetra 1 V. Teda aj napätie na R je 1 V. Na odporoch sú rovnaké napätia a preteká nimi rovnaký prúd, teda aj ich odpor musí byť rovnaký, čiže $R = 1\Omega$.

Čiže naša (nie až tak) úžasná kalkulačka bude teda vyzerať takto:



Obr. 5: Vyhovujúca schéma

1.3 B2 – Polámaný mlyn (opravovala Kačička)

Kaja dostala ekologické chúťky a keďže nie je teoretická fyzička a vie robiť s kladivom, postavila si na balkóne veterný mlynček so štyrmi homogénnymi obdĺžnikovými lopatkami, ktorý mal napájať jej stolnú lampu. No prišiel silný víchor a polámal Kajinmu mlynčeku lopatky tak, že ich dĺžky sú teraz v poradí l, $2l$, $3l$ a $4l$.

Kajin mlynček sa otáča v ložisku bez trenia a pôvodná os otáčania mlynčeka bola vodorovná. Aká je stabilná poloha mlynčeka, keď nefúka vietor?

Luxusko vie intuitívne povedať, že dve väčšie lopatky vedľa seba budú ťažšie, ako dve menšie. Preto Luxusko predpokladá, že dve dlhšie ramená sa budú nachádzať pod osou otáčania. Najdlhšie bude zvierať s osou y uhol α.

Stabilná poloha. To je predsa stav, keď je výslednica síl pôsobiacich na teleso nulová, a aj celkový moment sily sa rovná 0. Ešte o nej vieme, že teleso je v stabilnej polohe vtedy, keď nadobúda jeho potenciálna energia extrémnu hodnotu, teda je minimálna. Luxusko má teda dve cesty, ktorými sa jeho myšlienky môžu pobrať.

Luxusko sa najprv zamyslí nad energiou. Uvedomí si, že potenciálna energia nadobúda najnižšiu hodnotu, keď sa ťažisko telesa nachádza v najnižšej možnej polohe a najvyššiu, keď je ťažisko v najvyššej polohe. Teraz potrebuje zistiť, kde je ťažisko polámaného mlynčeka. To sa dá rôznymi spôsobmi. Keďže Luxusko je lenivý, vybral si najjednoduchší výpočet, aký ho napadol. Strčí mlynček do vzťažnej sústavy so stredom v bode, kde sa stretávajú lopatky a osi ležia na ramenách.

Zoberie každú lopatku zvlášť a nájde jej ťažisko. Sú homogénne – teda ťažisko majú vo svojom strede.

$$T_1 = [0l; 0{,}5l]\,, \qquad T_2 = [-l; 0l]\,, \qquad T_3 = [0l; -1{,}5l]\,, \qquad T_4 = [2l; 0l]\,,$$

Teraz postupne nájde x-ovú a y-ovú zložku spoločného ťažiska T podľa vzorca:

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i m_i}{m_i}\,,$$

Lopatky sú homogénne, tj. namiesto hmotnosti môžeme do vzťahu dosadiť dĺžky jednotlivých ramien. Teda dostávame

$$T_x = \frac{0l \cdot l + (-l) \cdot 2l + 0l \cdot 3l + 2l \cdot 4l}{10l} = 0{,}6l\,,$$
$$T_y = \frac{0{,}5 \cdot l + 0 \cdot 2l + (-1{,}5l) \cdot 3l + 0l \cdot 4l}{10l} = -0{,}4l\,,$$

Poloha ťažiska mlynu je

$$T = [0{,}6l; -0{,}4l]\,,$$

Teraz už len zistíme uhol α:

$$\tan\alpha = \frac{0{,}6l}{-0{,}4l} \Rightarrow \alpha = 33{,}7^\circ\,,$$

Luxusko vám ďakuje za pozornosť.

1.4 B3/A1 – Panoráma č.3 (opravoval Vlejd, vzorák Squiddie)

Squiddiemu ukázal jeho otec fotku, ktorú odfotil, aj s popismi vrchov, ktoré sú na nej.

Squiddie na základe tohto porátal zemepisnú šírku, zemepisnú dĺžku a výšku nad zemským povrchom miesta, kde bola táto fotka odfotená. A to aj s odhadom chyby výpočtu. Dokážete to aj vy? Link na fotku je `http://fks.sk/~andrej/panorama_velka.jpg`. Pri riešení odporúčame použiť Google Earth alebo nejaký jeho ekvivalent.

Pánovi Jánovi Balážovi za fotku ďakujeme.

Úloha chcela tak trochu vyskúšať, ako sa viete popasovať s fyzikálnou realitou a spracovať namerané dáta bez ďalšej pomoci. Každý si musel všimnúť, že riešenie určite existuje – fotka je skutočná a teda fotoaparát niekde musel byť. Navyše sa dalo veľmi ľahko odhadovať, či to, čo vám vyšlo, mohli byť správne hodnoty. Možných spôsobov riešenia bolo veľmi veľa a niektoré z nich dokonca aj viedli k správnemu výsledku :-)

Tie spravidla začínajú takto: najprv zistíme zemepisnú šírku a dĺžku. Najjednoduchšie bude, ak nájdeme dve dvojice známych bodov, ktoré vidíme presne v zákryte – potom musí byť fotoaparát v priesečníku priamok, ktoré tieto body určujú. Nejaké takéto body síce máme, ale žiadna dvojica nie je dosť význačná, aby sme ju mohli s istotou zamerať. Zato však máme mnoho takých dvojíc bodov, ktoré sú na fotke jeden nad druhým, a to nám na určenie zemepisnej šírky a dĺžky stačí.[1] Výšku budeme musieť dopočítať nejako inak.

[1]Dokonca by nám stačili dve ľubovoľné dvojice, ale museli by sme počítať prienik dvoch všeobecných rovín v priestore... a tomu je lepšie sa vyhnúť.

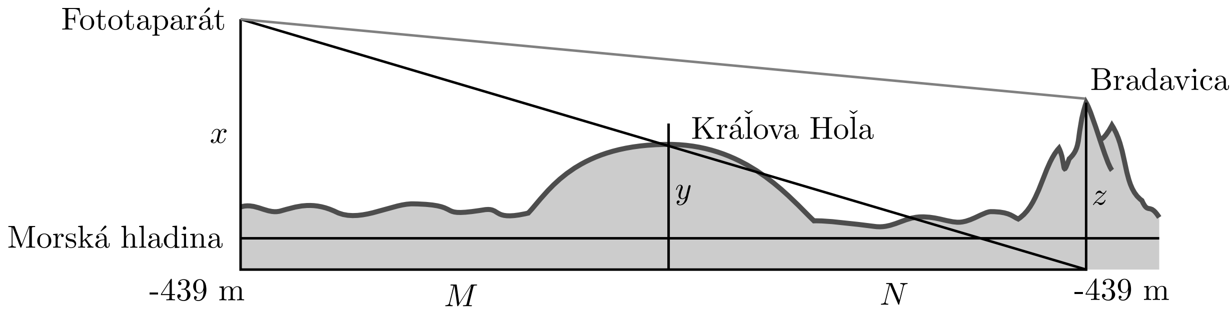
Ako prvá dvojica sa nám ponúka vrch Bradavica a päta vysielača na Kráľovej holi. Oba vrchy sú výrazné a dajú sa ľahko nájsť na mape. Druhú dvojicu môžeme zvoliť ľubovoľnú, jedinou podmienkou je, aby bola na fotografii čo najďalej od prvej[2] Môžeme použiť napríklad Kriváň a lavínový svah na Bartkovej, prípadne Ostrú a Krátku. Keď sa trochu pohráme s Google Earth®, výsledné priamky sa pretnú južne od Revúcej na vrchu Železník, niekde blízko súradníc 48,6252°N a 20,1256°E (alebo v minútach a sekundách 48°37′31″N, 20°07′32″E).

Máme teda polohu bodu na zemi pod fotoaparátom. Samozrejme, fotografia bola urobená z lietadla, takže tretiu súradnicu nám Google Earth® nepovie, ale ju budeme musieť spočítať.

Ak si dovolíme zanedbať zopár drobností, napríklad považujeme Zem za plochú dosku a povieme si, že pre veľmi malé uhly platí $\tan x = x$, ostáva iba vcelku jednoduchá rovinná geometria. Stačí vhodne zvoliť referenčné body, trochu pomerať a všetko krásne vyjde.

Google Earth nám povie, aká je vzdialenosť od fotoaparátu po Kráľovu hoľu ($M = 28\,650\,\mathrm{m}$), vzdialenosť medzi Kráľovou hoľou a Bradavicou ($N = 32\,140\,\mathrm{m}$) a z nejakého spoľahlivého zdroja zistíme nadmorské výšky oboch vrchov ($y = 1\,929\,\mathrm{m}$, $z = 2\,476\,\mathrm{m}$).[3]

Toto nám však nestačí: potrebujeme poznať ešte niečo, čo nám poskytne informáciu o našej výške. To môže byť napríklad vertikálna vzdialenosť Bradavice od priemetu Kráľovej hole do nej. To je taký bod A, ktorý je presne pod vrcholom Bradavice a zároveň sa z nášho pohľadu nachádza v zákryte za pätou vysielača na Kráľovej holi, viď obrázok:



Obr. 6: Fotoaparát, Kráľova Hoľa a Bradavica

Nájsť túto vzdialenosť môžeme napríklad tak, že nájdeme nejaký známy uhol, odmeriame ho na fotke, a vzdialenosti porovnáme (platí, že každý pixel fotografie má rovnakú uhlovú veľkosť). Ak si navyše pomôžeme aproximáciou $\tan x = x$, potom môžeme tvrdiť, že pre dva body v rovnakej vzdialenosti od fotoaparátu platí, že ich vzdialenosť na fotke je priamo úmerná ich skutočnej vzdialenosti.

Použiť môžeme ľubovoľný bod, ktorý je od nás zhruba rovnako ďaleko, ako Bradavica. Hodí sa napríklad Kriváň. Ich vzdialenosť na fotke je asi 1 655 pixelov, čo je v skutočnosti 11 433 m. Bradavica je na fotke od Kráľovej hole vzdialená 422 pixelov – trojčlenkou vybúchame

$$\frac{422\,\mathrm{px}}{1\,655\,\mathrm{px}} \cdot 11\,433\,\mathrm{m} = 2\,915\,\mathrm{m}\,,$$

čiže bod A je $2\,476\,\mathrm{m} - 2\,915\,\mathrm{m} = -439\,\mathrm{m}$ tj. „pod morskou hladinou“.

[2] Chyba pri určovaní polohy priesečníka dvoch priamok totiž prudko rastie so zmenšujúcim sa uhlom medzi nimi, viď nižšie.

[3] Nevažujeme vrchol Kráľovej hole, ale pätu vysielača, preto 1 929 m.

Tu si dovolíme malý matematický trik: nebudeme počítať priamo nadmorskú výšku, ale výšku nad týmto bodom. Situácia sa nám trochu zjednoduší, pretože môžeme ihneď využiť podobnosť trojuholníkov

$$\frac{y + 439\,\mathrm{m}}{N} = \frac{x + 439\,\mathrm{m}}{M + N}\,,$$

z čoho priamo vypočítame

$$x = \frac{(M + N) \cdot (y + 439\,\mathrm{m})}{N} - 439\,\mathrm{m} = 4\,479\,\mathrm{m} - 439\,\mathrm{m} = 4\,040\,\mathrm{m}\,,$$

Presnosť merania

V rovine rovnobežnej s rovinou fotky vieme dosiahnuť veľmi vysokú presnosť, prakticky takú, s akou vieme zamerať jednotlivé štíty. Jeden pixel vo vzdialenosti Vysokých Tatier odpovedá približne $11\,433\,\mathrm{m}/1655 = 7\,\mathrm{m}$ a vo vzdialenosti Nízkych Tatier asi polovicu z tejto hodnoty. Ak predpokladáme, že vrcholy trafíme s presnosťou 2 pixely v oboch smeroch, zemepisnú dĺžku a nadmorskú výšku vieme určiť s chybou asi 30 m.

So zemepisnou šírkou je to trochu horšie. Presnosť metódy pretínajúcich sa priamok je závislá na uhle, ktorý zvierajú. Každá chyba zamerania sa v polohe priesečníku zväčší až $1/\sin\alpha$-násobne, a to je pri malých uhloch α priam smrteľné. Fotografia má pomerne dlhú ohniskovú vzdialenosť, takže tento uhol bude musieť byť malý. Toto riešenie počíta s uhlom Kriváň-fotoaparát-Bradavica, čo je 10,79°. Chyba určenia kolmej vzdialenosti sa teda zväčší na približne $30\,\mathrm{m}/\sin 10{,}79^\circ = 160\,\mathrm{m}$, a to nám ešte spätne pridá niekoľko málo metrov do určenia nadmorskej výšky.

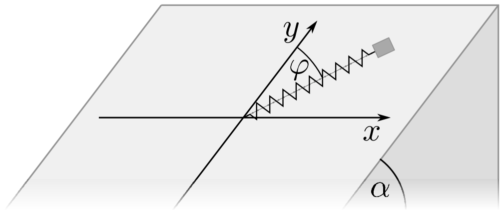
1.5 B4/A2 – Proste mechanika (opravoval Dušan)

Na nekonečnej naklonenej rovine so sklonom α máme zavedenú súradnicovú sústavu tak, že smer osi y je v smere najväčšieho rastu tejto plochy. Do bodu $[0, 0]$ sme zabili klinec a uviazali naň pružinu s nulovou počiatočnou dĺžkou a tuhosťou k, na ktorej druhom konci je kváder zanedbateľných rozmerov s hmotnosťou m. Medzi kvádrom a naklonenou rovinou je koeficient trenia f. Ako vyzerá množina všetkých bodov na naklonenej rovine, kde bude kváder stáť?

V tejto úlohe sme od vás chceli, aby ste našli množinu všetkých bodov naklonenej roviny, kde bude kváder stáť. Inak povedané, bolo treba popísať geometrický útvar, ktorý bude tvorený všetkými miestami na rovine, kde bude výslednica pôsobiacich síl na kváder nulová.

Najprv si zaveďme našu súradnicovú sústavu. Tak ako hovorí zadanie, y-ová os bude určená smerom najväčšieho rastu naklonenej roviny (takže keď budeme stúpať, bude nám y-ová zložka polohového vektora narastať). Os x si zavedieme pozdĺž naklonenej roviny kolmo na os y, pričom kladný smer budeme voliť štandardne doprava.

Teraz, keď máme zavedenú súradnicovú sústavu, vieme určiť všetky zložky pôsobiacich síl. Zložka gravitačnej sily kolmá na naklonenú rovinu je kompenzovaná normálovou silou od podložky, takže sa ňou už viac nebudeme zaoberať. Zostala nám rovnobežná zložka gravitačnej sily. Tá pôsobí v smere osi y, ale smerom nadol. Označíme si ju ako F_{gy} a platí $F_{gy} = -mg\sin\alpha$. Taktiež nám v tejto sústave pôsobí sila od pružiny. Pre ňu platí $F_p = -kr$, kde r je predĺženie pružiny. Ak si ju chceme rozložiť do zložiek, musíme si zaviesť uhol φ odklonu pružiny od y-ovej osi.



Obr. 7: Kvádrik na pružinke na naklonenej rovine

Tak potom dostaneme pre x-ovú zložku $F_{px} = -kr\sin\varphi$ a pre y-ovú $F_{py} = -kr\cos\varphi$. Teraz sa trochu zamyslíme a nezistíme nič iné ako to, že zložky pružnej sily môžme napísať ako $F_{px} = -kx$ a $F_{py} = -ky$, kde x a y sú výchylky v daných smeroch. Proti týmto dvom silám pôsobí trecia sila veľkosti $F_t \leq fmg\cos\alpha$. Keďže hľadáme miesta na naklonenej rovine, kde budú sily v rovnováhe, tak bude na nich platiť:

$$F_x^2 + F_y^2 = F_t^2\,,$$
$$(-kx)^2 + (-ky - mg\sin\alpha)^2 \leq (fmg\cos\alpha)^2\,,$$

Teraz to stačí iba trochu upraviť a dostaneme obmedzenie (nerovnicu) pre našu množinu hľadaných bodov:

$$x^2 + \left(y + \frac{mg\sin\alpha}{k}\right)^2 \leq \left(\frac{fmg\cos\alpha}{k}\right)^2\,,$$

To, čo sme dostali nie je nič iné, ako predpis kruhu v kartézskych súradniciach so stredom v bode $[0, -mg\sin\alpha/k]$ a polomerom $R = fmg\cos\alpha/k$.

Tak, a týmto je naša úloha splnená. Len tak mimochodom, všimnite si, že stred kruhu sa nachádza v bode, kde je gravitačná sila kompenzovaná silou pružnosti, a nepôsobí tu žiadna trecia sila.

1.6 A3 – Tesko toaleťák (opravoval Kubo)

Samko si kúpil toaletný papier a bol veľmi drsný. Dokonca bol úplne nepoužiteľný… Zobral mikroskop a uvidel, že na toaletnom papieri sú drážky, ktoré z profilu vyzerajú ako zubatá píla: Keďže toaletný papier sa naviac aj leskol, zobral si najbližšie so sebou na záchod aj laserové ukazovátko s vlnovou dĺžkou svetla λ a zasvietil ním kolmo na rovinu papiera. Na záchode mal tmu a videl, že odrazené svetlo nemá intenzitu rovnakú v rôznych smeroch. Povedzte Samkovi, v ktorom smere bude intenzita odrazeného svetla najvyššia.

V prvom rade sa dohodnime na terminológii, ktorú budeme používať na opis javu, ktorý nastáva pri dopade koherentného svetla[4] na lesklý vyrýpaný Tesko papier. Tento záhadný materiál si môžeme v dostatočnej presnosti nahradiť prostou tabuľou skla, ktorá je schopná časť dopadajúceho svetla prepúšťať a časť zase odrážať. Nás bude pochopiteľne zaujímať to druhé.

Keby bolo sklo bez akýchkoľvek vrypov, tak by sa pri dopade svetelných lúčov nič zaujímavé nedialo. Keď zanedbáme celú tú časť, čo sa láme, tak môžeme povedať, že sa všetko svetlo odráža v rovnakom charaktere, ako dopadalo. Teraz začnime robiť do neho vrypy tak, ako bolo

[4] To je také, ktoré si v každom čase zachováva rovnakú frekvenciu a navyše je aj spojito vyžarované. Takúto vlastnosť majú práve lasery.

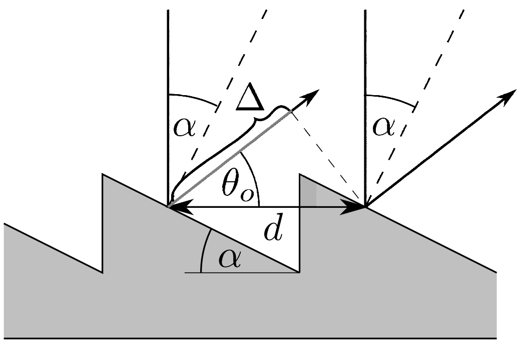
nakreslené v zadaní. Každý z týchto vrypov začne rozptyľovať svetlo trochu inak, než zvyšok rovného skla. Ak ešte navyše budú tieto vrypy veľmi blízko seba (myslíme tak veľmi blízko, až bude ich susedná vzdialenosť porovnateľná s vlnovou dĺžkou dopadajúceho svetla: $d \approx \lambda$), nastane čarovný jav: pod určitým uhlom vzniká silný lúč odrazeného svetla v závislosti od vzdialenosti medzi vrypmi!

Spomínaný čarovný jav je dôsledkom prostého skladania vĺn, čo inak nazývame *difrakciou.* Niekto by však mohol namietať, že oný pozorovaný efekt je skôr dôsledkom *interferencie* vĺn. Nuž, neklamal by. Len veľmi málo ľudí by nám vedelo prezradiť, aký je skutočný rozdiel medzi interferenciou a difrakciou, pretože toto je čisto konvenčná záležitosť. Dohodnime sa, že ak sa bavíme o skladaní vĺn z niekoľkých (a často z dvoch) zdrojov, tak daný jav budeme nazývať interferenciou a ak je takýchto zdrojov veľa, tak budeme používať výraz difrakcia. Podstatný fyzikálny rozdiel tu nie je žiadny, preto sa touto témou už ďalej nezdržujme.

Objekty s vrypmi, ktoré sme už vyššie popisovali, skutočne existujú a v oblasti optiky sú dôverne známe pod názvom *difrakčné mriežky.* Forma bežnej difrakčnej mriežky je prostá tabuľka skla, do ktorej sú pod určitým uhlom vyryté vrypy, ktorých na jednom milimetri vieme nájsť aj niekoľko stoviek.

Vráťme sa ale naspäť k Samkovi a jeho nudným chvíľam na záchode. Nechajme na difrakčný toaleťák dopadať laserové svetlo s vlnovou dĺžkou λ, pričom uhol dopadu vzhľadom na vertikálnu os je $\theta_d = 0°$. Vyberme si dva lúče, ktoré dopadajú do rovnakého bodu na dvoch susediacich zuboch (čiže ich vzájomná vzdialenosť je d). Tieto dva lúče sa odrazia a opäť rovnobežne pokračujú svojimi smermi. Z geometrie situácie nie je ťažké zistiť, že uhol, pod ktorým sa lúče odrazia vzhľadom na rovinu mriežky, je $\theta_o = \pi/2 - 2\alpha$.

Na uľahčenie predstavy si nakreslime obrázok:



Obr. 8: Dva lúče dopadajúce kolmo na rovinu toaleťáku

Uhol α však nemôže byť ľubovoľný. Na to, aby dva susedné lúče mohli konštruktívne interferovať,[5] musí byť ich dráhový rozdiel Δ rovný nejakému celočíselnému násobku vlnovej dĺžky daného žiarenia. Jednoducho povedané: celá nadbytočná dráha, ktorú musí prejsť prvý lúč oproti druhému, musí byť rovná $k\lambda$, pričom k je celé číslo (1, 2, 3,...), aby sa po opätov-

[5] To je taký uhol, kedy nám po interferencii vznikne svetlo v väčšou intenzitou, ako bola intenzita pôvodných lúčov.

nom stretnutí poskladali maximá (kopčeky) vĺn presne na seba. Na obrázku 8 je tento dráhový rozdiel Δ jasne vyznačený. Z geometrie situácie a uvedenej úvahy vieme povedať:

$$\Delta = d\sin(2\alpha) = k\lambda\,,$$

Z poslednej rovnice už nie je ťažké vyjadriť uhol α a dosadiť do vzťahu pre θ_o:

$$\theta_o = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{k\lambda}{d}\right)\,,$$

Postupným dosádzaním za k dostávame uhly, aké by mali mať vrypy na toaleťáku, aby vôbec vznikla pekná konštruktívna difrakcia po dopade lúčov priamo zhora.

Na jednu vec ale nesmieme zabúdať. Na toaleťák nám nedopadá jeden lúč, ani dva, ale celá kopa! Vieme už, že dráhový rozdiel všetkých susedných dopadajúcich lúčov je Δ, čiže ak sú dva lúče od seba vzdialené o N zubov, tak je ich celkový dráhový rozdiel $N\Delta$, čomu zodpovedá fázový rozdiel

$$N\varphi_0 = N(2\pi k) = \frac{2\pi N d}{\lambda}\sin(2\alpha)\,,$$

Aby sme vedeli niečo povedať o výslednej intenzite odrazeného svetla, musíme najskôr posčítavať všetky elektrické polia od jednotlivých vĺn, čo znamená spočítať takúto strašnú kopu sínusov:

$$E_\Sigma = E_0\sin(\omega t) + E_0\sin(\omega t + \varphi_0) + E_0\sin(\omega t + 2\varphi_0) + \cdots + E_0\sin(\omega t + N\varphi_0)\,,$$

Stredná hodnota $\langle E_\Sigma\rangle$ vyššie napísanej sumy sa dá napísať ako:

$$\langle E_\Sigma\rangle = E_0\frac{\sin\left(\dfrac{N\varphi_0}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\varphi_0}{2}\right)}\,,$$

Nie, ani ja nemám rád, keď vzorce padajú len tak z neba, ale momentálne musíme tento nepedagogický krok nejako prekusnúť, pretože korektné odvodenie tohto vzťahu si vyžaduje omnoho viac času a priestoru, než by bolo vhodné obetovať tomuto vzoráku.[6]

Intenzita dopadajúceho žiarenia je úmerná druhej mocnine strednej hodnoty jeho celkového elektrického poľa: $I \propto \langle E_\Sigma\rangle^2$, vďaka čomu môžeme konečne napísať vzťah pre celkovú dopadajúcu intenzitu na tienidlo v závislosti od uhla sklonu vrypov α:

$$I = I_0\left(\frac{\sin\left(\dfrac{N\varphi_0}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\varphi_0}{2}\right)}\right)^2 = I_0\,\frac{\sin^2\left(\dfrac{N\pi d\sin(2\alpha)}{\lambda}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi d\sin(2\alpha)}{\lambda}\right)}\,,$$

No a pri ktorom špeciálnom uhle α_m (ak ich nie je viac) bude mať táto intenzita najväčšiu hodnotu? To už je úloha pre zdatné a úderné matematické softvéry. Tak, to by bolo na dnes hádam všetko. :-)

[6] Ak by ale riešiteľ čítajúci tento vzorák mal silnú potrebu poznať tajomstvo sčítavania goniometrického radu a nechce sa mu to hľadať na internete alebo vypytovať od určite ochotnej učiteľky fyziky, môže mi napísať na môj sympatický mail jakubilinko@gmail.com a môžeme sa o tom viac porozprávať.

PS: Na získanie plného počtu bodov samozrejme nebolo nutné nájsť aj hodnotu α_m, pretože to si zadanie ani nevyžadovalo. Vzorové riešenie bolo schválne obohatené o všeobecnejší nadhľad na situáciu. Plný počet bolo možné získať za geometrické určenie odrazného uhla a rozpracovanú myšlienku difrakcie.

1.7 A4 – Napínanie nábojom (opravoval Paťo)

Ftákopysk Filip sa rozhodol pomôcť kačičkám sa liahnuť z dokonale sférických vodivých škrupiniek. A to tak, že na škrupinku priviedol nejaký elektrický náboj a škrupinka sa sama rozthla. Aby ho jeho altruizmus nezruinoval, chcel by vedieť, koľko náboja bude potrebovať.

Zistite teda Filipovi, aké mechanické napätie je v škrupinke, ak má škrupinka polomer R, zanedbateľnú hrúbku Δr a Filip na ňu priviedol náboj Q. Predpokladajte, že celá škrupinka je vo vákuu a vnútri nej je tiež vákuum.

Hmm… Slová ako náboj, vodivá škrupina a odpudzovanie nám robia reklamu na najobľúbenejšiu časť fyziky – na elektrostatiku! V čom je taka úžasná? No predsa v nej existuje Gaussov zákon. Ten nám v skratke hovorí nasledovné:

„Ak si zoberieme skalárny súčin s vektorom plochy v každom bode nejakej (uzavretej) plochy a výsledky sčítame, dostaneme celkový náboj, ktorý je umiestnený vnútri tejto plochy (/ε_0).“

Ak by sme chceli byť úplne všeobecní, tak spomínaný súčet by znamenal integrály. Ale kto má na také veci čas, že? Preto použijeme mocný argument, a to že škrupinka je *dokonale vodivá* a *symetrická*. Tým pádom na nej neexistuje nejaké miesto, ktoré by bolo významnejšie ako nejaké iné miesto. Dôsledok – náboj Q sa na povrchu škrupinky rozloží *rovnomerne*. Plošná hustota náboja, ktorý bude škrupinku pokrývať, je

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}\,,$$

Je preto viac než očakávateľné, že aj elektrická intenzita, ktorú bude tento náboj vytvárať, bude symetrická (teda nezávislá na mieste na škrupinke). Preto, ak obopneme škrupinku presne rovnako veľkou gaussovskou plochou, súčet elektrickej intenzity na povrchu škrupinky E cez plochu S bude jednoducho $ES \equiv E4\pi R^2$. Gaussov zákon hovorí, že tento súčin sa rovná náboju vo vnútri našej plochy, čo je všetok náboj na škrupinke, teda Q, predelený konštantou ε_0. Máme teda spočítanú intenzitu poľa na povrchu škrupinky:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \equiv \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,,$$

Čo by sa stalo, ak by sme našu plochu zmenšili a dostali ju *dovnútra* škrupinky? Vnútri sa nenachádza žiaden náboj, preto by mal byť spomínaný súčet intenzity nulový. To efektívne funguje tak, že intenzita vo vnútri škrupiny je nulová.

To je síce super, ale čo s tým? My nechceme zistiť, ako pôsobia náboje v škrupinke ako celok, ale ako pôsobia sami sa seba. Zoberme si preto malú „testovaciu“ plôšku ΔS. Ak sa na ňu pozrieme dostatočne zblízka, tak je to vlastne homogénne nabitá rovina, pre ktorú platí[7]

$$E_{\text{rovina}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \equiv \frac{E}{2}\,,$$

Elektrické pole z nej teda prýšti[8] v oboch smeroch – teda aj do vnútra škrupinky. To ale nesedí s tým, čo sme si odvodili pre škrupinku. Sedieť to ale samozrejme nemôže. Zatiaľ uvažujeme iba pôsobenie malej plôšky, a nezapočítavame pôsobenie zvyšku škrupiny. Tento zvyšok pôsobí v blízkosti testovacej plôšky (a na plôšku!) tak, že nuluje pole prýštiace dovnútra a zdvojnásobuje pole prýštiace von.

Verím, že každý vidí ten zjavný záver – to, čo chceme, aby zvyšok škrupinky spĺňal, je splnené, ak tento zvyšok pôsobí v okolí testovacej plôšky intenzitou $E/2$ smerom von z plôšky. Tadá, teraz sa môžme machrovať, lebo vieme, ako pôsobí škrupinka sama na seba.

Po zvládnutí tej obtiažnej časti už stači dopočítať to jednoduché. Predstavme si, že napätie t zo zadania môžeme chápať ako silu na plochu. Sila má ale pôvod v odpudzovaní našej testovacej plochy, vieme ju teda vyjadriť pomocou náboja na testovacej plôške ΔQ a intenzity zvyšku škrupinky:

$$F = \frac{E}{2}\Delta Q = t\Delta S \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{E}{2}\frac{\Delta Q}{\Delta S}\,,$$

Pomer náboja a plochy ale poznáme, je to naša σ. Tým sme vyhrali, pretože máme vzťah, ktorý závisí na veličinách, ktoré sú nám známe. Po dosadení za E a σ z predošlých vzťahov dostávame, že mechanické napätie nabitej škrupinky je

$$t = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}\,,$$

Pretože t je pre každú malú plôšku na ňu kolmé, nazýva sa *normálové* napätie a vyjadruje, akým veľkým tlakom musíme pôsobiť na škrupinku, aby sa nerozpadla. Makáči si ale povedali, že tento výsledok nie je dostatočne pekný a toto napätie previedli na *pozdĺžne* napätie, alebo napätie v ťahu. Toto napätie je užitočné, ak by sme mali napríklad zadanú pevnosť škrupinky v ťahu. Obe formy sú ale na seba prevediteľné a znamenajú presne to isté. Pre získanie plného počtu bodov preto stačilo vypočítať t.

[7] Ak viete, prečo to platí, túto poznámku preskočte. Ak nie, čítajte ďalej! Predstavme si, že sme dostatočne blízko pri našej plôške, až tak, že sa nám javí (skoro) nekonečná a rovná. Pre nekonečné vodivé roviny platí, že vektor elektrickej intenzity je blízko pri rovine kolmý. To je dôsledok vodivosti. Ak by vektor $\vec{E}$ kolmý nebol, tak by na náboje na plôške začala pôsobiť sila, ktorá by nábojmi pohýbala tak, aby sa vektory $\vec{E}$ „skolmili“. Na takéto pole použijeme ako plochu valec, ktorého podstavy s plochami s sú s plôškou rovnobežné, jedna podstava je pod plôškou, druhá nad. Z dôvodu kolmosti $\vec{E}$ a $\vec{S}$ bude súčet intenzít cez plášť valca nulový. A cez obe plochy konštantný a rovnaký, tj. $E \cdot S = 2Es$. Tento valec v sebe uzatvára náboj $q = \sigma s$. Z platného Gaussa potom tieto dva výrazy vieme dať do rovnosti, pokrátiť plochu s a dostávame to, čo pokračuje za touto poznámkou.

[8] Pozor, vybrané slovo!