Fyzikálny korešpondenčný seminár
28. ročník, 2012/2013
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

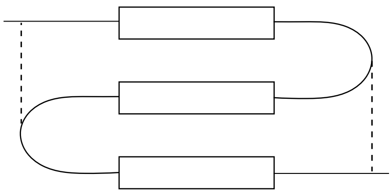
Vzorové riešenia 2. kola letnej časti 2012/2013

2.1 B0 – Paralelná séria (opravovala Marika)

Vtákopysk dostal sériové zapojenie troch odporov napevno spojených hrubými vodičmi, ktoré nevie prehrýzť. On by ale chudák potreboval tieto odpory zapojené paralelne. V tom ho osvietila myšlienka - má v zásuvke ešte zásobu vodičov, ktoré by mohol pridať do obvodu, keď už nevie hrýzť pôvodný hrubý drôt. (Vie teda vodivo spojiť ľubovoľné dva body vodičov v obvode a môže to robiť koľkokrát chce.)

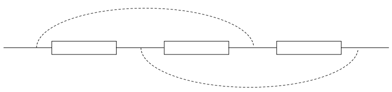
Je to ale ešte mláďa a nevie, ako na to. Nakreslite mu preto, ako má tie vodiče pridať a ukážte, že výsledné zapojenie je naozaj paralelné.

Ahojte FKSáci, väčšina z vás nemala problém upraviť obvod zo zdroja z paralelného zapojenia na sériové. Stačilo ho len trochu pozatáčať ako na obrázku



Obr. 1: Paralelné zapojenie. Pridané vodiče sú prerušovanými čiarami.

a potom pridať vodiče (prerušovanými čiarami). Takýto obvod vyzerá ako z učebnice, ale nič nám nebráni, aby sme si ho prekreslili tak, aby sa viac podobal na pôvodný obvod.



Obr. 2: Ten istý obvod, len opäť vyrovnaný.

Žiaľ, viacerí ste sa už nesnažili ukazovať, že váš obvod je už naozaj paralelný. Čo vlastne charakterizuje taký paralelný obvod? Narozdiel od obvodu sériového, pri paralelnom je viac ciest, ktorými môžu nosiče náboja prechádzať. Najjednoduchšie by teda bolo pozrieť sa, či by cez obvod mohol prechádzať prúd, aj keby sme jeden z rezistorov odpojili a vodiče, na ktoré bol napojený, nechali len voľne visieť. Krátky pohľad ukáže, že takýto obvod by bol stále v poriadku. Tento prístup má ale istý problém - pre viac ako tri odpory nefunguje (skúste si nájsť príklad, ktorý túto vlastnosť splňa, no nie je paralelný!).

Iný spôsob by bol využiť vlastnosť paralelného zapojenia, ktoré keď pripojíte na zdroj napätia U, tak na každom odpore bude napätie U. To znamená, že ak sa vydám len vodičmi z jedného konca a z druhého konca rezistora, tak skončím raz z jednej, druhý raz z druhej strany zdroju napätia. A toto platí pre všetky odpory.

Z tohto vyplýva aj fakt, že odpor našej schémy bude rovnaký ako paralelného zapojenia.

2.2 B1 – Vedrový rituál (opravoval Paťo)

Čukčovia používali na privolanie dažďa nasledovný rituál: valcové vedro s výškou $h = 50\,\mathrm{cm}$ a polomerom $r = 15\,\mathrm{cm}$ naplnili ideálnou vodou z riečky Čukčianky a roztočili ho okolo osi valca na uhlovú rýchlosť $\omega = 1\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, pritom si spievali temné Čukčovské piesne a pálili kožušinu. Keď chceli Čukčovia privolať sneženie, procedúru presne zopakovali s tým, že vodu pred roztočením nechali zamrznúť. Odhadnite, o koľko je náročnejšie privolať a) dážď b) sneženie než roztočiť samotné vedro na danú uhlovú rýchlosť. Skúste si obidva rituály!

Na vyriešenie tohto príkladu musíme začať lekciou z pokročilého čítania. Čoho? Predsa zadania! Píše sa v ňom, že Čukčovia z Čukčianky na svoje obľúbené rituály do vedra čapujú iba *ideálnu vodu.* Chvíľka googlenia[1] a zisťujeme, že je nestlačiteľná a neviskózna. To posledné znamená, že v tejto vode nie je vnútorné trenie, neexistujú medzimolekulové sily.

Aký to má praktický efekt? Nech sa vedro točí, ako chce, medzi ním a vodou nepôsobí žiadna sila. Vedro sa teda točí a neviskózna kvapalina *bez trenia* ostáva stáť na mieste, lebo niet sily, čo by ju roztočila. To znamená, že počas privolávania dažďa sa vedro hýbe, ale voda stojí. V lete je privolanie dažďa náročnejšie presne o $0\,\mathrm{J}$ ako roztočiť vedro samotné.

Situácia sa zmení v zime. Pre jednoduchosť predpokladajme, že v lete Čukčovia počas privolávania dažďa vedro nenaplnili úplne po okraj a teda ľad, ktorý z tejto vody vznikol, vypĺňa celé vedro. K stenám vedra je ale ľad už primrznutý a počas privolávania snehu ho spolu s vedrom roztočiť musíme.

Keď už máme ujasnené ako všetko funguje, mali by sme nájsť nejakú objektívnu veličinu, ktorá bude popisovať náročnosť rituálu. Keďže sme hlboko v otáčavej mechanike, musíme zabudnúť na sily (a zrýchlenia). Použiť môžeme nejaké momenty, resp. uhlové zrýchlenia. Toto sú ale dynamické veličiny, ktoré dobre popisujú priebeh roztáčania, ale zle jeho stav - na to sa nám hodia stavové veličiny, napríklad uhlová rýchlosť ω. Potrebujeme ale zistiť, o koľko je niečo náročnejšie - teda akú prácu naviac treba vykonať. A na to poslúži energia, a to konkrétne rotačná! Tá vôbec nezávisí na tom *ako* Čukča vedro roztáčal, hovorí nám iba o tom, že roztočené je. Preto si *náročnosť* rituálu možeme definovať ako rotačnú energiu, ktorú musíme sústave dodať. Pre takúto energiu platí známy vzťah s momentom zotrvačnosti telesa I:

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 .$$

Ako sme si povedali, v lete točíme iba vedro, v zime vedro spolu s ľadom. V zime nám potrebná energia vzrastie o hodnotu rotačnej energie ľadu. Pre jednoduchosť predpokladajme, že ľad vo vedre tvorí plný valec s polomerom r a výškou h.[2] Jeho moment zotrvačnosti vieme vyčítať z tabuliek alebo zo starých FKS vzorákov ako

$$I_{\text{ľad}} = \frac{1}{2} \rho_{\text{ľad}} \pi r^2 h r^2 .$$

[1] http://sk.wikipedia.org/wiki/Ideálna_kvapalina

[2] To znamená, že Čukčovia nemohli pred zamrznutím vedro naplniť úplne. Iste si viete sami spočítať, koľko vody do vedra museli naliať.

Jeho energia po roztočení na uhlovej rýchlosť ω je potom

$$E_{\text{ľad}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \rho_{\text{ľad}} \pi r^4 h \omega^2 = 0{,}25 \cdot 910\,\mathrm{kg.m^{-3}} \cdot \pi \cdot (0{,}15\,\mathrm{m})^4 \cdot 0{,}5\,\mathrm{m} \cdot (1\,\mathrm{rad.s^{-1}})^2 \approx 181\,\mathrm{mJ}.$$

Tento výsledok nám odpovedá na druhú časť otázky. Je však celkom maličký. Preto by nebolo od veci zistiť aj pomer medzi energiami v zime a v lete. Získame tak lepšiu predstavu o príspevku ľadu k náročnosti rituálu. Vidíme, že na vyjadrenie pomeru energií nám stačí vyjadriť pomer momentov zotrvačnosti. V zime rotáčame vedro a ľad, kdežto v lete točíme iba vedrom:

$$\frac{E_{\mathrm{Z}}}{E_{\mathrm{L}}} = \frac{I_{\text{vedro}} + I_{\text{ľad}}}{I_{\text{vedro}}} = 1 + \frac{I_{\text{ľad}}}{I_{\text{vedro}}}.$$

Vidíme, že na vyjadrenie tohto pomeru musíme nejako odhadnúť moment zotrvačnosti samotného vedra. Keďže je to nepovinná časť, budeme struční: vedro je v prvom priblížení valcová nádoba s dnom v tvare plného disku a stenami v tvare tenkej obruče (pri pohľade zhora). Ak označíme δ hrúbku plechu, z ktorého majú Čukčovia valec vyrobený, dostávame

$$I_{\text{vedro}} = \frac{1}{2} \pi r^2 \delta \rho_v r^2 + 2\pi r h \delta \rho_v r^2 = \frac{1}{2} \pi r^3 \delta \rho_v (r + 4h).$$

Hustotu vedra ρ_v odhadujeme ako $7200\,\mathrm{kg,m^{-3}}$ a jeho hrúbku ako $2\,\mathrm{mm}$. Po dosadení pre pomer dostávame

$$\frac{E_{\mathrm{Z}}}{E_{\mathrm{L}}} \approx 2.$$

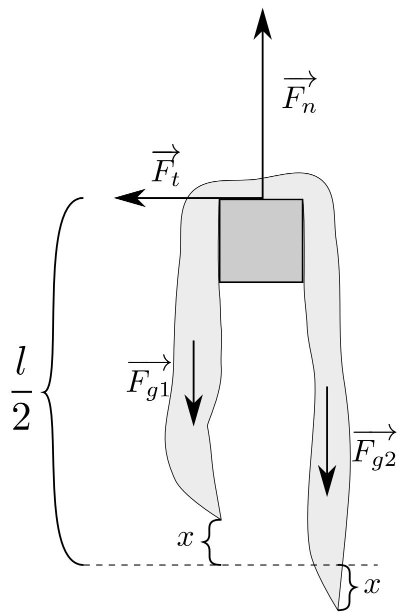
Rituál v zime je teda 2-krát náročnejší ako rituál v lete.

2.3 B2 – Pošmyknutý uterák (opravoval Marek, vzorák Bea)

Kaťa si desne spievava v sprche a Luxuskovi sa to vôbec nepáči. Minule to znelo ako „Ohm, Ohm, Ohm, I want you in my room. . . “ a to ho dožralo, že o nejakých chlapoch si teda spievať nebude. Vymyslel naňu zákernú lesť - zhodí jej uterák do sprchy a bude sa tváriť, že to bola nehoda. Katin uterák s hmotnosťou m je zatiaľ prehodený cez tyčku (so štvorcovým prierezom) s trením f tak, že prečnieva rovnako na obe strany. O koľko najmenej musí posunúť uterák dlhý l, aby jej spadol dovnútra?

Aby som vysvetlila, o kom to Kaťa v tej sprche spievala, je to jeden veľmi múdry a najmä pekný pán, až taký, že by si podľa Kati zalúžil Nobelovku. Ale je bohužiaľ nedostupný, Xulusko sa báť nemusí.

Je vcelku jasné, že uterák sa chce zošmyknúť, keď je posunutý, lebo gravitačná sila na jednu časť uteráka je väčšia ako na druhú. A nepadne okamžite nadol, lebo sa uterák trie o tyčku. Poďme sa na to pozrieť bližšie obrázkom:



Obr. 3: Sily pôsobiace na uterák

Uterák sa len-len nezošmykne vtedy, keď trenie práve dorovná rozdiel gravitačných síl:

$$F_{g2} - F_{g1} = F_t.$$

Trecia sila bude v okamihu, keď uterák skoro spadne, mať svoju najväčšiu možnú veľkosť, to je $F_t = fF_n$. Uterák je pritláčaný silou mg. Ak máme kus uteráka dlhý y, potom má hmotnosť $m\frac{y}{l}$ - hmtonosť je priamoúmerná dĺžke a pre $y = l$ to musí byť m :).

Nech Luxusko posunie koniec uteráku o x. Potom dostávame:

$$mg\frac{\frac{l}{2}+x}{l} - mg\frac{\frac{l}{2}-x}{l} = fmg,$$

$$2mg\frac{x}{l} = fmg,$$

$$x = \frac{f}{2}l.$$

Vrelo odporúčam vyrátať si túto vzdialenosť aj pre nohavice, či tričká, aby vám nepopadali do vody v sprche tak ako mne :-)

2.4 B3/A1 – Ochutnávka (opravoval Andrej)

Tinka rada varí, hoci…(pre viac info kontaktujte Marcelku). Minule to neodhadla s olejom v omáčke a dopadlo to tak, že všetko mäso bolo na dne hrnca, výška omáčky bola h a výška tuku t. Hrniec má dostatočne široký a práve chce ochutnať jeden kúsok mäsa tvaru kvádrika s podstavou axb a výškou c. Akú prácu vykoná, ked daný kúsok vytiahne do výšky l nad hladinu? Mäso sa cestou neotáča. Hustota mäsa je ρ_m, hustota omáčky ρ_o a hustota tuku ρ_t. Predpokladajte, že c je menšia ako t a h, ale nie je voči nim zanedbateľná.

Milé mäská, ak máte pocit, že výsledok tohto príkladu bol grc ako omáčka zo zadania alebo ste používali mäsiarske nástroje v podobe husích krkov, poďte sa pozrieť na jednoduché a príjemné riešenie.

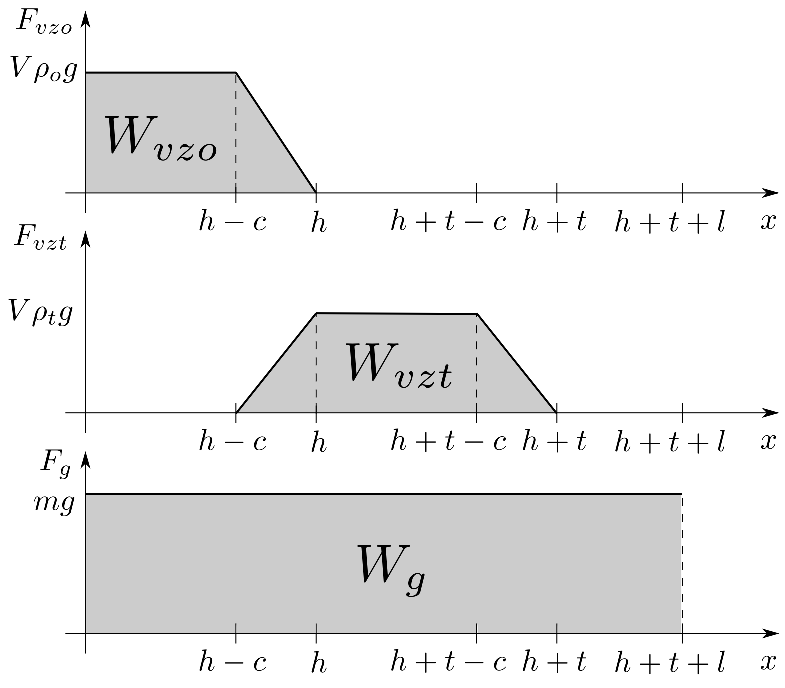
Na mäsko pôsobia tri sily: gravitačná sila F_g, vztlaková sila F_{vzt} od tuku a od omáčky F_{vzo}. Sila, ktorou musíme ťahať, je $F = mg - F_{vzo} - F_{vzt}$ Všetky tieto sily závisia nejak od polohy, kde sa mäsko nachádza. Rozoberme práce týchto síl osobitne, keďže na sebe nezávisia a celková sila je ich vektorovým súčtom, tak aj práca bude súčtom jednotlivých prác.

Poďme sa pozrieť, ako tieto sily závisia od polohy x. Gravitačná sila je konštantná. Stále má hodnotu $F_g = mg = V\rho_m g = abc\rho_m g$.

Vztlakové sily majú hodnotu $F_{vz} = V_{\text{ponor}}\rho_{\text{kvap}}g$. To je Archimedov zákon. Keď je celé mäsko v kvapalinke, všetko je v poriadok. Rozoberme si preto konkrétnejšie rozhranie kvapalina-vzduch. Ak mäsko posunieme o x, potom z neho trčí von objem $x \cdot ab$, teda ponorený objem je $(c - x)ab$. Potom bude vztlaková sila $(c - x)ab\rho_{kvap}g$. Čo si treba povšimnúť, že táto sila pri prechode cez rozhranie **lineárne** mení zo svojej pôvodnej hodnoty na nulu. Opačný proces, teda ponáranie mäska do tuku, je z pochopiteľných dôvodov tiež lineárny od x: $F_{vz} = xab\rho_{kvap}g$.

Hoci to tak vôbec nevyzerá, už vieme nakresliť priebeh všetkých síl od polohy. Rozhranie tuk-omáčka vyzerá ako problém. Stačí si uvedomiť, že vztlaková sila od omáčky sa bude lineárne meniť z $F_{vzo} = V\rho_o g$ na nulu, zatiaľ čo bude vztlaková sila od tuku lineárne rásť z nuly na $F_{vzt} = V\rho_t g$.

Nakreslime si grafy týchto závislostí.



Obr. 4: Priebeh vztlakovej sily omáčky, tuku a gravitačnej sily

Teraz príde na rad dôležitá vedomosť - plocha pod grafom závislosti sily od dráhy je práca vykonaná touto silou. Toto platí všeobecne, ak máme závislosť $A(y)$ od y, potom plocha pod týmto grafom je hodnota veličiny $A(y)y$. Teda napríklad aj pre graf rýchlosti od času. Ak to zaváňa podozrivými čarami, tak máte pravdu, toto sú skutočné čary, ale pozrite si tento vzorák.

Poďme teda porátať plochy pod jednotlivými grafmi.

$$W_g = V\rho_m g(h + t + l)$$

Ďalšie grafy majú tvar lichobežníkov.

$$W_{vzo} = \frac{1}{2}V\rho_o g(h + h - c) = V\rho_o g(h - \frac{c}{2})$$

$$W_{vzt} = \frac{1}{2}V\rho_t g(t + c + t - c) = V\rho_t gt$$

A už len správne odčítať a výsledok je na svete:

$$W = W_g - W_{vzo} - W_{vzt} = Vg(\rho_m(h + t + l) - \rho_o(h - \frac{c}{2}) - \rho_t t)$$

2.5 B4/A2 – Nepochopená loptička (opravoval Mišo, vzorák Andrej)

Sama a Poliho trápi takáto vec. Ponoríte pingpongovú loptičku do vody, pustíte ju a ona vyskočí do nejakej výšky nad hladinu. A ona sa nespráva úplne tak, ako by čakali. Skúste preto čo najlepšie lokalizovať ponor, pri ktorom loptička vyskočí do najväčšej výšky. Z vašich meraní urobte graf, ktorý bude dokumentovať, kde sa daný ponor nachádza.

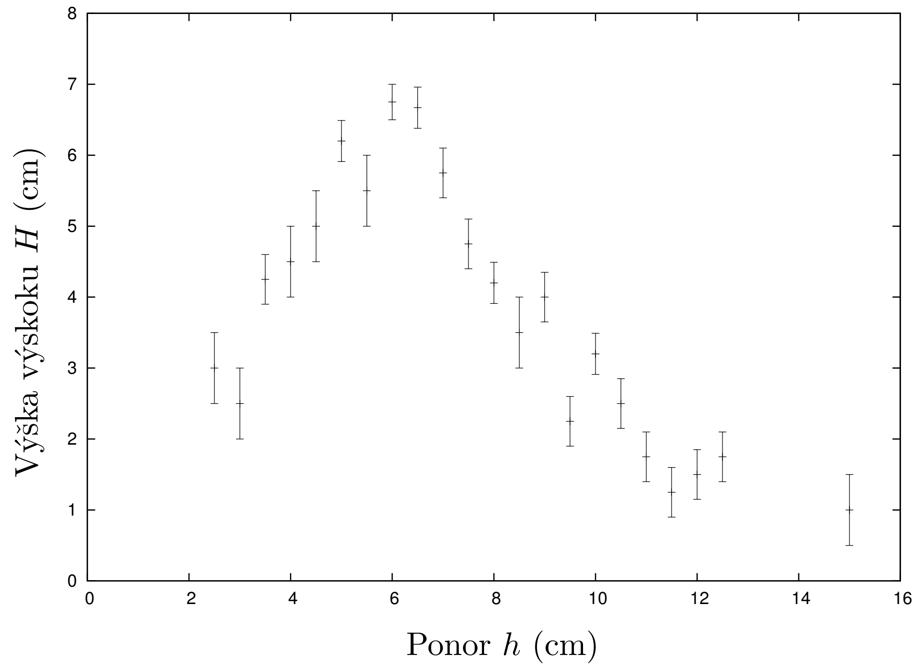
Zadanie chce merať, vraj tam má byť maximum. Preto si vezmem ľahkú loptičku a udám jej základné parametre. To by mohla byť hmotnosť m a polomer r. Moja pingpongová loptička je mainstreamová, $m = 2{,}7\,\mathrm{g}$ a $r = 2\,\mathrm{cm}$.

Loptička vyskakuje aj pri rovnakých ponoroch do rôznych výšok, meranie teda opakujem viacejkrát pre rovnaký ponor a do grafu zaznačím priemernú hodnotu aj s errorbarom, keďže som sa to naučila v minulej sérii. Merania hlavne opakujem v okolí maxima, keďže sa naň zadanie pýta. Krok ponoru si zvolím 0,5 cm – na poriadne hľadanie hodnoty maxima by sa hodil menší, na približné určenie jeho polohy to bude úplne stačiť.

Vystáva dôležitá otázka – ako určím maximálny výskok nad hladinu? Sú tri možnosti. Okometrická je zlá a neobjektívna. Lepšie je si do nejakej výšky nad hladinu položiť zarážku (napríklad knihu) a sledovať, pri akej výške doň loptička neťukne. Táto metóda má nevýhodu, že nepriemerujem, ale beriem najväčšiu hodnotu, teda ma výrazne ovplyvňujú chyby merania. Najvhodnejšia metóda bolo natočiť si výskok na kameru a potom to odčítať z ocajchovaného pozadia, ktorú som použila.

Merania z videa som vedela odčítať s chybou $0{,}5cm$. Keď nameriame N meraní, potom chyba merania bude $\sigma_1 = \dfrac{0{,}5\,\mathrm{cm}}{\sqrt{N}}$. Pre každú hodnotu ponoru porátame ešte štandardnú odchýlku $\sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{N}\Sigma(x - \overline{x})^2}$ a potom zrátame obidve tieto chyby $\sigma_c = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ a toto vynesiem ako errorbary.

Graf neprekladám žiadnou krivkou v tomto prípade. Netuším, aká to má byť závislosť. **Nikdy** jednotlivé body merania nespájam rovnými čiarami. Zato vždy uvedieme popisky grafu aj s jednotkami. Tu je môj graf:



Obr. 5: Výsledky merania

Z grafu vidno, že maximum sa bude nachádzať niekde na intervale od 5,5cm do 7cm. Čo sa týka presnosti, nie je to veľmi dobrá lokalizácia, ale s krokom 0,5cm to presnejšie veľmi určiť nejde.

Chyby môjho merania boli dosť veľké. Výška výskoku sa dosť menila aj pre stále rovnaký ponor a moje odčítanie z videa bolo nepresné. Hlavným problémom bol ale nedostatok meraní - vzorové riešenie by meralo každý ponor aspoň päť ráz, v okolí maxima rovno desaťkrát.

Teraz nastane zamyslenie, prečo ten výskok má maximum. Pozrime sa najprv na sitáciu bez odporu vody. Keď ponor loptičky bude h, tak potom vytlačí na hladinu vodu s objemom $\frac{4}{3}\pi r^3$, teda tento objem vody zdvihne o h. Potenciálna energia vody je vlastne práca vykonaná proti vztlakovej sile a bude mať veľkosť $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{vody} gh$. Pri výskoku sa voda vráti na svoje miesto a loptička vyskočí do výšky H:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{vody} gh = mg(h+H) \Rightarrow H = \left(\frac{4}{3}\frac{\pi r^3 \rho_{vody}}{m} - 1\right)h$$

Keď neuvažujeme odporové sily prostredia, tak by výskok mal byť lineárny od ponoru. Prvá časť grafu tak síce vyzerá, no keď si porátate koeficient pri h, tak vyjde okolo 11,5.

Odporové sily sú zjavne nezanedbateľné. Za predpokladu laminarity prúdenia[3] sú úmerné rýchlosti, ktorá rastie. Zo začiatku je práca týchto síl menšia, ako vztlakovej sily. Teda optimalizujeme dva efekty - kratší ponor znamená menšiu energiu investovanú do vytlačenej vody na hladinu, zároveň ale znamená aj menšiu energiu odobratú odporovými silami a to nielen kvôli skráteniu dráhy, ale aj kvôli nižšej rýchlosti loptičky.

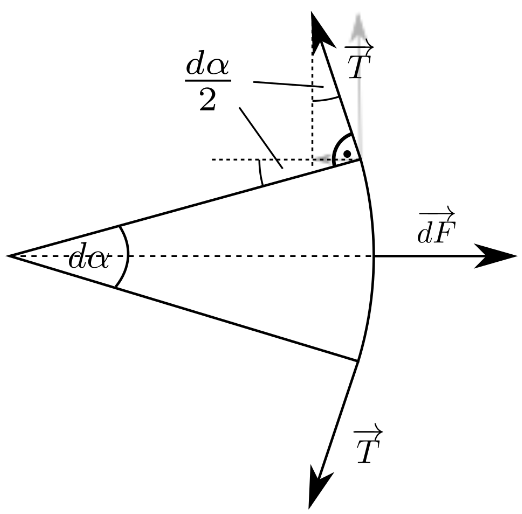
[3] Reynoldsovo číslo odporúčam.

2.6 A3 – Napätá kučera (opravovala Kaja)

Baša nerada umýva riad. Olívia ju minule uprosila, nech to spraví. Omylom im do hrnca spadla Katina kučera v tvare uzavretej kružnice s polomerom r. Baši to prišlo strašne nechutné a kvapla dovnútra tej slučky saponát, čím efektívne vytvorila vnútri vlasu povrchové napätie σ_S, kým naokolo ostalo pôvodné napätie vody σ_V. Aká napäťová sila teraz namáha vlas? Kučera nemení svoj obvod.

Tento príklad sa dal riešiť viacerými spôsobmi. Najprv si ukážeme ten najčastejší prístup. Teoretické znalosti o povrchovom napätí nám hovoria, že voda aj saponátová voda sa snažia minimalizovať svoj povrch so vzduchom, aby mali čo najmenšiu povrchovú energiu. Preto obe ťahajú kučeru k sebe. Predpokladáme, že tieto sily sú vodorovné - je to prijateľné zjednodušenie a zadanie sa netvári, že existuje sila kompenzujúca nevodorovné zložky. Konkrétne na každý takmer nekonečne malý kúsok kučery dĺžky dl pôsobí sila $dF_V = \sigma_V dl$ smerom von a sila $dF_S = \sigma_S dl$ smerom dnu, obe kolmé na daný kúsok kučery[4]. Aby výsledná sila smerovala von a napínala kučeru, musí byť povrchové napätie saponátu menšie než povrchové napätie vody. To je bežná vlastnosť saponátu.

Pozrime sa bližšie na jeden takýto kúsok kučery.



Obr. 6: 1. spôsob riešenia

Zodpovedá mu uhol $d\alpha$, pričom platí: $rd\alpha = dl$. Pôsobí naň výsledná sila $dF = (\sigma_V - \sigma_S)dl$ smerom von a ešte dve napäťové sily na oboch koncoch (v dotyčnicovom smere). Kedy budú tieto tri sily v rovnováhe? Trochu sa pohráme s geometriou a zistíme, že vtedy, keď:

$$2T \sin \frac{d\alpha}{2} = dF,$$

$$2T \sin \frac{d\alpha}{2} = (\sigma_V - \sigma_S)dl = (\sigma_V - \sigma_S)rd\alpha.$$

[4]Tieto kúsky môžeme považovať za rovné, keďže sú takmer nekonečne malé.

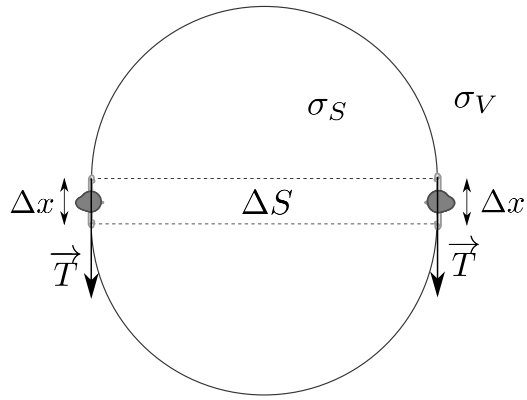
Pre takto malé uhly môžeme použiť priblíženie $\sin\frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$. Potom po vykrátení dostaneme:

$$T = (\sigma_V - \sigma_S)r,$$

čo je hľadaná napäťová sila.

Ako som spomínala, spôsobov je viac. Tak si ešte ukážeme druhý, menej technicky náročný spôsob.

Úloha sa dá jadnoducho vyriešiť pomocou virtuálnych prác. Tentokrát si vystačíme s trochu známejším vzorcom pre povrchovú energiu $E = \sigma S$. Kučeru si rozrežeme na dve polovice a do rezov strčíme dvoch trpaslíkov, ktorí budú polkučery ťahať k sebe a tým simulovať napäťové sily.



Obr. 7: 2. spôsob riešenia

Povedzme, že jedna polkučera stojí a druhá sa trochu odchlípi - posunie sa o Δx.[5] Trpaslíci ju schmatnú za oba konce a pritiahnu ju späť. Obaja ťahali silou T po dráhe Δx, takže vykonali prácu $W = 2T\Delta x$. Táto práca sa spotrebuje na zmenu povrchovej energie. Povrch vody sa zväčší o $\Delta S = 2r\Delta x$ a povrch saponátovej vody zmenší o rovnaké ΔS.

$$W = \Delta E$$

$$2T\Delta x = \Delta E_V + \Delta E_S = \sigma_V \Delta S \ - \sigma_S \Delta S = (\sigma_V - \sigma_S)2r\Delta x$$
$$T = (\sigma_V - \sigma_S)r$$

Opäť dostávame ten istý výsledok a s pokojom v duši môžeme pokračovať v umývaní riadu.

2.7 A4 – Narazená palička (opravoval MaťoCh)

Andrejovi sa snível divoký sen. Bol nahý vo vákuu ako tenká homogénna palička. Vznášal sa uprostred ničoho, keď tu zrazu uvidel meteorit rovnako tažký ako on rútiť sa kolmo naňho. Vyplašený Andrej od hrôzy zavrel oči a zmeral vzdialenosť od svojho stredu, v ktorej doňho meteorit pružne narazil. Andrej sa začal posúvať a otáčať a myslel si, že už sa nikdy nezastaví... keď tu zrazu po polke otáčky opäť pružne narazil do toho istého meteoritu a Andrej... zastal. V okamihu zrážky bol Andrej kolmý na dráhu meteoritu.

[5] Δx opäť považujeme za veľmi malé, aby sme mohli príslušné sily považovať za konštantné.

Keď sa ráno zobudil, povedal Kaji o svojom sne. Tá mu povedala, v akej vzdialenosti doňho narazil. Viete to aj vy?

Budeme predpokladať, že zrážka trvá nekonečne krátko, v následku čoho sú y-ové zložky rýchlostí po zrážke nulové. Ako to už v takýchto typoch úloh chodí, napíšeme si zákony zachovania všetkého, čo sa zachováva, a vytlčieme to z nich. Rýchlosť meteoritu budeme značiť v, rýchlosť tyčky u, jej uhlovú rýchlosť ω, dĺžku Andreja l a vzdialenosť od Andrejovho stredu do miesta, v ktorom doňho vrazil meteorit, r. Rýchlosti pred zrážkou indexujeme 1 a po zrážke 2. Po uvážení, že hmotnosti meteoritu a Andreja sú rovnaké, máme nasledovné rovnice:

$$ZZH_x : v_1 = v_2 + u_2 \tag{1}$$

$$ZZE : v_1^2 = v_2^2 + u_2^2 + \frac{1}{12} l^2 \omega^2 \tag{2}$$

$$ZZMH^{67} : rv_1 = rv_2 + \frac{1}{12} l^2 \omega \tag{3}$$

Poslednú rovnicu dostaneme z podmienky, že po polotáčke narazil Andrej znova kolmo do meteoritu:

$$u_2 = v_2 \tag{4}$$

Máme teda štyri neznáme (v_2, u_2, r, ω) a štyri rovnice. Poďme teda vyjadriť hľadané r. Dosadením (4) do (2) a (1) sa zbavíme u-čiek. Z (1) dostaneme $v_1 = 2v_2$. Dosadíme do (3):

$$rv_1 = r\frac{v_1}{2} + \frac{1}{12} l^2 \omega,$$

$$v_1 = \frac{1}{6} \frac{l^2}{r} \omega \Rightarrow \omega = 6v_1 \frac{r}{l^2}.$$

Dosadíme za u_1, u_2 do (2):

$$v_1^2 = \frac{1}{2} v_1^2 + \frac{1}{12} l^2 \omega^2.$$

A rovno dosadíme aj vyjadrené ω:

$$\frac{v_1^2}{2} = \frac{3r^2 v_1^2}{l^2} \Rightarrow r = \frac{l}{\sqrt{6}}.$$

Tak a máme to. Na dobrú noc sa môžete zamyslieť, či je v poriadku, že výsledok nezávisí od v_1. That's all, folks…

[6] Moment zotrvačnosti homogénnej tenkej tyče vzhľadom na jej stred je $I = \frac{1}{12} Ml^2$.

[7] y_i označíme vzdialenosť hm. bodov od priamky kolmej na stred tyčky. Keďže tyčka začne rotovať okolo svojho stredu, rýchlosť bodov tyčky môžeme písať v tvare $v_i = u + y_i \omega$ Pre moment zotrvačnosti sústavy hmotných bodov platí: $L = \sum_i m_i r_i v_i = L = Mrv_1 + \omega \sum_i m_i r_i^2 + um \sum_i r_i = Mrv_1 + I\omega$. V poslednej rovnosti sme využili, že $\sum_i r_i = 0$, lebo r_i prebieha interval $(-l/2; l/2)$.

Výsledková listina po 2. kole letnej časti 2012/2013

A

	Meno	Škola	3	4	5	6	♡	Σ_2	Σ
1	Dušan Kavický	GJH	9	9	9	9	0	36,00	72,00
2	Jakub Šafin	GPH	9	9	9	6	0	33,00	69,00
3	Tomáš Šoltinský	GPH	9	9	9	9	0	36,00	67,00
4	Karolína Šromeková	ŠpMNDaG	9	9	9	9	0	36,00	63,00
5	Jakub Bahyl	OG Varšavská	9	9	9	2	0	29,00	62,00
6	Martin Gažo	G Pankúchova	9	9	6	9	0	33,00	60,00
7	Matej Badin	GJH	9		9	9	0	27,00	54,00
8	Samuel Sučík	GJH	7	9	7		0	23,00	53,00
8	Samuel Kočiščák	G Poštová	7	9	9	0	0	25,00	53,00
8	Juraj Surovčík	G P.O.H.	8	9	9	9	-2	33,00	53,00
11	Mário Lipovský	GJH	9	9		9	-2	25,00	51,00
12	Alžbeta Kurdelová	ŠpMNDaG	9	6	2	9	0	26,00	48,00
13	Michal Buráň	GJAK-UB	7		9	9	-10	15,00	43,00
13	Róbert Lexmann	G Ľ. Štúra Trenčín	9	2	2	3	0	16,00	43,00
15	Irena Bačinská	ŠpMNDaG	9		9	2	-6	14,00	42,00
15	Marek Koščo	OG Varšavská	8	9	2	2	0	21,00	42,00
17	Miroslav Gašparek	SGOCZA	8	9	1	1	0	19,00	41,00
18	Jaroslav Valovčan	GĽŠ Zvolen	8	4	9	0	0	21,00	40,00
19	Vladimír Macko	GĽŠ Zvolen	7		9		0	16,00	39,00
20	Martin Murin	GJH	8	9			-2	15,00	32,00
21	Pavol Olexa	GAB	9	7			0	16,00	31,00
22	Patrik Turzák	G Poštová					0	0,00	30,00
23	Samuel Tomašec	OG Varšavská	7	8			-4	11,00	29,00
24	Peter Hojnoš	G SNV					0	0,00	26,00
25	Eduard Batmendijn	CGSM					0	0,00	24,00
26	Milan Smolík	GJH	6	1	2	2	-2	9,00	19,00
27	Kamila Součková	ŠpMNDaG	2	9	9		-2	18,00	18,00
27	Samuel Cibulka	GJH	8				-6	2,00	18,00
29	Matej Oravec	OG Varšavská					0	0,00	16,00
29	Tomáš Gonda	Gamča					0	0,00	16,00
31	Adam Hložný	OG Varšavská					0	0,00	9,00
32	Norbert Slivka	GJGT					0	0,00	8,00
32	Matúš Jenča	GJH	7	8		3	-10	8,00	8,00
32	Jerguš Stručka	ŠpMNDaG	4				-8	-4,00	8,00

B

	Meno	Škola	1	2	3	4	5	♡	Σ_2	Σ
1	Marek Bašista	GPH		6	9	9	9	0	33,00	61,00
2	Jaroslav Valovčan	GĽŠ Zvolen	9	8	7	8	4	0	32,00	60,00
3	Natália Jankaničová	GS	9	5	9	9	5	0	32,00	56,00
3	Vladislav Blšták	GJH		9	9	7	8	0	33,00	56,00
5	Martin Gažo	G Pankúchova		8	9	9	9	0	35,00	55,00
6	Peter Vašut	GJH	6	2	9	8		0	25,00	54,00
6	Jaroslava Kokavcová	Gamča		5	9	7	9	0	30,00	54,00
8	Marek Koščo	OG Varšavská			6	8	9	0	23,00	51,00
8	Pavol Olexa	GAB	6	4		9	7	0	26,00	51,00
10	Martin Murin	GJH		2	9	8	9	-2	26,00	47,00
11	Barbora Kováčová	ŠpMNDaG	6	3	9	8		-2	24,00	46,00
11	Matej Hroboň	Gamča	5	3	5	3	5	0	18,00	46,00
11	Samuel Tomašec	OG Varšavská		5	9	7	8	-4	25,00	46,00
14	Ondrej Bohdal	GJH		4	9	7		0	20,00	45,00
15	Michal Ržonca	G Ľ. Štúra Trenčín	4	5	9	7		0	25,00	44,00

	Meno	Škola	1	2	3	4	5	♡	Σ_2	Σ
16	Adrián Pieš	ŠpMNDaG	9			4	7	0	20,00	42,00
16	Jerguš Stručka	ŠpMNDaG	9	1	6	4		-8	12,00	42,00
16	František Dráček	ZŠ D. Mariková		3	9	3	4	0	19,00	42,00
19	Matúš Berák	OG Varšavská		4	9	4	8	0	25,00	41,00
20	Lýdia Janitorová	GŠ		1	5	4	9	-2	17,00	39,00
21	Zuzana Magyarová	GBST		4	9	3		0	16,00	35,00
22	Dominik Cenker	GsvMik	6	1	3	1	2	-2	10,00	32,00
23	Nikola Sokolová	G Hlinská			2	7	9	-2	16,00	31,00
23	Peter Pavel Arthur Petráš	ŠpMNDaG		2	7	7		-2	14,00	31,00
25	Tomáš Daneshjo	G Poštová						0	0,00	26,00
25	Kristián Kocan	SPŠE PO	*	2	1	1	2	0	6,00	26,00
27	Adam Mečiar	G VBN Prievidza						0	0,00	25,00
27	Adam Škrlec	GJH			9	5	5	-12	7,00	25,00
27	Denisa Lampášová	G PB			9	7		-2	14,00	25,00
30	Dávid Gross	G VBN Prievidza						0	0,00	24,00
31	Adam Pankuch	EvGymJAK	6	0				0	6,00	23,00
32	Ivana Mrázová	G P.O.H.	1		9	1	3	-12	2,00	19,00
32	Zuzana Moravcová	G bilingválne						0	0,00	19,00
34	Matej Oravec	OG Varšavská						0	0,00	18,00
34	Hana Ščigulinská	GPH						0	0,00	18,00
36	Adrián Bay	SPŠ J.Murgaša BB	6			4		0	10,00	16,00
36	Martina Beňová	G Bajkalská						0	0,00	16,00
38	Mário Janík	G Senec						0	0,00	12,00
39	Mark Daniel	GyPar						0	0,00	10,00
40	Marcel Paľovčík	GPH						0	0,00	8,00
41	Rudolf Rovňák	GPH						0	0,00	7,00
41	Václav Skála	GJV						0	0,00	7,00
43	Matej Repka	G JAR						0	0,00	5,00
44	Martin Šlauka	GAG						0	0,00	0,00
45	Samuel Hapák	MatFyz						0	0,00	-4,00