Fyzikálny korešpondenčný seminár
28. ročník, 2012/2013
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Vzorové riešenia 2. kola zimnej časti 2012/2013

2.1 B0 – Zrnko piesku (opravoval Mišo)

Odhadnite elektrickú silu, ktorá by pôsobila na dve zrnká piesku vzdialené jeden kilometer, jedno vyrobené z hmoty a druhé z antihmoty, z ktorých sme odstránili všetky elektróny a pozitróny. Protón a antiprotón majú opačné znamienka nábojov, preto sa priťahujú.

Veľkosť elektrickej (Coulombovej) sily získame zo vzťahu: $F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$, kde ϵ_0 je permitivita vákua, q_1 a q_2 sú veľkosti nábojov a $r = 1\,\mathrm{km}$ je ich vzdialenosť. Vieme, že protóny aj antiprotóny majú veľkosť náboja rovnú elementárnemu náboju e, ale náboj antiprotónu má záporné znamienko (to je vlastnosť antihmoty). Čiže náboje q_p protónov a q_a antiprotónov môžme vyjadriť ako Ne a $-Ne$, kde N je počet častíc v jednom z tých dvoch zrniek, čo na seba pôsobia.

Ako zistíme počet častíc? Najprv odhadneme hmotnosť zrnka piesku M a potom ju porovnáme s hmotnosťou protónu a antiprotónu m, ktorých hmotnosť je rovnaká. Neutróny a antineutróny, ktoré nemajú náboj a maju skoro rovnakú hmotnosť ako protóny započítane tak, že počet častíc ktorý nám vyjde ešte predelíme dvomi, teda $N = M/2m$. Neutrónov je totiž v jadre väčšinou toľko, čo protónov.

Piesok je rozdelený podľa veľkostí zrniek, my použijeme $d = 0{,}05\,\mathrm{cm}$, čo je bežná hodnota priemeru. Piesok je najčastejšie z oxidu kremičitého SiO_2, ktorého hustota je $\rho = 2,6\,\mathrm{gcm}^{-3}$ Budeme uvažovať guľový tvar zrnka, tým pádom jeho hmotnosť bude $M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi(\frac{d}{2})^3$, kde výraz so zlomkami je objem guľatého zrnka.

Ak to všetko dáme dohromady do finálneho vzťahu, tak dostaneme:

$$F_e = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{N^2 \cdot e^2}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}(\frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi(\frac{d}{2})^3}{2m})^2\frac{e^2}{r^2}$$

z čoho po vyčíslení máme $F_e = 6 \cdot 10^5\,\mathrm{N} = 600\,\mathrm{kN}$. Znamienko udáva len smer.

Na záver pár poznámok o dobrých mravoch. Ak mám vo výpočte nejaké desatinné čísla, tak potom všetky by mali mať rovnakú presnosť, to znamená rovnaký počet platných číslic. V tomto príklade to bola jedna platná číslica. Druhou užitočnou poznámkou je tvar desatinných čísel, ktoré majú veľa núl, alebo veľa desatinných miest. Tie sa potom zapisuju v tvare s desiatkou na nejaký exponent, ktorý vyjadruje polohu desatinnej čiarky v tomto čisle. Napr 0,05 môžme napísať ako $5 \cdot 10^{-2}$. Pri kladných exponentoch zase posúvame čiarku doprava.

2.2 B1 – Prst vo vode (opravoval Maťo Ch.)

Na dvojramenných váhach máme na jednej miske nádobu s vodou vyváženú závažím na druhej miske váh. Ponoríme prst do nádoby s vodou, no dávame pozor, aby sme sa nedotkli dna. Ostanú váhy v rovnováhe? Vysvetlite

Keď dáme prst pod hladinu, stúpne o niečo hladina vody. Tým sa zvýši hydrostatický tlak na dne pravej misky. Nakoľko sa tlak na dne ľavej misky nezvýšil, váhy sa prevrátia doprava.

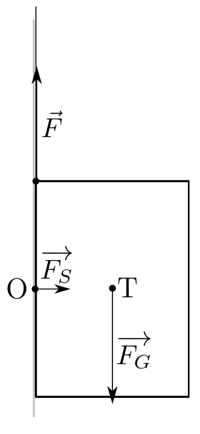
2.3 B2 – Obesenec (opravovala Kaja)

Na hladkej stene visí za šnúrku zavesený kváder. Šnúrka je pripevnená o stred jeho hrany a je oveľa dlhšia než rozmery kvádra. Za akých okolností sa kváder bude opierať o stenu celou svojou stenou?

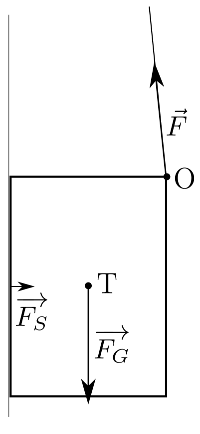
Úlohu budeme riešiť cez rovnováhu momentov síl. Predpokladajme, že sa kvádrik opiera o stenu celou svojou stenou a rozoberme si dva prípady uchytenia šnúrky.

Najprv šnúrku uchytíme za stred vrchnej hrany najbližšej ku stene. Na kvádrik pôsobí jeho tiažová sila $\overrightarrow{F_G}$ v ťažisku smerom nadol a ťahová sila nitky $\vec{F}$ smerom zvislo nahor. Okrem toho môže na kvádrik pôsobiť stena vo vodorovnom smere. Túto silu si označíme ako $\overrightarrow{F_S}$. Do jej pôsobiska umiestnime os otáčania. Aké budú momenty našich troch síl? Nuž, $\vec{F}$ má nulový moment. F_N smeruje priamo od tohto pôsobiska, takže má tiež nulový moment. Jedine tiažová sila má nenulový moment, a preto aj výsledný moment bude nenulový a kvádrik sa otočí. Týmto spôsobom sa teda nemôže opierať o stenu.

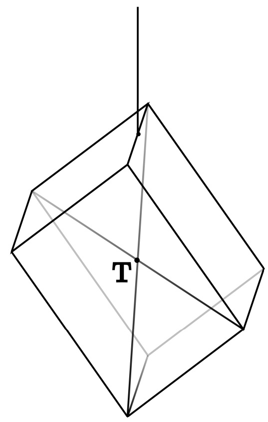
Teraz si uchytíme šnúrku o stred vrchnej hrany najvzdialenejšej od steny. Na kvádrik budú pôsobiť tie isté sily, ako v predošlom prípade. Čo sa týka ťahovej sily šnúrky, bude mať rovnaký smer, ako šnúrka, a teda v tomto prípade bude mať aj vodorovnú zložku. Jej veľkosť však bude $F_x = F \cdot a/l$ (kde a je šírka kvádrika a l je dĺžka lana), čiže pre $a << l$ bude zanedbateľná. Keďže kvádrik sa nepohybuje vo zvislom smere, platí: $F_G = F_y$. Čo je ešte zaujímavejšie, nepohybuje sa ani vo vodorovneom smere, takže sila od steny sa vyrovná x-ovej zložke F a bude rovnako zanedbateľná. No je to vôbec potrebné vedieť? Nie! Stačí, že si položíme os otáčania do bodu úchytu šnúrky. Ľahko zistíme, že $\overrightarrow{F_G}$ a $\overrightarrow{F_S}$ odtáčajú kvádrik v rovnakom smere, a teda výsledný moment síl nemôže byť nulový. Takže ani toto nie je rovnovážna poloha pre kvádrik.



Obr. 1: Prvý prípad



Obr. 2: Druhý prípad



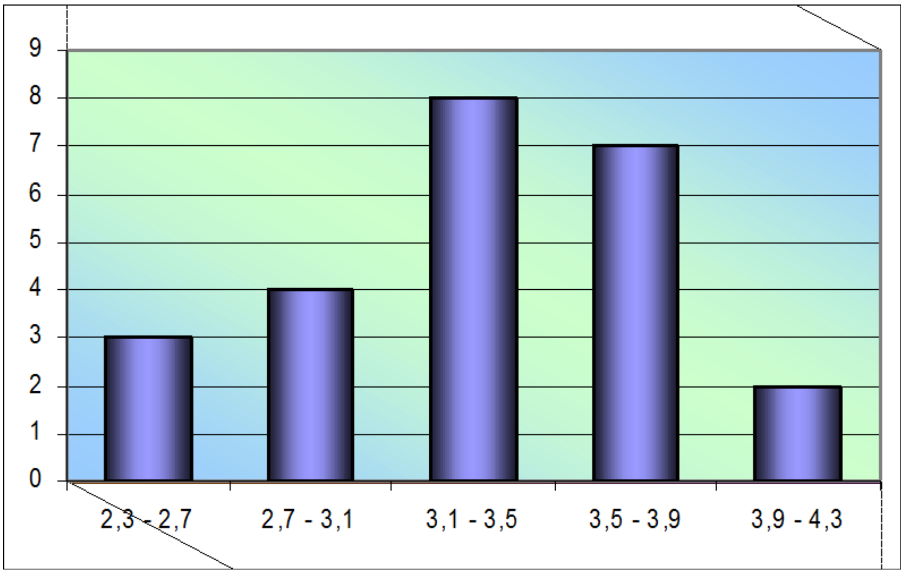
Obr. 3: Rovnovážna poloha

Takto by sme mohli overiť aj ostatné možnosti uchytenia, no beztak nám to nepomôže. Kvádrik sa nám stále odchýli od steny. Potom sa ustáli v rovnovážnej polohe, ktorú mnohí z vás spomínali. No nemôžeme len tak tvrdiť, že jediná poloha, v ktorej vie zotrvať, je stabilná poloha, čiže taká, pri ktorej má najnižšiu energiu. Rovnovážnymi polohami sú totiž aj poloha vratká a voľná. A na tie neradno zabúdať!

2.4 B3/A1 – Bublafuč (opravovala Marika)

Nájdite si hladký povrch a vytvorte na ňom mydlové bublinky rôznych veľkostí. Bublinky prepichnite slamkou a odmerajte, ako závisí čas úplného vyfúknutia sa bublinky od jej polomeru. Pri značení dát do grafu použite logaritmickú škálu, pomôže vám určiť závislosť.

Ahojte. Dúfam, že ste si túto hravú experimentálku náležite vychutnali. Najprv ukážem histogram vami nameraných hodnôt:



Obr. 4

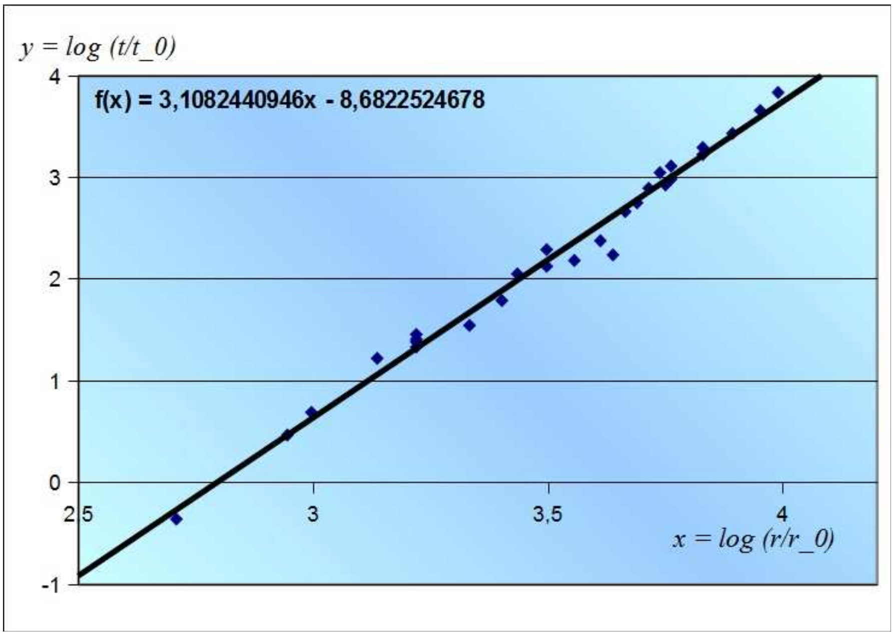
V histograme som neuviedol výsledky menšie ako 2. Niektorí z vás dokonca (z dobrých meraní ale zlým spracovaním dát) dostali zápornú hodnotu n. Nad získaným výsledkom sa treba vždy zamyslieť! Nie je to náhodou v spore s intuitívnym predpokladom, že väčšia bublina sa predsa vyfúkne za väčší čas? Koľko meraní bolo treba spraviť? Jedno je určite málo, pretože vo vzťahu sú dve neznáme. Mohlo by sa preto zdať, že dve merania budú postačovať. [1] To však nie je pravda! Každé meranie je totiž zaťažené nepresnosťami. Veď sledujte:

- Reakčný čas človeka (cca 0,2 s) spôsobuje nepresnosť stopkami nameraného času.
- Priemer bubliny ste (napriek mnohým vylepšovákom) nemerali ani na milimetre presne.
- Podmienky (vlhkosť podložky, kvalita bublifukovej zmesi, vaša nálada, …) sa od merania k meraniu menili a to mohlo spôsobiť prirodzené fluktuácie meraných veličín.
- … *(miesto na zamyslenie sa nad ďalšími nepresnosťami, ktoré ste v riešení zamlčali)*

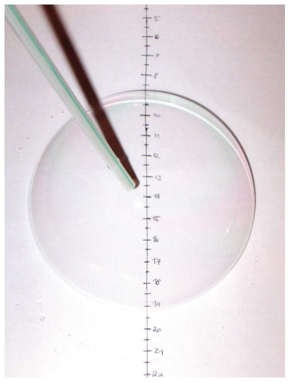
---

[1] Z rovníc $t_1 = Cr_1^n$ a $t_2 = Cr_2^n$ sa dá odvodiť $\frac{\log(t_1/t_2)}{\log(r_1/r_2)}$ a $\log C = frac \log t_1 \log r_2 - \log t_2 \log r_1 \log r_2 - \log r_1$. Od estetična majú tieto výsledky ďaleko, no k ich odvodeniu stačí trocha znalostí o logaritmoch. Takto získané výsledky sú však zaťažené veľkou chybou – dávajú len hrubý odhad skutočných hodnôt týchto veličín.

Skutočnosť je, že meraní treba spraviť čo najviac. Čím viac meraní spravím, tým presnejší výsledok dostanem. Čo sa týka spracovania dát, počínali ste si všelijako. V zásade sme uznávali každý rozumný postup. Keďže však vzorové riešenie má byť naozaj vzorové, ukážem, ako sa k tomu zvykne pristupovať v praxi. S Tinkou sme merali a namerali sme veľa dvojíc [r,t] a hneď sme vylúčili tie, pri ktorých očividne došlo k hrubým nepresnostiam. Inšpirovaní zadaním sme si pre každé meranie spočítali dvojicu $[\log(r/t_0), \log 9t/t_0)]$,[2] pretože medzi nimi očakávame lineárnu závislosť. Tieto dáta sme pomocou excelu vyložili do grafu a nechali sme ich fitovať lineárnou regresiou.[3] Ľaľa, toto je výsledok:



Obr. 5: Fitovanie



Obr. 6: Experiment

Samozrejme, správny výsledok by mal obsahovať aj odhad nepresnosti. Predsa je rozdiel, ak niekto nameria 100 ± 1 a 100 ± 200.[4] V tomto prípade stačilo vziať najplytšiu a najstrmšiu priamku, ktorá ešte namerané dáta ako tak fituje. V našom prípade dostávame výsledok: $n = 3{,}1 \pm 0{,}4$ Vzhľadom na veľkú odchýlku nemá význam dávať do výsledku viacej platných číslic.

Hodnotenie: Body dole šli za viacero nedôsledností. Požadovali sme od vás aspoň 10 meraní (čím menej meraní, tým menej bodov). Ďalší bod šiel dolu, ak ste sa nezamýšľali nad presnos-

[2]Veličiny r_0 a t_0 sú akési referenčné hodnoty času a polomeru. My sme zvolili $r_0 = 1\,\mathrm{s}$ a $t_0 = 1\,\mathrm{cm}$. Celú túto procedúru uvádzam len preto, že argument logaritmu musí byť bezrozmerné číslo. Neexistuje nič ako logaritmus metra, resp. sekundy.

[3]Namiesto coolového výrazu „lineárne fitovať" sa dá povedať i „preložiť takou priamkou, ktorá čo najlepšie aproximuje namerané hodnoty". Excel používa pri fitovaní výpočtovo náročnú metódu najmenších štvorcov. Nám úplne postačilo, ak ste lineárny fit spravili „od oka". Z polohy dvoch bodov na fitovanej priamke sa potom ľahko nájde jej rovnica.

[4]Veľká odchýlka neznamená nesprávne riešenie. Poukazuje len na nepresné meracie prístroje a nedôsledné merania, no ak ju dostaneme z daného štatistického súboru úplne korektnou cestou, nemám žiadne námietky.

ťou merania. Všetky zvyšné bodové tresty boli za nedôsledne spracované dáta. Za nameranú hodnotu išli body dolu len v extrémne sa odchyľujúcich prípadoch.

Fyzikálna otázka na záver: Zmýšľali ste sa nad tým, akú jednotku bude mať C podľa vašich meraní?

2.5 B4/A2 – Modul (opravovala Tinka)

Na zem dopadá z výšky 100 kilometrov vesmírny modul tvaru gule s polomerom jeden meter. Odhadnite, koľko tepla sa uvoľní vďaka treniu o atmosféru.

Opäť raz romantická úloha na rozvoj fyzikálnej intuície. Bez motivačno-kvetnatého úvodu, aký sme poskytli pri podobnom príklade v poslednej sérii, sa vrhnime rovno na fyziku.

Čo vieme povedať o energii, ktorá sa minie na trenie? Určite ju vieme ohraničiť zhora, čo je dobré na to, aby sme mali aspoň nejakú prvotnú predstavu. Modul má vo výške $R+H$ nad zemou, kde R si je polomer Zeme a H výška, z ktorej padá, energiu $-GmM/(R+H)$.[5] Dole, na povrchu Zeme, má potenciálnu energiu $-GmM/R$. Rozdiel týchto čísel sa premení na na kinetickú energiu plus to, čo unikne ako teplo do atmosféry. Takže ak modul váži jednu tonu,[6] je maximálne teoretické množstvo tepla práve

$$E_T = GmM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H}\right) \approx 973\ \mathrm{MJ}.$$

Pre predstavu, je to asi toľko, koľko treba na ohriatie 230 kubíkov vody o jeden stupeň, čo nevyzerá byť veľa.

Poďme ďalej. Predstavme si teraz, že modul padá tak, že akurát blízko pri zemi už odporová sila kompenzuje gravitačnú:

$$mg = \frac{1}{2}C\rho(h)Sv(h)^2,$$

kde h je výška, v ktorej sa modul nachádza, $S = \pi r^2$ prierez modulu a $C = 0{,}5$ koeficient odporu pre guľu. To znamená, že modul dopadne na zemský povrch rýchlosťou

$$v(0) = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho(0)\pi r^2}}.$$

Pri hustote vzduchu pri zemi $\rho(0) = 1{,}3\,\mathrm{kg/m^3}$ je rýchlosť $v(0) = 99\ \mathrm{m/s}$ a kinetická energia potom $E_k = mv(0)^2/2 = 4{,}9\ \mathrm{MJ}$. Všimnime si veľký objav – čo presne sa dialo medzi vrchom a spodkom, nás vôbec nezaujíma, lebo jediná podstatná vec je kinetické energia pri zemi. V tom prípade je celkové teplo $E_T - E_k = 968\ \mathrm{MJ}$, nastala teda len nepatrná zmena.

Čo vieme vyskúšať ďalej? Vieme si ešte napísať diferenciálnu rovnicu pre pohyb modulu, a skúsiť ju riešiť. Takže nádych…

$$m\ddot{h} = -\frac{GmM}{h^2} + \frac{1}{2}C\rho(h)\pi r^2\dot{h}^2.$$

[5] Dúfam, že písmenkám každý rozumie aj bez vysvetlenia. Ak by náhodou nie, tak M je hmotnosť Zeme, m hmotnosť modulu a G gravitačná konštanta.

[6] Priznám sa, ze toto si neviem lepšie tipnúť.

Bodka nad písmenom značí deriváciu podľa času, znamienko + orientáciu sily nahor a - nadol. No a čo teraz? Tu nám pomôže už len Excel alebo C/C++. Pozrime sa teda na Excel. Numerická derivácia výšky nie je nič iné ako rýchlosť:

$$v = \frac{dh}{dt} = \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t},$$

pre nejaké rozumne malé Δt. Takže

$$h(t+\Delta t) = h(t) + v\Delta t.$$

Toto sa volá Eulerova metóda. Možno to zopakovať pre rýchlosť:

$$v(t+\Delta t) = v(t) + a\Delta t,$$

kde a je zrýchlenie:

$$a(t) = -\frac{GM}{(R+h(t))^2} + \frac{1}{2}\frac{C}{m}\rho(h(t))Sv(t)^2.$$

Ešte nám zostáva zistiť, ako sa mení hustota s výškou. Musíme si zvoliť model atmosféry. Pri izotermickom platí, že hustota klesá exponenciálne.[7] Adiabatický model je o trochu komplikovanejší, takže sa mu vyhneme (okrem toho, v Exceli sa trochu blbo modeluje).

V každom prípade, máme teda (for-)cyklus: pre každý časový okamih vypočítaj

(i) zrýchlenie: $a(t) =$ ten obludný výraz,

(ii) hustotu: $\rho(h) = \rho_0 \exp\left(-\frac{M_m g}{RT}h\right)$,

(iii) rýchlosť: $v(t+\Delta t) = v(t) + a\Delta t$,

(iv) výšku: $h(t+\Delta t) = h(t) + v\Delta t$.

Toto robíme dookola, pokiaľ je výška väčšia ako nula. Excelovský hárok s výpočtom nájdete na našich stránkach.

Pre časový dielik $\Delta t = 2$ s nám vyšla rýchlosť 102 m/s (zaujímavé je, že maximálna rýchlosť počas pohybu bola niekde až na 1000 m/s). To je veľmi podobné prvému odhadu, takže kinetická energia modulu tesne nad zemou je znova približne 5 MJ. Prvý odhad sa teda zdá byť celkom prijateľný, čo znamená, že gravitačná a odporová sila sú tesne nad zemou naozaj v rovnováhe. A týmto veľkolepým zistením sa s vami lúčime.

[7]Vychádzame z tlaku, pre ktorý platí $dp = -\rho g\, dh$,, a zo stavovej rovnice máme $\rho = pM_m/RT$, kde $M_m = 0{,}028\,\mathrm{kg/mol}$ je mólová hmotnosť molekuly dusíka, a $T = 300$ K. Keď to dáme dokopy, máme diferenciálnu rovnicu pre p:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{M_m g}{RT}h,$$

ktorej riešením je

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{M_m g}{RT}h\right),$$

To isté platí aj pre hustotu, keďže tá je podľa stavovej rovnice závislá od tlaku lineárne, a $\rho_0 = 1{,}3$.

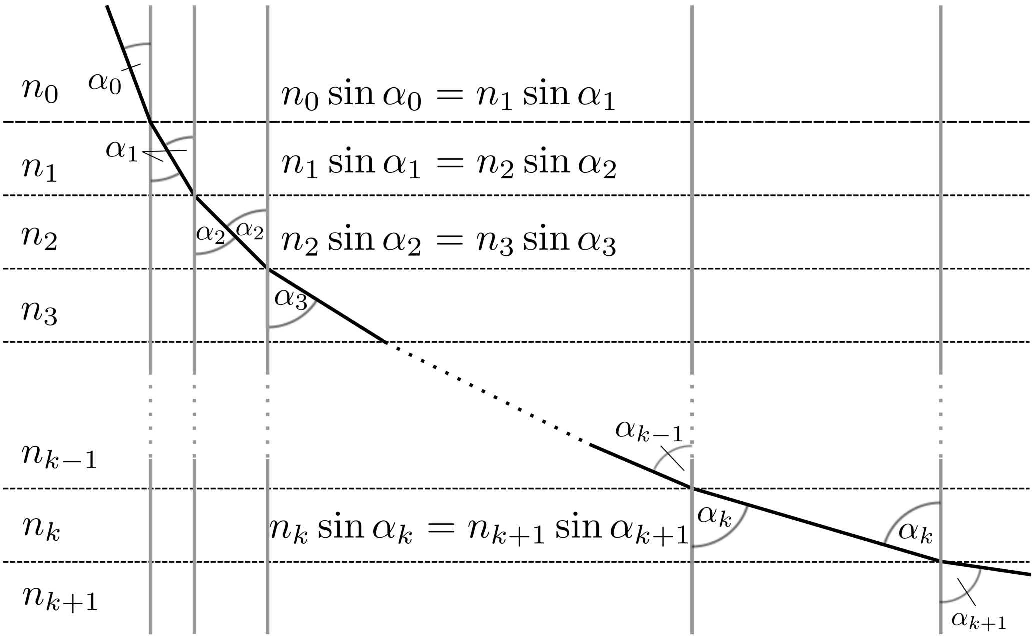
2.6 A3 – Impérium sa zrkadlí (opravoval Andrej)

Bum pri sledovaní hviezdnych vojen narazila na veľmi zaujímavú scénu. Mladý Anakin s kráľovnou Amidalou pozorujú na svojej planéte piesok. Upútalo ich, že je dokonale rovný ako najrovnejšie roviny na Zemi. Zrazu si všimli, že majú pred sebou jazero. V skutočnosti to bol však iba odraz oblohy nad nimi. Vypočítajte v akej vzdialenosti jazero videli. Teplota vzduchu vo výške očí je 30 °C a pri zemi sa šplhá až na 60 °C.

Milé potvorky, vaše mozogy nie sú až také úžasné. Predpokladajú totiž jeden z prírody odpozorovaný vzor – že ak niečo do nich dopadá z daného smeru, tak to v predĺžení toho smeru aj nájdete. Čiže modrá zdola znamená jazero v diaľke, nie divotvorne ohnutý lúč z oblohy. Ako sa tam ten pačmag dostal?

Odrážať sa nie je od čoho, budeme sa teda lámať. To vyžaduje zmenu indexu lomu. Plyn máme stále len jeden, len nejak sa v ňom *postupne* mení teplota. Čo je dôležité, koncentrácia častíc v plyne je nepriamo úmerná teplote (zo stavovej rovnice: $c = \frac{n}{V} = \frac{p}{kT}$). A ako súvisí koncentrácia s indexom lomu? Jeden Feynman[8] povedal: $n - 1 \sim c$.

Teraz treba už len vymyslieť rozumný model postupne meniaceho sa indexu lomu, dobre si napísať Snellov zákon a nakresliť pekný veľký obrázok postupne sa lámuceho sa lúča, ktorý vychádza Anakinovi z očí. Keďže sa teplota mení postupne, bude mať veeeeľa vodorovných rozhraní tesne za sebou a pre každé si napísať Snellov zákon.



Obr. 7: Lom svetla

Pozorné oko indexové si všimne najdôležitejšie pozorovanie vzoráku:

$$n_0 \sin\alpha_0 = n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2 = n_3 \sin\alpha_3 = n_4 \sin\alpha_4 = \ldots = n_k \sin\alpha_k = n_{k+1} \sin\alpha_{k+1}$$

[8] prvý diel, kapitola 31.2, vzťah 31.18. Ak vás zaujíma, čo je príčinou indexu lomu a prečo závisí od vlnovej dĺžky, našli ste, čo ste hľadali.

Kedy sa tento lúč dostane do oblohy? Vtedy, keď sa nezaborí do piesku – teda potrebujeme, aby bol tesne pri zemi vodorovný, čiže n_{k+1} bude predstavovať index lomu dole pri zemi a $\sin\alpha_{k+1} = \sin 90° = 1$. Pre nás budú užitočné aj začiatočné hodnoty, takže tie si necháme tiež:

$$n_0 \sin\alpha_0 = n_{dole} \Rightarrow \sin\alpha_0 = \frac{n_{dole}}{n_0}$$

Už len zistiť nejak kultúrne hodnoty indexu lomu. Buď si zoberieme nejaký známy index z wikipédie a porátame pomocou vzorčeka z Feynmana také, aké chceme, alebo si niečo vygooglime a slušne uvedieme *zdroj*.

Už len doraziť to, ako ďaleko bude jazero. To by chcelo nejaký parameter Anakina, rozumný znie výška 1,88 metra.[9]

$$tg\alpha_0 = \frac{l}{h} \Rightarrow l = \frac{h\frac{n_{dole}}{n_0}}{\sqrt{1-\left(\frac{n_{dole}}{n_0}\right)^2}} \approx 260\,\mathrm{m},$$

čo vyzerá ako rozumná vzdialenosť.

2.7 A4 – Je to relatívne (opravoval Jano H.)

Dvaja bratia, dvojčatá Peter a Pavol, sa podujali na relativistický experiment. Pavol vo svojich dvadsiatich rokoch nasadol do rakety a rýchlosťou $\frac{3}{5}c$ sa vydal po priamke ďaleko preč od Zeme. Po desiatich rokoch svojej cesty poslal Pavol Petrovi fotografiu. Podobne, Peter poslal po desiatich rokoch čakania Pavlovi svoju fotografiu. Hneď v okamihu, ako Peter dostal od Pavla fotografiu, nasadol do rakety a vydal sa rýchlosťou $\frac{4}{5}c$ za Pavlom.

a) Aký starý bol Pavol na fotografii a aký starý bol Peter, keď si ju prezeral?

b) Aký starý bol Peter na fotografii a aký starý bol Pavol, keď si ju prezeral?

c) Akí starí boli Peter a Pavol, keď sa opäť stretli?

Každému beží jeho vlastný čas relatívne, keď sa blíži termín, tak akosi rýchlejšie. Fyzika nám však hovorí, že naozaj každý má svoj vlastný čas, ktorý mu beží z jeho pohľadu správne a normálne. Akurát časy (a dĺžky) všetkým naokolo bežia čudne. Najprv si zaveďme označenia pre to, čo sa vlastne stalo. Časy a súradnice (vzdialenosti) spojené so Zemou budem označovať obyčajným t,x, časy a súradnice (vzdialenosti) spojené s Pavlovou raketou čiarkovane t', x' a časy a súradnice (vzdialenosti) spojené s Petrovou raketou dvoj-čiarkovane t'', x''. čas ačneme počítať od štartu Pavlovej rakety. Udalosti si pomenujeme nasledovne: A - Pavol odosiela fotku, B - Peter odosiela fotku, C - Peter na Zemi prijíma fotku a štartuje, D - Pavol v rakete prijíma fotku. Napokon ich stretnutie označíme E.

Teraz nazrime do tabuliek a napíšme si základné vzorce transformácií časov a súradníc. «««¡ .mine Ak sa dve súradné sústavy, nečiarkovaná a čiarkovaná pohybujú navájom rovnomerne

[9] http://starwars.wikia.com/wiki/Anakin_Skywalker

priamočiaro rýchlosťou v (čiarkovaná v smere v) a pri stretnutí si zosynchronizujú hodinky na čas rovný nule potom prevody časov a súradníc udalostí(!) budú vyzerať takto:

$$x' = \gamma_v(x - v \cdot t) \qquad t' = \gamma_v(t - vx/c^2)x = \gamma_v(x' + v \cdot t') \qquad t = \gamma_v(t' + vx'/c^2),$$

pričom sme sa vyhli zlomkom zavedením označenia $\gamma_v = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Ak sa dve súradné sústavy, nečiarkovaná a čiarkovaná, pohybujú navájom rovnomerne priamočiaro rýchlosťou v (čiarkovaná v smere v) a pri stretnutí si zosynchronizujú hodinky na čas rovný nule, potom prevody časov a súradníc udalostí(!) budú vyzerať takto:

$$x' = \gamma_v(x - v \cdot t) \qquad t' = \gamma_v(t - vx/c^2)$$

$$x = \gamma_v(x' + v \cdot t') \qquad t = \gamma_v(t' - vx'/c^2),$$

pričom sme sa vyhli zlomkom zavedením označenia $\gamma_v = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

Úloha a) Po desiatich rokoch svojho letu Pavol posiela fotku zo svojej pozície, takže $t'_A = 10\,\text{rokov}, x'_A = 0$. Teraz sa prenesieme do sústavy spojenej so Zemou. Udalosť A tu nastala v čase $t_A = \gamma_v(t'_A)$ vo vzdialenosti x_A, kam za ten čas stihla dôjsť Pavlova raketa, tj. $x_A = vt_A$. Túto vzdialenosť prekoná svetlo (alebo iné elektromagnetické vlnenie) nesúce fotku za čas $t_{AC} = x_A/c$. Takže príde v čase $t_C = t_A + t_{AC} = t_A + \frac{v}{c}t_A = (1 + \frac{v}{c})\gamma_v(t'_A) = (1 + \frac{3}{5})\frac{5}{4}t'_A = 2 \cdot 10\,\text{rokov}$. Prevedieme na vek (vzorcom vek = čas + 20 rokov) a získame odpoveď. Fotku 30 ročného Pavla si pozrie 40 ročný Peter.

Úloha b) Skúsime riešiť podobnú obrátenú úlohu. Peter posiela fotku zo Zeme po desiatich rokoch čakania, teda $t_B = 10\,\text{rokov}, x_B = 0$. Svetlo nesúce fotku potrebuje dobehnúť (rýchlosťou c) za čas $t_{BD} = t_D - t_B$ Pavla, ktorý dovtedy dôjde do vzdialenosti $x_D = vt_D$. Tak zostavíme rovnosť $x_D = vt_D = c(t_D - t_B)$, odtiaľ $t_D = \frac{c}{c-v}t_B$. Fajn, ale my chceme vedieť zodpovedajúci čas v Pavlovej sústave $t'_D = \gamma_v(t_D - vx_D/c^2) = \gamma_v(1 - \frac{v^2}{c^2})t_D = \gamma_v(1 - \frac{v^2}{c^2})(\frac{c}{c-v})t_B = 2 \cdot 10\,\text{rokov}$. Tento výsledok je nám akýsi povedovmý z predchádzajúcej úlohy! Zamyslime sa na chvíľku. Situácia dvojčiat je akási symetrická, jedno stojí a druhé sa voči nemu hýbe rýchlosťou v. Po svojich desiatich rokoch pošle do druhé fotku a tá k nemu niekedy dorazí. A teória relativity postuluje, že dve inerciálne vzťažné sústavy pohybujúce sa navájom rovnomerne priamočiaro sú ekvivalentné. Takže sme mali čakať rovnaký výsledok a ukázali sme len, že rátanie iným spôsobom je tiež dobré. Fotku 30 ročného Petra si pozrie 40 ročný Pavol.

Úloha c) Budeme najprv znova rátať v sústave spojenej so Zemou. Peter vyštartuje v čase $t_c = 20\,\text{rokov}$ výchlosťou w. Za čas $t_{CE} = t_E - t_C$ má dobehnúť Pavla, ktorý bude vtedy vzdialený od Zeme $x_E = vt_E$. Znovu porovnaním získame rovnosť $x_E = vt_E = w(t_E - t_C)$ a z nej $t_E = \frac{w}{w-v}t_C = \frac{4/5}{1/5}20\,\text{rokov} = 80\,\text{rokov}$. Nás ale zaujíma, aký čas tomu prislúcha v sústavách Petra a Pavla. Pre pavla spravíme jednoducho stansformáciu $t'_E = \gamma_v(t_E - vx_E/c^2) = \gamma_v(1 - \frac{v^2}{c^2})t_E = \frac{5}{4} \cdot (1 - \frac{3^2}{5^2})t_E = \frac{4}{5}80\,\text{rokov} = 64\,\text{rokov}$. Peter si so Zemou synchronizoval hodinky na nulu v čase svojho štartu, takže letel len čas $t_{CE} = t_E - t_C = 64\,\text{rokov}$ ktorý v jeho novej sústave bude rovný $t''_{CE} = \gamma_w(t_{CE} - wx_E/c^2) = \gamma_w(t_{CE} - \frac{vw}{c^2})t_E) = \frac{5}{3} \cdot (60\,\text{rokov} - \frac{3 \cdot 4}{5^2}80\,\text{rokov}) = 36\,\text{rokov}$.

Peter si teda od Pavlovho štartu na stretnutie počkal $t_c + t''_{CE} = 20 + 36$ rokov. Pri opätovnom stretnutí mal Pavol 84 rokov a Peter 76 rokov.

Príklad je to trochu pracný s mnohými možnosťami na pomýlenie, ktoré poniektorí využili. Rátať sa dal mnohými rôznymi spôsobmi. Treba sa však vždy zamyslieť, v ktorej som práve sústave a pri prepočtoch určiť čas a súradnice udalosti (pozor, kalkulácie, koľko let bude trvať, robím hoci aj na —Zemi, ale ak sa budem odvolávať na udalosť v mieste doletu, už tam ide súradnica onoho miesta). Nebojme sa relativity!