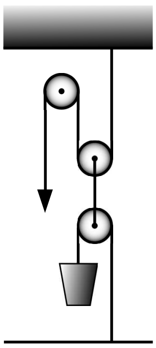
Fyzikálny korešpondenčný seminár
26. ročník, 2010/2011
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Zadania 2. série letnej časti 2010/2011

Termín: 11. 4. 2011

2.1 Filip dvíha (9 bodov)

Akou silou musí Filip na obrázku ťahať za lano, aby vytiahol stokilové závažie?



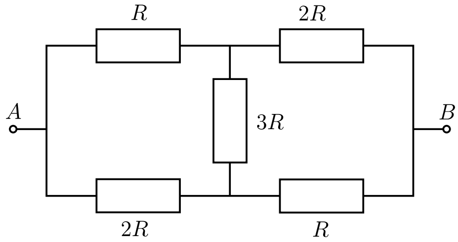
Obr. 1: Závažie a systém kladiek

2.2 Kvádre (9 bodov)

Vymyslite dva spôsoby, ktorými možno určiť koeficient odporu medzi podložkou a kvádrom, ak nemáte k dispozícii silomer, váhy, ani žiadne iné podobné silumeracie zariadenie. Aspoň jeden zo spôsobov zrealizujte a odhadnite chybu merania.

2.3 Elektrina (9 bodov)

Vypočítajte elektrický odpor medzi bodmi A a B na obrázku.



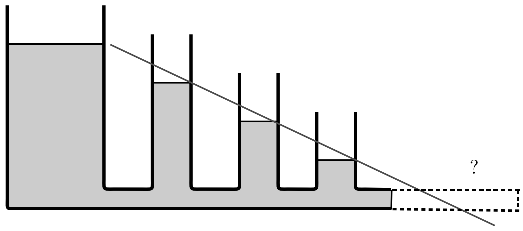
Obr. 2: Odpory

Bonus za nebodovú odmenu: Určte napätia a prúdy v obvode na `http://xkcd.com/730`

Seminár podporujú:
APVV

2.4 Zo suda trubka (9 bodov)

Zo sudu vychádza v blízkosti dna vodorovná trubka dĺžky ℓ. Do trubky sú v pravidelných intervaloch nastrkané zvislé trubice po celej jej dĺžke. Hovorí sa, že hladina vody v týchto trubiciach bude smerom k otvorenému koncu trubky lineárne klesať, keďže v dôsledku trenia v trubici klesá tlak. Vysvetlite, či sa toto tvrdenie zakladá na pravde. Ak áno, čo by sa stalo v prípade, že by sme trubku predĺžili, ako je znázornené na obrázku? Prestala by voda tiecť?



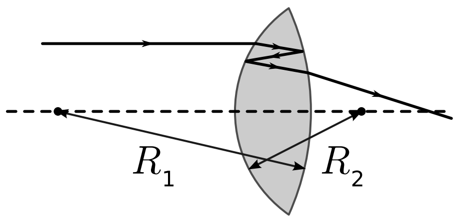
Obr. 3: Sud s trubicami

2.5 Kmitajúce kalčeto (9 bodov)

Bežný stolný futbal obsahuje líniu $N = 5$ obrancov v pravidelných rozostupoch $d = 10\,\mathrm{cm}$ od seba. Lukáš si vymyslel, že jeho obrana bude nepriestrelná, keď bude týmito obrancami zúrivo mykať zo strany na stranu. Šírka ihriska je $L = 50\,\mathrm{cm}$, polomer lopty je $R = 1\,\mathrm{cm}$. Hráčov považujte za zvislé valčeky s polomerom $H = 1\,\mathrm{cm}$. Lukášovo počínanie si predstavte pre jednoduchosť tak, že hýbe radom obrancov konštantnou rýchlosťou u dovtedy, kým nenarazí krajným hráčom do steny. Vtedy okamžite zmení orientáciu pohybu hráčov na opačnú s rovnakou rýchlosťou. Určte pre $u = 2v$ a pre $u = 4v$ pravdepodobnosť, že lopta vyslaná súperom kolmo na líniu obrancov rýchlosťou v prejde cez líniu obrancov bez dotyku!

2.6 Postriebrená šošovka (9 bodov)

Majme tenkú vypuklo-vypuklú šošovku, o polomeroch zakrivenia R_1, R_2. Tá je pokrytá polopriepustným zrkadlom z oboch strán. Index lomu materiálu, z ktorého je šošovka vyrobená, je n. Určte ohniskovú vzdialenosť pre lúče práve jedenkrát odrazené od oboch povrchov.



Obr. 4: Šošovka

2.7 Chladnička (9 bodov)

Chcem mať doma chladničku. V chladničke budem udržiavať stálu teplotu štyri stupne nad nulou. V kuchyni, kde chladnička bude stáť, je za horúcich letných dní teplota aj 24 °C. Poraďte mi, ako si mám takú chladničku postaviť a určte najmenšiu možnú spotrebu elektrickej energie najideálnejšou možnou chladničkou, ak jej koeficient prestupu tepla je $k = 20\,\mathrm{WK^{-1}}$.

Vzorové riešenia 1. kola letnej časti 2010/2011

1.1 Budapest Keleti pályaudvar (opravovali Katka a Petrík, vzorák Petrík)

Tinka má úchylku, pozoruje vlaky. Zistila, že pri svojom štarte zo stanice sa vždy pohybujú rovnomerne zrýchleným pohybom a keďže koľajnice v staniciach zvyknú byť rovné, tak aj priamočiaro. Pri svojom pozorovaní sa vždy postaví k začiatku prvého vagóna. Všimla si, že za osem sekundy prejde okolo nej prvý vagón. Pomôžte Tinke zistiť, ako dlho okolo nej bude prechádzať trinásty vagón.

Dí internešnl jurositi trein uan-sevn-fór jan jesenius tu d stejšn bydapest keleti páljaudvár is erájvin tú platform uan... Že ste to ešte v živote nepočuli? Že ste ešte nesedeli v tých ultramäkkých sklopných kreslách, o akých sa našim vlakom ani nesníva? MmmMmmmmmňam...

Ale k veci. Už na začiatku prvého ročníka strednej školy do nás pchali vzorec pre dráhu prejdenú rovnomerne zrýchleným pohybom za čas t pri nulovej počiatočnej rýchlosti, $s = at^2/2$, kde a je zrýchlenie. To je všetko, čo k riešeniu tohto príkladu potrebujeme. Zatiaľ to síce vyzerá tak, že máme jednu rovnicu pre veľa neznámych, ale nenechajme sa odradiť.

Pozrime sa najskôr na údaj, ktorý nám bol daný v zadaní. Dráha, ktorú vlak prejde za prvých 8 sekúnd, je dĺžka jedného vozňa, označme si ju L (neskôr zistíme, že jej hodnota je pre naše výpočty nepodstatná). Platí teda:

$$L = at_1^2/2 \qquad \Rightarrow \qquad t_1^2 = 2L/a \ ,$$

kde t_1 je odmeraných 8 sekúnd.

Teraz sa môžeme spýtať, za ako dlho (tento čas si označíme ako t_{12}) okolo nás prejde 12 vagónov:

$$12L = at_{12}^2/2 \qquad \Rightarrow \qquad t_{12}^2 = 24L/a = 12t_1^2 \ ,$$

Tu už vidno, že nepotrebujeme vedieť ani zrýchlenie, ani dĺžku vozňa. Posun o 13 vagónov spočítame presne rovnako – bude teda trvať $t_{13} = \sqrt{13}t_1$.

Na záver najťažšia úvaha: ako dlho bude okolo nás prechádzať 13-ty vagón? Veru tak, je to naozaj $t_{13} - t_{12} = (\sqrt{13} - \sqrt{12})t_1 \approx 1{,}13\,\mathrm{s}$.

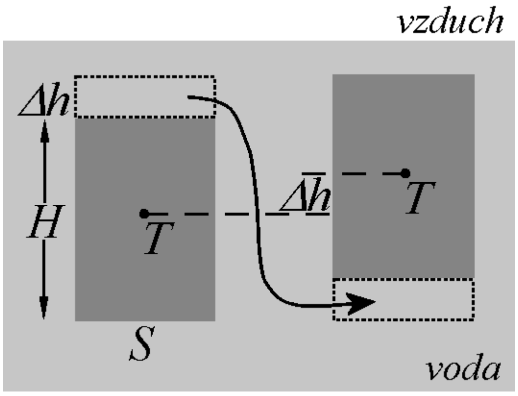
1.2 Drevo (opravovali Tomáš Dado a Poli, vzorák Jakub, Tomáš K. a Poli)

Keď položíme drevo na dno nádoby s vodou, vystúpa na povrch a jeho potenciálna energia v gravitačnom poli Zeme sa zvýši. Nie je to v spore so zákonom zachovania energie? Odkiaľ sa vzala energia na zdvihnutie dreva? Bolo by možné na základe podobnej úvahy vysvetliť, prečo by ponorený kus železa nevyplával?

Prezradíme vám pointu hneď úvodom: odkiaľ že to berie drevo potenciálnu energiu? Samozrejme, keď drevený objekt ponorený vo vode stúpne, na jeho miesto sa dostane voda, ktorá tam priplága „ako keby“ z povrchu vodnej hladiny. Tým pádom je to „niečo za niečo“ – drevo ide hore, voda dole. A že celkovo sa pri tomto deji naozaj energia sústavy znižuje, a to až do okamihu, keď sa drevo ustáli na hladine presne tak, ako predpovedá Archimedov zákon, to si kvantitatívne vysvetlíme nižsie.

Vo vzoráku budem uvažovať, že povrch vody je veľmi rozsiahly – dosť na to, aby sa pri ponáraní telesa významne nemenila výška jeho hladiny. Hustotu vody budem značiť ρ_0.

Na hranole, ktorý má podstavu s plochou S orientovanou vodorovne, výšku H a hmotnosť $m = V\rho$ si demonštrujeme, ako to „niečo za niečo“ funguje. Rozoberieme najprv prípad, keď je celý hranol ponorený vo vode.



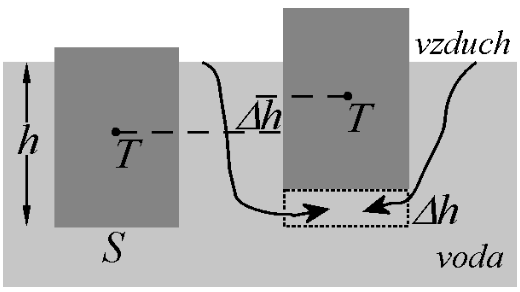
Obr. 5: Prípad, kde je celý hranol ponorený vo vode

Potom pri vynorení o Δh stúpne potenciálna energia telesa o $mg\Delta h = V\rho g\Delta h$ a potenciálna energia voda klesne o $(S\Delta h)\rho_0 gH = V\rho_0 g\Delta h$. Takže celková zmena potenciálnej energie bude

$$\Delta E_{\text{celk}} = V(\rho - \rho_0)g\Delta h,$$

odkiaľ už hneď vidíme, že ak je hustota vody ρ_0 väčšia ako priemerná hustota ρ telesa, tak bude celková energia sústavy pri vynáraní klesať. Preto sa teda drevo a železo vo vode správajú odlišne.

Ak hranol pláva na hladine a jeho spodná podstava sa nachádza v hĺbke h pod hladinou, tak vynorením telesa o Δh (nech je to malička hodnota oproti h) opäť stúpne potenciálna energia telesa o $mg\Delta h$.



Obr. 6: Prípad, kde hranol pláva na hladine

Potenciálna energia vody klesne o $(S\Delta h)\rho_0 g(h - \Delta h/2) \approx V'\rho_0 g\Delta h$, kde sme ako V' označili ponorený objem telesa. Takže celková zmena potenciálnej energie pri vynorení o Δh oveľa menšie ako h je

$$\Delta E_{\text{celk}} = (m - V'\rho_0)g\Delta h.$$

Z toho vidíme, že potenciálna energia bude pri vynáraní telesa klesať dovtedy, kým sa hmotnosť vytlačenej vody, $V'\rho_0$, nebude rovnať hmotnosti telesa, m. Potom bude rásť. Zlatým klincom je teda skutočnosť, že potenciálna energia celej sústavy je najnižšia práve vtedy, keď hmotnosť vytlačenej vody je rovná hmotnosti telesa m. To znamená vtedy, keď sú vztlaková a tiažová sila v rovnováhe. Tým sme z energetických úvah prišli k známemu Archimedovmu zákonu.

Zhrnuté dokopy: Príroda sa z akýchsi dôvodov snaží udržať v stave minimálnej energie. No a v našom prípade aký to je stav? Taký, že ľahké (cháp: s menšou hustotou) telesá budú čo najvyššie a ťažké (vyššia hustota) budú čo najnižšie. Takže dole bude železo, potom voda a na hladine si bude plávať drevo[1].

1.3 Nepretečie (opravoval Marcel)

Ako dieťa ma strašne fascinovalo, že pohár sa dá vodou naplniť viac než po okraj. Dnes rozumiem prečo a viem si spočítať maximálnu výšku, o ktorú môže voda cez pohár prečnievať. Zaujíma ma však, ako veľmi môj výsledok sedí so skutočnosťou. Vymyslite a zrealizujte experiment, ktorým túto výšku čo najpresnejšie odmeriate.

Keďže dlho nepršalo, povedal som si, že prečo sa nezahrať s vodou, veď voda je dobrá a hlavne tečie. A netečie hocijako – občas totiž tečie tak zvláštne, že až nepretečie. Ak vám pri tejto vete napadlo slovné spojenie „povrchové napätie“ tak super, ak nie, tak sa nič nestalo, bola napísaná celkom nezrozumiteľne – dosť som sa o to snažil ;-).

Ale k veci: spravme si pokus – naplňme pohár, odmerajme výšku a veď uvidíme. Problémy? No, nejaké budú, ináč by to bolo ľahké. Základné problémy, s ktorými sa bolo treba vysporiadať boli dva: *ako tam naliať, čo najviac vody tak, aby nepretiekla* a *ako to odmerať tak, aby to bolo aspoň trochu presné.*

Prvý problém vychádza z toho, že kvapalinu tam drží povrchové napätie, ktoré je náchylné na hocijaké jemné nárazy, chvenia a porušenia hladiny, takže môj pôvodný nápad dokvapkávať som rýchlo zahodil. Kúpil som si však injekčnú striekačku a trasúcimi rukami (s tým ale nič nenarobím, človek je dosť nervózny pri takom dôležitom experimente) som tam dostrekoval vodu priamo dovnútra, takže povrch kvapaliny porušil iba konček striekačky. Dalo sa aj dohadzovať nejaké spinky alebo ihly dovnútra, a podobné postupy. Toľko k prvému problému.

Druhý problém sa mi zdal jednoduchší vo veku technológie, čo bol dosť omyl. Vodnú hladinu, ktorú som dosiahol metódou pokus-omyl „dostrekovaním“ (nie každá hladina to vydržala a v izbe bolo o chvíľu celkom mokro) som odfotil, zväčšil a podľa pomeru šírky pohára a výšky kvapaliny a podľa odmeraného polomeru pohára, vypočítal výšku.

Tu vznikali nemalé nepresnosti v určovaní šírky a výšky, kvôli tomu, že šlo o vodu a odfotený lom svetla značne zhoršuje určenie, kde je hranica medzi vodou a pohárom, hlavne keď je tento sklenený. Preto som vyskúšal aj iný druh poháru a zistil zaujímavé veci.

Skúsil som tri poháre:

Čo sa z tohto dá vydedukovať? Hlavne teda fakty, ktoré sú založené na fyzike a nie na nepresnostiach merania. Po prvé: *nezáleží* veľmi na priemere pohára, výška totiž určuje hydrostatický tlak kvapaliny a ten keď prekoná kapilárny tlak[2], už nám voda čurká po pohári.

[1] Popravde, nie je to tak vždy. Videl som korok, ktorý bol v korytnačom akvárku tak dlho, že sa tak „nasal“, až klesol na dno. Znie to trošku podozrivo, ale ja som to naozaj videl! *Barón Prášil*

[2] Pozn.: Kapilárny tlak $p_\mathrm{k} = \sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$, kde σ je povrchové napätie a R_1 je polomer povrchu vo vodorovnom smere (prakticky polomer pohára) a R_2 je polomer povrchu v zvislom reze. Keďže v našich experimentoch

Typ	hrana	priemer	výška
sklo	oblá	87 mm	3,5 mm
sklo	oblá	35 mm	2,7 mm
plech	ostrá	85 mm	4,9 mm

Možno by ste si povedali, že 3,5 mm a 2,7 mm je dosť veľký rozdiel, aby to mohla byť náhoda, ale poháre boli úplne iné a ich hrana ešte odlišnejšia, tiež je to rozdiel o 0,8 mm, viete ako je to málo? Po druhé: *záleží* na type okraja – totiž pri oblom okraji voda takzvane vzlína kapilárnymi efektami po tomto okraji dolu a zmáča ho, no a keď je už niečo namočené, žiadne povrchové napätie tam nie je – preto sa lepšie utiera dlážka už trochu mokrou handrou – na takúto sa lepšie „chytá“ voda, kvôli tomu, že ju nebrzdí povrchové napätie. Pri ostrom okraji som dokonca chvíľku pozoroval aj taký vodný „fald“ (lalok; pozn. prekladateľa) prečnievajúci cez bok pohára, čo sa pri oblom nikdy nestalo (a ani nemohlo stať). Ďalšie veci, čo môžu tento jav ovplyvňovať sú hlavne teplota kvapaliny, vlhkosť pohára, jeho materiál,...

Dúfam, že sa vám experimentálka páčila, mne a môjmu šarmantnému asistentovi Matymu sa páčila veľmi. Dokonca máme kvôli nej aj o čosi čistejší stôl a podlahu ;-).

1.4 Kocka (opravoval Maťo Ch.)

V delta kvadrante sa nachádza obrovská homogénna borgská kocka s hustotou ρ a dĺžkou hrany a. Radi by sme vedeli, aká veľká sila pôsobí na hmotný bod Enterprise hmotnosti m nachádzajúci sa mimo kocky na spojnici jedného vrcholu a stredu planéty, ak je vo vzdialenosti d od najbližšieho z vrcholov. Je niektorá z nasledovných možností správnym vyjadrením sily pôsobiacej na Enterprise mimo kocky? Svoju odpoveď zdôvodnite!

(i) $\dfrac{2Gma^3\rho}{(a+d)^4}$

(ii) $\pi G a^4 \rho^2$

(iii) $\dfrac{Gm\rho a^3}{(d+a)^3}[d + 2a\pi/\sqrt{3}]$

(iv) $\dfrac{Gma^3\rho \ln d}{(a+d)^2}$

(v) $\dfrac{4Gm\rho a^3}{3(d+a)^2}$

(vi) $\dfrac{Gm\rho a^3}{(d+a)^3}[\frac{1}{8}a\pi + d]$

(vii) $Gma\rho$

(viii) $\dfrac{Gma^2\rho}{d+a}$

(ix) $\dfrac{Gma^3\rho}{d^2}$

Na začiatku pripomeniem Newtonov gravitačný zákon

$$F = G\frac{Mm}{r^2},$$

ktorý platí pre 2 *hmotné body* s hmotnosťami M a m vo vzdialenosti r od seba. Vďaka symetrii gule (nie celkom triviálnou úvahou) sa dá nahliadnuť, že tento vzťah platí aj pre guľu a hmotný

je $R_1 \gg R_2$, tak p_k naozaj od polomeru pohára závisí iba slabo. Tento vzorček pre kapilárny tlak zrejme poznáte pre tlak v guli, kde $R = R_1 = R_2$ a teda $p_k = 2\sigma/R$.

bod, resp. pre 2 gule.[3] V žiadnom prípade však nemožno aplikovať tento vzťah na ľubovolné nebodové telesá, pokiaľ ich vzájomná vzdialenosť nie je oveľa väčšia ako ich samotné rozmery. Pri blízkych a rozmerných telesách treba postupovať „opatrne“ – telesá si myslene pokrájať na malé kúsky a spočítať jednotlivé príspevky dokopy. V našom prípade je Enterprise voči borgskej kocke malinká, takže tú možno považovať za bodovú, avšak borgskú kocku by som pokrájal.

Našťastie v tomto príklade nestojíme pred úlohou skutočne spočítať závislosť sily na Enterprise od borgskej kocky. Máme sa len vyjadriť k uvedeným vzťahom, ktoré neboli zasa vybrané úplne bez(bz)ducho. Tie ste mali podrobiť kritickej kontrole – overiť, či dané vzťahy sú aspoň tak od oka rozumné. Zvyčajne poznatky o povahe (hoc aj netriviálneho fyzikálneho) problému poskytujú možnosť aspoň v niektorých špeciálnych prípadoch „uhádnuť“ správne riešenie. No a presne o takomto mudrlanstve je táto úloha.

Najprv si poďme skontrolovať, či vzťahy sedia rozmerovo – keď do vzťahu pre silu dosadíme za jednotlivé veličiny jednotky týchto veličín a pokrátime jednotky medzi sebou, či nám vyjde jednotka Newton $=\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$. Praktická ukážka pre výraz (i):[4]

$$[F]=\frac{[G][m][a]^3[\rho]}{[a+d]^4}=\frac{\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}\,kg\,m^3\,kg\,m^{-3}}}{\mathrm{m^4}}=\mathrm{N\,m^{-2}}.$$

Evidentne teda ani len rozmerovo tento vzťah správny nie je! Preto nemôže byť vhodným vyjadrením sily medzi borgskou kockou a Enterprise (ani hocijakej inej sily). Pozrime sa ešte na vzťah (iv):

$$[F]=\frac{[G][m][a]^3[\rho][\ln(d)]}{[a+d]^2}=\frac{\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}\,kg\,m^3\,kg\,m^{-3}\ln(m)}}{\mathrm{m^2}}=\mathrm{N\ln(m)},$$

čo znova nie je jednotka sily[5], preto ani tento vzťah nie je správny. Ľahko môžete preveriť, že ostatné vzťahy sú rozmerovo korektné.

Ďalšia vec, nad ktorou sa treba zamyslieť, sú veličiny, od ktorých nám sila závisí. Od čoho teda gravitačná sila medzi dvoma objektami závisí vždy? Od hmotnosti oboch telies a od ich vzájomnej vzdialenosi. V žiadnom zo vzťahov síce priamo nevystupuje hmotnosť borgskej kocky, ale vzťahy závisia od jej hustoty, pomocou ktorej môžeme vyjadriť hmotnosť kocky. Keď sa pozrieme na vzťahy (ii) a (vii) na prvý pohľad vidíme, že vzťah (ii) nezávisí od hmotnosti Enterprise m a ani od vzdialenosti d medzi Enterprise a rohom kocky a vzťah (vii) nezávisí od vzdialenosti d.

Vzťah (ix) vyzerá nejak pekne. Čo nám len pripomína? Keď si uvedomíme, že $a^3\rho$ je hmotnosť borgskej kocky, vidíme že vzťah je gravitačný zákon pre dva hmotné body vo vzdialenosti d. To znamená, že vzťah by bol správny, keby bola všetka hmota kocky sústredená v jej rohu. To však nie je – okrem jediného bodu (samotného rohu) je všetka hmota kocky *ďalej* od Enterprise ako ten dotyčný roh a kocka teda nutne priťahuje Enterprise menej ako tvrdí výraz (ix).

Posledná záludnosť, ktorú si bolo treba všímať bola ich hodnota v limitných vzdialenostiach, t.j. keď sa d blíži k 0 alebo keď d je oveľa väčšie ako rozmer kocky a.

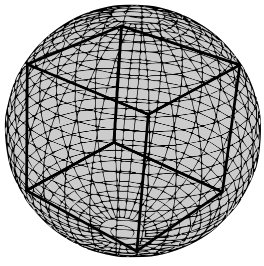
[3] Hustota gulí však nesmie závisieť od inej premmennej ako je vzdialenosť od stredu.

[4] Vo všeobecnosti je dobré si pri rozmerovej kontrole vyjadriť všetky veličiny v jednotkách SI. Tu sme však schválne rozmer gravitačnej konštanty G vyjadrili v $\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$, lebo ten jeden Newton tam chceme a tak iba zisťujeme, či tam ostane ešte niečo naviac alebo nie.

[5] V skutočnosti je výraz typu $\ln(d)$ nekorektný a bolo by ho treba definovať nejakým spôsobom, aby v argumente funkcie nestála rozmerná veličina, ale iba bezrozmerné číslo.

Keď sa na kocku pozrieme z veľmi veľkej vzdialenosti, bude sa nám javiť ako veľmi malá bodka, malá sťa bod. V limite veľkého d (v porovnaní s rozmerom a) môžeme pri (v)-ke v menovateli výraz $d+a$ nahradiť d-čkom. Ak zavedieme vzdialenosť r od stredu kocky k Enterprise, $r = d + \sqrt{3}a/2$, tak v tejto limite platí aj $r \approx d$. Dosadením dostaneme silu $4GmM/(3r^2)$, kde M je hmotnosť kocky. Keďže sa nám kocka zdá malá ako bod, mala by aj sila pôsobiaca medzi kockou a Enterprise vo veľkej vzdialenosti javiť rovná $F_\mathrm{g} = GmM/r^2$. Je však 4/3-krát väčšia, výraz (v) je preto tiež zlý. V prípade (viii) dostaneme $Gma^2\rho/r$, čo znova nie je správne. Vzťahy (iii) a (vi) túto previerku prežijú.

(iii) a (vi) vyzerajú na prvý pohľad dosť zložito. Skúsme analyzovať veľkosť sily, ktorá by podľa nich mala pôsobiť medzi kockou a Enterprise pre $d = 0$. Analýza bude najjednoduchšia porovnaním s prípadmi, ktoré viem spočítať, a o ktorých viem povedať, či dajú výsledok väčší alebo menší ako v prípade inkriminovanej kocky.



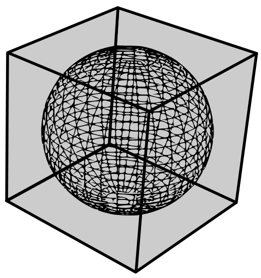
Obr. 7: Guľa opísaná kocke

Ako prvé skúsme zobrať za porovnávací prípad guľu opísanú kocke (viď obr. 7), ktorá má hustotu rovnakú ako borgská kocka. Takáto guľa by pôsobila na (bodovú) Enterprise silou,

$$F = G\frac{m\rho(4\pi/3)\left(\sqrt{3}a/2\right)^3}{\left(\sqrt{3}a/2\right)^2} = Gm\rho a(2\pi/\sqrt{3}),$$

ale to je práve vzťah (iii) pre $d = 0$. Ako vidíme na obrázku 7, guľa opísaná kocke obsahuje v sebe všetky body kocky a ešte aj nejaké navyše. Ak majú kocka a guľa rovnaké hustoty, guľa musí pôsobiť väčšou gravitačnou silou ako borgská kocka. Vzťah (iii) preto nepopisuje silu medzi kockou a Enterprise.

Skúsme ešte určiť minimálnu veľkosť sily pôsobiacej na Enterprise nachádzajúcu sa v rohu kocky (teda pre $d = 0$). Pre porovnanie tentoraz vpíšme guľu do kocky.



Obr. 8: Guľa vpísaná do kocky

Guľa s hustotou ρ na obr. 8 by pôsobila na hmotný bod vo vzdialenosti $\sqrt{3}a/2$ (t.j. v rohu kocky) silou

$$F = \frac{Gm\rho(4\pi/3)\,(a/2)^3}{\left(\sqrt{3}a/2\right)^2} = Gma\rho(2\pi/9). \tag{1}$$

V tomto prípade kocka obsahuje všetku hmotu gule, avšak ešte aj niečo viac! Mala by pôsobiť väčšou gravitačnou silou ako guľa do nej vpísaná. Výraz (vi) však dáva pre $d = 0$ hodnotu menšiu ako (1), preto ani tento výraz nemôže byť správny.

Sumárne sme teda všetky uvedené možnosti vylúčili. Žiadna z nich nie je správna. Ak ste sa dočítali až sem a tu by ste sa konečne radi dozvedeli, ako teda vyzerá výraz pre veľkosť gravitačnej sily, ktorou pôsobí kocka na Enterprise, tak vás asi sklameme odpoveďou, že sami nevieme. Pevne dúfame, že ste sa napriek tomu naučili nové triky ohľadom kontroly výsledku.

1.5 Cesta na Mesiac (opravoval Frico, vzorák Frico a Jakub)

V knihe Cesta na Mesiac sa popisuje, ako sa skupinka bláznov nechá vystreliť delom v obrovskom projektile na Mesiac. Aby zmiernil obrovské sily pôsobiace pri zrýchľovaní, umiestnil autor na palubu dômyselné odpružovacie zariadenie. Pokúsme sa teraz (veľmi hrubo) odhadnúť, či je takýto spôsob cestovania reálny. Predpokladajme, že projektil a hlaveň sú porovnateľne dlhé, Zem aj Mesiac sú nehybné homogénne gule stojace vo vesmíre, vplyv atmosféry ani ostatných planét neuvažujeme.

Z týchto predpokladov odhadnite:

(i) najmenšiu rýchlosť, ktorou musí byť projektil vystrelený;

(ii) minimálnu dĺžku projektilu, pri ktorej majú cestujúci šancu na prežitie.

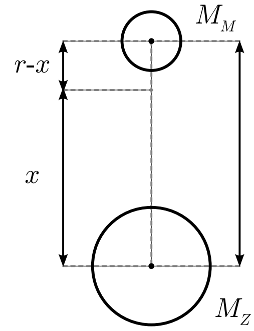
Riešenie pre časť a): Najprv si uvedomme, že na to, aby sme dostali našich cestovateľov na Mesiac, stačí dodať projektilu takú kinetickú energiu, aby sa dostal do bodu, kde sú príťažlivé sily Mesiaca a Zeme vyrovnané. Potom stačí už len malé šťuchnutie a cestovatelia sa môžu tešiť na blízky (a tvrdý) prieskum Mesiaca.

V ktorom bode sú gravitačné sily vyrovnané? Z rovnice pre rovnosť gravitačnej sily od Mesiaca a od Zeme v závislosti od vzdialenosti x od Zeme (viď obr. 9) dostaneme kvadratickú rovnicu,

$$G\frac{M_\mathrm{M}m}{(r-x)^2} = G\frac{M_\mathrm{Z}m}{x^2} \qquad \Rightarrow \qquad (M_\mathrm{Z}-M_\mathrm{M})x^2 - 2rM_\mathrm{Z}x + M_\mathrm{Z}r^2 = 0,$$

$$x_\pm = r\frac{M_\mathrm{Z} \pm \sqrt{M_\mathrm{Z}M_\mathrm{M}}}{M_\mathrm{Z}-M_\mathrm{M}}.$$

Vieme, že hmotnosť Mesiaca je menšia ako hmotnosť Zeme, a teda $x_+ > r$ zodpovedá polohe na opačnej strane Mesiaca, takže pre nás nie je zaujímavá. Naša hľadaná vzdialenosť bude $x_- < r$.



Obr. 9: Poloha vzhľadom k Mesiacu a Zemi

Teraz už iba použijeme zákon zachovania energie a z porovnania celkovej mechanickej energie na začiatku a na konci dostaneme vzťah pre rýchlosť:

$$-G\frac{M_\mathrm{Z}m}{R_\mathrm{Z}} - G\frac{M_\mathrm{M}m}{r-R_\mathrm{Z}} + \frac{1}{2}mv^2 = -G\frac{M_\mathrm{Z}m}{x_-} - G\frac{M_\mathrm{M}m}{r-x_-}, \tag{2}$$

čo po dosadení za x_- dá potrebnú výstrelovú rýchlosť

$$v = \sqrt{2G}\left[\frac{M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}} + \frac{M_\mathrm{M}}{r-R_\mathrm{Z}} - \frac{(\sqrt{M_\mathrm{Z}}+\sqrt{M_\mathrm{M}})^2}{r}\right]^{1/2} \approx 11\,070\,\mathrm{ms^{-1}}.$$

Časť a) je tým vyriešená.[6]

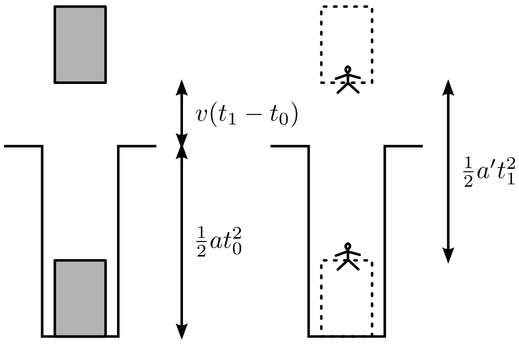
Pristúpime teda k časti b). Najprv si ujasnime, čo vlastne budeme počítať. Pre zjednodušenie si delo predstavme ako veľkú „rúru“, v ktorej je projektil urýchľovaný s konštantným zrýchlením a až do okamihu keď opustí hlaveň.[7] Najprv si ukážeme, aký veľké delo by sme potrebovali, aby sme projektil vystrelili „len tak“, bez dômyselného odpružovacieho zariadenia na ochranu kozmonautov. Čas výstrelu je $t = v/a$. Dĺžka hlavne vychádza $\ell = v^2/(2a)$. Vidíme, že čím väčšie zrýchlenie použijeme, tým kratšia hlaveň stačí. Aké je však najväčšie zrýchlenie, ktoré môže človek prežiť? Údaje sú rôzne. Je rozumné použiť napríklad hodnotu $a = 10\,g \approx 100\,\mathrm{ms^{-2}}$. Pri tejto hodnote nám (po výpočte z predošlého vzťahu) stačí hlaveň s dĺžkou približne 600 km. Je však zaznamenané, že trénovaný človek dokáže *prežiť* zrýchlenie až $a = 46\,g$. Problémom je, že pri takomto zrýchlení nastávajú niektoré javy, ktoré znižujú komfort pri cestovaní – polámané rebrá, končatiny a podobne. Dobrou správou ale je, že pri tomto zrýchlení sa dĺžka hlavne môže skrátiť na zhruba 130 km. Každopádne, vidíme, že takýto spôsob cestovania nie je príliš reálny.

Teraz vstupuje do hry Jules Verne so svojím dômyselným odpružovacím systémom. Jednou z možností ako delo skrátiť je nasledovná finta: Predstavme si, že človek sedí v kresle vo vrchnej časti projektilu. Keď je projektil vystreľovaný, kreslo sa začne posúvať smerom nadol a tým trochu kompenzuje obrovské zrýchlenie projektilu. Keď projektil opustí hlaveň, kreslo ešte nebude úplne naspodku, ale bude sa ešte chvíľu pohybovať, a preto cestovateľ bude pociťovať zrýchlenie

[6] Získaný výsledok môžeme porovnať s druhou kozmickou rýchlosťou (to je rýchlosť, ktorú musí mať teleso štartujúce z povrchu Zeme, ak chce uniknúť „preč“ z jej gravitačného pôsobenia), $v_{2.\mathrm{kozm.}} = \sqrt{2GM_\mathrm{Z}/R_\mathrm{Z}} \approx 11\,180\,\mathrm{ms^{-1}}$, ktorá zákonite musí byť väčšia. Ako vidíme, iba o málo.

[7] Toto priblíženie je isteže veľmi hrubé. Požadovaný je však odhad, a preto si rozumné, hoc hrubé aproximácie môžeme dovoliť.

ešte aj istý čas po vystrelení. Označme si teraz dobu, po ktorú bude projektil urýchľovaný so zrýchlením a vovnútri dela ako t_0 (myslí sa do okamihu, kým jeho spodná časť neopustí hlaveň). Dobu, počas ktorej cestovateľ pociťoval zrýchlenie a' si označme t_1.[8] V zadaní nám prezradili, že projektil je porovnateľne dlhý ako hlaveň, teda aj činná dĺžka odpruženia je porovnateľná, označme ju preto $k\ell$, kde $k \in (0, 1)$.



Obr. 10: Situácia z pohľadu vonkajšieho pozorovateľa a pohyb cestovateľa

Všimnime si teraz obrázok 10. Na obidvoch jeho častiach je zobrazený začiatočný pokojový stav a tiež posledný moment, keď cestovateľ ešte cíti zrýchlenie pochádzajúce z odpružovacieho systému. Prvý obrázok opisuje situáciu z pohľadu vonkajšieho pozorovateľa – projektil (resp. jeho spodná časť) prejde vo vnútri dela dráhu $at_0^2/2$, po opustení hlavne bude mať rýchlosť v (určenú v časti a)) a teda do okamihu, kým cestujúci prestane pociťovať zrýchlenie, preletí ešte dráhu $v(t_1 - t_0)$.[9] Druhý obrázok opisuje pohyb cestovateľa. Ten pociťuje zrýchlenie a' po dobu t_1, čiže prejde dráhu $a't_1^2/2$. Z porovnania dĺžok na oboch obrázkoch dostaneme rovnicu:

$$k\ell + a't_1^2/2 = at_0^2/2 + v(t_1 - t_0).$$

Ako vidíme, máme tu priveľa premenných. Našťastie vieme, že platí $v = at_0 = a't_1$, $\ell = at_0^2/2$. Po dosadení dostaneme jednoduchšiu rovnicu:

$$\frac{v^2}{2a} + v\left(\frac{v}{a'} - \frac{v}{a}\right) = \frac{v^2}{2a'} + k\frac{v^2}{2a} \qquad \Rightarrow \qquad a' = \frac{a}{1+k}.$$

Čo sme teda nakoniec dostali? Vieme, že človek dokáže prežiť iba isté zrýchlenie a'. Lenže o dĺžke projektilu a dela rozhoduje zrýchlenie a. Toto je pritom $(1 + k)$-násobne (t.j. až 2-krát) väčšie vďaka odpruženiu ako a'. Zároveň vidíme, že sa oplatí využiť odpruženie na celej dĺžke projektilu. Potrebná dĺžka hlavne je

$$\ell = \frac{v^2}{2(1+k)a'},$$

[8] Predpokladáme, že a' je po celú dobu konštantné, vhodnou konštrukciou odpruženia sa to určite dá dosiahnuť.

[9] Isteže to neplatí presne, nakoľko projektil bude mimo hlavne spomaľovať g-čkom. Keďže však predpokladáme, že zrýchlenia a aj a' sú značne väčšie ako g, tak pre účely odhadu je takýto výpočet postačujúci.

čo pre $k = 1$ (projektil vypĺňajúci celú hlaveň s odpružením na celej svojej dĺžke) znamená polovičnú dĺžku hlavne oproti situácii bez pruženia (300 km príp. 65 km pre extrémistov)! No a postaviť také delo už predsa nie je žiaden problém, no nie? :-)

Hodnotenie a komentár: Za časť a) sa dalo získať 5 bodov, pričom horné ohraničenie druhou kozmickou rýchlosťou dostalo 3 body.[10] Na časť b) ostali 4 body. Vyskytli sa tu najmä 2 typy riešení – jedno podobné nášmu vzoráku (hodné plného počtu bodov) a druhé, ktoré urýchlenie projektilu modelovalo okamžitým zrýchlením z pokoja na rýchlosť v. Tento druhý model sme považovali za horší (aj keď pri zadaní s porovnateľne dlhým projektilom voči hlavni dáva rádovo rovnaký výsledok), nakoľko horšie opisuje reálny výstrel[11] a naviac úplne ignoruje samotnú dĺžku hlavne; boli zaň 2 body.

Ako pikošku uvedieme, že každý použil iné limitujúce preťaženie kozmonautov, ktoré pokrývalo rozpätie od asi $6\,g$ do vyše $80\,g$.

1.6 Bežky (opravovala Tinka)

Pre potreby tejto úlohy budeme študovať zjednodušený model pohybu na bežkách. Tento si rozložíme do dvoch fáz, ktoré nasledujú okamžite po sebe. V prvej fáze jedna lyža stojí, stojíme na nej celou váhou a odrážame sa od nej. V okamihu, keď sa druhá lyža nachádza o d (zhruba dĺžka kroku) pred prvou (statickou), prejdeme do druhej fázy. V tejto fáze sa vezieme – táto sa nazýva sklz a je to tá fáza, ktorú majú bežkári radi nadovšetko. V rámci nej prenášame váhu z jednej lyže na druhú a obe lyže sa kĺžu po snehu kým nezastanú. Následne sa celý cyklus zopakuje. Urč priemernú rýchlosť bežkára a mieru spokojnosti bežkára (teda pomer dĺžky sklzu ku dĺžke odrazu), ak poznáš pomer statického a šmykového trenia!

Na takých bežkách sa dá pohybovať všelijako. Ak ste si to niekedy vyskúšali, tak ste zrejme podobne ako ja prišli na to, že ak to s tým posúvaním dopredu prešvihnete, začne sa vám zaťažená lyža podšmýkavať dozadu. To je zjavne nežiadúci efekt. Kedy ale nastane? Pointa tkvie v princípe, akým sa vlastne odrážame. Zatlačíme nohou smerom dozadu, tá sa ale dozadu zvyčajne nepohne – proti tomuto pohybu pôsobí trecia sila. Akcia však vyvolá reakciu – koľko tlačíme na zem, toľko nám to zem v opačnom smere oplatí. Vďaka tomu presúvame svoje ťažisko, čo sa v praxi prejavuje aj posunom nohy o rovnakú vzdialenosť. Je zjavné, že čím silnejšie zatlačíme, tým rýchlejšie pôjdeme. Keďže celá naša váha spočíva na odrážajúcej sa nohe, maximálna trecia sila (keď sa ešte nič nepohybuje, okrem odľahčenej lyže, ktorá ale nie je pritláčaná a teda na ňu nepôsobí trecia sila) je $F_t = mgf_s$, kde m je naša hmotnosť a f_s je koeficient statického trenia. To je teda aj maximálna veľkosť reakcie, ktorá nás posúva. Rozrátané opäť na hmotnosť dostávame maximálne zrýchlenie $a_{\mathrm{odraz}} = gf_s$.

Týmto zrýchlením sa pohybujeme po dráhe d, čím naberieme rýchlosť $v_{\max} = \sqrt{2d\,a_{\mathrm{odraz}}} = \sqrt{2dgf_s}$.[12] V tom okamihu sa prestávame odtláčať a preto jediná sila, ktorá nám tu vystupuje

[10] Síce číselné hodnoty sú veľmi blízke, avšak ukázať, že 2. kozmická rýchlosť je skutočne dobrý odhad, by vyžadovalo odargumentovať, prečo sú ostatné vplyvy zanedbateľné.

[11] Keď si človek vygoogli závislosť tlaku p v hlavni pri výstrele v závislosti od prejdenej vzdialenosti x, tak nájde graf, ktorý prudko stúpa zhruba do $x = \ell/4$, potom začne klesať a asi od $x = \ell/2$ je dobre popísaný čistým adiabatickým rozpínaním, t.j. $p \sim 1/x^\kappa$. Keď človek tento graf prekreslí do p od t, tak sa ten hrb presunie viac ku stredu (ku $\ell/3$) a zároveň sa sploští. Keďže zrýchlenie a je priamo úmerné p, tak toto považujeme za dôvod, prečo považovať model s konštantným zrýchlením za lepší oproti modelu z okamžitým zrýchlením.

[12] Ono je to celkom *tricky*, že čo je vlastne dĺžka kroku d a o koľko posunieme ťažisko! Dohodnime sa, že za dĺžku kroku d považujeme vzdialenosť, o ktorú sa pri odraze od pôvodne prednej lyže dostane pôvodne zadná lyža pred predok prednej. Ak ďalej predpokladáme, že počas sklzovej fázy je bežkár natoľko v tranze,

je sila trecia. Tentokrát sa hýbeme, preto použijeme koeficient šmykového trenia.[13] Tá nás spomaľuje, rovnomerne, pochopiteľne. Vzdialenosť, ktorú prejdeme, kým zastavíme úplne, sa spočíta ľahko (toto je šestka, natoľko vám dôverujem) – je to $d\, f_s/f_k$. Takže na otázku spokojnosti bežkára vieme odpovedať zo zadaných údajov – je to priamo pomer koeficientov statického a šmykového trenia.

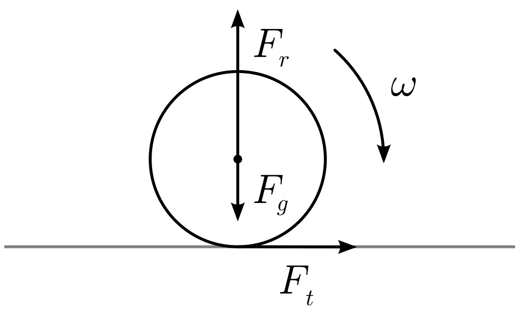
S priemernou rýchlosťou je to nepríjemnejšie. Máme 2 rovnomerne zrýchlené pohyby, priemerná rýchlosť každého z nich je polovica maximálnej a tá je teda aj celkovou priemernou rýchlosťou. Keď si to tak človek predstaví, začne mu blikať červená kontrolka. Dá sa na to vôbec odpovedať? No, nedá. Dôvodov si nájdete hafo. Uvedieme konkrétny kontrapríklad, ktorú ukazuje, že len zo znalosti kroku d a pomeru koeficientov trenia sa priemerná rýchlosť vypočítať nedá: jednoduchým výpočtom sa dá prísť k tomu, že priemerná rýchlosť je $\sqrt{dgf_s/2}$, kde explicitne vystupuje závislosť od statického trenia, pričom ostatné údaje sú známe. Pre rôzne f_s dostávame teda rôzne výsledky a teda znalosť pomeru koeficientov trenia je nedostatočná informácia na výpočet priemernej rýchlosti.

Nuž tak. Nie vždy sa dá príklad riešiť tak, že sa pozriete, čo máte zadané a dáko to napasujete. Na jednu otázku sme potrebovali len jeden zo zadaných parametrov, na druhú nám zase čosi chýbalo. Smutné. Ale také do života ;-).

1.7 Skackajúci valec (opravovala Marika)

Vo výške H nad podložkou je zavesený homogénny valec priemeru R, hmotnosti m rotujúci obrovskou uhlovou rýchlosťou ω okolo osi rotačnej symetrie, ktorá je rovnobežná s podložkou. Po uvoľnení zo závesu valec padne na zem a odrazí sa do výšky h. Do akej vzdialenosti od prvého miesta odrazu valec dopadne druhý raz, ak je koeficient trenia f. Pri riešení predpokladajte, že valec aj dlážka sú vyrobené z veľmi tvrdého materiálu a trecia sila je priamo úmerná prítlačnej sile.

Táto úloha bola veľmi, veľmi poučná. Naučila nás okrem iného, že taká zrážka netrvala nekonečne krátko (a ak Vám v škole tvrdili opak, tak klamali). Pozrime sa, aké sily pôsobia na náš valec pri zrážke.



Obr. 11: Sily pôsobiace na valec

že sa jednoducho ako tuhé teleso valí vpred, tak môžeme zodpovedne povedať, že počas odrazu sa naše ťažisko posunie o d vpred. Lyža, od ktorej sa neodrážam sa pritom posunie o $2d$ vpred! Overiť sa to dá najlepšie obrázkom zahŕňajúcim aspoň 2 kroky a 2 sklzy.

[13] Je dôležité si uvedomiť, že vzhľadom na zem sa hýbu *obe lyže* – viď teória bežkára v tranze v predošlej poznámke – a teda na oboch je rovnaký koeficient trenia a je teda jedno, v akej fázi prenášania hmotnosti z jednej lyže na druhú lyžu sa nachádzam; celková trecia sila udeľuje bežkárovi spomalenie gf_k.

Pôsobí tu tiažová sila F_G, reakcia podložky F_r a trecia sila F_t. Prezradili nám, že valec sa točí veľmi rýchlo – to znamená, že musí prešmykovať pri kontakte s podložkou. Ďalšie dôležité pozorovanie je, že tiažovú silu môžme v porovnaní s reakciou od podložky zanedbať. Taká zrážka totiž trvá veľmi krátky čas. Za taký krátky čas bude impulz gravitačnej sily, $I_G = F_G\Delta t$, zanedbateľný. Avšak hybnosť v y-ovom smere, mv_y, sa zmenila nezanedbateľne. To znamená, že celkový impulz pri náraze malý nebol, pretože impulz je zároveň zmenou hybnosti,

$$F_{\mathrm{celk},y}\Delta t = \Delta p_y = m\Delta v_y.$$

Z toho vyplýva, že $F_r \gg F_G$ a môžeme si zjednodušiť život a gravitačnú silu vôbec neuvažovať.[14] Ďalej teda uvažujeme $F_{\mathrm{celk},y} \approx F_r$.

Ostali nám len dve sily, medzi ktorými platí vzťah, $F_t = F_r f$. Rovnaký vzťah platí aj pre impulzy týchto síl.[15] Impulzom sily je ale zároveň aj $\mathbf{I} = \Delta\mathbf{p} = m\Delta\mathbf{v}$. Z toho dostávame pre zmeny rýchlosti

$$f\Delta v_y = \Delta v_x.$$

Veličinu Δv_y si dopočítame z voľného pádu. Valec padal z výšky H, rýchlosť pri dopade bola potom bola $v_{y1} = \sqrt{2gH}$ smerom nadol. Z toho že po dopade vyletel do výšky h vieme, že rýchlosť po zrážke musela byť $v_{y2} = \sqrt{2gh}$, teraz už ale smerom nahor. Celková zmena rýchlosti v y-ovom smere je teda

$$\Delta v_y = \sqrt{2g}(\sqrt{h} + \sqrt{H}).$$

V x-ovom smere bola rýchlosť na začiatku nulová, zmena rýchlosti $\Delta v_x = v_x$, kde v_x je rýchlosť po zrážke. Tú už ľahko dopočítame ako

$$v_x = f\sqrt{2g}(\sqrt{h} + \sqrt{H}).$$

Posledné, čo nám ešte treba spraviť, je spočítať šikmý vrch. Valec sa pohybuje v x-ovom smere rýchlosťou v_x a v y-ovom v_{y2}. Napíšeme dobre známe rovničky,

$$x = v_x t\ , \qquad\qquad y = v_{y2}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Zaujíma nás, aké bude x keď $y = 0$. Vylúčením času dostávame

$$x = v_x\frac{2v_{y2}}{g} = f\sqrt{2g}(\sqrt{h} + \sqrt{H})\frac{2\sqrt{2gh}}{g} = 4f(h + \sqrt{hH}).$$

Tadááá, výsledok.

[14] Ľahko nahliadneme, že bez tohto zanedbania by úlohu nebolo možné vyriešiť.

[15] Zrejme počas dopadu nie je reakčná sila F_r po celý čas rovnaká. Impulz sily teda spočítam ako sumu (či integrál) impulzov cez kratučké časti času dopadu. Vďaka priamej úmere medzi F_t a F_r môžem pri počítaní impulzu trecej sily jednoducho vybrať f pred sumu, ktorá je impulzom reakčnej sily, čím nahliadnem platnosť tvrdenia.

Výsledková listina po 1. kole letnej časti 2010/2011

A

	Meno	Škola	Roč.	3	4	5	6	7	♡	Σ_1	Σ
1	Ján Pulmann	Gamča	3.	9	8	7	9	9	0,00	35,00	35,00
2	Marián Horňák	GyPar	3.	–	9	6	9	9	0,00	33,00	33,00
3	Vladimír Macko	GĽŠ Zvolen	2.	7	8	3	6	9	0,00	30,00	30,00
4	Ivana Vasarábová	EGJT LM	1.	8	5	8	7	–	0,00	28,00	28,00
5	Matej Večerík	ŠPMNDAG	4.	–	9	6	4	8	0,00	27,00	27,00
6	Patrik Švančara	G Ľ. Štúra Trenčín	3.	9	8	3	5	–	0,00	25,00	25,00
6	Peter Kosec	G Ľ. Štúra Trenčín	2.	9	9	7	–	–	0,00	25,00	25,00
6	Dušan Kavický	G GJH	2.	9	9	7	–	–	0,00	25,00	25,00
9	Peter Dupej	G GJH	3.	6	4	7	–	5	0,00	22,00	22,00
10	Ondrej Pisarčík	G Spišská SV	3.	8	2	6	–	5	0,00	21,00	21,00
11	Andrea Pločeková	G Coubertina	4.	–	3	5	2	8	0,00	18,00	18,00
11	Eugen Hruška	G Hlohovec	4.	6	–	5	4	9	0,00	18,00	18,00
13	Klára Ficková	G Poštová	3.	9	6	–	–	4	-2,00	17,00	17,00
14	Denisa Múthová	G bilingválne	4.	–	4	5	–	5	0,00	14,00	14,00
15	Daniela Fecková	G Pankúchova	3.	–	7	5	–	–	0,00	12,00	12,00
16	Zuzana Bogárová	G Ľ. Štúra Trenčín	4.	–	2	7	–	–	0,00	9,00	9,00

B

	Meno	Škola	Roč.	1	2	3	4	5	6	7	♡	Σ_1	Σ
1	Dušan Kavický	G GJH	2.	–	9	9	9	7	–	–	0,00	34,00	34,00
1	Ivana Vasarábová	EGJT LM	1.	9	9	8	5	8	7	–	0,00	34,00	34,00
3	Peter Kosec	G Ľ. Štúra Trenčín	2.	–	8	9	9	7	–	–	0,00	33,00	33,00
4	Eduard Batmendijn	CGSM	-2.	9	9	9	9	–	–	–	-4,00	32,00	32,00
4	Ján Šubjak	G P.O.H.	0.	9	9	7	–	7	–	–	0,00	32,00	32,00
6	Vladimír Macko	GĽŠ Zvolen	2.	–	7	7	8	3	6	9	0,00	31,00	31,00
6	Lukáš Ivan	G GJH	0.	9	9	8	5	–	–	–	0,00	31,00	31,00
8	Tomáš Kello	G JAR	0.	9	8	8	1	4	–	–	0,00	29,00	29,00
9	Milan Pešta	G K Prešov	0.	9	9	7	0	3	–	–	0,00	28,00	28,00
9	Milan Smolík	Gamča	1.	6	8	8	6	–	–	–	0,00	28,00	28,00
11	Mária Šubjaková	G P.O.H.	2.	–	9	8	3	7	–	–	0,00	27,00	27,00
11	Stela Pavlíková	G Ľ. Štúra Trenčín	-1.	9	9	9	–	–	–	–	0,00	27,00	27,00
13	Matúš Jenča	ZŠ Karloveská	-1.	9	9	8	–	–	–	–	0,00	26,00	26,00
13	Margaréta Drozdíková	GSA	0.	9	7	7	–	3	–	1	0,00	26,00	26,00
13	Miroslav Gašparek	SGOCZA	0.	9	9	–	5	3	–	–	0,00	26,00	26,00
13	Ľudmila Šimková	GyPar	-1.	9	5	7	5	–	–	–	0,00	26,00	26,00
17	Samuel Cibulka	G AV	1.	9	9	9	0	–	–	–	-2,00	25,00	25,00
17	Irena Bačinská	G Lipany	0.	9	2	8	6	–	–	–	0,00	25,00	25,00
17	Jaroslav Petrucha	G Metodova	2.	–	9	7	9	–	–	–	0,00	25,00	25,00
20	Michal Račko	G Jozefa Lettricha	0.	9	9	–	–	2	4	–	0,00	24,00	24,00
21	Ján Ondráš	Gamča	-1.	9	9	–	0	5	–	–	0,00	23,00	23,00
21	Juraj Surovčík	G P.O.H.	2.	–	6	7	7	3	–	–	0,00	23,00	23,00
21	Radka Kováčová	G Coubertina	-1.	8	7	8	0	–	–	–	0,00	23,00	23,00
24	Branislav Rabatin	G GJH	2.	–	9	9	7	7	–	7	-10,00	22,00	22,00
25	Patrik Turzák	G Poštová	-1.	9	–	–	–	7	–	5	0,00	21,00	21,00
25	Michal Hledík	G GJH	2.	–	9	–	9	7	–	8	-12,00	21,00	21,00
25	Vladan Glončák	G Ľ. Štúra Trenčín	0.	4	5	9	3	–	–	–	0,00	21,00	21,00
28	Tomáš Gonda	Gamča	2.	–	7	–	7	5	–	–	0,00	19,00	19,00
28	Michal Bock	Gamča	2.	6	4	7	4	6	–	–	-2,00	19,00	19,00
28	Barbora Kováčová	ŠPMNDAG	-1.	9	4	6	0	–	–	–	0,00	19,00	19,00
28	Jerguš Greššák	G JAR	2.	9	8	7	4	–	–	–	0,00	19,00	19,00
28	Barbora Halajová	G VOZA	2.	–	6	8	2	3	–	–	0,00	19,00	19,00
28	Milan Mikuš	G Ľ. Štúra Trenčín	1.	8	8	–	–	5	–	–	-2,00	19,00	19,00

	Meno	Škola	Roč.	1	2	3	4	5	6	7	♡	Σ_1	Σ
34	Michal Smolík	Gamča	1.	8	9	–	1	–	–	–	0,00	18,00	18,00
34	Natália Tokárová	G JAR	2.	–	9	6	1	2	–	–	0,00	18,00	18,00
34	Jaroslav Hofierka	G JAR	-1.	9	9	–	0	–	–	–	0,00	18,00	18,00
37	Zuzana Drozdíková	G P.O.H.	0.	9	3	5	–	–	–	–	0,00	17,00	17,00
37	Alžbeta Kurdelová	ŠPMNDAG	0.	9	7	7	4	–	–	–	-10,00	17,00	17,00
37	Pavol Kögler	G Galanta	1.	2	4	7	–	4	–	–	0,00	17,00	17,00
40	Radomír Gajdošoci	GPH	1.	–	9	–	1	2	–	4	0,00	16,00	16,00
40	Peter Hojnoš	G SNV	-1.	9	7	–	0	–	–	–	0,00	16,00	16,00
40	Tomáš Turlík	G JAR	0.	8	4	3	0	1	–	–	0,00	16,00	16,00
40	Matej Badin	G GJH	-1.	9	7	–	0	–	–	–	0,00	16,00	16,00
44	Jakub Cimerman	GJGT	1.	9	4	–	–	2	–	–	0,00	15,00	15,00
44	Jakub Bahyl	OG Varšavská	0.	9	3	5	–	–	–	–	-2,00	15,00	15,00
44	Tatiana Matejovičová	Gamča	2.	–	5	8	–	2	–	–	0,00	15,00	15,00
44	Karolína Šromeková	G Tatarku	-1.	9	–	6	–	–	–	–	0,00	15,00	15,00
48	Marek Šuppa	GsvCaM	0.	9	9	–	0	–	–	–	-4,00	14,00	14,00
49	Pavlína Hodulová	G Coubertina	-1.	9	4	–	–	–	–	–	0,00	13,00	13,00
49	Max Karel	G Bajkalská	-1.	9	3	–	1	–	–	–	0,00	13,00	13,00
49	Zuzana Šinská	G Bánovce	2.	–	4	7	1	–	3	–	-2,00	13,00	13,00
49	Róbert Lexmann	G Ľ. Štúra Trenčín	2.	–	6	9	4	4	–	–	-10,00	13,00	13,00
53	Matej Ralbovský	GŠB	-1.	9	9	–	–	–	4	–	-10,00	12,00	12,00
54	Michal Gašpár	G JAR	-1.	9	4	–	0	–	–	–	-2,00	11,00	11,00
55	Stanislav Bednár	G GJH	-1.	0	3	7	0	–	–	–	0,00	10,00	10,00
56	Samuel Puček	G Ľ. Štúra Trenčín	0.	–	–	7	–	–	–	–	0,00	7,00	7,00
56	Martin Perešíni	ZŠ Radv BB	-1.	9	3	2	–	3	–	–	-10,00	7,00	7,00
58	Michaela Šandalová	ŠPMNDAG	-1.	3	–	–	–	–	–	–	0,00	3,00	3,00