Fyzikálny korešpondenčný seminár
26. ročník, 2010/2011

FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Vzorové riešenia 1. kola zimnej časti 2010/2011

1.1 Vlak (opravovali Mišo a Janka)

Odhadnite, koľko peňazí stojí jedno rozbehnutie vlaku na trati Bratislava–Košice zo státia na rýchlosť $100\,\mathrm{km/h}$. Predpokladajte, že vlak má 1 lokomotívu a 9 vozňov a cena elektrickej energie, ktorou sa rozbieha, je rovnaká, ako cena elektrickej energie, ktorú platíte u vás doma. Ostatné potrebné údaje skúste čo najpresnejšie zistiť/odhadnúť.

Je evidentné, že na rozbehnutie vlaku treba silu. Čo robí táto sila? V prvom rade urýchľuje vlak. Pritom hovoríme, že elektromotor lokomotívy koná prácu a vlaku udeľuje kinetickú energiu, $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}Mv^2$.

Nuž, treba nám zistiť hmotnosť vlakovej súpravy. Tí akčnejší pôjdu otravovať ujov a tety na stanicu, my pohodlní zase uja Googla. Pár kláves a kliknutí odhalí, že na Slovensku väčšina lokomotív ťahajúcich rýchliky má 86 ton, bežný vozeň v rýchliku má 44 ton prázdny a 50 ton, keď je plný. Keďže vlaky KE–BA sú vždy napchaté, zoberieme 50 ton. Po správnej premene jednotiek to pre energiu dá: $E_\mathrm{k} \approx \frac{1}{2}(86\,000\,\mathrm{kg} + 9 \cdot 50\,000\,\mathrm{kg})(27{,}8\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2 \approx 207\,\mathrm{MJ}$.

Ďalšia google session má za následok zistenie ceny elektriny: druhá tarifná skupina pre väčšie domácnosti je 0,0751 Eur za kilowatthodinu. Trošku nám ale nehrajú jednotky. Našťastie vieme, že výkon jeden Watt je práca jeden Joule vykonaná za jednu sekundu a teda Joule je Wattsekunda.[1] Potrebujeme spočítať, koľko Wattsekúnd (teda Jouleov) je jedna kilowatthodina: hodina má 3 600 sekúnd a predpona kilo prezrádza násobok 1 000. To vypľuje 3 600 000 wattsekúnd (Jouleov) = 1 kilowatthodina.

Energia vlaku vyjadrená v kilowatthodinách vynásobená cenou za 1 kWh nám dá hľadanú cenu $207\,000\,000/3\,600\,000 \cdot 0{,}0751\,\mathrm{Euro} \approx 4{,}32\,\mathrm{Euro}$. Skoro ako lístok z Piešťan do Blavy.

Čiže keď roztlačím vlak, cestujem domov zadarmo aj s čajíkom. Ako pri každom výpočte je treba byť si vedomý toho, že v našom riešení sa určite objavili nepresnosti v dôsledku rozdielov hodnôt v realite a v našej aproximácii. Napríklad, časť energie elektrického prúdu sa spotrebuje na neužitočnú energiu ako napríklad teplo, lebo účinnosť elektromotorov lokomotívy predsa len nie je stopercentná; podľa ZSSK to je okolo 93 %. Vlak tiež musí pri rozbiehaní prekonať odpor vzduchu a trenie na koľajniciach a v nápravách vozňov. V osobných vozňoch treba napájať vybavenie ako svietenie, klimatizáciu, zásuvky… Berúc do úvahy tieto skutočnosti vidíme, že náš výpočet je skutočne iba odhad.

V riešeniach sa často vyskytla chyba, že neboli premenené km/h na m/s. Je to veľmi závažná chyba, takže hustota jej výskytu ma zaskočila. Trochu menej sa vyskytovala chyba pri premenení Jouleov na kilowatthodiny. Aj pri použití správnych postupov sa vaše výsledky líšili, pretože ste používali rôzne hodnoty, z ktorých väčšina bola v pohode až na pár výnimiek.

[1] Ak sa vám to pletie ako mne, napíšte si známy vzorček pre výkon: $P = W/t$.

Seminár podporujú:

Vyskytli sa riešenia aj cez výkon, dá sa to, ale zopár ľudí sa v tom zamotalo a urobilo nejakú chybu. Vyskytli sa tiež riešenia cez trecie sily, dá sa to aj tak, ale znova to niektorí pomotali. Bodík som stŕhal, keď ste nespomenuli ani účinnosť ani straty energie v závere, ku každému odhadu patrí zhrnutie o možných odchýlkach. Ak máte akékoľvek otázky fyzikálneho charakteru, rád vám ich zodpoviem na `misodur@gmail.com`. Na všetky e-maily sa veľmi teším.

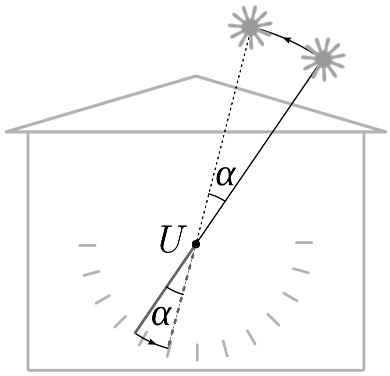
1.2 Slnečné hodiny (opravovala Katka, vzorák Poli a Jakub)

Slnečné hodiny sa skladajú z polkruhového ciferníku pripevneného na stenu domu do ktorého je kolmo zabodnutý ukazovateľ U. Princíp fungovania je jednoduchý: tieň ukazovateľa dopadá na stupnicu, kde jednoducho odčítame čas. Postupne, ako plynie čas, sa slnko presúva po oblohe a tieň ukazovateľa po stupnici: tak máme o čase stále aktuálnu informáciu. Veľké slnečné hodiny (obrázok) dokážu určovať čas s presnosťou až na niekoľko sekúnd. Minule som videl hodiny, ktoré merali čas s presnosťou na minúty. Dve susedné minútové značky boli od seba vzdialené $2\,\mathrm{cm}$. Aký musel byť polomer kruhovej stupnice, aby hodiny ukazovali správne? Pre jednoduchosť predpokladajte, že na obed sa slnko nachádza presne nad našimi hlavami. V našich zemepisných šírkach to nie je síce nikdy pravda, no presnosť výsledku to, čuduj sa svete, neovplyvní.

Milý riešitelia, tento príklad naozaj nebol veľmi tažký, no napriek tomu sa v ňom dalo zamotať. Ako celkom prvý sa v ňom zamotal zadávateľ úlohy, ďalej vzorákovač a neminulo to ani vzoráko-kontrolovača. Vzorák bude pozostávať z 2 častí, tá prvá v krátkosti vyrieši zadanú úlohu, tá druhá sa bude v nepomerne dlhšom texte zapodievať poslednou vetou zadania – či vôbec platí, prípadne kedy a objasnením funkcionality slnečných hodín všeobecne.

Časť prvá Treba si uvedomiť, ako slnečné hodiny vlastne fungujú. Čas na nich ukazuje tieň, ktorý sa počas dňa pohybuje. Ako rýchlo sa pohybuje tieň? Predtým ako odpovieme na túto otázku, zosumarizujme si radšej, čo o našej slnečnej aparatúre predpokladáme: „tieňovrhač“ je vodorovný, na poludnie je slnko v danom mieste v nadhlavníku (t.j. priamo nad našimi hlavami). To by však nestačilo, je treba pridať predpoklad, že stena je orientovaná priamo na juh alebo priamo na sever.[2] Pri takejto konfigurácii zariadenia sa tieň pohybuje rovnakou uhlovou rýchlosťou ako slnko na oblohe. To je vďaka tomu, že sa slnko pohybuje v danom prípade v rovine steny, zvyšok ľahko uvidíme z obrázka.

[2] Keby bola stena s hodinami orientovaná povedzme na západ, tak by tieň po celý deň ukazoval stále len na spodnú čiaročku ciferníka. Pri inej orientácii steny sa bude tieň pohybovať počas dňa rozličnou uhlovou rýchlosťou, tak napríklad pre čas poludnia vyskočí do výsledku multiplikatívny faktor $\sin\gamma$, kde γ je uhol odklonu orientácie steny od západného smeru.



Obr. 1: Slnečné hodiny a pohyb Slnka

Už nám stačí vyrátať, ako sa slnko hýbe po oblohe. Hýbe sa tak, že na rovnakom mieste na oblohe je o 24 hodín. Teda plný uhol, $360\,^\circ$, opíše za 24 hodín. Tým pádom za jednu hodinu sa slnko[3] pohne o $15\,^\circ$. Rovnako rýchlo sa bude pohybovať aj tieň ukazovadla. Rozostup medzi minútovými dielikmi je 2 cm. Teda za deň má tieň prejsť 2 880 cm. Teraz už stačí použiť vzorec na obvod kružnice, odkiaľ dostaneme, že polomer hodín je $R = \frac{1}{2}o/\pi \approx 4{,}6\,\mathrm{m}$. Vcelku slušné hodiny, že?

Časť druhá V tejto časti si povieme, ako sa také hodiny realizujú v skutočnosti. Zrejme prístup z prvej časti nie je veľmi vhodný, keďže neexistuje na Zemi miesto, kde by slnko bolo každý deň v roku na poludnie v nadhlavníku.[4]

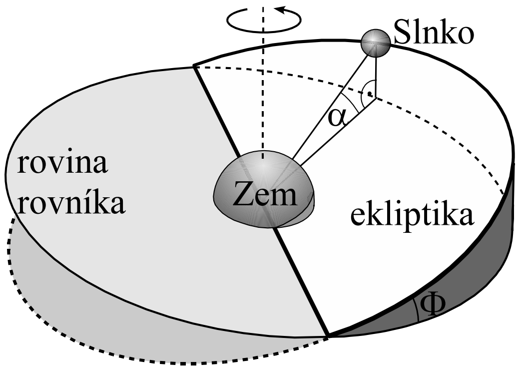
Predtým, ako sa pohneme ďalej, si ozrejmime zopár pojmov:

- Miestna rovina – je to dotyková rovina k povrchu zeme v mieste, kde sa nachádzame. Inak povedané, rovina obzoru (ak náhodou nemáme okolo seba hory).
- Zemská os – priamka v priestore okolo ktorej rotuje naša Zem. Zviera s rovinou obehu Zeme okolo Slnka uhol približne $\Phi = 23{,}5°$.
- Ekliptika – rovina, v ktorej (zdanlivo) obieha Slnko okolo Zeme.
- Rovina (Zemského) rovníka – rovina kolmá na zemskú os prechádzajúca rovníkom.

Na nasledujúcom obrázku pekne vidno ako sa mení počas roka uhol α medzi rovinou rovníka a smerom do slnka. Zjavne počas roka nadobúda uhol α hodnoty z rozmedzia od $-\Phi$ do $+\Phi$.

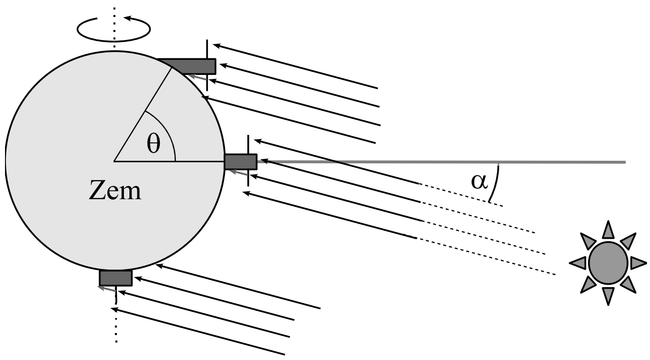
[3] Pre slnko by to platilo presne, keby sa Zem pohybovala po kružnici okolo Slnka. Pre Mesiac a všetky nebeské objekty to platí iba približne práve kvôli pohybu Zeme okolo Slnka.

[4] Kedy a kde je na poludnie slnko v nadhlavníku? Počas rovnodenností na rovníku, v čase zimného slnovratu na obratníku Kozorožca, počas letného slnovratu na obratníku Raka a v iných dňoch kdesi medzi obratníkmi.



Obr. 2: Obeh Slnka

Ako prvé v tejto druhej časti si treba uvedomiť, že keď konštruujeme slnečné hodiny na rovníku, tak môžeme použiť zariadenie popísané v prvej časti. Totiž, „tieňovrhač" je v tomto prípade umiestnený *v smere zemskej osi* – a teda pri otáčaní Zeme okolo svojej osi zostáva jeho smer v priestore *nemenný*. Rotácia Zeme okolo vlastnej osi teda pri pohľade na hodiny spôsobí rotáciu slnka práve okolo osi „tieňovrhača" a tým pádom aj rotáciu tieňa o rovnaký uhol ako sa otočilo slnko.[5] Polomer ciferníka vyjde rovnako ako v prvej časti, t.j. približne 4,6 m, naviac hodiny fungujú počas celého roka. Zatiaľ však iba na rovníku. Čo ak chceme mať slnečné hodiny aj u nás, v našej rodnej dedinke či mestečku? (Keď môžu mať divné hodiny v Dolnom Kubíne, tak prečo nie aj u nás?) Funguje to rovnako dobre aj u nás, pokiaľ len máme „tieňovrhač" nasmerovaný v smere zemskej osi a priemetňu kolmú naň; viď obrázok.

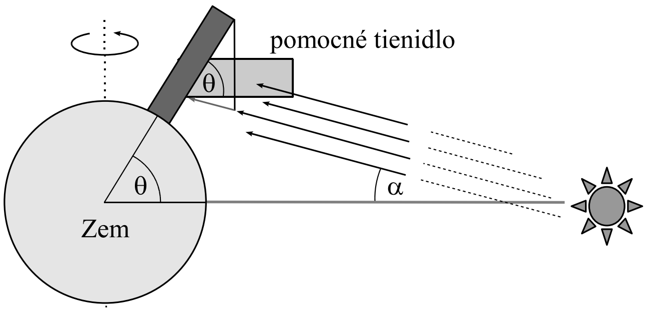


Obr. 3: Slnečné hodiny v rodnej dedinke

Teda napríklad u nás na Slovensku, kde je zemepisná šírka $\theta \approx 48°$ by bol uhol ukazovadla s miestnou rovinou 48° a uhol medzi miestnou rovinou a stenou, na ktorej pozorujeme tieň, by musel byť 42°. Uznajte sami, že z takých hodín by sa zle čítal čas: v lete by sa človek musel pozerať zdiaľky a v zime zasa spod veže s hodinami. Nedalo by sa to vymyslieť tak, aby sme mali aj presné hodiny, aj by sme ich mohli mať na veži? Dalo. Stačí ak by sme mali ukazovadlo stále kolmé na slnečnú dráhu a vertikálnu stenu orientovanú na juh (ak inštalujeme slnečné

[5] Tu využívame, že Slnko je mnohonásobne ďalej od Zeme ako je polomer Zeme a teda pre naše účely môžeme považovať rotáciu Zeme okolo vlastnej osi za rotáciu Zeme okolo „tieňovrhača" zvaného aj gnómon.

hodiny severne od obratníka Raka).[6] Potom však už nebude pohyb po ciferníku počas dňa rovnomerný. Naviac, tieň bude počas roka pri danej dĺžke gnómona opisovať rozličný polomer dokonca aj na pravé poludnie. Obrázok vystihujúci situáciu na poludnie nám pomôže určiť polomer ciferníka na obed v závislosti od zemepisnej šírky θ. Malé otočenie o $360°/1\,440$ na poludnie, pre ktoré je tento obrázok nakreslený, okolo zemskej osi sa prejaví tak, že Slnko vyjde o daný uhol otočenia okolo gnómonu z nákresne von; tieň o rovnaký uhol vojde dnu. Do obrázku som dokreslil pomocné tienidlo rovnobežné s rovníkovou rovinou. Na ňom vieme, že polomer dosahuje 4,6 m. Po ľahkej nakuknutí do obrázka vidno, že na zvislej stene bude polomer $R \approx 4{,}6\,\mathrm{m}/\cos\theta$.



Obr. 4: Situácia na poludnie

Komu by nestačilo a chcel by si ešte čítať o slnečných hodinách, tak mu v angličtine vieme ponúknuť článok

`http://en.wikipedia.org/wiki/Sundial` .

Komu by ešte stále nestačilo a chcel by si prečítať o slnečných hodinách v Dolnom Kubíne, tak nemá kde lebo o nich skoro nič nepíšu. Spýtajte sa Filipa :-) . Ďakujeme vytrvalcom za pozornosť a čítajte si vzoráky aj nabudúce :-). Tak čo, urobíte si aj vy svoje slnečné hodiny? Také šikmé by som si aj dal do záhrady, keby som nejakú mal... čert to ber, že sa na ne treba pozerať v lete z inej strany ako v zime, hlavne, že sú jednoduché!

1.3 Úloha z bazéna (opravovala Bea)

Nedávno som v MFChT našiel údaj, podľa ktorého má ľudské telo pri nádychu priemernú hustotu $960\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, kým počas výdychu až približne $1\,040\,\mathrm{kg/m3}$. Pri plávaní v bazéne som si všimol, že keď sa človek potopí, tak je nadľahčovaný menej ako na hladine. Vysvetlite, prečo je to tak a vypočítajte, z akej hĺbky sa plne nadýchnutý tabuľkový človek už nevynorí samovoľne (t.j. bez vlastného pohybu). V realite to bude oproti vypočítanej hodnote trochu inak, bude skutočná hĺbka väčšia alebo menšia?

Ahojte potápači. Tajne som dúfala, že si to skúsite experimentálne overiť a vy nič. Chcela som to vyskúšať aj ja, ale nechcela som, aby mi vlasy smrdeli rybacinou. A keď som poprosila Faja, tak sa vyhováral, že on by klesal ku dnu už aj tesne spod hladiny.

Tak skúsime si to vyjadriť teoreticky. Zostaňme pri všeobecných vzťahoch. Označme si objem vydýchnutého (tlakom prakticky nestlačiteľného) človeka V a objem pľúc V_0. Pomocou

[6] Dajú sa zostrojiť aj hodiny na nie striktne južnej stene, ale je to komplikovanejšie.

známych hustôt tela po nádychu $\rho_n = 960\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, výdychu $\rho_v = 1\,040\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ a neznámej hmotnosti m si vyjadríme najprv hustoty

$$\rho_v = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{\rho_v} \tag{1}$$

$$\rho_n = \frac{m}{V + V_0}\,. \tag{2}$$

Po dosadení za V do vzťahu (2) dostávame

$$V_0 = \frac{m}{\rho_n} - V = \frac{m}{\rho_n} - \frac{m}{\rho_v}. \tag{3}$$

Predstavme si teda, že sa ktosi nadýchol, ponoril sa do vody a klesá. Zmizol nám z očú:-). Za predpokladu, že človek je nestlačiteľný, by sa nemenilo nič. My však predpokladajme, že hydrostatický tlak vody stláča pľúca potápajúceho sa, a že ide o izotermický dej (tzn. nemení sa teplota vzduchu v pľúcach). Zo stavovej rovnice ideálneho plynu potom platí, že súčin pV pre plyn v pľúcach je konštantný. Na hladine pôsobí atmosférický tlak $p_a = 100\,\mathrm{kPa}$. V hĺbke h pôsobí tlak navýšený o hodnotu hydrostatického tlaku $p = p_a + h\rho g$. Súčin pV je rovnaký na hladine ako v hĺbke h, takže platí $V_0 p_a = V'(p_a + h\rho g)$. Z čoho vyplýva, že pľúca budú mať v hĺbke h objem

$$V' = \frac{V_0 p_a}{p_a + h\rho g}\,. \tag{4}$$

Pýtali sme sa na hĺbku, z ktorej sa už potopený nie je schopný samovoľne vynoriť, splýva teda na mieste. To sa deje presne vtedy, keď je jeho hustota rovná hustote vody $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$

$$\rho = \frac{m}{V + V'}\,. \tag{5}$$

Dosadíme za V, V' aj V_0 vzťahy (1),(3),(4) do rovnice (5)

$$\rho = m/\left[\frac{m}{\rho_v} + \left(\frac{m}{\rho_n} - \frac{m}{\rho_v}\right)\frac{p_a}{p_a + h\rho g}\right].$$

Hmotnosti v čitateli a menovateli sa nám vykrátia a pracným vyjadrením hĺbky ponorenia h dostaneme vzťah

$$h = \frac{p_a}{\rho g}\left(\frac{1/\rho_v - 1/\rho_n}{1/\rho_v - 1/\rho} - 1\right) = \frac{p_a}{\rho g}\frac{\rho - \rho_n}{\rho_v - \rho}\frac{\rho_v}{\rho_n}\,.$$

Po dosadení konkrétnych hodnôt (uvažujeme $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$) dostaneme hĺbku $h \approx 11\,\mathrm{m}$.

Aký je rozdiel oproti reálnej situácii? Človek nedokáže vydýchnuť všetok vzduch. Zostáva ho v pľúcach asi 0,5 l. Pri potápaní by sa samozrejme stláčal aj tento vzduch, s ktorým sme doteraz rátali, že je nestlačiteľný. Naviac, stlačitelné sú aj iné časti nášho tela. Preto by sa naša hustota s hĺbkou zvyšovala viac, než sme predpokladali a nedokázali by sme sa samovoľne vynoriť už pri menšej hĺbke h. Niektorí ste argumentovali, že v skutočnosti hrudný kôš bude spôsobovať menšie stlačenie pľúc ako sme spočítali – to sotva môže byť pravda, nakoľko rebrá netvoria uzavretý obal okolo pľúc. Efekt pevného hrudného koša teda môže byť najviac v tom, že sa objem pľúc zmenší prevažne tým, že ich zospodu zatlačia orgány z brušnej dutiny, ktoré majú istú vôlu pohybu. Existujú aj ďalšie nepresnosti nášho výpočtu, ale tie sú už skutočne málo podstatné (s hĺbkou sa nepatrne zvyšuje hustota vody, vzduch sa v pľúcach ohrieva a expanduje, atď.) a viete… my sme fyzici, tak to trošku zanedbáme.

Dúfam, že v hlavičkách svitlo a bude svitať aj naďalej. Len smelo do ďalšej série.

1.4 Termoska (opravovala Halucinka, vzorák Halucinka a Jakub)

Už je september a čochvíľa nás začnú bombardovať Vianočnými reklamami. Áno, na zimu sa treba pripraviť. A k zime neodmysliteľne patrí termoska čaju. Poďme si teda jednu vyrobiť! Vezmite si hrnček/pohár a dobre ho zaizolujte. Zmerajte, koľkokrát menší tepelný výkon prechádza jeho stenami a porovnajte s pôvodným hrnčekom.

Najprv si povedzme ako poriadne zaizolovať kamaráta hrnčeka? Vyberieme si dobrý izolačný materiál – napríklad polystyrén, gumovú hmotu, či uterák. Obalíme tým hrnček najlepšie ako vieme :-). Podstatná vec je, že ho chceme obaliť aj zvrchu, pretože chceme zamedziť odparovaniu vody a odovzdávaniu tepla cez vrch. Tak. Máme zaizolovaný hrnček. Čo teraz?

Chceme zistiť, ako veľmi odvádzajú teplo naše 2 hrnčeky, zaizolovaný a nezaizolovaný. Predstavte si, že vezmete do ruky hrnček a niekto vám povie, že má tepelný výkon 47 W. Čo to znamená? Hrnček zjavne teplo neprodukuje a teda ho s daným výkonom môže iba odovzdávať uberajúc zo svojej vnútornej (tepelnej) energie do okolia.[7] Výkon nášho hrnčeka je očividne výraz $P = C\Delta T/t$, kde C je tepelná kapacita hrnčeka[8] a ΔT je zmena teploty za relatívne krátky čas t. Nakoľko tepelný výkon hrnčeka zrejme závisí od teplotného rozdielu medzi jeho vlastnou teplotou a teplotou okolia, tak ak chceme určiť tepelný výkon rozumne, musíme merať dostatočne krátko na to, aby sa teplotný rozdiel za čas t nezmenil markantne.[9]

Teraz je už skutočne jednoduché zistiť, čo treba merať, aby sme zodpovedali otázku v zadaní: pomer tepelného výkonu systému s nezaizolovaným hrnčekom (1) a systému so zaizolovaným hrnčekom (2). Pre pokus s rovnakými hrnčekmi (majú rovnaké tepelné kapacity) a pri vopred určenom fixnom rozdiele teplôt ΔT hrnčekov na začiatku a konci experimentu potom dostaneme jednoduchý vzťah $P_1/P_2 = t_1/t_2$. Náš pokus bude spočívať v tom, že pripravíme 2 rovnaké hrnčeky a jeden z nich zaizolujeme. Počiatočná teplota hrnčekov bola v našom experimente $T_0 = 70$°C. Počkáme niekoľko minút, kým teplota v danom hrnčeku klesne o $\Delta T = 10$°C, a tento čas odmeriame pri oboch hrnčekoch.[10] S mojimi hrnčekmi po piatich meraniach vyšlo: pre

[7] Vidíme – striktne vzaté – že tepelný výkon je veličina, ktorá neprislúcha hrnčeku, ale celému systému hrnček a okolie. Keď však máme (snáď aspoň) v podvedomí jasno, v akom prostredí sa náš hrnček nachádza, tak môžeme tepelný výkon prisúdiť ako vlastnosť samotnému hrnčeku.

[8] Nemáme na mysli mernú tepelnú kapacitu, ale tepelnú kapacitu v zmysle $m_{\text{voda}}c_{\text{voda}} + m_{\text{prázdny hrnček}}c_{\text{porcelán}}$, kde malé c-čka sú už merné tepelné kapacity.

[9] Fyzikálny folklór hovorí, že tepelný výkon pri prestupe tepla vedením je priamo úmerný teplotnému rozdielu. U nás však môže hrať rolu aj prestup tepla konvekciou a tak vieme akurát konštatovať, že výkon je závislý od teplotného rozdielu. Ak meriame krátko, tak môžeme povedať, že teplotný rozdiel medzi hrnčekom a okolím sa prakticky nemenil počas merania.

[10] Všimnite si, že teplotný rozdiel sa počas merania menil od zhruba 50°C po 40°C, čo síce nie je skutočne konštantná hodnota, ale relatívna zmena je „relatívne" malá. Okrem toho si môžete premyslieť, že ak sa dá výkon hrnčekov napísať v tvare $P_1 = k_1 f(T)$, resp. $P_2 = k_2 f(T)$, kde k_1 a k_2 sú konštanty a $f(T)$ je ľubovolná funkcia teploty hrnčeka T, tak bude pomer výkonov určený úplne presne. To platí vďaka tomu, že ochladnutie o každý teplotný kúsoček trvá prvému hrnčeku (k_1/k_2)-násobne kratšie ako druhému a vďaka tomu, že počiatočné a koncové teploty hrnčekov boli rovnaké. Napr. vo „folklórnom" prípade lineárneho zákona tepelného výkonu od teplotného rozdielu hrnčeka a okolia by sme mali $f(T) = T - T_{\text{okolie}}$ a pomer by bol určený presne.

nezaizolovaný hrnček t_1 = priemer z meraní$(19; 14; 18; 15; 14\,\text{min})$ = 16 min a pre zaizolovaný hrnček t_2 = priemer z meraní$(37; 34; 36; 33; 32\,\text{min})$ = 34,4 min. A teda náš dlho očakávaný pomer koľkokrát je zaizolovaný hrnček „lepší“ od nezaizolovaného je $16/34{,}4 \approx 2$. Zaizolovaný hrnček je teda z tohto pohľadu viac ako dvakrát taký dobrý ako nezaizolovaný.

A na záver sa pochválim, čo všetko mi prišlo spolu s riešeniami. Medzi iným aj tieto riadky (že Hellboy:-)): „Vtip na ovplyvnenie psychiky opravujúceho: Vieš aký je rozdiel medzi vranou? Má obe nohy rovnaké, najmä tú ľavú.“

1.5 Deravá termoska (opravovali Bzdušo a Stano)

Mám super digitálnu presnú váhu. Vezmem reťaz dĺžky l, hmotnosti m a držím ju tesne nad váhou tak, že spodok reťaze sa jemne dotýka váhy. Zrazu reťaz pustím. Akú hmotnosť bude váha ukazovať v čase t od pustenia? Kedy bude ukazovať najväčšiu hmotnosť?

Neverte mu! Tomášova váha nie je super, nie je presná a takmer nie je ani digitálna. Má pokazaných toľko diód, že číslo osem na nej svieti ako sedmička.[11] Avšak, keďže je to vzdelaný človek, odpustíme mu túto lož s odôvodnením, že si môžeme predstaviť *myšlienkový experiment* s naozajstnou super digitálnou presnou váhou.

Mimochodom, tie slová „super digitálna presná“ tam nie sú náhodou. Autor tým chce povedať, že ak na váhu pôsobím silou $F(t)$ závisiacou od času, tak váha bude vždy ukazovať *okamžitú* hmotnosť

$$m(t) = F(t)/g,$$

ktorej tiaž by sa, čo do veľkosti, práve rovnala v danom okamihu pôsobiacej sile $F(t)$. Práve tá „okamžitosť“ je tu podstatná, pretože bežná váha v domácnosti sa dlho ustaľuje a experiment sa na nej nedá previesť.[12] Ten *myšlienkový experiment* tedá nie je fór, ale naša jediná možnosť.

K riešeniu stačí povedať *tri podstatné veci*:

(i) Keď stojím na váhe, pôsobím na ňu silou rovnou svojej tiaži. Padajúca reťaz bude zrejme vždy tlačiť na váhu len tiažou tej svojej časti, ktorá už leží na váhe.

(ii) *To však nie je všetko!* Váha musí vstrebávať hybnosť dopadajúcej reťaze. Pán Newton nám odhalil, že reťaz pri tom pôsobí na váhu ďalšou silou $F = \Delta p/\Delta t$, kde časový interval Δt treba vziať nekonečne krátky.[13]

(iii) Každé očko reťaze padá voľným pádom a pri dopade na váhu zostávajú jej jednotlivé očká nehybne ležať.

Tým som vyčerpal všetko, čo chcem, aby ste poriadne pochopili. Zvyšok by som pokojne mohol nechať na domácu úlohu. Avšak keďže tam hore vedľa môjho mena je napisané „vzorák“, ukážem ešte, ako sa od fyzikálnych zákonov dostanemu pánovi výsledkovi osobne. Cestou si štyrikrát zakričíme „HOTOVO!“.

[11] Priam by som povedal, že Tomášova váha je ako deravá termoska. Tvári sa na viac, než naozaj je. Inak názov úlohy nemá so zadaním naozaj nič spoločné.

[12] Schválne: Mechanická váha, ktorú mám doma, sa ustaľuje asi 2 sekundy. Metrová reťaz by dopadla za menej ako 0,5 sekundy. O okamžitosti teda nemôže byť ani reč!

[13] O tom, že dopadajúci predmet pôsobí na podložku väčšou silou nás presviedčajú tak americkí režiséri vo filme Deep Impact, ako aj infantilné zábavky na trampolíne – pri skákaní sa trampolína pod našimi nohami prehýňa viacej, než keď na nej iba pokojne stojíme.

Pôsobiacu silu si v súlade s predošlým odstavcom rozložím na dve časti $F_1 = m_1 g$ a $F_2 = \Delta p/\Delta t$. Začneme s prvou z nich. Za čas t dopadne na váhu časť reťaze dĺžky $gt^2/2$. Z priamej úmery máme pre jej hmotnosť

$$\frac{m_1}{gt^2/2} = \frac{m}{\ell} \quad\Longrightarrow\quad m_1 = \frac{mgt^2}{2\ell},$$

Hotovo prvé. Po prenásobení g máme silu F_1, ale to v skutočnosti ani nepotrebujeme.

Pre zložku silu za odovzdanú hybnosť máme

$$F_2 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = \frac{v\,\Delta m}{\Delta t},$$

kde Δp je hybnosť, ktorú odovzdá reťaz váhe za okamih Δt a Δm je hmotnosť tej časti reťaze, ktorá dopadla počas toho istého okamihu okamžitou rýchlosťou v.

Pre okamžitú rýchlosť reťaze vieme $v = gt$. Hmotnosť Δm určíme zo skutočnosti, že za malý čas Δt reťaz klesne o $\Delta\ell = v\Delta t$. To je súčasne dĺžka reťaze, ktorá za tento čas dopadne na váhu. Z priamej úmery dostávame tento raz

$$\frac{\Delta m}{v\Delta t} = \frac{m}{\ell} \quad\Rightarrow\quad \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{mv}{\ell},$$

Po dosadení poznáme aj závislosť druhej zložky sily od času

$$F_2 = \frac{mv^2}{\ell} = \frac{mg^2t^2}{\ell},$$

Hotovo druhé. Všimnite si, že obe sily závisia od času.[14]

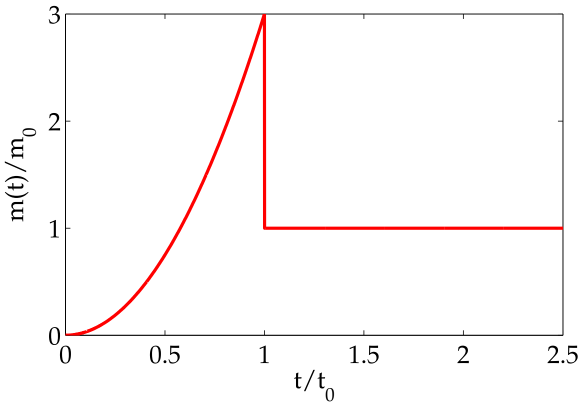
Zostáva len posledný krôčik k výsledku – hmotnosť. Ľaľa

$$m(t) = \frac{1}{g}\big[F_1(t) + F_2(t)\big] = \tfrac{3}{2}\frac{mgt^2}{\ell}.$$

Hotovo tretie. Ukazovaná hmotnosť teda rastie kvadraticky s časom a najväčšia bude v okamihu, keď na váhu dopadne posledné očko reťaze. Mimochodom, v tom istom okamihu špeciálne platí $\frac{1}{2}gt^2 = \ell$ (reťaz klesla o celú svoju dĺžku) a ukázaná hmotnosť bude rovná trojnásobku skutočnej hmotnosti reťaze.

Aby ste získali lepšiu predstavu, pridávam ešte graf, kde som zvolil špeciálnu jednotku času $t_0 = \sqrt{2\ell/g}$ (čas dopadu reťaze). Hmotnosť meriam v násobkoch skutočnej hmotnosti. Hotovo štvrté.

[14] Je jasné, že prvá zložka sily s časom rastie. Premyslite si, prečo aj druhá zložka sily vyšla závislá od času. Prečo práve od jeho druhej mocniny?



Obr. 5: Závislosť ukazovanej hmotnosti $m(t)$ od času t. V grafe som použil jednotku času $t_0 = \sqrt{2\ell/g}$ rovnú času padania reťaze. Jednotkou hmotnosti je hmotnosť reťaze $m_0 = m$.

1.6 Knižnica (opravoval Tomáš)

Po skončení prázdnin som odložil 7 kníh (každá hmotnosti m) na seba na kopu na stôl. A teraz som zistil, že potrebujem vytiahnuť tú druhú odspodu. Chytím ju teda a vodorovne potiahnem. Popíšte, ako sa bude správať sústava kníh v závislostí od toho, ako silno ťahám. Koeficient trenia f je všade rovnaký.

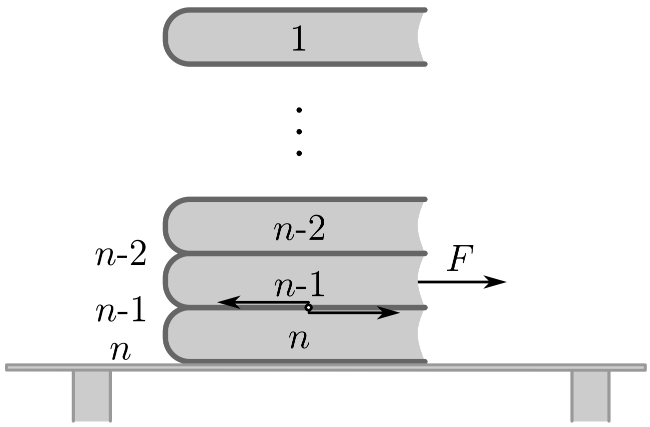
To máte tak. Donedávna ležala zodpovednosť za výber príkladov do FKS komplet na mne. Časy sa zmenili a tak, prvýkrát po dlhej dobe píšem vzorák k úlohe, ktorú som vlastnoručne (vlastnohlavne?) nezadával. To má niekoľko nepríjemných dôsledkov – ako napríklad, že v tomto okamihu ešte neviem, koľko mi to má vyjsť. Aby som to nedoplietol, vyvarujem sa príliš chvatných tvrdení vyplývajúcich z nedostatočnej zmyslovej skúsenosti so svetom[15] a radšej budem postupovať metódou paranoidného fyzika – neverím ničomu, čo nezrátam.

Aby sme do chaosu vniesli trochu poriadku, poďme celú úlohu pooznačovať. Budeme frajersky pracovať s n knihami (číslujeme ich zhora, vyťahujeme teda knihu číslo $n-1$). Keď všetko vyriešime, položíme $n = 7$, čím vyriešime aj zadaný príklad. Okrem kníh nás budú zaujímať styčné plochy medzi nimi. Tieto budeme familiárne volať s.p. Styčná plocha číslo k bude plocha medzi k-tou a $(k+1)$-vou knihou (stolom). Pokiaľ knihy číslo k a $k+1$ neprešmykujú, budeme skrátene hovoriť, že k-ta s.p. neprešmykuje.

Styčné plochy nás zaujímajú z dôvodu trecích síl, ktoré na nich vznikajú. Poďme teda niečo o nich usúdiť. V celej úlohe nás bude zaujímať pohyb vo vodorovnom smere. V smere zvislom totiž knihy stoja – čo je skvelé. Vieme, že na každú z kníh pôsobí gravitačná sila o veľkosti mg. Navyše k-ta kniha musí držat $k-1$ kníh nad sebou a tak tlaková sila pôsobiaca na k-tej s.p. bude mať veľkosť kmg. Táto sila spôsobuje trenie F_k o maximálnej veľkosti $kmgf$. Maximálna hodnota trenia $kmgf$ sa nadobúda vtedy, keď s.p. prešmykuje. Pokiaľ s.p. neprešmykuje, trecia sila je väčšinou menšia. Na záver odstavca pár triviálnych pozorovaní:

- S rastúcim k rastie aj maximálna možná veľkosť trenia.
- Platí zákon akcie a reakcie – na danej s.p. teda vždy vznikajú 2 sily, napríklad na obrázku jedna zo síl brzdí $(n-1)$-vú knihu a druhá sa snaží urýchliť n-tú.

[15] Alebo proste z toho, že som tubas.



Obr. 6: Sily na styčnej ploche

Čo sa stane, keď na $(n-1)$-vú knihu zapôsobím (za účelom vytiahnutia) silou F? Kniha má dve styčné plochy a to s n-tou a $(n-1)$-vou knihou. Kto by však povedal, že na knihu preto pôsobia 2 trecie sily, konkrétne $(n-2)mgf$ a $(n-1)mgf$, šeredne by sa splietol. Nezabúdajte, že *trecie sily nadobúdajú maximálne hodnoty iba pokiaľ príslušné s.p. prešmykujú*! V zmysle hesla „Som paranoidný, ale som paranoidný dosť?“ sa poďme teda zamyslieť, čo sa po čom bude vlastne šúchať. Zamerajme sa na najspodnejšiu knihu. Tá má jednu styčnú plochu so stolom – stôl ostane stáť aj keby čo, a teda dá sa po ňom iba šúchať (alebo stáť). Pokiaľ by sa najspodnejšia kniha mala po stole šúchať, brzdil by ju stôl trecou silou $nmgf$. Minimálne takouto silou by ju teda musela urýchľovať vrchná styčná plocha. No, ale pozor vážení, tá predsa môže pôsobiť silou najviac $(n-1)mgf$ (čo je menej)! Je to tak – trenie na s.p. $n-1$ je primalé na to, aby prekonalo trenie na s.p. n. Najspodnejšia kniha bude teda vždy stáť. Kniha č. $n-1$ sa bude teda šúchať vždy minimálne po svojej spodnej s.p. Inými slovami, kým sila ťahu F nebude aspoň $(n-1)mgf$, ani ju nehne, aby ju pohlo.

Zaujímavé budú preto prípady, keď $F > (n-1)mgf$. Aby sme mali krajší zápis, označíme $Z = F-(n-1)mgf$. Spravme teraz predpoklad $\mathcal{P}$: $(n-1)$-vá s.p. je jediná, ktorá prešmykuje. Čo to znamená? To znamená, že vrchných $n-1$ kníh sa bude správať ako jedno teleso, urýchľované silou Z. Pre zrýchlenie tohto $(n-1)$-knižného telesa máme $a = Z/[(n-1)m]$. Aká sila F_k pôsobí teraz na k-tej s.p.? No presne taká, aby sa vrchných k kníh mohlo vďaka F_k pohybovať so zrýchlením a. Teda $F_k = kma$. No a aby predpoklad $\mathcal{P}$ bol splnený, nesmie táto sila prekročiť maximálnu hodnotu trecej sily na danej ploche, musí teda platiť $F_k \leq kmgf$. Táto podmienka po poctivom dosadení dáva $Z \leq (n-1)mgf$. Toto je teda druhý zo spôsobov, ako sa systém vie správať: spodná kniha stojí a zvyšné pekne družne cestujú zrýchlením a.

Bude aj tretí spôsob pohybu? Jasné. Stači porušiť podmienku pre Z, ktorú sme pred 5 sekundami spravili.[16] Pokiaľ $Z > (n-1)mgf$, nastane galiba a čosi sa začne po čomsi šúchať. Konkrétne $(n-2)$-há s.p. začne prešmykovať.[17] Kniha č. $n-1$ je (teraz už ozaj) brzdená silami $(n-1)mgf$ a $(n-2)mgf$ a pohybuje sa teda so zrýchlením $a_1 = (F-(2n-3)mgf)/m$. A zvyšok sústavy? Ten je urýchľovaný silou $(n-2)mgf$. A robí… Bohviečo. No, nádhera.[18]

[16]pre pomalších čitateľov: pred minútou
[17]Rozmyslite si, prečo práve táto!
[18]Kto sa dočítal až sem, nech si zbehne po niečo sladké, ešte zďaleka nekončíme.

Čo presne vie sila $(n-2)mgf$ spôsobiť chudáku zvyšku sústavy (t.j. vrchným $n-2$ knihám)? Spravme predpoklad $\mathcal{PP}$: s.p. číslo $n-1$ a $n-2$ sú jediné dve, ktoré prešmykujú. Zopakujeme si celý mentálny cirkus spred hodiny (sem som zarátal aj čas na konzumáciu niečoho sladkého) s výsledkom:

- Za predpokladu $\mathcal{PP}$ sa pohybuje vrchných $n-2$ kníh ako jedno teleso so zrýchlením $a_2 = gf$.
- Sila F_k, ktorou musí pôsobiť k-ta styčná plocha má veľkosť $F_k = kma_2 = kmgf$.
- Aby $\mathcal{PP}$ platil, musí byť $F_k \leq kmgf$ pre $k = 1, 2, \ldots, n-2$.
- Platí $F_k = kmgf$ pre $k = 1, 2, \ldots, n-2$.

Neviem či ste mali dosť sladkého na to, aby ste ocenili predposledný bod v kombinácí s posledným. Práve sme totiž zistili, že predpoklad $\mathcal{PP}$ už nemôže byť dalej narúšaný zväčšovaním F (i keď, priznajme si, bolo to tesné). To znamená koniec útrapám. Žiadne ďalsie predpoklady, žiadne ďalsie spôsoby správania sa. Hotovo.

Záver: situácia sa teda môže vyvinúť trojako:

(i) Pokiaľ $F \leq 6mgf$ všetko stojí.

(ii) Ťahaná kniha spolu so všetkými 5 nad ňou sa hýbu ako jedno teleso so zrýchlením $a = F - 6mgf/(6m)$, spodná kniha stojí. Platí pre $6mgf < F \leq 12mgf$.

(iii) Ťahaná kniha zrýchluje rýchlejšie ako všetky ostatné nad ňou, konkrétne zrýchlením $a_1 = (F - 11mgf)/m$, 5 kníh nad ťahanou zrýchľuje ako jedno teleso so zrýchlením gf, spodná kniha stojí. Platí pre $F > 12mgf$.

Ejchuchu. Poznámky k vašim riešeniam: Dobrých riešení nebolo veľa a tak som hodnotil tak benevolentne až to pekné nebolo. Viacerí ste analýzu uzavreli s tým (jedna riešiteľka dokonca na základe experimentu), že knižky sa budú „postupne rozchádzať“ – rozumej, čím je kniha nižšie (okrem najspodnejšej), tým rýchlejšie pôjde. Nič také sme však nevypočítali. To, že intuícia klame, by nič prekvapivé nebolo. Ako však k tomu príde experimentátorka? Treba si uvedomiť, že v tom poslednom popísanom móde správania je situácia veľmi vyhranená – všetky kontaktné plochy pôsobia maximálnou možnou trecou silou a stačí teda hocijaká malá experimentálna nepresnosť (napríklad, koeficient trenia medzi knihami 3,4 bude o čosi menej ako f alebo trecia sila nebude závisieť od normálovej presne lineárne) a celé sa to poposúva.

1.7 Tancujúca ryža (opravoval JAno, vzorák JAno a Jakub)

Zapnime také tie poriadne repráky a pusťme si nejakú ľubozvučnú, rozumej harmonickú, rozumej sínusového charakteru, pesničku s frekvenciou f a nasypeme na ňu ryžu. Tá na nich začne „poskakovať“. Zistite, aká je amplitúda výchylky reprákov, ak ryža vyskakuje do výšky h.

Uvažujeme zrnko ryže omnoho ľahšie ako je kus membrány reproduktora, od ktorého sa zrnko nepružne odráža. To zrejme v realite neplatí veľmi presne, ale je to rozumný a zároveň rozumne jednoduchý model pre náš problém. Za tohoto predpokladu je potom dopad ryže na reproduktor jednoducho náraz na tažkú (plastickú) stenu – dopadnuvšie zrnko za nejaký pomerne malý čas po náraze spomalí na rýchlosť membrány a vyskočí vtedy, keď ho reproduktor „vyvrhne“ nahor.

Na harmonický (sínusový) kmitavý pohyb membrány – každý konkrétny bod membrány možno chápať ako lineárny harmonický oscilátor

$$x(t) = A\sin(\omega t)\ ,$$

sa dá pekne pozrieť ako na projekciu rovnomerného pohybu v rovine xy po kružnici (s polomerom A a stredom v bode $[x, y] = [0, 0]$) na priamku x,

$$x(t) = A\sin(\omega t)\ , \qquad y(t) = A\cos(\omega t)\ .$$

Pritom pre uhlovú rýchlosť platí $\omega = 2\pi f$, kde f je frekvencia kruhového pohybu (a teda aj kmitania harmonického oscilátora alias konkrétneho bodu membrány). Odtiaľ možno nahliadnuť vyjadrenie pre rýchlosť tohto pohybu (už v projekcii na x-ovú os)

$$v(t) = v_0\cos(\omega t)\ , \qquad \text{kde } v_0 = A\omega\ .$$

Využitím vzorca pre dostredivé zrýchlenie $a_{\mathrm{do}} = A\omega^2$ pre pohyb po kružnici a projektovaním tohoto zrýchlenia do smeru x dostaneme zrýchlenie kmitavého pohybu

$$a(t) = -a_0\sin(\omega t)\ ,$$

kde $a_0 = A\omega^2$ je amplitúda zrýchlenia kmitavého pohybu membrány.

Keď sa zrnko ryže odlepí od membrány nejakou počiatočnou rýchlosťou $v_{\text{poč}} = A\omega\cos\varphi$, tak už máme do činenia s obyčajným zvislým vrhom. Pritom $\varphi = \omega\tau$ nazveme fázou, kedy začína výskok zrnka, resp. τ je čas výskoku. V tom prípade vrh začína vo výške $h_0 = A\sin\varphi$. Výška výskoku potom je

$$h = h_0 + \frac{v_{\text{poč}}^2}{2g} = A\left[\sin\varphi + \frac{A\omega^2}{2g}(1 - \sin^2\varphi)\right]\ .$$

Pritom som si užitočne prepísal vzťah tak, aby v ňom vystupovala jediná neznáma, a to $\sin\varphi$.

Kedy sa zrnko môže odlepiť od membrány? Jedine vtedy, keď zrýchlenie membrány nadol bude väčšie ako g. To nám dáva podmienku na fázu φ výskoku,

$$a(t) = -A\omega^2\sin\varphi \le -g \qquad \Rightarrow \qquad \sin\varphi \ge \frac{g}{A\omega^2}\ .$$

Ľahko možno overiť, že kvadratický výraz h v závislosti od premennej $\sin\varphi$ pri podmienke $\sin\varphi \ge g/(A\omega^2)$ nadobúda maximum práve pre $\sin\varphi = g/(A\omega^2)$.[19] Potom maximálna výška výskoku bude

$$h = \frac{A^2\omega^2}{2g} + \frac{g}{2\omega^2}\ .$$

Pre amplitúdu výchylky potom už ľahkými počtami dostaneme

$$A = \frac{\sqrt{2g}}{2\pi f}\sqrt{h - \frac{g}{8\pi^2 f^2}}\ .$$

[19]Existuje aj fyzikálne zdôvodnenie: Porovnávajme (prvé) zrnko ryže, ktoré sa od membrány odpútalo vo fáze $\varphi = \arcsin[g/(A\omega^2)]$ a (druhé) zrnko, ktoré sa odlepilo o nejakú fázu neskôr. To prvé bude mať vo výške výskoku druhého zrnka rýchlosť väčšiu ako membrána (a tým pádom väčšiu ako to druhé v čase odpútania), lebo membrána mala celý čas po výskoku prvého zrnka zrýchlenie nadol väčšie ako g; teda membrána za čas letu prvého zrnka spomalila viac ako prvé zrnko.