FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 3. série
B – kategória (mladší)
24. ročník
letný semester
školský rok 2008/2009

www. .sk

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
otazky@fks.sk

B-3.1 Tank (opravoval Filip)

Predstavte si tank, ktorý sa pohybuje po zemi rýchlosťou v. Tank má pás, ktorý vyzerá tak, ako na obrázku. Ktorým smerom a akými veľkými rýchlosťami sa pohybujú jednotlivé kusy pásu tanku? Sklon prednej časti pásu je 45°.

Predtým, než pochopíme celý pohyb, dajme si prízemnejšie ciele. Začnime spodnou časťou pásu, ktorá sa dotýka zeme. Je rozumné predpokladať, že tank sa nešmýka. Z toho vyplýva, že spodná časť pásu má vzhľadom na zem nulovú rýchlosť.

Zadanie hovorí, že tank sa hýbe vzhľadom na zem rýchlosťou v. Prenesme sa teraz nachvíľu do sústavy spojenej s tankom. V tejto sústave sa zem a taktiež spodná časť pásu vzhľadom na nás hýbu dozadu rýchlosťou veľkosti v. To ale znamená, že všetky časti pásu majú rýchlosť veľkosti v vzhľadom na tank. Pás sa totiž nikde nehromadí, ani sa nikde nenaťahuje.

Začína byť jasná rýchlosť vrchnej časti pásu. Vrchná časť sa vzhľadom na tank pohybuje rýchlosťou v dopredu, takže vzhľadom na zem bude mať rýchlosť $2v$.

Podobnú úvahu vieme urobiť aj pre zadnú časť pásu. Tentoraz je rýchlosť pásu výslednicou dvoch kolmých rýchlostí – pohybu celého tanku (v) a pohybu pásu vzhľadom na tank (v). Výslednú rýchlosť teda určíme teda ako vektorový súčet týchto dvoch rovnako veľkých rýchlostí. Z pytagorovej vety dostávame výslednú rýchlosť $\sqrt{2}v$ smerom dopredu dohora.

Zostala nám predná šikmá časť. Musíme zložiť dve rýchlosti – rýchlosť tanku vzhľadom na zem a rýchlosť pásu vzhľadom na tank. Všimnime si, že obe sú rovnako veľké, ale zvierajú uhol 45°. Doplníme na vektorový rovnobežník. Z obrázku už ľahko vidíme, že výsledná rýchlosť je $2v\cos 22,5°$.

B-3.2 Utopená loptička (opravoval Jakub)

Pingpongovú loptičku s polomerom r a hmotnosťou m držíme ponorenú 10 cm pod voľným povrchom vody. Zrazu ju pustíme. Do akej výšky vyskočí? Brzdné sily pôsobiace na loptičku môžete zanedbať.

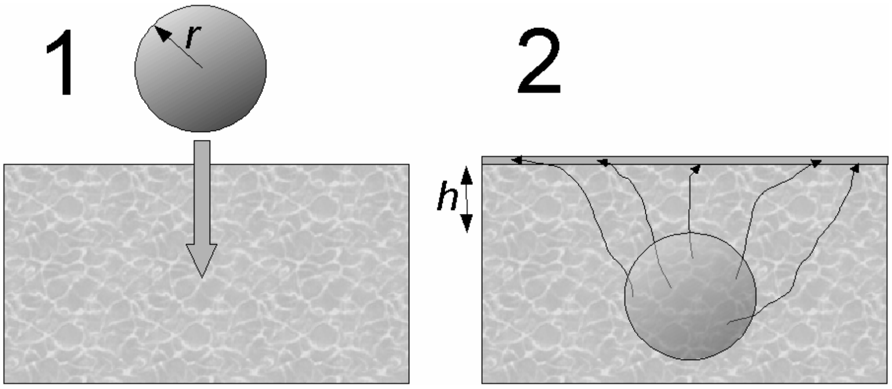
Zadanie je veľkorysé! Poskytuje nám dve implicitne dané veličiny (r a m), jednu explicitne danú hĺbku 10 cm (označím h) a dovoľuje nám zanedbať trecie/viskózne sily. V ďalšom texte budem uvažovať, že h je hĺbka pod hladinou, v ktorej sa nachádza vrch loptičky. Ďalej budem uvažovať, že pokles hladiny pri vynorení loptičky je zanedbateľný.[1] Vztlak vzduchu zanedbám taktiež.

Keďže brzdné sily neuvažujeme, môžeme použiť zákon zachovania energie. Loptička vyskočí, lebo získa nejakú energiu. Odkiaľ? Energiu má preto, lebo sme ju do vody museli najprv zatlačiť, čím sme vykonali prácu. Táto práca je ***približne***[2] dráha zatlačenia loptičky násobená silou, ktorou zatláčame loptičku (t.j. vztlaková sila – tiažová sila).

[1] Čo je splnené, ak je hladina dostatočne šíra. Napr. taká Zemplínska Šírava by bola dostatočne šíra.

[2] Približne preto, lebo počas ponárania sa veľkosť vztlakovej sily mení. Keď si však človek uvedomí, že súčet vztlakových síl pôsobiacich na loptička ponorenú spodkom o (r+x) a (r-x) pod hladinu je práve veľkosť vztlakovej sily pôsobiacej na celú ponorenú loptičku, tak sa vie šikovne vysporiadať aj s ponáraním.

Naskytá sa nám však aj iný užitočný pohľad na vec. Vztlaková sila je prejavom hydrostatického tlaku a ten je spôsobený tiažou. Mali by sme byť preto schopní nájsť energiu loptičky zatlačenej pod vodu len pozeraním sa na polohovú energie zúčastnených telies (kvapalné teleso + loptička) v tiažovom poli. Keď ponárame loptičku, tak vytláčame vodu z miest pod hladinou nad hladinu, kde sa voda rozlieva a teda mierne zvyšuje výšku hladiny. Môžeme povedať, že energia, ktorú dáme loptičke pri zanáraní sa „uloží“ do vody vytlačenej z miest „okupovanými“ loptičkou nad pôvodnú hladinu, ktorá sa nepatrne[3] zdvihne.



Tento pohľad nám dáva priamy návod na určenie energie zatlačenia loptičky. Totiž vytlačená voda mala v situácii (1) ťažisko v strede zatlačenej loptičky (2) a bola vytlačená na hladinu. Celkovo sa teda ťažisko vody zdvihlo o $r + h$ a teda voda získala potenciálnu energiu $E_{zatlačenie} = \frac{4\pi r^3 \rho_{voda}}{3} g(r + h)$.

Pri uvoľnení loptička zrejme vyskočí celá nad hladinu[4] a keď bude jej vrch v maximálnej výške H nad vodou, tak celá energia $E_{zatlačenie}$ pôvodne „investovaná“ do vody bude „preinvestovaná“ do zvýšenia ťažiska loptičky o (h+H). Z tohto sa ľahko dopočítate, že

$$H = \frac{4\pi r^3 \rho_{voda}}{3m}(r + h) - h = \frac{\rho_{voda}}{\rho_{loptička}}(r + h) - h .$$

Pre bežnú pingpongovú loptičku (r = 20 mm; m = 2,7 g) dostávame nereálny výskok H = 1,39 m; dôvodom je práve zanedbanie trecích síl. S uvážením Newtonovského odporového trenia nám vyjde, že výskok H bude zhruba 5 cm, čo som v umývadle skutočne videl.

Hodnotenie: Približné riešenia zanedbávajúce efekty zanárania dostali najviac 4,5b.

B-3.3 Tyčka (opravoval Samo)

Traja kamaráti chytili tyč. Jano ju chytil za jeden kraj, Jano za druhý a Jano vo vzdialenosti a od kraja. Krajní Janovia sa v istú chvíľu rozhodli, že tyč budú niesť rýchlosťami u a v tak ako na obrázku. Tyč je neroztiahnuteľná a má dĺžku l.

a) *Aké vlastnosti musia spĺňať vektory u a v aby takáto situácia mohla nastať?*
b) *Ako sa má v tomto okamihu pohybovať stredný Jano, aby ostal v kontakte s tyčou?*
c) *Ako sa má v tomto okamihu pohybovať stredný Jano, aby ostal v kontakte s tyčou a stále bol od krajného Jana vzdialený o a?*

Ako odpovede na otázky od vás chceme geometrický postup, ako zo zadaných vektorov skonštruujete to, čo treba.

Začnime riešením prvej časti úlohy. Pohyb krajných Janov obmedzuje neroztiahnuteľnosť tyče, musia sa pohybovať tak, aby sa ich vzájomná vzdialenosť nemenila. Vyriešme najprv jednoduchší problém: Ako sa môže pohybovať druhý Jano, ak prvý Jano stojí? Zrejme sa

[3] Zjavne, čím je hladina šírejšia, tým menej sa zdvihnutie hladiny prejaví.

[4] Ak nám výsledné H vyjde menej ako 2r, tak vieme, že tento náš predpoklad zlyhal a výsledok neplatí!

môže okolo prvého Jana točiť, nemôže sa však k nemu približovať ani sa od neho vzďaľovať. Smer pohybu druhého Jana teda musí byť kolmý na tyč. No a ako si poradíme s prípadom, kedy sa prvý Jano pohybuje? Rovnako. Pozrieme sa na to z pohľadu prvého Jana: vzhľadom na neho sa druhý Jano pohybuje rýchlosťou $\vec{v}-\vec{u}$ a táto rýchlosť musí byť, tak ako predtým, kolmá na tyč. Odpoveď na prvú časť úlohy teda je, že rozdiel rýchlostí krajných Janov musí byť kolmý na tyč.

Pokračujme riešením tretej časti úlohy. Pozrime sa na situáciu najprv z pohľadu prvého Jana, ktorý je od stredného vzdialený o a. Podobnými úvahami ako v prvej časti úlohy prídeme na to, že stredný Jano sa musí pohybovať v smere kolmom na tyč a to rovnakou rýchlosťou, ako sa pohybuje bod, ktorého sa drží. Znie teda uveriteľne, že rýchlosť stredného Jana bude v rovnakom pomere k rýchlosti druhého Jana, ako je pomer ich vzdialeností od prvého Jana.[5] Z pohľadu prvého Jana bude teda rýchlosť stredného Jana $\frac{a}{l}(\vec{v}-\vec{u})$. Z nášho pohľadu k tomu musíme ešte pripočítať rýchlosť $\vec{u}$ prvého Jana. Dostávame: $\frac{a}{l}\vec{v}+\frac{(l-a)}{l}\vec{u}$.

Tento príklad slávnostne zakončíme odpoveďou na strednú úlohu :-). Od prípadu, ktorý sme práve riešili sa líši jedine tým, že Jano sa navyše okrem pohybu, ktorý sme porátali, môže súčasne pohybovať ľubovoľnou rýchlosťou rovnobežnou s tyčou. Písmenkami povedané, jeho rýchlosť je $\frac{a}{l}\vec{v}+\frac{(l-a)}{l}\vec{u}+\vec{w}$, kde $\vec{w}$ je hocijaký vektor, ktorý je rovnobežný s tyčou.

K vašim riešeniam:

Mnohí z vás do riešenia písali, že podmienkou pre vektory *u* a *v* je, aby ich koncové body mali vzdialenosť rovnú dĺžke tyče. Predstavte si však, že Jano I. stojí a Jano II. okolo neho krúži konštantnou rýchlosťou. Takáto situácia evidentne môže nastať, ale vzdialenosť koncových bodov vektorov rýchlosti je zlá – a dokonca, závisí od toho, akú veľkú šípku rýchlosti priradíme! (Vôbec nie je jasné, akú dlhú šípku má mať jeden meter za sekundu). Opačnú implikáciu zase vyvracia prípad, keď z každého Jana smeruje šípka do opačného Jana.

Iní z vás išli na vec o kus prefíkanejšie a tvrdili, že ak je tyč nenatiahnuteľná, tak musí byť vzdialenosť krajných Janov aj po jednej sekunde ich pohybu nezmenená. Potiaľto je úvaha správna. Ďalej ste však už pokračovali nesprávne, keď ste si nakreslili, aká by bola poloha oboch Janov, keby sa jednu sekundu pohybovali zadanými rýchlosťami. Skúste totiž rovnakú úvahu vykonať pre nejaký iný čas, napríklad 1 000 sekúnd. Ak vektory rýchlosti Janov nie sú rovnobežné, ich vzdialenosť sa určite zmení. Na domácu úlohu si skúste premyslieť, prečo to tak je. Ja vám len poradím, že to bude súvisieť s tým, že rýchlosti koncových bodov tyče sa v čase menia.

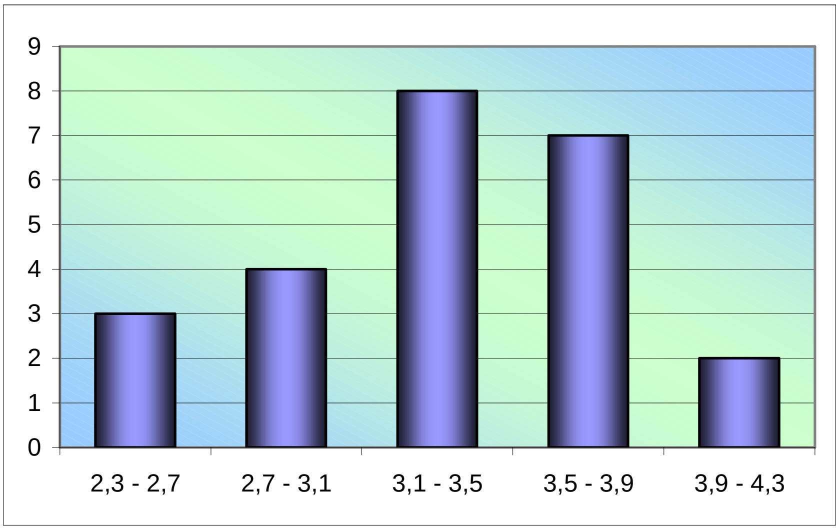
B-3.4 Vyfúkačka (opravoval Bzdušo)

Vezmite si slamku ,pravítko, saponát, vodu, fotoaparát, bravčové karé a stopky. Vytvorte na hladkom povrchu polbublinu a nechajte ju cez slamku vyfúknuť. Pokúste sa zistiť, od akej mocniny n začiatočného polomeru r bubliny závisí čas t jej vyfúknutia!

Poznámka: Predpokladajte závislosť $t = C \cdot r^n$ *a meranie nezabudnite viackrát zopakovať. Pri analýze dát sa vám môže hodiť lineárna závislosť* $\log t = \log C + n \log r$. *Ak ste s logaritmami ešte nepracovali, neváhajte sa obzrieť na internete (http://sk.wikipedia.org/wiki/Logaritmus) alebo v knižkách.*

Ahojte. Dúfam, že ste si túto hravú experimentálku náležite vychutnali. Najprv ukážem histogram vami nameraných hodnôt:

[5] Stačí si uvedomiť, že oba body sa okolo prvého Jana otočia za rovnaký čas, krajný bod prejde dráhu $2\pi l$, no stredný len dráhu $2\pi a$.



V histograme som neuviedol výsledky menšie ako 2. Niektorí z vás dokonca (z dobrých meraní ale zlým spracovaním dát) dostali zápornú hodnotu *n*. *Nad získaným výsledkom sa treba vždy zamyslieť!* Nie je to náhodou v spore s intuitívnym predpokladom, že väčšia bublina sa predsa vyfúkne za väčší čas?

Koľko meraní bolo treba spraviť? Jedno je určite málo, pretože vo vzťahu $t = C \cdot r^n$ sú dve neznáme. Mohlo by sa preto zdať, že dve merania budú postačovať.[6] **To však nie je pravda!** Každé meranie je totiž zaťažené nepresnosťami. Veď sledujte:

d) Reakčný čas človeka (cca 0,2 s) spôsobuje nepresnosť stopkami nameraného času.
e) Priemer bubliny ste (napriek mnohým vylepšovákom) nemerali ani na milimetre presne.
f) Podmienky (vlhkosť podložky, kvalita bublifukovej zmesi, vaša nálada, ...) sa od merania k meraniu menili a to mohlo spôsobiť prirodzené fluktuácie meraných veličín.
g) ... (miesto na zamyslenie sa nad ďalšími nepresnosťami, ktoré ste v riešení zamlčali)

Skutočnosť je, že **meraní treba spraviť čo najviac**. Čím viac meraní spravím, tým presnejší výsledok dostanem.

Čo sa týka spracovania dát, počínali ste si všelijako. V zásade sme uznávali každý rozumný postup. Keďže však *vzorové riešenie* má byť naozaj *vzorové*, ukážem, ako sa k tomu zvykne pristupovať v praxi.

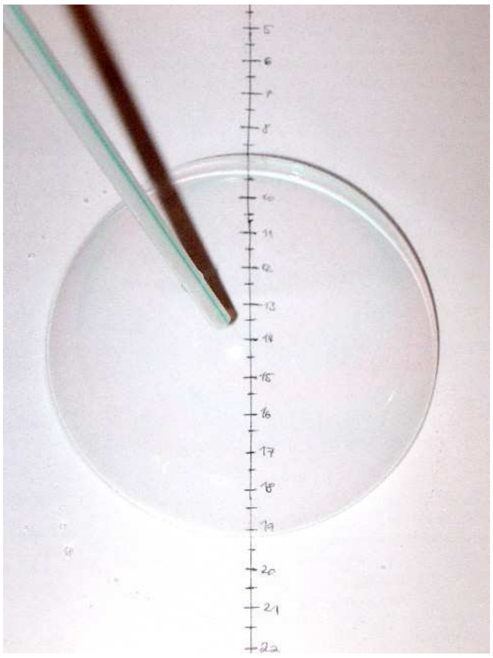
S Tinkou sme merali a namerali sme veľa dvojíc $[r, t]$ a hneď sme vylúčili tie, pri ktorých očividne došlo k hrubým nepresnostiam. Inšpirovaní zadaním sme si pre každé meranie spočítali dvojicu $[\log(r/r_0), \log(t/t_0)]$,[7] pretože medzi nimi očakávame lineárnu závislosť. Tieto dáta sme pomocou excelu vyložili do grafu a nechali sme ich fitovať lineárnou regresiou.[8] Ľaľa, toto je výsledok:

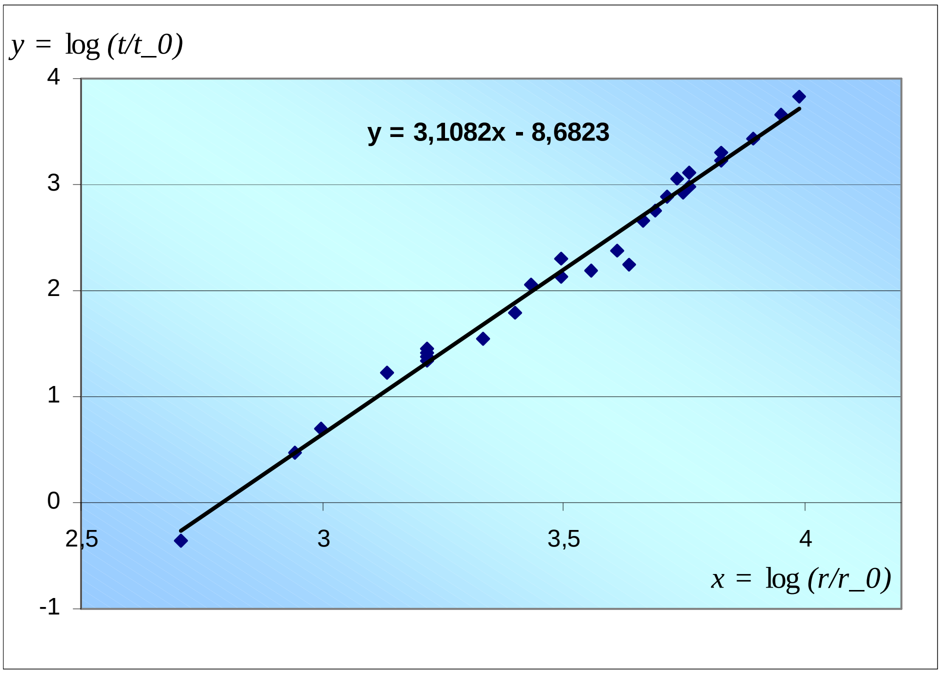
---

[6] Z rovníc $t_1 = Cr_1^n$ a $t_2 = Cr_2^n$ sa dá odvodiť $n = \dfrac{\log(t_1/t_2)}{\log(r_1/r_2)}$ a $\log C = \dfrac{\log t_1 \log r_2 - \log t_2 \log r_1}{\log r_2 - \log r_1}$.
Od estetična majú tieto výsledky ďaleko, no k ich odvodeniu stačí trocha znalostí o logaritmoch. Takto získané výsledky sú však zaťažené veľkou chybou – dávajú len hrubý odhad skutočných hodnôt týchto veličín.

[7] Veličiny r_0 a t_0 sú akési referenčné hodnoty času a polomeru. My sme zvolili r_0 = 1 s a t_0 = 1 cm. Celú túto procedúru uvádzam len preto, že argument logaritmu musí byť bezrozmerné číslo. Neexistuje nič ako logaritmus metra, resp. sekundy.

[8] Namiesto coolového výrazu „lineárne fitovať“ sa dá povedať i „preložiť takou priamkou, ktorá čo najlepšie aproximuje namerané hodnoty“. Excel používa pri fitovaní výpočtovo náročnú metódu najmenších štvorcov. Nám úplne postačilo, ak ste lineárny fit spravili „od oka“. Z polohy dvoch bodov na fitovanej priamke sa potom ľahko nájde jej rovnica.





Samozrejme, správny výsledok by mal obsahovať aj odhad nepresnosti. Predsa je rozdiel ak niekto nameria 100 ± 1 a 100 ± 200.[9] V tomto prípade stačilo vziať najplytšiu a najstrmšiu priamku, ktorá ešte namerané dáta ako tak fituje. V našom prípade dostávame výsledok:

$n = 3{,}1 \pm 0{,}4$

Vzhľadom na veľkú odchýlku nemá význam dávať do výsledku viacej platných číslic.

Hodnotenie: Body dole šli za viacero nedôsledností. Požadovali sme od vás aspoň 10 meraní (čím menej meraní, tým menej bodov). Ďalší bod šiel dolu, ak ste sa nezamýšľali nad

[9] Veľká odchýlka neznamená nesprávne riešenie. Poukazuje len na nepresné meracie prístroje a nedôsledné merania, no ak ju dostaneme z daného štatistického súboru úplne korektnou cestou, nemám žiadne námietky.

presnosťou merania. Všetky zvyšné bodové tresty boli za nedôsledne spracované dáta. Za nameranú hodnotu išli body dolu len v extrémne sa odchyľujúcich prípadoch.

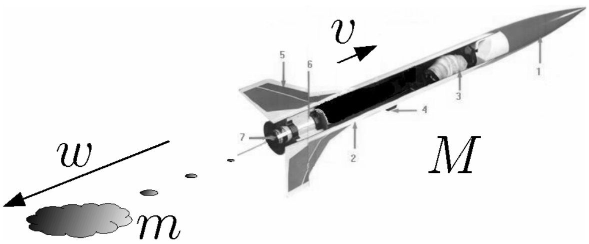
Fyzikálna otázka na záver: Zmýšľali ste sa nad tým, akú jednotku bude mať C podľa vašich meraní?

B-3.5 Numerika (opravoval Tomáš, vzorák Jakub)

Mek Kajver utiekol pred špatňáčkmi na neznámu planétu, ktorá sa nápadne podobá na našu Zem – a rád by sa z nej dostal preč. Má k dispozícii raketu. Spolu so všetkým vybavením, nádržami na palivo, a tak ďalej, váži 10 ton, pričom ďalších 10 ton paliva sa dá natankovať do jej nádrží. Spaliny vznikajúce spálením paliva opúšťajú trysku rakety rýchlosťou 23 km/s a ich hmotnosť je 10 kg za sekundu. Mek odštartuje z povrchu planéty t.j. zo vzdialenosti 6 378 km od jej stredu, hmotnosť planéty je 5,97·1024 kg, gravitačná konštanta 6,67·10–11. Zistite:
a) Akým zrýchlením sa bude raketa pohybovať hneď po zapnutí motorov?
b) Podarí sa Mekovi opustiť gravitačné pôsobenie planéty (t.j. získať potrebnú rýchlosť na únik do nekonečna?) Ak áno, akou rýchlosťou by sa (do nekonečna) dostal? Ak nie, do akej maximálnej vzdialenosti od stredu planéty vyletí?
c) Koľko hmotnosti môže ešte pribrať / sa musí zbaviť, aby mu palivo stačilo akurát na opustenie gravitačného pôsobenia planéty (aby do nekonečna priletel nulovou rýchlosťou?)
Ako už zadanie úlohy napovedá, v tomto prípade nebazírujeme na všeobecných riešeniach – uspokojí nás hocaká približná metóda, ktorou dostanete čo najpresnejší výsledok. V prípade použitia počítača, nám pošlite rozumný popis toho, čo ste vlastne robili (program, resp. excelovský sheet alebo aspoň jeho popis, resp. hocičo iné použijete), aby sa z toho opravovateľ vysomáril.

V príklade nebudeme uvažovať rotáciu planéty. Taktiež sa ospravedlňujeme za chybné uvedenie jednotiek gravitačnej konštanty v zadaní, správne má byť $G = 6{,}67{\cdot}10^{-11}\ \mathrm{N\,kg^{-2}\,m^{2}}$.

Hmotnostný tok plynov z motora označím $Q = 10$ kg/s, rýchlosť výtoku plynov bude $w = 23$ km/s. Skúsime vyjadriť ťah motora. Majme v nejakom čase raketu mimo gravitačného pôsobenia o hmotnosti $(m + M)$ a skúmajme ju zo sústavy S, voči ktorej je v pokoji. Za krátky čas Δt vymrští motor rakety plyny o hmotnosti $m = Q\,\Delta t$ rýchlosťou w dozadu:



Keďže na sústavu raketa + plyny nepôsobia sily zvonku, tak ich ťažisko musí zostať v sústave S v pokoji, teda musí platiť $Mv = mw$. Silu pôsobiacu na raketu spočítame potom takto: $F = Ma = M\dfrac{v}{\Delta t} = \dfrac{mw}{\Delta t} = Qw$. Všimnite si, že sila raketového motoru je v našom uvažovanom prípade konštantná.[10]

a) Zrýchlenie rakety pri štarte je $a_0 = F_0/M_0$, kde $M_0 = 20$ t a F_0 je rozdiel sily motora a gravitácie pôsobiacej na raketu pri planéte. Dosadením získame vzťah

$$a_0 = \frac{Qw - M_0 g}{M_0} \approx 1{,}71\,ms^{-2}.$$

b) V tejto časti si pomôžeme numericky, napr. sa dá použiť tabuľkový kalkulátor Excel. Označím si $q = GM_{\text{planéta}}$. Na začiatku poznám vzdialenosť rakety $R[0]$ od stredu planéty v čase T = 0, ako aj jej rýchlosť $v[0] = 0$. V každom čase až po spotrebovanie paliva viem určiť hmotnosť rakety ako $M[T] = M_0 - QT$. Ťahová sila motorov je počas horenia konštantná

[10] Pozor, **zrýchlenie konštantné nebude**, lebo sa mení hmotnosť rakety a naviac na raketu pôsobí gravitácia!

Qw. Gravitačnú silu v každom čase T viem vypočítať ako $qM[T]/R[T]^2$ ak poznám vzdialenosť rakety od stredu planéty $R[T]$.

Môžem teda postupovať tak, že si určím malý prírastok času Δt, zvaný krok, a budem počítať rýchlosť aj vzdialenosť rakety od stredu planéty iteratívne, po krokoch. Ak poznám rýchlosť $v[k\,\Delta t]$ a vzdialenosť $R[k\,\Delta t]$ po k krokoch, tak viem určiť okrem hmotnosti rakety v čase $T = (k+1)\,\Delta t$ aj zrýchlenie $a[(k+1)\Delta t]$ rakety v tomto čase[11]. Ak si teraz poviem, že počas krátkeho času Δt bude rýchlosť rakety približne konštantná, ľahko dopočítam jej vzdialenosť $R[(k+1)\,\Delta t]$ po $(k+1)$ krokoch. Podobne viem dopočítať rýchlosť po $(k+1)$ krokoch, ak počas celého kroku predpokladám rovnaké zrýchlenie:

T	$R[T]$	$v[T]$	$M[T]$	$F[T]$
0	6378000	0	$M_0 - QT$	$Qw - qM[T]/R^2[T]$
$1\Delta t$	$R[T-\Delta t] + \Delta t * v[T-\Delta t]$	$v[T-\Delta t] + \Delta t * F[T-\Delta t] / M[T-\Delta t]$	$M_0 - QT$	$Qw - qM[T]/R^2[T]$
$2\Delta t$	…	…	…	…

Naše riešenie je samozrejme iba približné; práve preto, lebo sa hráme, že počas každého kroku je zrýchlenie aj rýchlosť konštantná. Keď však bude krok Δt dostatočne malý, tak to bude stále **lepšia a lepšia pravda**.[12] Kedy máme dobrú presnosť? Zhruba vtedy, keď spolovičnenie kroku nevedie k zmenám výsledku na cifrách, ktoré nás ešte zaujímajú.

Ja som sa napr. uspokojil s krokom $\Delta t = 0{,}1$ s, a dospel som k tomu, že motor rakety dopracuje vo vzdialenosti $R[1000\text{ s}] \approx 8900$ km a rýchlosť rakety bude $v[1000\text{ s}] \approx 7{,}68$ km/s.[13]

Ako to s Mek-om nakoniec dopadne? Zle. Využijúc vzťah pre energiu telesa v radiálnom gravitačnom poli s nulovou hladinou v nekonečne $E_p = -qM/R$ totiž dostávame, že súčet jeho polohovej a kinetickej energie je záporný a teda sa nikdy nemôže vymaniť z gravitačného pôsobenia planéty. Pre maximálnu vzdialenosť $R_{\max}$, do ktorej sa týmto kozmickým výletom môže dostať, platí

$$\frac{E_{celk}}{M[1000\,s]} = -\frac{q}{R[1000\,s]} + \frac{v^2[1000\,s]}{2} = -\frac{q}{R_{\max}} \Rightarrow R_{\max} \approx 26100\,km.$$

c) Baštrngovaním s počiatočným parametrom M_0 skusmo (ja až podozrivo rýchlo) vieme zistiť, že pri znížení M_0 na približne 19 ton a súčasnom zachovaní množstva paliva bude mať Mek pri dohorení motorov celkovú energiu práve nulovú. Musí teda vyhodiť 1 tonu výbavičky, ktorá mu na ceste vesmírom najskôr bude trochu chýbať – ale keďže je to Mek, tak verím, že naozaj iba trochu.

Iný problém je ten, že Mek sa síce takto vie dostať ľubovoľne ďaleko, ale časovo to je celkom náročné... Teda, čudujem sa, že si v dnešnej dobe nedal limit napr., že za 4 roky obehnúť aspoň 2 galaxie...

Hodnotenie: Našlo sa niekoľko skutočne famóznych riešení a vôbec, celkovo úroveň riešení tohto príkladu bola hustá. Niekoľko postrehov k riešeniam ľudí, ktoré nedostali plný počet:

- V okamihu, keď mi dojde palivo, môžem simuláciu zastaviť a pozrieť sa (ako to spravil Kubo) na celkovú energiu rakety. Ak je kladná, raketa spadne, ak nie, dovidenia v nekonečne. Komu to so zápornými energiami smrdí, jedná sa vlastne

[11] Použijúc vzdialenosť $R[k\,\Delta t]$ pri výpočte gravitačnej sily, čo je jeden z dôvodov, prečo je toto riešenie približné.

[12] Toto je skutočne jeden z mála prípadov, keď pravda môže dobrá, ba dokonca aj lepšia!

[13] Pozorný čitateľ si všimne, že to robí spolu 10000 krokov. Takéto množstvo výpočtov sa samozrejme nerobí ručne. Najjednoduchším riešením je naprogramovať si pomocný program alebo skonštruovať tabuľku podobnú vyššieuvedenej v nejakom tabuľkovom procesori, napríklad v Exceli.

o porovnanie rýchlosti s únikovou rýchlosťou pre danú výšku. Tento prístup výrazne zväčšuje presnosť a šetrí čas výpočtu.

- Rýchlosť spalín je konštantná vzhľadom na raketu, ale premenlivá vzhľadom na zem! So zákonom zachovania hybnosti bolo treba teda baštrngovať opatrne.

Vyskytlo sa zopár analytických riešení. Tento príklad bol však úmyselne vymýšľaný tak aby sa analyticky neriešil ľahko, kruto sa tu menilo všetko vrátane g-čka, na čo analytici radi zabúdali. Príliš veľa bodov som však nestrhával. Veľa bodov nešlo dole ani za numerické chyby, pre ktoré som nevidel žiadny principiálny dôvod

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina B – kategórie po 3. sérii letného semestra 24. ročníka

	Meno a priezvisko	Škola	B- 3.1	B-3.2	B-3.3	B-3.4	B-3.5	☠	③	Σ
1	Vlček Andrej	EvSŠ Lipt. Mikuláš	4.00	4.40	5.00	5.00	3.50	-	18.40	52.90
2	Kováč Ondrej	GsvCaM	-	4.50	4.50	4.50	5.00	-	18.50	47.60
3	Švančara Patrik	G Ľ. Štúra Trenčín	4.00	4.50	-	4.20	4.50	-	17.20	47.00
4	Ficková Klára	G KE Poštová	4.00	5.00	0.00	3.50	-	-	12.50	45.60
5	Kosec Peter	G Ľ. Štúra Trenčín	4.00	4.60	-	4.00	3.00	-	15.60	44.60
6	Bogárová Zuzana	G Ľ. Štúra Trenčín	-	3.50	0.00	4.00	4.00	-	11.50	43.40
7	Bučková Lucia	G Piešťany	-	3.50	2.00	2.50	2.50	-	10.50	42.70
8	Večerík Matej	ŠPMNDAG	-	5.00	5.00	4.00	5.00	-	19.00	42.60
9	Pločeková Andrea	G Piešťany	-	4.70	2.00	1.50	3.50	-	11.70	41.30
10	Savinec Michal	GPH Michalovce	4.00	4.50	4.00	-	3.50	-	16.00	39.85
11	Kubincová Petra	ŠPMNDAG	-	4.50	1.00	4.50	5.00	-	15.00	39.00
12	Pálenik Juraj	ŠPMNDAG	-	3.70	1.00	4.50	4.50	-	13.70	38.80
13	Kireš Jakub	G KE Poštová	4.00	1.50	4.00	-	2.00	-	11.50	38.30
14	Kögler Pavol	G Galanta	0.50	4.50	1.00	4.00	4.00	-	13.50	38.00
15	Masár Juraj	G Bilíkova	-	4.50	2.00	3.50	3.50	-	13.50	34.40
16	Múthová Denisa	G Bil, Žilina	-	4.50	0.00	4.50	2.00	-	11.00	32.80
17	Guričan Pavol	G BA Grösslingova	-	4.50	-	-	5.00	-	9.50	32.50
18	Lami Jozef	G KE Poštová	3.50	4.30	0.50	-	-	-	8.30	29.40
19	Trousilová Jitka		-	-	-	-	-	-	-	26.20
20	Heželyová Slávka	ŠPMNDAG	-	4.50	-	-	-	-	4.50	26.15
21	Mikulaj Pavol		-	-	-	-	-	-	-	23.80
22	Komanová Kristína		-	-	-	-	-	-	-	23.00
23	Faguľová Kristína	G KE Poštová	-	-	-	-	-	-	-	21.50
24	Horňák Marián		-	-	-	-	-	-	-	21.00
	Součková Kamila	Ev. Lýc. BA	-	4.30	1.50	1.00	-	1	5.80	21.00
26	Pistráková Alexandra	G KE Poštová	-	-	-	-	-	-	-	20.00
27	Mrocková Mária	G BA J.Hronca	-	-	-	-	-	-	-	19.90
28	Santer Jakub	GMH	-	-	-	-	-	-	-	19.50
29	Ďuratný Miloslav		-	-	-	-	-	-	-	19.00
30	Galovičová Soňa	G ZA Okružná	-	-	-	-	-	-	-	18.00
31	Baxová Zuzana		-	-	-	-	-	-	-	12.50
32	Erdödyová Lívia	GPH Michalovce	-	-	-	2.50	0.00	-	2.50	10.10
33	Jančo Tomáš	G Ľ. Štúra Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	9.90
34	Dobrotka Matúš	G BN Bánovce	0.50	0.00	0.00	0.50	0.00	-	1.00	7.10
35	Čurmová Zuzana	GPH Michalovce	-	-	-	-	-	-	-	6.50
36	Kramárik Lukáš	G Ľ. Štúra Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	6.20
37	Kopf Michal	G Opava	-	-	-	-	-	-	-	5.60
38	Dzurjová Silvia	GPH Michalovce	-	-	2.00	-	0.00	-	2.00	5.50
39	Bartko Matúš	G Ľ. Štúra Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	4.70
40	Bohiniková Alžbeta	G BA Grösslingova	-	-	-	-	-	-	-	3.50
41	Čurmová Jaroslava	GPH Michalovce	-	-	-	-	-	-	-	3.00
	Vranák Daniel		-	-	-	-	-	-	-	3.00

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 3. série
A – kategória (starší)
24. ročník
letný semester
školský rok 2008/2009

www.fks.sk

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
otazky@fks.sk

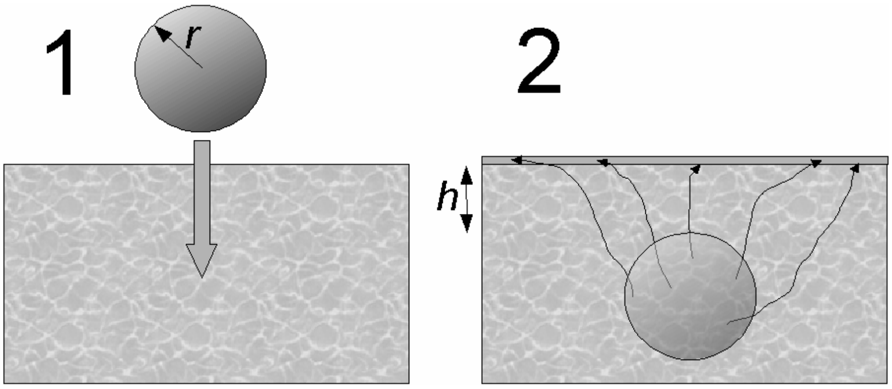
A-3.1 Utopená loptička (opravoval Robo, vzorák Jakub)

Pingpongovú loptičku s polomerom r a hmotnosťou m držíme ponorenú 10 cm pod voľným povrchom vody. Zrazu ju pustíme. Do akej výšky vyskočí? Brzdné sily pôsobiace na loptičku môžete zanedbať.

Zadanie je veľkorysé! Poskytuje nám dve implicitne dané veličiny (r a m), jednu explicitne danú hĺbku 10 cm (označím h) a dovoľuje nám zanedbať trecie/viskózne sily. V ďalšom texte budem uvažovať, že h je hĺbka pod hladinou, v ktorej sa nachádza vrch loptičky. Ďalej budem uvažovať, že pokles hladiny pri vynorení loptičky je zanedbateľný.[1] Vztlak vzduchu zanedbám taktiež.

Keďže brzdné sily neuvažujeme, môžeme použiť zákon zachovania energie. Loptička vyskočí, lebo získa nejakú energiu. Odkiaľ? Energiu má preto, lebo sme ju do vody museli najprv zatlačiť, čím sme vykonali prácu. Táto práca je ***približne***[2] dráha zatlačenia loptičky násobená silou, ktorou zatláčame loptičku (t.j. vztlaková sila – tiažová sila).

Naskytá sa nám však aj iný užitočný pohľad na vec. Vztlaková sila je prejavom hydrostatického tlaku a ten je spôsobený tiažou. Mali by sme byť preto schopní nájsť energiu loptičky zatlačenej pod vodu len pozeraním sa na polohovú energie zúčastnených telies (kvapalné teleso + loptička) v tiažovom poli. Keď ponárame loptičku, tak vytláčame vodu z miest pod hladinou nad hladinu, kde sa voda rozlieva a teda mierne zvyšuje výšku hladiny. Môžeme povedať, že energia, ktorú dáme loptičke pri zanáraní sa „uloží“ do vody vytlačenej z miest „okupovanými“ loptičkou nad pôvodnú hladinu, ktorá sa nepatrne[3] zdvihne.



Tento pohľad nám dáva priamy návod na určenie energie zatlačenia loptičky. Totiž vytlačená voda mala v situácii (1) ťažisko v strede zatlačenej loptičky (2) a bola vytlačená na hladinu. Celkovo sa teda ťažisko vody zdvihlo o $r + h$ a teda voda získala potenciálnu energiu $E_{zatlačenie} = \frac{4 p r^3 r_{voda}}{3} g(r + h)$.

---

[1] Čo je splnené, ak je hladina dostatočne šíra. Napr. taká Zemplínska Šírava by bola dostatočne šíra.

[2] Približne preto, lebo počas ponárania sa veľkosť vztlakovej sily mení. Keď si však človek uvedomí, že súčet vztlakových síl pôsobiacich na loptička ponorenú spodkom o (r+x) a (r-x) pod hladinu je práve veľkosť vztlakovej sily pôsobiacej na celú ponorenú loptičku, tak sa vie šikovne vysporiadať aj s ponáraním.

[3] Zjavne, čím je hladina šírejšia, tým menej sa zdvihnutie hladiny prejaví.

Pri uvoľnení loptička zrejme vyskočí celá nad hladinu[4] a keď bude jej vrch v maximálnej výške H nad vodou, tak celá energia $E_{zatlačenie}$ pôvodne „investovaná“ do vody bude „preinvestovaná“ do zvýšenia ťažiska loptičky o (h+H). Z tohto sa ľahko dopočítate, že

$$H = \frac{4pr^3 r_{voda}}{3m}(r + h) - h = \frac{r_{voda}}{r_{loptička}}(r + h) - h\,.$$

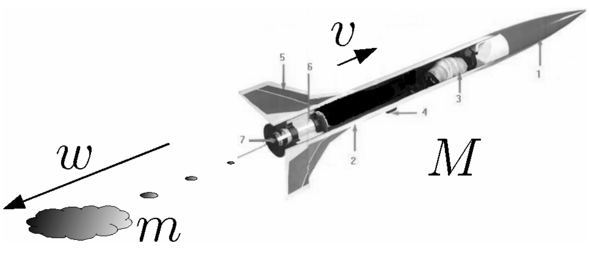
Pre bežnú pingpongovú loptičku (r = 20 mm; m = 2,7 g) dostávame nereálny výškok H = 1,39 m; dôvodom je práve zanedbanie trecích síl. S uvážením Newtonovského odporového trenia nám vyjde, že výskok H bude zhruba 5 cm, čo som v umývadle skutočne videl.

A-3.2 Numerika (opravoval Tomáš, vzorák Jakub)

Mek Kajver utiekol pred špatňáčkami na neznámu planétu, ktorá sa nápadne podobá na našu Zem – a rád by sa z nej dostal preč. Má k dispozícii raketu. Spolu so všetkým vybavením, nádržami na palivo, a tak ďalej, váži 10 ton, pričom ďalších 10 ton paliva sa dá natankovať do jej nádrží. Spaliny vznikajúce spálením paliva opúšťajú trysku rakety rýchlosťou 23 km/s a ich hmotnosť je 10 kg za sekundu. Mek odštartuje z povrchu planéty t.j. zo vzdialenosti 6 378 km od jej stredu, hmotnosť planéty je 5,97·1024 kg, gravitačná konštanta 6,67·10–11. Zistite:
a) Akým zrýchlením sa bude raketa pohybovať hneď po zapnutí motorov?
b) Podarí sa Mekovi opustiť gravitačné pôsobenie planéty (t.j. získať potrebnú rýchlosť na únik do nekonečna?) Ak áno, akou rýchlosťou by sa (do nekonečna) dostal? Ak nie, do akej maximálnej vzdialenosti od stredu planéty vyletí?
c) Koľko hmotnosti môže ešte pribrať / sa musí zbaviť, aby mu palivo stačilo akurát na opustenie gravitačného pôsobenia planéty (aby do nekonečna priletel nulovou rýchlosťou?)
Ako už zadanie úlohy napovedá, v tomto prípade nebazírujeme na všeobecných riešeniach – uspokojí nás hocaká približná metóda, ktorou dostanete čo najpresnejší výsledok. V prípade použitia počítača, nám pošlite rozumný popis toho, čo ste vlastne robili (program, resp. excelovský sheet alebo aspoň jeho popis, resp. hocičo iné použijete), aby sa z toho opravovateľ vysomáril.

V príklade nebudeme uvažovať rotáciu planéty. Taktiež sa ospravedlňujeme za chybné uvedenie jednotiek gravitačnej konštanty v zadaní, správne má byť $G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ \mathrm{N\,kg^{-2}\,m^2}$.

Hmotnostný tok plynov z motora označím Q = 10 kg/s, rýchlosť výtoku plynov bude w = 23 km/s. Skúsime vyjadriť ťah motora. Majme v nejakom čase raketu mimo gravitačného pôsobenia o hmotnosti ($m + M$) a skúmajme ju zo sústavy S, voči ktorej je v pokoji. Za krátky čas Δt vymrští motor rakety plyny o hmotnosti $m = Q\,\Delta t$ rýchlosťou w dozadu:



Keďže na sústavu raketa+plyny nepôsobia sily zvonku, tak ich ťažisko musí zostať v sústave S v pokoji, teda musí platiť $Mv = mw$. Silu pôsobiacu na raketu spočítame potom takto: $F = Ma = M\frac{v}{\Delta t} = \frac{mw}{\Delta t} = Qw$. Všimnite si, že sila raketového motoru je v našom uvažovanom prípade konštantná.[5]

a) Zrýchlenie rakety pri štarte je $a_0 = F_0/M_0$, kde M_0 = 20 t a F_0 je rozdiel sily motora a gravitácie pôsobiacej na raketu pri planéte. Dosadením získame vzťah

---

[4] Ak nám výsledné H vyjde menej ako 2r, tak vieme, že tento náš predpoklad zlyhal a výsledok neplatí!

[5] Pozor, **zrýchlenie konštantné nebude**, lebo sa mení hmotnosť rakety a naviac na raketu pôsobí gravitácia!

$$a_0 = \frac{Qw - M_0 g}{M_0} \approx 1{,}71\, ms^{-2}.$$

b) V tejto časti si pomôžeme numericky, napr. sa dá použiť tabuľkový kalkulátor Excel. Označím si $q = GM_{\text{planéta}}$. Na začiatku poznám vzdialenosť rakety $R[0]$ od stredu planéty v čase T = 0, ako aj jej rýchlosť $v[0] = 0$. V každom čase až po spotrebovanie paliva viem určiť hmotnosť rakety ako $M[T] = M_0 - QT$. Ťahová sila motorov je počas horenia konštantná Qw. Gravitačnú silu v každom čase T viem vypočítať ako $qM[T]/R[T]^2$ ak poznám vzdialenosť rakety od stredu planéty $R[T]$.

Môžem teda postupovať tak, že si určím malý prírastok času Δt, zvaný krok, a budem počítať rýchlosť aj vzdialenosť rakety od stredu planéty iteratívne, po krokoch. Ak poznám rýchlosť $v[k\,\Delta t]$ a vzdialenosť $R[k\,\Delta t]$ po k krokoch, tak viem určiť okrem hmotnosti rakety v čase $T = (k+1)\,\Delta t$ aj zrýchlenie $a[(k+1)\Delta t]$ rakety v tomto čase[6]. Ak si teraz poviem, že počas krátkeho času Δt bude rýchlosť rakety približne konštantná, ľahko dopočítam jej vzdialenosť $R[(k+1)\,\Delta t]$ po $(k+1)$ krokoch. Podobne viem dopočítať rýchlosť po $(k+1)$ krokoch, ak počas celého kroku predpokladám rovnaké zrýchlenie:

T	$R[T]$	$v[T]$	$M[T]$	$F[T]$
0	6378000	0	$M_0 - QT$	$Qw - qM[T]/R^2[T]$
$1\Delta t$	$R[T-\Delta t] + \Delta t * v[T-\Delta t]$	$v[T-\Delta t] + \Delta t * F[T-\Delta t] / M[T-\Delta t]$	$M_0 - QT$	$Qw - qM[T]/R^2[T]$
$2\Delta t$	…	…	…	…

Naše riešenie je samozrejme iba približné; práve preto, lebo sa hráme, že počas každého kroku je zrýchlenie aj rýchlosť konštantná. Keď však bude krok Δt dostatočne malý, tak to bude stále **lepšia a lepšia pravda**.[7] Kedy máme dobrú presnosť? Zhruba vtedy, keď spolovičnenie kroku nevedie k zmenám výsledku na cifrách, ktoré nás ešte zaujímajú.

Ja som sa napr. uspokojil s krokom $\Delta t = 0{,}1$ s, a dospel som k tomu, že motor rakety dopracuje vo vzdialenosti $R[1000\text{ s}] \approx 8900$ km a rýchlosť rakety bude $v[1000\text{ s}] \approx 7{,}68$ km/s.[8]

Ako to s Mek-om nakoniec dopadne? Zle. Využijúc vzťah pre energiu telesa v radiálnom gravitačnom poli s nulovou hladinou v nekonečne $E_p = -qM/R$ totiž dostávame, že súčet jeho polohovej a kinetickej energie je záporný a teda sa nikdy nemôže vymaniť z gravitačného pôsobenia planéty. Pre maximálnu vzdialenosť $R_{\max}$, do ktorej sa týmto kozmickým výletom môže dostať, platí

$$\frac{E_{celk}}{M[1000\,s]} = -\frac{q}{R[1000\,s]} + \frac{v^2[1000\,s]}{2} = -\frac{q}{R_{\max}} \Rightarrow R_{\max} \approx 26100\, km.$$

c) Baštrngovaním s počiatočným parametrom M_0 skusmo (ja až podozrivo rýchlo) vieme zistiť, že pri znížení M_0 na približne 19 ton a súčasnom zachovaní množstva paliva bude mať Mek pri dohorení motorov celkovú energiu práve nulovú. Musí teda vyhodiť 1 tonu výbavičky, ktorá mu na ceste vesmírom najskôr bude trochu chýbať – ale keďže je to Mek, tak verím, že naozaj iba trochu.

---

[6] Použijúc vzdialenosť $R[k\,\Delta t]$ pri výpočte gravitačnej sily, čo je jeden z dôvodov, prečo je toto riešenie približné.

[7] Toto je skutočne jeden z mála prípadov, keď pravda môže dobrá, ba dokonca aj lepšia!

[8] Pozorný čitateľ si všimne, že to robí spolu 10000 krokov. Takéto množstvo výpočtov sa samozrejme nerobí ručne. Najjednoduchším riešením je naprogramovať si pomocný program alebo skonštruovať tabuľku podobnú vyššieuvedenej v nejakom tabuľkovom procesori, napríklad v Exceli.

Iný problém je ten, že Mek sa síce takto vie dostať ľubovoľne ďaleko, ale časovo to je celkom náročné... Teda, čudujem sa, že si v dnešnej dobe nedal limit napr., že za 4 roky obehnúť aspoň 2 galaxie...

Hodnotenie: Našlo sa niekoľko skutočne famóznych riešení a vôbec, celkovo úroveň riešení tohto príkladu bola hustá. Niekoľko postrehov k riešeniam ľudí, ktoré nedostali plný počet:

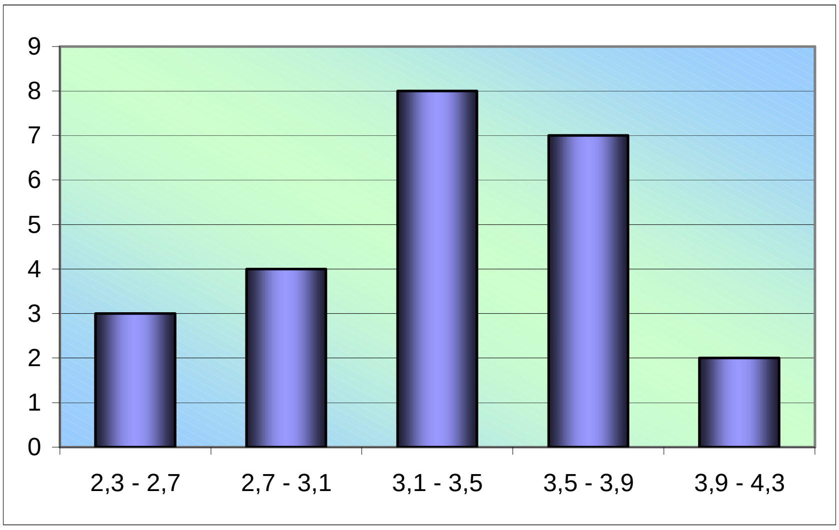
- V okamihu, keď mi dojde palivo, môžem simuláciu zastaviť a pozrieť sa (ako to spravil Kubo) na celkovú energiu rakety. Ak je kladná, raketa spadne, ak nie, dovidenia v nekonečne. Komu to so zápornými energiami smrdí, jedná sa vlastne o porovnanie rýchlosti s únikovou rýchlosťou pre danú výšku. Tento prístup výrazne zväčšuje presnosť a šetrí čas výpočtu.
- Rýchlosť spalín je konštantná vzhľadom na raketu, ale premenlivá vzhľadom na zem! So zákonom zachovania hybnosti bolo treba teda baštrngovať opatrne.
- Vyskytlo sa zopár analytických riešení. Tento príklad bol však úmyselne vymýšľaný tak aby sa analyticky neriešil ľahko, kruto sa tu menilo všetko vrátane g-čka, na čo analytici radi zabúdali. Príliš veľa bodov som však nestrhával. Veľa bodov nešlo dole ani za numerické chyby, pre ktoré som nevidel žiadny principiálny dôvod.

A-3.3 Vyfúkačka (opravovala Marcelka, vzorák Bzdušo)

Vezmite si slamku ,pravítko, saponát, vodu, fotoaparát, bravčové karé a stopky. Vytvorte na hladkom povrchu polbublinu a nechajte ju cez slamku vyfúknuť. Pokúste sa zistiť, od akej mocniny n začiatočného polomeru r bubliny závisí čas t jej vyfúknutia!

Poznámka: Predpokladajte závislosť $t = C \cdot r^n$ *a meranie nezabudnite viackrát zopakovať. Pri analýze dát sa vám môže hodiť lineárna závislosť* $\log t = \log C + n \log r$. *Ak ste s logaritmami ešte nepracovali, neváhajte sa obzrieť na internete (http://sk.wikipedia.org/wiki/Logaritmus) alebo v knižkách.*

Ahojte. Dúfam, že ste si túto hravú experimentálku náležite vychutnali. Najprv ukážem histogram vami nameraných hodnôt:



V histograme som neuviedol výsledky menšie ako 2. Niektorí z vás dokonca (z dobrých meraní ale zlým spracovaním dát) dostali zápornú hodnotu *n*. *Nad získaným výsledkom sa treba vždy zamyslieť!* Nie je to náhodou v spore s intuitívnym predpokladom, že väčšia bublina sa predsa vyfúkne za väčší čas?

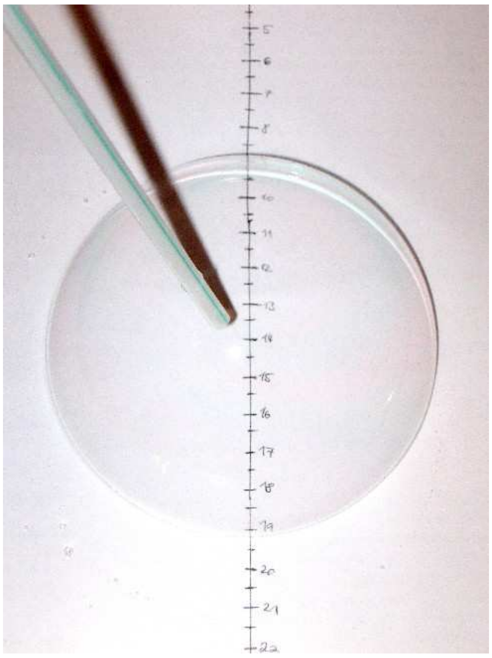
Koľko meraní bolo treba spraviť? Jedno je určite málo, pretože vo vzťahu $t = C \cdot r^n$ sú dve neznáme. Mohlo by sa preto zdať, že dve merania budú postačovať.[9] **To však nie je pravda!** Každé meranie je totiž zaťažené nepresnosťami. Veď sledujte:

- Reakčný čas človeka (cca 0,2 s) spôsobuje nepresnosť stopkami nameraného času.
- Priemer bubliny ste (napriek mnohým vylepšovákom) nemerali ani na milimetre presne.
- Podmienky (vlhkosť podložky, kvalita bublifukovej zmesi, vaša nálada, ...) sa od merania k meraniu menili a to mohlo spôsobiť prirodzené fluktuácie meraných veličín.
- ... *(miesto na zamyslenie sa nad ďalšími nepresnosťami, ktoré ste v riešení zamlčali)*

Skutočnosť je, že **meraní treba spraviť čo najviac**. Čím viac meraní spravím, tým presnejší výsledok dostanem.

Čo sa týka spracovania dát, počínali ste si všelijako. V zásade sme uznávali každý rozumný postup. Keďže však *vzorové riešenie* má byť naozaj *vzorové*, ukážem, ako sa k tomu zvykne pristupovať v praxi.

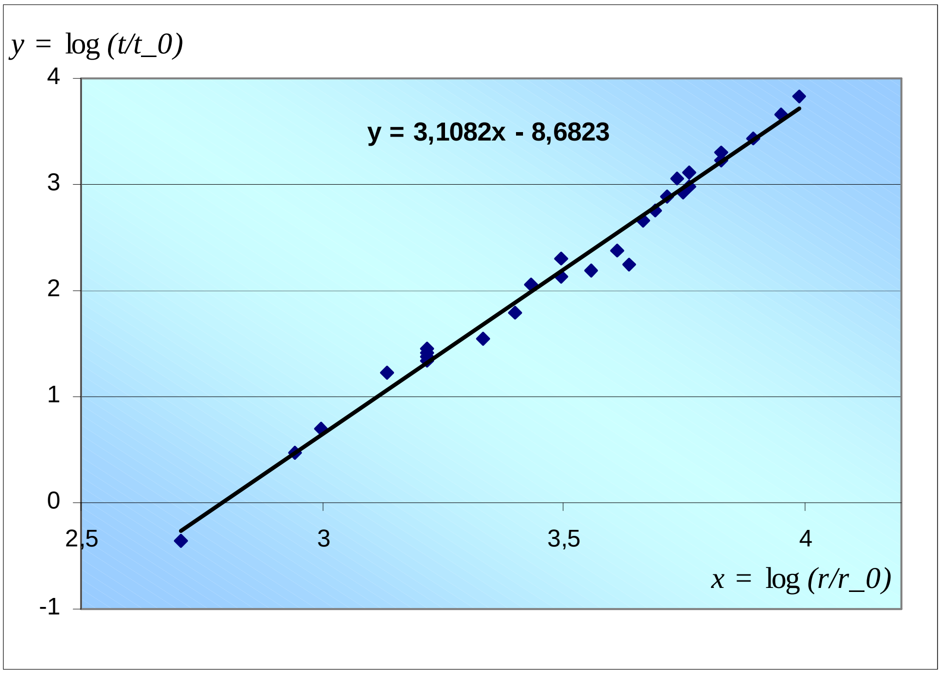
S Tinkou sme merali a namerali sme veľa dvojíc $[r, t]$ a hneď sme vylúčili tie, pri ktorých očividne došlo k hrubým nepresnostiam. Inšpirovaní zadaním sme si pre každé meranie spočítali dvojicu $[\log(r/r_0), \log(t/t_0)]$,[10] pretože medzi nimi očakávame lineárnu závislosť. Tieto dáta sme pomocou excelu vyložili do grafu a nechali sme ich fitovať lineárnou regresiou.[11] Ľaľa, toto je výsledok:



[9] Z rovníc $t_1 = Cr_1^n$ a $t_2 = Cr_2^n$ sa dá odvodiť $n = \dfrac{\log(t_1/t_2)}{\log(r_1/r_2)}$ a $\log C = \dfrac{\log t_1 \log r_2 - \log t_2 \log r_1}{\log r_2 - \log r_1}$.
Od estetična majú tieto výsledky ďaleko, no k ich odvodeniu stačí trocha znalostí o logaritmoch. Takto získané výsledky sú však zaťažené veľkou chybou – dávajú len hrubý odhad skutočných hodnôt týchto veličín.

[10] Veličiny r_0 a t_0 sú akési referenčné hodnoty času a polomeru. My sme zvolili r_0 = 1 s a t_0 = 1 cm. Celú túto procedúru uvádzam len preto, že argument logaritmu musí byť bezrozmerné číslo. Neexistuje nič ako logaritmus metra, resp. sekundy.

[11] Namiesto coolového výrazu „lineárne fitovať“ sa dá povedať i „preložiť takou priamkou, ktorá čo najlepšie aproximuje namerané hodnoty“. Excel používa pri fitovaní výpočtovo náročnú metódu najmenších štvorcov. Nám úplne postačilo, ak ste lineárny fit spravili „od oka“. Z polohy dvoch bodov na fitovanej priamke sa potom ľahko nájde jej rovnica.



Samozrejme, správny výsledok by mal obsahovať aj odhad nepresnosti. Predsa je rozdiel ak niekto nameria 100 ± 1 a 100 ± 200.[12] V tomto prípade stačilo vziať najplytšiu a najstrmšiu priamku, ktorá ešte namerané dáta ako tak fituje. V našom prípade dostávame výsledok:

$$n = 3{,}1 \pm 0{,}4$$

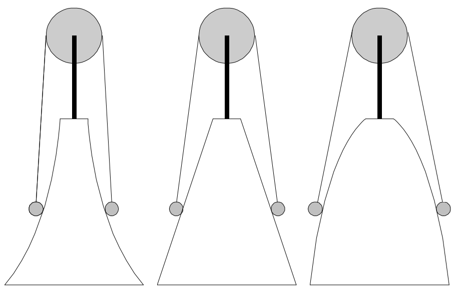
Vzhľadom na veľkú odchýlku nemá význam dávať do výsledku viacej platných číslic.

Hodnotenie: Body dole šli za viacero nedôsledností. Požadovali sme od vás aspoň 10 meraní (čím menej meraní, tým menej bodov). Ďalší bod šiel dolu, ak ste sa nezamýšľali nad presnosťou merania. Všetky zvyšné bodové tresty boli za nedôsledne spracované dáta. Za nameranú hodnotu išli body dolu len v extrémne sa odchyľujúcich prípadoch.

Fyzikálna otázka na záver: Zmýšľali ste sa nad tým, akú jednotku bude mať C podľa vašich meraní?

A-3.4 Nakladačka (opravoval Bzdušo)

Po tom, čo Bzdušo presviedčal pouličných gangstrov, že diferenciálne rovnice sú mocnejšia zbraň než revolver, dostal od nich takúto nakladačku: Má zistiť, či sú rovnovážne polohy na jednotlivých kladkách stabilné, indiferentné alebo labilné (pozri obrázok). Pomôžete mu? Hmotnosti zavesených telies sú rovnaké. Predpokladajte, že v prípade zakrivených povrchov je ich polomer krivosti výrazne menší než dĺžka použitého lana. Bonusové body od nás dostanete, ak úlohu vyriešite pre všeobecný prípad. Odpoveď „Nie" ako riešenie príkladu neakceptujeme. :).

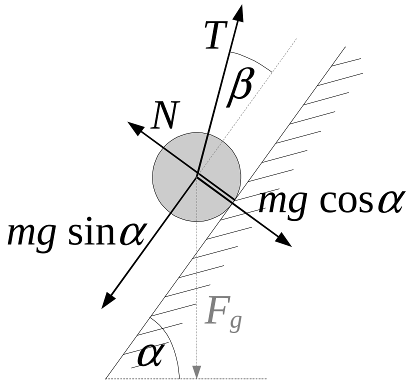


Začal by som vetou z riešenia Martina Polačka: „Inak je super, ako tie kladky pripomínajú dievčatá." Nuž, existovalo naozaj viacej pohľadov na riešenie tejto úlohy. Kto však tvrdil, že to bolo 7 bodov zadarmo, bol na veľkom omyle. Také ľahké to vôbec nebolo!

---

[12] Veľká odchýlka neznamená nesprávne riešenie. Poukazuje len na nepresné meracie prístroje a nedôsledné merania, no ak ju dostaneme z daného štatistického súboru úplne korektnou cestou, nemám žiadne námietky.

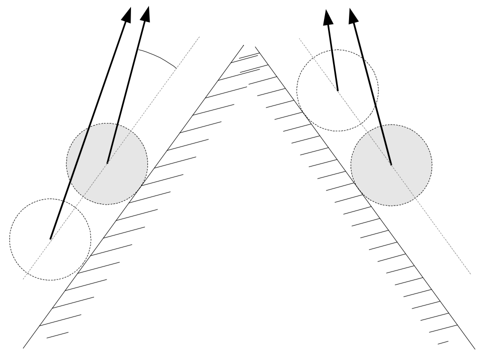
Schválne – Zrejme by ste si tipli, že prostredná situácia je indiferentná. Veď, tvorí hranicu medzi konvexným a konkávnym[13] povrchom, takže by mala mať nejakú výnimočnú vlastnosť. A figu. Veď pozrite..



Predstavme si, že kladka je vytunelovaná termitmi a skúmajme čo sa stane, ak závažia jemne vychýlim, konkrétne, skúmajme sily, ktoré pôsobia na ľavé závažie. Ak si zavedieme uhly α, β ako na obrázku vpravo, tak z $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ dostávame:

$$mg \sin\alpha = T\cos\beta \quad \Rightarrow T = mg\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}.$$

Sila T je pnutie v lanku a snaží sa roztočiť kladku proti smeru hodinových ručičiek. Závažie na pravej strane tiež pôsobí skrze lanko na kladku, platí pre ňu analogický vzťah. Uhol α je vľavo aj vpravo ten istý, preto pnutia môžu vyjsť rôzne, len ak sú vpravo a vľavo rôzne uhly β. A oni sú! Že prečo?



Ak teleso klesne, lanko nemôže ostať rovnobežné s pôvodným smerom. Smeruje totiž na kladku, tj. miesto v konečnej vzdialenosti. Z obrázka vidno, že uhol β sa zmenšil $\Rightarrow$ $\cos\beta$ sa zväčšil $\Rightarrow$ T sa zmenšilo. V prípade telesa, ktoré stúplo, dostaneme opačný výsledok. Teleso, ktoré stúplo, ťahá kladku väčšou silou.[14] Keby kladka nemala trenie, roztočila by sa tak, aby vyššie závažie kleslo. **Situácia je teda stabilná**, nie indiferentná! Pri tomto probléme sa ešte pristavíme na konci vzoráku.

Ak začneme touto metódou analyzovať aj zvyšné dve situácie narazíme na problém: Uhol α už nie je konštantný a zmenu uhlu β si netrúfam ani odhadovať. Avšak podľa zadania stačí analyzovať len prípad, kde je polomer krivosti povrchov výrazne menší než dĺžka použitého lanka. V tom prípade sa pri malom posunutí závažia zmení uhol α, uhol β tiež, ale *sklon lana sa prakticky nezmení!* Označme ho $\varphi = \alpha + \beta$. Rovnicu pre pnutie možno upraviť nasledovne

$$T = mg\frac{\sin\alpha}{\cos(\varphi - \alpha)} = mg\frac{\sin\alpha}{\cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha} = \frac{mg}{\cos\varphi}\frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{tg}\varphi}.$$

Ľahko si overíme, že ide o rastúcu funkciu uhla α, tj. naklonenia povrchu v danom mieste. Teraz stačí analyzovať:

- **Konkávny povrch** (ľavá situácia): Závažiu, ktoré klesne, prislúcha *menší* sklon α, tzn. *menšia* sila T. Závažie, ktoré stúpne, bude kladku sťahovať viacej a začne klesať. **Situácia je stabilná.**

- **Konvexný povrch** (pravá situácia): Závažiu, ktoré kleslo, prislúcha väčší sklon α, tzn. sťahuje kladku väčšou silou. Kladka sa roztočí tak, že nižšie teleso bude ešte viacej klesať. **Situácia je labilná.**

Aké je rozhranie medzi labilnou a stabilnou polohou? Ako vyzerá indiferentná situácia? To by sme sa dozvedeli, keby sme riešili všeobecný prípad. Ten je však natoľko humusný, že sa doň skoro nikto z vás ani nepustil. Podobný postup riešenia tohto problému zaujíma aj tento vzorák. Možno však očakávať, že indiferentná situácia je nejaká málo krivá konvexná situácia.

[13] Mnemotechnická pomôcka: Kon**káv**ny povrch má prehĺbenie a možno doň naliať **kávu**.

[14] Správne by sme mali hovoriť o momentoch síl T. Ich rameno je však rovnaké, takže to úvahy nijako nekazí.

Iný, veľmi šikovný spôsob riešenia úlohy využíva potenciálne energie. Pointa je nasledovná: *Pokiaľ po malom vychýlení stúpne celková potenciálna energia, sústava je stabilná.* Energia sa totiž len tak nekotí, na vychýlenie treba vykonať prácu. Naopak, pokiaľ potenciálna energia klesla, zvýšilo jej aj na pohyb. Taká sústava bude labilná.

Pri takomto riešení treba skúmať, o koľko stúpne, resp. klesnú závažia, keď kladku pootočíme o malý uhol. Z geometrických úvah sa potom vieme dopracovať k rôznym záverom. Napríklad, že konkávny povrch dáva stabilnú situáciu pre ľubovoľný polomer krivosti povrchu. Tiež sa takto šikovnejšie dostaneme k všeobecnému riešeniu konvexného povrchu. Skúste si to!

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina A – kategórie po 3. sérii letného semestra 24. ročníka

	Meno a priezvisko	Škola	A-3.1	A-3.2	A-3.3	A-3.4	B	☠	③	Σ
1	Kieferová Mária	GSF Žilina	5.00	5.00	5.00	4.00	4.00	-	23.00	58.25
2	Honzáková Kateřina	GJK Praha	5.00	5.00	4.00	4.50	3.06	-	21.56	57.21
3	Bogár Ján	G Ľ. Štúra Trenčín	5.00	4.00	4.00	5.00	0.72	-	18.72	56.56
4	Hruška Eugen	G Hlohovec	5.00	5.00	4.50	4.50	0.38	-	19.38	52.38
5	Polačko Martin	G KE Alejová	5.00	4.50	5.00	2.50	0.00	-	17.00	50.40
6	Štyráková Kamila	G POH, Dolný Kubín	4.50	0.50	4.50	4.50	1.68	-	15.68	45.67
7	Hašík Juraj	G BA Grösslingova	5.00	5.00	2.50	3.50	1.28	-	17.28	41.18
8	Midlik Adam	G J.A.R. Prešov	4.50	-	-	6.00	2.00	-	12.50	40.88
9	Vanya Peter	G BA J.Hronca	3.50	4.00	-	-	0.00	-	7.50	38.70
10	Matejovičová Lenka	G BA J.Hronca	4.50	2.50	-	3.50	0.00	-	10.50	37.50
11	Chudjak Martin	SPŠ Martin	5.00	-	3.00	-	1.92	-	9.92	36.94
12	Bačo Ladislav	G KE Poštová	-	5.00	-	-	1.50	-	6.50	36.50
13	Rohár Pavol	G KE M.R.Štefánika	4.80	4.50	-	3.00	1.89	-	14.19	36.16
14	Cuc Bruno	G BA Grösslingova	5.00	3.50	2.50	5.00	1.28	-	17.28	34.00
15	Kuklišová Nina	G BA Metodova	5.00	5.00	3.50	2.00	0.00	-	15.50	33.80
16	Cocuľová Zuzana	G KE Poštová	4.50	1.50	-	-	1.68	-	7.68	31.31
17	Maixner Michal	OG ZA Varšavská	5.00	5.00	4.50	5.00	0.00	-	19.50	31.25
18	Hagara Michal	G BA J.Hronca	4.50	2.00	3.50	-	2.00	-	12.00	31.20
19	Baxová Jana	G Ľ. Štúra Trenčín	4.50	2.50	1.50	0.50	1.98	-	10.98	28.21
20	Vanta Radovan	G BA Metodova	-	4.00	3.50	-	1.88	-	9.38	22.11
21	Bachratý Martin		4.50	2.00	-	-	1.76	-	8.26	21.72
22	Krejčír Andrej	G PD Prievidza	-	-	-	-	-	-	-	18.20
23	Lešková Andrea	G Lipany	-	-	-	-	-	-	-	13.17
24	Rigdová Emília	OG Kukučínova Poprad	-	-	-	-	-	-	-	12.00
25	Počeková Andrea	G Piešťany	-	-	-	-	-	-	-	11.19
26	Jursa Jakub	G KE Alejová	-	-	-	-	-	-	-	10.90
27	Petrucha Michal	G BA Metodova	-	-	-	-	-	-	-	9.50
28	Matulová Daniela	G BA Papánka	-	-	-	-	-	-	-	8.49
29	Hudák Adam	G KE M.R.Štefánika	-	-	-	-	-	-	-	2.06