

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

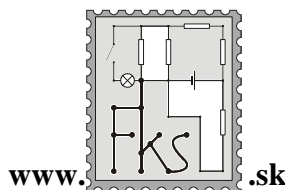
vzorové riešenia 2. série

B – kategória (mladší)

24. ročník

letný semester

školský rok 2008/2009



FKS, KTFDF FMFI UK

Mlynská dolina

842 48 Bratislava

otazky@fks.sk

www.fks.sk

B-2.1 Koleso (opravovala Tinka)

Predstavte si takéto. Ste režisérom vysokorozpočtového filmu a máte starosti nad hlavu. Herci prichádzajú do práce nevyspaní a pod vplyvom alkoholu. Rekvizity sú nekvalitné a rozpadajú sa vám pod rukami. Nestíhate mŕtvu čiaru a váš finančný partner sa vám vyhráza, že stiahne svoje financie z projektu. Hlavnej herečke sa na líci vyhodil pupák a teraz odmieta predstúpiť pred kamery. A navyše, občas sa stane, že keď snímate kamerou točiacie sa koleso, vo výslednom filme sa koleso netočí vôbec, ba čo viac, niekedy sa dokonca točí dozadu. Vysvetlite, ako je to možné a zistite, pre akú najmenšiu rýchlosť otáčania kolesa (koľko otáčok za sekundu) bude koleso na filme stáť. Predpokladajte koleso také ako na obrázku. Film sa točí kamerou, ktorá berie 24 obrázkov za sekundu (teda, ako keby sa 24 krát za sekundu odfoťí celú scénu).

Nuže sa pozrime, čo vlastne taká kamera robí. Bolo nám povedané, že akoby fotila každú 1/24 sekundy. A taká fotka je zjavne statická vec. Potom ako to, že máme pocit pohybu? Náš mozog je šikovný a domyslí si aj to, čo nevidí¹. A na naše šťastie je väčšina bežných pohybov pekná v tom, že to, čo si domyslíme sa veľmi nelíši od skutočnosti. Za tú chvíľočku sa toho nestihne veľa dramatického udiat'.

Ale čo ak ide koleso vcelku rýchlo? Až tak, že sa za čas uplynúvší medzi dvoma zábermi „foťáku“ stihne pretočiť napríklad celé? Dve za sebou idúce fotky budú úplne rovnaké. No a pre mozog je najjednoduchšie vysvetlenie také, že koleso sa netočí...² Podobne ak sa koleso medzi dvoma zábermi *takmer* pretočí do pôvodnej polohy, najjednoduchšie vysvetlenie je, že sa pomaly točí naopak.

Po zmáknutej teórii už bude zvyšok ľahučký. Len si dovoľím napísať, že nebudeme uvažovať záporné rýchlosti. Je to síce fyzikálne správne, ale nanajvýš nezaujímavé a slovičkárske. Veľkosť rýchlosti, to je ono, milé deti. A ani nulová rýchlosť. Vtedy sa nám *nezdá*, že koleso stojí, ono *naozaj* stojí.

Takže potrebujeme, aby dve za sebou idúce fotky boli rovnaké. Naše koleso je krásne symetrické, keď sa otočí o nejaký celočíselný násobok $\pi/3$ ³ vyzerá rovnako. Teda najmenej o $\pi/3$. Teda ak za 1/24 s spraví 1/6 otáčky, za celú sekundu to bude 24-krát viac, tj 4. Éto vsjo, ribjata.

1 Pozrite si <http://www.colorcube.com/illusions/illusion.htm>, ak si myslíte, že vaše oči a mozog si až tak veľa nedomýšľajú a zistíte, že trik s kamerou je ešte celkom ospravedlniteľný.

2 Nepoznajúc kontext, asi by ste si to mysleli aj vy po racionálnej úvahe.

3 Preklad: 60°. Rozhoda som sa do vás tlačiť radiány. Vlastne ani neviem prečo. Isto ich krásu raz oceníte. Platí pre ne, že $360^\circ = 2\pi$. Skúste si spočítať dĺžku oblúka jednotkovej kružnice, ktorý vysekáva nejaký uhol α . Možno pochopíte.

B-2.2 Vajco (opravoval Robo)

Vo FKS máme vajcia. Uvarené v rýchlovarnej kanvici sa stávajú každodennou proteínovou zásobárňou matfyzom unaveného FKSáka. A pri takom olovrante človeka začnú napadať veci... Napríklad: Vezmite vajce a nejako ho upevnite na stôl tak, aby stálo na svojej širšej špičke. Priamo zhora naň zatlačte doskou. Odmerajte:

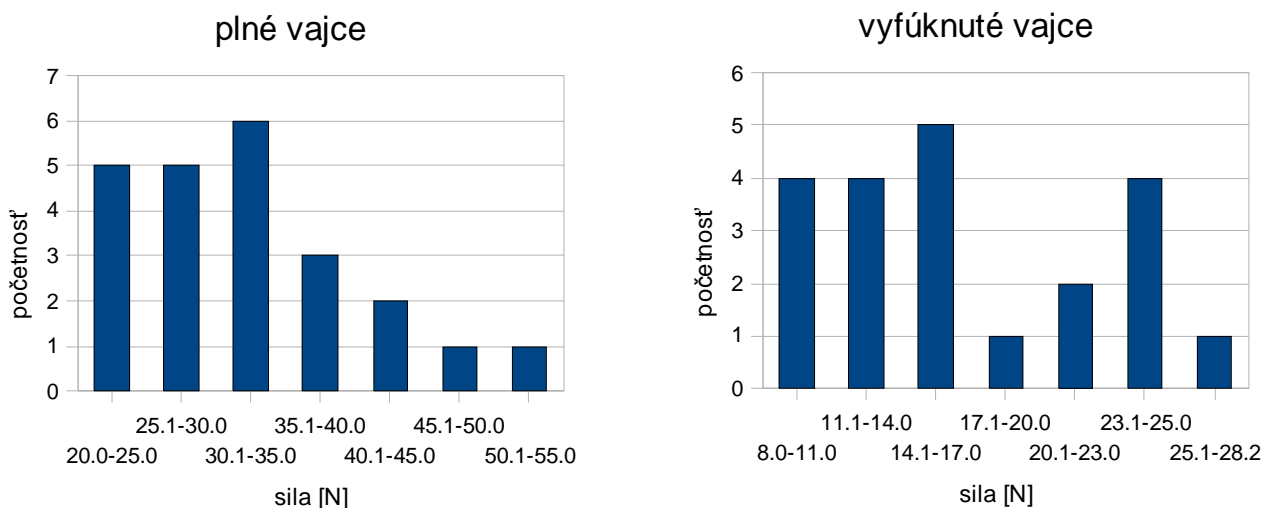
a) Aká sila je potrebná na rozbitie vajca?

b) Ako veľmi túto hodnotu ovplyvní, ak vajce vyfúknete?

Prípadný rozdiel medzi hodnotami v a) a b) stručne vysvetlite.

Zdravím všetkých experimentátorov. Dúfam, že vajcová úloha spojila príjemné (radosť z fyzikálneho experimentovania) s užitočným (prípravou praženice, týmto zároveň ďakujem za všetky fotografie praženíc, ktoré ste spolu s fotodokumentáciou riešení poslali).

Najprv pár slov o technickej realizácii experimentu. Mierne problémy mohlo spôsobiť stabilizovanie vajčička na širšej špičke, s čím ste si poradili plastelínou, múkou, či mokrým toaletným papierom. Ako závažie na kuchynskej doske ste najčastejšie použili hrniec či inú nádobu, do ktorej ste prilievali vodu, ale využila sa i misa s ovocím či obsah chladničky (250 g maslo nemenovanej značky, 42 g pekárenskej droždie a pod.). Vami dosiahnuté výsledky som zhrnul do nasledovných grafov, v ktorých na vodorovnej osi je sila potrebná na rozbitie vajca a na zvislej osi početnosť výskytov v riešeníach:



Z grafov (výsledkov Vašich riešení) vyplýva veľké rozpätie nameranej sily potrebnej na rozbitie vajec, čo možno vysvetliť ich rozdielnou kvalitou „od prípadu k prípadu“ (určite platí, že každé vajce je svojím spôsobom *jedinečný* materiál). Čo platí pre riešenia ako celok, platí i pre samotného riešiteľa. Ako ste mnohí zistili, výsledky jednotlivých „rozbíjaní“ sa od seba „dosť“ (rádovo v jednotkách newtonov) líšili, preto ste výsledky merania uvádzali ako priemer z viacerých meraní plus mínus vypočítaná odchýlka. Tí nemnohí, ktorí rozbili len jedno vajce, si vo výsledkovke nájdú o bod menej.

Ako sa intuitívne dalo predpokladať a Vaše riešenia to jednoznačne potvrdzujú, plné vajce vydrží viac. Prečo? Pri stláčaní prázdneho vajca mením jeho objem, napríklad preto, že „vtláčam“ špičku dovnútra. Vaječné vnútro je však ťažko stlačiteľná kvapalina a tak každé stláčanie nejakej časti škrupiny (či už sa jedná o vtláčanie špičky alebo nie) musí nutne sprevádzať rozťahovanie inej časti škrupiny. V celom vajci tak narastá tlak, ktorý bráni ďalšiemu stláčaniu a vajčičko takto celkovo vydrží viac. Je to ako keby menej namáhané časti pomocou tlaku na kvapalnú obsah vajca pomáhali tým viac namáhaným častiam uniesť viac. Toť alles.

B-2.3 Maličkosť (opravoval Bzdušo)

Kubo má na stole položenú svoju maličkosť. Trochu do nej drcol (fyzikálne: udelil jej nejakú rýchlosť), vďaka čomu sa začala pohybovať rovnobežne s hranou stola. Po dvoch sekundách od drcnutia maličkosť dosiahla okraj stola vzdialený jeden meter. Má Kubova maličkosť kolieska?

[.moc.stcafsirronkuhc.www](http://moc.stcafsirronkuhc.www) an caiV .lavotratšan mod A.
atua do imkičúľk mod t'únkmodo lašúkop zar as sirroN
kuhcC

Pozrime sa najprv, ako si s úlohou poradili niektorí odborníci. Harcela Mrdá založila svoje experimentálne riešenie na tom, že Kubova maličkosť je malá. Meter Paták k úlohe pristupoval teoreticky a zvažil dosiahnutie okraja prostredníctvom kvantového tunelovania. Činke Ľevorovej sme strhli 5 bodov za opisovanie. Marián Bein iba pokrčil plecami.

Skrátka, v zadaní je málo údajov. Zdá sa, že výsledok *nie je z čoho* vydolovať. Nevzdajme sa však takto zavčasu⁴ a označme si hmotnosť maličkosti ako veľké M , rýchlosť po drcnutí ako malé v a pozrime sa, aké na ňu pôsobia sily.

Tiažová sila a tlaková sila od podložky sa navzájom vyrušia. Ostáva len odporová sila. Tá je bez ohľadu na prítomnosť koliesok priamo úmerná tlakovej sile $F_N = mg$ podľa

$$F_T = fF_N \quad \text{resp.} \quad F_T = \xi F_N / R,$$

kde f je koeficient šmykového trenia a ξ koeficient valivého odporu. Keď v druhej rovnici označíme $\xi/R = f^*$, odhaľujeme jej rovnakosť s prvou.

Spomalenie maličkosti $a = F_T/M = fg$ je konštantné. Ide teda o rovnomerne spomalený pohyb, pri ktorom je závislosť prejdenej dráhy od času

$$s = vt - \frac{1}{2}at^2.$$

Jedna rovnica a v nej dve neznáme: zrýchlenie a a rýchlosť v . Na prvý pohľad to vyzerá tak, že o zrýchlení⁵ a sa z rovnice nedozvieme nič. Skúsme sa s tým však hrať ďalej. Pre každé zvolené zrýchlenie vieme dopočítať príslušnú rýchlosť. Vezmeme napríklad $a = 10 \text{ m.s}^{-2}$. Dostávame

$$v = \frac{s}{t} + \frac{1}{2}at = 10,5 \text{ m.s}^{-1}.$$

A zo zaujímavosti zrátajme, akou rýchlosťou prišla maličkosť na okraj stola. Dostávame

$$v(t) = v - at = -9,5 \text{ m.s}^{-1},$$

čo je záporné číslo. **Čo to znamená?** Znamená to *pohyb naspäť*. Keby náš stôl nemal okraj a na maličkosť pôsobí stále sila v tom istom smere ako pôvodne pôsobila trecia sila (= stále zrýchlenie/spomalenie), po nejakom čase sa začne vracat' naspäť a v našom vzťahu pre prejdenu dráhu sa to prejaví ako zmenšenie prejdenej dráhy.⁶

Z fyzikálnej podstaty úlohy⁷ však vieme, že maličkosť sa na okraji stola *musí* pohybovať nezápornou rýchlosťou, teda

$$v - at \geq 0,$$

⁴ Za rána za rosy, dobre sa kosí.

⁵ Keďže a je zviazané so spomaľovaním a teda trecou silou, to je to, čo by sme radi.

⁶ To nie je prípad trecej sily. V okamihu zastavenia prestane trenie pôsobiť a pohyb ustane *navždy*.

⁷ Komu nie je jasné čo sa tým myslí, nech si ešte raz poriadne prečíta posledný odstavce.

čo nám umožňuje riešiť systém dvoch (ne)rovnic o dvoch neznámych. Ak z rovnice dosadíme za rýchlosť do nerovnice, dostávame

$$\left(\frac{s}{t} + \frac{1}{2}at\right) - at \geq 0$$

$$a \leq \frac{2s}{t^2}$$

a ak si spomenieme, že $a = fg$, dostávame podmienku

$$f \leq \frac{2s}{gt^2} \approx 0,05.$$

Keď si otvoríme tabuľky,⁸ zistíme že bežné koeficienty trenia majú hodnoty v rozmedzí 0,3 až 0,6. Takmer žiadne dva materiály však nemajú koeficient trenia menší ako 0,1.

Na druhej strane, podiel $f^* = \xi/R$ môže byť ľubovoľne veľký, v závislosti na polomere koliesok, teda aj rovný 0,05. Možno preto očakávať, že **Kubova maličkosť má kolieska**.

B-2.4 Kniha (opravoval Filip)

Filip minule zobral dve najnovšie vydania *Odviata vetrom a stranu po strane ich „zasekol“ do seba, tak ako na obrázku. Jedno Odviata vetrom váži pol kila ($m = 0,5$ kg), má $N = 600$ strán, koeficient trenia medzi dvoma listami papiera je $f = 0,5$, rozmery knihy sú 20 cm x 30 cm ($a = 20$ cm, $b = 30$ cm). Predpokladajte, že väzba kníh je veľmi flexibilná a vôbec „nemá problém“ s tým, že musí poňať dvojnásobné množstvo strán. Akou silou musíme knihy ťahať od seba, aby sme ich rozdelili, ak v popísanej konštelácii voľne ležia položené na stole?*

Začnime tým, že si spomenieme na dôverne známe príklady zo školy. Máme kváder na podložke a rátame, akou silou naň musíme pôsobiť. V čom sa naša kniha líši? Takmer v ničom! Je to len veľa kvádrov na seba.

Vezmime do ruky odlepidlo a odlepme z väzby knihy všetky stránky. A teraz ich tam opäť pripevnime silomerami. Je jasné, že celková sila, ktorou musíme ťahať knihy, bude súčtom síl na silomeroch upevnených na jednotlivých stránkach. Tak ich poďme vyrátať.

Úplne vrchná stránka je len voľne položená. Jej tiaž je $\frac{m}{N}g$. Musíme ju teda ťahať silou

$F_{t1} = f \frac{m}{N}g$. A čo teraz s tou stránkou pod ňou? Okrem svojej vlastnej tiaže je aj prtláčaná

stránkou nad ňou, čiže trecia sila už bude $F_{t2} = f \frac{2m}{N}g$. Ale pozor, toto nieje všetko. Treba

si všimnúť, že na našu stránku pôsobí ešte jedna sila. Áno, je to reakcia na treciu silu stránky nad ňou. Výsledná sila, ktorú nám ukáže silomer bude teda súčtom⁹ týchto dvoch síl. Výsledná sila preto je:

$$F_2 = F_{t1} + F_{t2}$$

$$F_2 = f \frac{m}{N}g + f \frac{2m}{N}g$$

⁸ Napríklad http://www.roymech.co.uk/Useful_Tables/Tribology/co_of_frict.htm alebo na wikipédii.

⁹ Reakčná sila má opačný smer ako pôvodná trecia sila na spodku prvej stránky a teda smeruje presne rovnako, ako trecia sila na spodku druhej stránky.

Už je asi jasné, ako bude vyzerat' sila pôsobiaci na n-tú stránku. Je to opäť súčet trecích síl pôsobiacich na jej vrchnej a spodnej strane. Tieto sily sú priamoúmerné hmotnosti stránok nad plochou, na ktorej pôsobia. Čiže:

$$F_n = F_{t(n-1)} + F_m$$

$$F_n = f \frac{m(n-1)}{N} g + f \frac{mn}{N} g = f \frac{m}{N} g(n-1+n)$$

No skvelé. Zostáva nám už len zistiť výslednú silu pôsobiacu na väzbu knihy. V prípade ľavej knihy treba sčítať každú druhú silu (patrí jej totiž len každá druhá stránka) začínajúc hneď od prvej a končiac pri predposlednej¹⁰:

$$F_{\text{ľavá}} = f \frac{m}{N} g ((1) + (2+3) + \dots + (2N-2 + 2N-1)) = f \frac{m}{N} g \frac{2N(2N-1)}{2} = fmg(2N-1)$$

V prípade pravej knihy sumujeme tiež každú druhú silu, ale tentoraz začneme tou druhou:

$$F_{\text{pravá}} = f \frac{m}{N} g (2+3+\dots+2N) = fmg(2N+1-\frac{1}{N})$$

A máme výsledok. Ešte by nás malo zarazit', že tie dve sily nie sú rovnaké. Čudné, veď akcia a reakcia, nie? No nie úplne. Uvedomme si, že je tam ešte aj stôl a keby sme zarátali aj sily pôsobiace naň, tak nám naozaj vyjde rovnosť. To čo nám vyšlo je úplne logické, na stránky pravej knihy tlačí vždy o jednu stránku viac ako na rovnakú stránku ľavej knihy. A čo sa týka názvu, ak dosadíme zadané hodnoty, výsledné sily budú rovné približne 3000N, čiže žiadny vietor ich len tak neodveje.

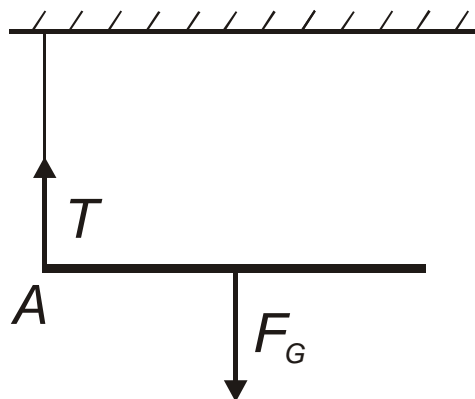
B-2.5 Záves (opravoval JAno, vzorák Marcelka)

Palička si visí. Zrazu prestrihnete jeden zo špagátov na ktorých visí. Akou silou bude v okamihu tesne po prestrihnutí napínaný druhý špagát? Hmotnosť paličky je m a mohli by sme vám o nej prezradiť ešte kopec ďalších zaujímavých a zbytočných parametrov, ale už mi došla fantázia :).

Začnime zakreslením síl, ktoré pôsobia na paličku tesne po prestrihnutí jedného zo špagátov. Ako to už býva zvykom, na paličku pôsobí gravitačná sila $F_G = mg$. Okrem nej na paličku môže pôsobiť silou už iba druhý (neprestrihnutý) špagát (silu označíme T). Samozrejme predpokladáme, že špagát sme si kúpili v obchode s ideálnymi špagátmi, a teda má veľa super vlastností – nenatiahnuteľný, nehmotný, pekný, skromný, slušný, inteligentný a milý k deťom.¹¹

Vráťme sa však späť k príkladu. Sila, ktorou pôsobí takýto nehmotný špagát na iné veci, musí byť rovnobežná so špagátom. Inak by sme z pohybových rovníc odvodili, že sa nejaké časti špagátu začnú pohybovať s nekonečne veľkým zrýchlením.

Na paličku budú teda pôsobiť dve sily: gravitácia a sila od špagátu. Ich smery a pôsobiská sú zakreslené na obrázku.



Pohyb paličky bude určite kombináciou posuvného a otáčavého pohybu.¹² Zapíšeme si rovnice pre tieto pohyby (otáčanie je okolo bodu A – koncového bodu paličky):

¹⁰ Na kope je spolu 2N stránok.

¹¹ V prípade záujmu volajte 0904 283 856. Zn. Pravá láska si nájde cestu.

¹² Aj paličku sme si kúpili v obchode s ideálnymi paličkami, takže je okrem iného dokonale tuhým telesom.

$$F_G - T = ma$$

$$F_G \frac{l}{2} = I\varepsilon$$

Symboly v rovniciach: l je dĺžka paličky, a je zrýchlenie paličky, ε je uhlové zrýchlenie paličky, I je moment zotrvačnosti paličky vzhľadom na bod A (a teda $I = \frac{1}{3}ml^2$).

Všimnime si, že obe sily pôsobiace na paličku majú v momente prestrihnutia špagátu zvislý smer. Bod A sa však nemôže hýbať v zvislom smere,¹³ takže bude mať tesne po prestrihnutí špagátu nulové zrýchlenie. Okrem toho vieme, že ťažisko paličky má zrýchlenie a . Uhlové zrýchlenie paličky teda bude $e = \frac{a}{l/2}$ (rozdiel zrýchlení ťažiska a bodu A predelený ich vzdialenosťou).

Keď do druhej rovnice dosadíme za I a ε , dostaneme:

$$F_G \frac{l}{2} = \frac{1}{3}ml^2 \frac{a}{l/2}$$

Získali sme dve rovnice o dvoch neznámých – T a a . Jednoduchými úpravami dostaneme výsledok: $T = \frac{F_G}{4} = \frac{mg}{4}$.

Na záver - viacerí ste prišli k výsledku $mg/2$ a to nasledujúcou úvahou: V ustálenom stave pred prestrihnutím je každý zo špagátov napínaný presne touto silou. Ak uvažujeme deformovateľnú paličku, tak tesne po prestrihnutí špagátu nezačne vykonávať presne otáčavý pohyb okolo druhého závesného bodu, ale začne padat' iba jeden jej koniec. Tak vznikne akýsi „vzruch“ - malá deformácia, ktorá kvôli tuhosti paličky „cestuje“ tyčou rýchlosťou šírenia zvuku (v danom materiáli) a je jasné, že pokiaľ aspoň raz neprejde tyčou, tak druhý špagát vôbec „nevie“ o tom, že jeho verného druha prestrihli a stále si ťahá $mg/2$. Táto úvaha je samozrejme správna pre skutočne VEĽMI krátke časy po prestrihnutí špagátu. Problémom je, že v zadaní sa nehovorí o tom ako veľmi „tesne po prestrihnutí“ máme situáciu uvažovať a ani to, či uvažujeme tyčku deformovateľnú, alebo nie. Stále však platí, že ak nerozumiete presne zadaniu, treba sa pýtať spresňujúce otázky, alebo vyriešiť problém komplexne, vybrať si z príkladu to najtriviálnejšie čo sa dá nie je určite dobrý spôsob získania veľa bodov, čo sa odrazilo aj na vašom hodnotení.

A tuhé telesá vedú vykonávať iba posuvný a otáčavý pohyb (nevedia sa deformovať).

¹³ Bod A sa nemôže hýbať nadol, pretože špagát je nenatiahnuteľný. Je celkom intuitívne, že sa nebude hýbať ani nahor: to by znamenalo, že špagát nebude na paličku pôsobiť žiadnou silou. Preto by na paličku pôsobila len gravitácia a palička by vykonávala rovnomerne zrýchlený pohyb nadol, čo je v spore s tvrdením, že bod A sa hýbe nahor.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina B – kategórie po 2. sérii letného semestra 24. ročníka

	Meno a priezvisko	Škola	B- 2.1	B-2.2	B-2.3	B-2.4	B-2.5	⊗	⓪	Σ
1	Vlček Andrej	EvSŠ Lipt. Mikuláš	4.00	4.00	5.00	5.00	1.75	-	16.50	34.50
2	Ficková Klára	G KE Poštová	3.10	4.00	5.00	5.00	0.10	-	16.00	33.10
3	Bučková Lucia	G Piešťany	-	4.50	5.00	5.00	2.80	-	14.90	32.20
4	Bogárová Zuzana	G Ľ. Štúra Trenčín	-	4.00	5.00	5.00	5.00	-	12.90	31.90
5	Švančara Patrik	G Ľ. Štúra Trenčín	3.30	4.00	2.50	4.50	-	-	15.50	29.80
6	Pločeková Andrea	G Piešťany	-	2.00	4.00	5.00	3.50	-	15.10	29.60
7	Kováč Ondrej	GsvCaM	-	4.00	2.00	5.00	0.10	-	18.00	29.10
8	Kosec Peter	G Ľ. Štúra Trenčín	3.00	5.00	3.00	4.00	1.00	-	14.00	29.00
9	Kireš Jakub	G KE Poštová	4.00	3.00	3.00	5.00	0.10	-	11.80	26.80
10	Trousilová Jitka		3.30	5.00	-	5.00	5.00	-	7.90	26.20
11	Páleník Juraj	ŠPMNDAG	-	4.00	4.50	5.00	0.10	-	11.50	25.10
12	Kögler Pavol	G Galanta	3.00	5.00	3.00	5.00	0.20	-	8.50	24.50
13	Kubincová Petra	ŠPMNDAG	-	4.00	3.50	5.00	-	-	11.50	24.00
14	Savinec Michal	GPH Michalovce	4.00	-	1.50	4.50	0.35	-	13.50	23.85
15	Mikulaj Pavol		3.30	4.50	2.50	5.00	-	-	8.50	23.80
16	Večerík Matej	ŠPMNDAG	-	4.00	5.00	4.50	0.10	-	10.00	23.60
17	Guričan Pavol	G BA Grösslingova	-	4.00	-	5.00	5.00	-	9.00	23.00
	Komanová Kristína		3.50	3.50	1.50	5.00	1.00	-	9.50	23.00
19	Múthová Denisa	G Bil, Žilina	-	4.00	5.00	5.00	-	-	7.80	21.80
20	Heželyová Slávka	ŠPMNDAG	-	4.00	2.50	5.00	0.15	-	10.00	21.65
21	Faguľová Kristína	G KE Poštová	3.30	4.00	1.20	3.50	0.10	-	9.50	21.50
22	Lami Jozef	G KE Poštová	3.00	4.00	0.50	5.00	0.15	-	8.60	21.10
23	Horňák Marián		4.00	-	-	5.00	-	-	12.00	21.00
24	Masár Juraj	G Bilíkova	-	5.00	2.00	5.00	1.00	-	7.90	20.90
25	Pistráková Alexandra	G KE Poštová	3.90	-	-	5.00	0.10	-	11.00	20.00
26	Mrocková Mária	G BA J.Hronca	-	4.00	4.30	1.00	0.10	-	10.50	19.90
27	Santer Jakub	GMH	-	3.50	3.00	5.00	-	-	8.00	19.50
28	Ďuratný Miloslav		3.00	1.50	1.00	4.00	0.10	-	9.50	19.00
29	Galovičová Soňa	G ZA Okružná	4.00	-	-	5.00	-	-	9.00	18.00
30	Součková Kamila	Ev. Lýt. BA	3.20	5.00	2.00	5.00	1.50	-	-	15.20
31	Baxová Zuzana		-	4.00	2.00	-	-	-	6.50	12.50
32	Jančo Tomáš	G Ľ. Štúra Trenčín	-	0.50	0.50	0.00	0.50	-	8.40	9.90
33	Erdödyová Lívia	GPH Michalovce	-	-	1.00	-	0.10	-	6.50	7.60
34	Čurmová Zuzana	GPH Michalovce	3.00	-	1.00	1.00	-	-	1.50	6.50
35	Kramárik Lukáš	G Ľ. Štúra Trenčín	-	-	-	-	-	-	6.20	6.20
36	Dobrotka Matúš	G BN Bánovce	1.00	0.50	1.00	1.00	0.10	-	2.60	6.10
37	Kopf Michal	G Opava	-	-	-	-	-	-	5.60	5.60
38	Bartko Matúš	G Ľ. Štúra Trenčín	-	-	-	-	-	-	4.70	4.70
39	Bohiniková Alžbeta	G BA Grösslingova	-	-	-	-	-	-	3.50	3.50
	Dzurjová Silvia	GPH Michalovce	-	-	-	-	-	-	3.50	3.50
41	Čurmová Jaroslava	GPH Michalovce	-	-	1.00	1.00	-	-	1.00	3.00
	Vranák Daniel		-	-	-	-	-	-	3.00	3.00

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

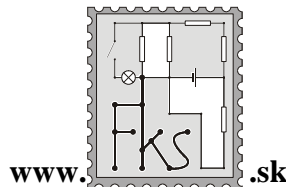
vzorové riešenia 2. série

A – kategória (starší)

24. ročník

letný semester

školský rok 2008/2009



FKS, KTFDF FMFI UK

Mlynská dolina

842 48 Bratislava

otazky@fks.sk

A-2.1 Kniha (opravoval Filip)

Filip minule zobral dve najnovšie vydania *Odviata vetrom a stranu po strane ich „zasekol“ do seba, tak ako na obrázku. Jedno Odviata vetrom váži pol kila ($m = 0,5 \text{ kg}$), má $N = 600$ strán, koeficient trenia medzi dvoma listami papiera je $f = 0,5$, rozmery knihy sú $20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ ($a = 20 \text{ cm}$, $b = 30 \text{ cm}$). Predpokladajte, že väzba kníh je veľmi flexibilná a vôbec „nemá problém“ s tým, že musí poňať dvojnásobné množstvo strán. Akou silou musíme knihy ťahať od seba, aby sme ich rozdelili, ak v popísanej konštelácii voľne ležia položené na stole?*

Začnime tým, že si spomenieme na dôverne známe príklady zo školy. Máme kváder na podložke a rátame, akou silou naň musíme pôsobiť. V čom sa naša kniha líši? Takmer v ničom! Je to len veľa kvádrov na sebe.

Veźmeme do ruky odlepidlo a odlepme z väzby knihy všetky stránky. A teraz ich tam opäť pripevníme silomerami. Je jasné, že celková sila, ktorou musíme ťahať knihy, bude súčtom síl na silomeroch upevnených na jednotlivých stránkach. Tak ich poďme vyrátať.

Úplne vrchná stránka je len voľne položená. Jej tiaž je $\frac{m}{N}g$. Musíme ju teda ťahať silou

$F_{t1} = f \frac{m}{N}g$. A čo teraz s tou stránkou pod ňou? Okrem svojej vlastnej tiaže je aj prtláčaná

stránkou nad ňou, čiže trecia sila už bude $F_{t2} = f \frac{2m}{N}g$. Ale pozor, toto nieje všetko. Treba

si všimnúť, že na našu stránku pôsobí ešte jedna sila. Áno, je to reakcia na treciu silu stránky nad ňou. Výsledná sila, ktorú nám ukáže silomer bude teda súčtom¹ týchto dvoch síl. Výsledná sila preto je:

$$F_2 = F_{t1} + F_{t2}$$
$$F_2 = f \frac{m}{N}g + f \frac{2m}{N}g$$

Už je asi jasné, ako bude vyzerat' sila pôsobiaca na n-tú stránku. Je to opäť súčet trecích síl pôsobiacich na jej vrchnej a spodnej strane. Tieto sily sú priamoúmerné hmotnosti stránok nad plochou, na ktorej pôsobia. Čiže:

$$F_n = F_{t(n-1)} + F_{tn}$$
$$F_n = f \frac{m(n-1)}{N}g + f \frac{mn}{N}g = f \frac{m}{N}g(n-1+n)$$

No skvelé. Zostáva nám už len zistiť výslednú silu pôsobiacu na väzbu knihy. V prípade ľavej knihy treba sčítat' každú druhú silu (patrí jej totiž len každá druhá stránka) začínajúc hneď od prvej a končiac pri predposlednej²:

$$F_{\text{ľavá}} = f \frac{m}{N}g((1) + (2+3) + \dots + (2N-2+2N-1)) = f \frac{m}{N}g \frac{2N(2N-1)}{2} = fmg(2N-1)$$

¹ Reakčná sila má opačný smer ako pôvodná trecia sila na spodku prvej stránky a teda smeruje presne rovnako, ako trecia sila na spodku druhej stránky.

² Na kope je spolu $2N$ stránok.

V prípade pravej knihy sumujeme tiež každú druhú silu, ale tentoraz začneme tou druhou:

$$F_{prava} = f \frac{m}{N} g(2 + 3 + \dots + 2N) = fmg(2N + 1 - \frac{1}{N})$$

A máme výsledok. Ešte by nás malo zarazit', že tie dve sily nie sú rovnaké. Čudné, veď akcia a reakcia, nie? No nie úplne. Uvedomme si, že je tam ešte aj stôl a keby sme zarátali aj sily pôsobiace naň, tak nám naozaj vyjde rovnosť. To čo nám vyšlo je úplne logické, na stránky pravej knihy tlačí vždy o jednu stránku viac ako na rovnakú stránku ľavej knihy. A čo sa týka názvu, ak dosadíme zadané hodnoty, výsledné sily budú rovné približne 3000N, čiže žiadny vietor ich len tak neodveje.

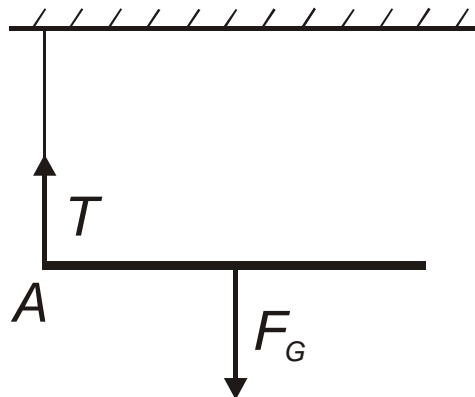
A-2.2 Záves (opravoval Lukáš, vzorák Marcelka)

Palička si visí. Zrazu prestrihneme jeden zo špagátov na ktorých visí. Akou silou bude v okamihu tesne po prestrihnutí napínaný druhý špagát? Hmotnosť paličky je m a mohli by sme vám o nej prezradiť ešte kopec ďalších zaujímavých a zbytočných parametrov, ale už mi došla fantázia :).

Začnime zakreslením síl, ktoré pôsobia na paličku tesne po prestrihnutí jedného zo špagátov. Ako to už býva zvykom, na paličku pôsobí gravitačná sila $F_G = mg$. Okrem nej na paličku môže pôsobiť silou už iba druhý (neprestrihnutý) špagát (silu označíme T). Samozrejme predpokladáme, že špagát sme si kúpili v obchode s ideálnymi špagátmi, a teda má veľa super vlastností – nenatahnutelný, nehmotný, pekný, skromný, slušný, inteligentný a milý k deťom.³

Vráťme sa však späť k príkladu. Sila, ktorou pôsobí takýto nehmotný špagát na iné veci, musí byť rovnobežná so špagátom. Inak by sme z pohybových rovníc odvodili, že sa nejaké časti špagátu začnú pohybovať s nekonečne veľkým zrýchlením.

Na paličku budú teda pôsobiť dve sily: gravitácia a sila od špagátu. Ich smery a pôsobiská sú zakreslené na obrázku.



Pohyb paličky bude určite kombináciou posuvného a otáčavého pohybu.⁴ Zapišeme si rovnice pre tieto pohyby (otáčanie je okolo bodu A – koncového bodu paličky):

$$F_G - T = ma$$

$$F_G \frac{l}{2} = I\varepsilon$$

Symboly v rovniciach: l je dĺžka paličky, a je zrýchlenie paličky, ε je uhlové zrýchlenie paličky, I je moment zotrvačnosti paličky vzhľadom na bod A (a teda $I = \frac{1}{3}ml^2$).

Všimnime si, že obe sily pôsobiace na paličku majú v momente prestrihnutia špagátu zvislý smer. Bod A sa však nemôže hýbať v zvislom smere,⁵ takže bude mať tesne po prestrihnutí

³ V prípade záujmu volajte 0904 283 856. Zn. Pravá láska si nájde cestu.

⁴ Aj paličku sme si kúpili v obchode s ideálnymi paličkami, takže je okrem iného dokonale tuhým telesom. A tuhé telesá vedia vykonávať iba posuvný a otáčavý pohyb (nevedia sa deformovať).

⁵ Bod A sa nemôže hýbať nadol, pretože špagát je nenatahnutelný. Je celkom intuitívne, že sa nebude hýbať ani nahor: to by znamenalo, že špagát nebude na paličku pôsobiť žiadnou silou. Preto by na paličku pôsobila len gravitácia a palička by vykonávala rovnomerne zrýchlený pohyb nadol, čo je v spore s tvrdením, že bod A sa hýbe nahor.

špagátu nulové zrýchlenie. Okrem toho vieme, že ťažisko paličky má zrýchlenie a . Uhlové zrýchlenie paličky teda bude $e = \frac{a}{l/2}$ (rozdiel zrýchlení ťažiska a bodu A predelený ich vzdialenosťou).

Keď do druhej rovnice dosadíme za I a ε , dostaneme:

$$F_G \frac{l}{2} = \frac{1}{3} ml^2 \frac{a}{l/2}$$

Získali sme dve rovnice o dvoch neznámých – T a a . Jednoduchými úpravami dostaneme výsledok: $T = \frac{F_G}{4} = \frac{mg}{4}$.

Na záver - viacerí ste prišli k výsledku $mg/2$ a to nasledujúcou úvahou: V ustálenom stave pred prestrihnutím je každý zo špagátov napínaný presne touto silou. Ak uvažujeme deformovateľnú paličku, tak tesne po prestrihnutí špagátu nezačne vykonávať presne otáčavý pohyb okolo druhého závesného bodu, ale začne padať iba jeden jej koniec. Tak vznikne akýsi „vzruch“ - malá deformácia, ktorá kvôli tuhosti paličky „cestuje“ tyčou rýchlosťou šírenia zvuku (v danom materiáli) a je jasné, že pokiaľ aspoň raz neprejde tyčou, tak druhý špagát vôbec „nevie“ o tom, že jeho verného druha prestrihli a stále si ťahá $mg/2$. Táto úvaha je samozrejme správna pre skutočne VEĽMI krátke časy po prestrihnutí špagátu. Problémom je, že v zadaní sa nehovorí o tom ako veľmi „tesne po prestrihnutí“ máme situáciu uvažovať a ani to, či uvažujeme tyčku deformovateľnú, alebo nie. Stále však platí, že ak nerozumiete presne zadaniu, treba sa pýtať spresňujúce otázky, alebo vyriešiť problém komplexne, vybrať si z príkladu to najtriviálnejšie čo sa dá nie je určite dobrý spôsob získania veľa bodov, čo sa odrazilo aj na vašom hodnotení.

A-2.3 Maličkosť (opravoval Bzdušo)

Kubo má na stole položenú svoju maličkosť. Trochu do nej drcol (fyzikálne: udelil jej nejakú rýchlosť), vďaka čomu sa začala pohybovať rovnobežne s hranou stola. Po dvoch sekundách od drcnutia maličkosť dosiahla okraj stola vzdialený jeden meter. Má Kubova maličkosť kolieska?

[.moc.stcafsironkuhc.www](http://moc.stcafsironkuhc.www) an caiV .lavotratšan mod A.
 atua do imkičúlk mod t'únkmodo lašúkop zar as sirroN
 kcuhC

Pozrime sa najprv, ako si s úlohou poradili niektorí odborníci. Harcela Mrdá založila svoje experimentálne riešenie na tom, že Kubova maličkosť je malá. Meter Paták k úlohe pristupoval teoreticky a zväžil dosiahnutie okraja prostredníctvom kvantového tunelovania. Činke Ťevorovej sme strhli 5 bodov za opisovanie. Marián Bein iba pokrčil plecami.

Skrátka, v zadaní je málo údajov. Zdá sa, že výsledok *nie je z čoho vydolovať*. Nevzdajme sa však takto zavčasu⁶ a označme si hmotnosť maličkosti ako veľké M , rýchlosť po drcnutí ako malé v a pozrime sa, aké na ňu pôsobia sily.

Tiažová sila a tlaková sila od podložky sa navzájom vyrušia. Ostáva len odporová sila. Tá je bez ohľadu na prítomnosť koliesok priamo úmerná tlakovej sile $F_N = mg$ podľa

$$F_T = fF_N \quad \text{resp.} \quad F_T = \xi F_N / R,$$

kde f je koeficient šmykového trenia a ξ koeficient valivého odporu. Keď v druhej rovnici označíme $\xi/R = f^*$, odhaľujeme jej rovnakosť s prvou.

Spomalenie maličkosti $a = F_T / M = fg$ je konštantné. Ide teda o rovnomerne spomalený pohyb, pri ktorom je závislosť prejdenej dráhy od času

⁶ Za rána za rosy, dobre sa kosí.

$$s = vt - \frac{1}{2}at^2.$$

Jedna rovnica a v nej dve neznáme: zrýchlenie a a rýchlosť v . Na prvý pohľad to vyzerá tak, že o zrýchlení⁷ a sa z rovnice nedozvieme nič. Skúsme sa s tým však hrať ďalej. Pre každé zvolené zrýchlenie vieme dopočítať príslušnú rýchlosť. Vezmime napríklad $a = 10 \text{ m.s}^{-2}$. Dostávame

$$v = \frac{s}{t} + \frac{1}{2}at = 10,5 \text{ m.s}^{-1}.$$

A zo zaujímavosti zrátajme, akou rýchlosťou prišla maličkosť na okraj stola. Dostávame

$$v(t) = v - at = -9,5 \text{ m.s}^{-1},$$

čo je záporné číslo. **Čo to znamená?** Znamená to *pohyb naspäť*. Keby náš stôl nemal okraj a na maličkosť pôsobí stále sila v tom istom smere ako pôvodne pôsobila trecia sila (= stále zrýchlenie/spomalenie), po nejakom čase sa začne vracat' naspäť a v našom vzťahu pre prejdenú dráhu sa to prejaví ako zmenšenie prejdenej dráhy.⁸

Z fyzikálnej podstaty úlohy⁹ však vieme, že maličkosť sa na okraji stola *musí* pohybovať nezápornou rýchlosťou, teda

$$v - at \geq 0,$$

čo nám umožňuje riešiť systém dvoch (ne)rovnic o dvoch neznámych. Ak z rovnice dosadíme za rýchlosť do nerovnice, dostávame

$$\left(\frac{s}{t} + \frac{1}{2}at \right) - at \geq 0$$

$$a \leq \frac{2s}{t^2}$$

a ak si spomenieme, že $a = fg$, dostávame podmienku

$$f \leq \frac{2s}{gt^2} \approx 0,05.$$

Keď si otvoríme tabuľky,¹⁰ zistíme že bežné koeficienty trenia majú hodnoty v rozmedzí 0,3 až 0,6. Takmer žiadne dva materiály však nemajú koeficient trenia menší ako 0,1.

Na druhej strane, podiel $f^* = \xi / R$ môže byť ľubovoľne veľký, v závislosti na polomere koliesok, teda aj rovný 0,05. Možno preto očakávať, že **Kubova maličkosť má kolieska**.

A-2.4 Malý princ... (opravoval Tomáš)

si len tak sedí na svojej planétke o hmotnosti M . Zrazu okolo nej prefrčí asteroid o hmotnosti m rýchlosťou v . Koľko energie z celkovej kinetickej energie asteroidu dokáže malý princ zužitkovať? Aby ste si lepšie vedeli predstaviť, ako vyzerá také získavanie energie, uvidíme jeden ilustračný príklad: Vezmete dynamo (také malé oné s kolieskom, majú to niektoré bicykle. Otáčaš kolesom - vyrábaš prúd), namotáte naň dostatočné množstvo nekonečne tenkého, nekonečne pevného a nehmotného špagátu, ktorého druhý koniec harpúnujete do asteroidu a potom už len čakáte, koľko elektriny vám odvíjajúce sa lanko na dynamo vyprodukuje, kým asteroid nezastane. Aby sa vám ľahšie rátalo môžete predpokladať, že vzdialenosť planétky od priamky po ktorej letel asteroid je veľmi malá. Bonusový bod dostanete ak úlohu zrátate pre všeobecnú vzdialenosť d .

Pozrem na príklad a hneď vidím: riešenie je $mv^2/2$, nie? Toto číslo predsa predstavuje kinetickú energiu druhého asteroidu (rátanú vo vzťažnej sústave planétky) a ak ju (v ideálnom prípade) celú zužitkujem musím mať správny výsledok. Kde je problém? Práve v

⁷ Keďže a je zviazané so spomaľovaním a teda trecou silou, to je to, čo by sme radi.

⁸ To nie je prípad trecej sily. V okamihu zastavenia prestane trenie pôsobiť a pohyb ustane *navždy*.

⁹ Komu nie je jasné čo sa tým myslí, nech si ešte raz poriadne prečíta posledný odstavec.

¹⁰ Napríklad http://www.roymech.co.uk/Useful Tables/Tribology/co_of_friect.htm alebo na wikipédii.

tom zužitkovaní. Predstavte si situáciu, kedy planétka malého princa váži kilo a asteroid 10 ton. Odpoveď $mv^2/2$ by vyžadovala, aby sa po procese zužitkovávania asteroid zastavil - aby sa pohyboval presne takou rýchlosťou ako planétka *na začiatku*. Je však jasné, že napríklad v tomto prípade si asteroid ani nevšimne, že nejaká planétka sa k nemu priharpúovala a svoju energiu si „ponechá“. Čo s tým?

V prvom rade, zameriame sa na prípad, keď asteroid aj planétka sa pohybujú po tej istej priamke smerom od seba. Naša predošlá odpoveď by bola skoro dobrá, všetko čo potrebujeme je zabezpečiť, aby asteroid na konci procesu stál. Koniec zužitkovávania energie spoznáme podľa toho, že asteroid a planétka sa už voči sebe nehýbu čo zase znamená, že sa obe hýbu rovnakou rýchlosťou u . Zákon zachovania hybnosti potom pre túto rýchlosť dáva:

$$mv + 0 = (m + M)u \xrightarrow{\text{a teda}} u = \frac{mv}{m + M}$$

Vo vzťažnej sústave¹¹, ktorá sa na začiatku voči planétke pohybuje rýchlosťou u teda situácia vyzerá nasledovne: Asteroid aj planétka si to šupujú od seba (alebo k sebe) rýchlosťami u (planétka) a $v-u$ (asteroid), zrazu planétka harpúuje asteroid, harpúnovacie lano začne spomaľovať vzájomné vzdľavovanie sa telies, až nakoniec obe telesá ZASTANÚ. Vďaka tomuto je celková energia vytážená z harpúnovania rovná pôvodnej kinetickej energií OBOCH¹² telies. Rýchlosti aj hmotnosti oboch telies poznáe a dorátať sa k výsledku $\frac{1}{2} \frac{Mmv^2}{M+m}$ by mala byť malinovka.

Spôsob akým sme tento výsledok skonštruovali v sebe nesie dve pekné vlastnosti: jednak hneď vidíme, že takúto energiu z asteroidu vycucať vieme a tiež hneď vidíme, že viac z neho vycucať nepôjde nijakou cestou (to by znamenalo že v našej sústave by sme museli minúť viac ako 100% kinetickej energie telies).

Trochu problémov môže spôsobiť druhá časť úlohy. Tuto sa totiž časť energie minie na roztočenie sústavy. Hneď teda vidíme, že v tomto prípade dostaneme menšiu hodnotu, ako v prvej časti. Aby sme zistili o koľko menšiu, prenesieme sa zase do sústavy spojenjej s planétkou. Asteroid mal na začiatku voči planétke moment hybnosti o veľkosti mdv a tento sa musí zachovávať. Ak po celom cirkuse sa bude asteroid pohybovať po priamke, ktorá bude od planétky vzdialená l a jeho rýchlosť bude v' , máme rovnosť $mdv = mlv'$. Pokiaľ naozaj poctivo vycucáme z asteroidu všetku energiu, ktorú vieme, skončí to tak, že l bude obrovské (limitne nekonečné) a v' nulová (zase, limitne). V limitnom prípade teda na roztočenie sústavy nevyvalozíme skoro žiadnu energiu a odpoveď z prvej časti úlohy, trochu paradoxne voči konštatovaniu na začiatku odstavca, sa nemení. Iným argumentom pre tento výsledok je fakt, že z dôvodov rozmerovej analýzy je nemožné nakombinovať vzorec, ktorý by d zahŕňal ako parameter a len zo zadaných veličín by vyrátal odpoveď so správnou jednotkou (Joul).

Na záver, pokiaľ uvažujeme pomerne malú planétku a asteroid (kto čítal Malého princa tak vie, že typický rozmer planétky je okolo 3 baobabov) môžeme zanedbať gravitačné pôsobenie týchto objektov. Pokiaľ by boli objekty veľké, pridali by sme k uvedenému výsledku člen za gravitačné pôsobenie (nebol by zložitý).

¹¹ Na zamyslenie je, že sa jedná akurát o sústavu pevne spojenú s ťažiskom planétky a asteroidu.

¹² V tejto vzťažnej sústave sa na začiatku pohybujú obe telesá.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina A – kategórie po 2. sérii letného semestra 24. ročníka

	Meno a priezvisko	Škola	①	A-2.1	A-2.2	A-2.3	A-2.4	⚡	⊕+B	Σ
1	Bogár Ján	G Ľ. Štúra Trenčín	17.51	4.90	5.00	5.00	5.00	-	20.34	37.84
2	Honzáková Kateřina	GJK Praha	18.86	5.00	5.00	5.00	0.00	-	16.80	35.66
3	Kieferová Mária	GSF Žilina	16.25	5.00	5.00	3.50	5.50	-	19.00	35.25
4	Polačko Martin	G KE Alejová	18.50	5.00	5.00	4.90	0.00	-	14.90	33.40
5	Hruška Eugen	G Hlohovec	18.38	5.00	2.00	0.50	5.00	-	14.63	33.00
6	Vanya Peter	G BA J.Hronca	15.20	5.00	5.00	1.00	5.00	-	16.00	31.20
7	Bačo Ladislav	G KE Poštová	17.80	5.00	1.50	3.50	0.00	-	12.20	30.00
8	Štyráková Kamila	G POH, Dolný Kubín	18.30	5.00	-	3.50	1.00	-	11.69	29.99
9	Midlik Adam	G J.A.R. Prešov	12.00	5.00	0.00	4.50	5.00	-	16.38	28.39
10	Chudjak Martin	SPŠ Martin	14.82	5.00	5.00	-	-	-	12.20	27.02
11	Matejovičová Lenka	G BA J.Hronca	15.50	5.00	0.50	2.50	3.50	-	11.50	27.00
12	Hašík Juraj	G BA Grösslingova	14.82	5.00	0.50	2.50	0.00	1	9.08	23.90
13	Cocuľová Zuzana	G KE Poštová	14.10	5.00	-	2.50	-	-	9.53	23.63
14	Rohár Pavol	G KE M.R.Štefánika	12.00	4.00	0.40	3.50	-	-	9.97	21.97
15	Hagara Michal	G BA J.Hronca	7.00	5.00	0.00	5.00	0.00	-	12.20	19.20
16	Kuklišová Nina	G BA Metodova	13.00	4.00	0.50	0.80	0.00	-	5.30	18.30
17	Krejčíř Andrej	G PD Prievidza	18.20	-	-	-	-	-	-	18.20
18	Baxová Jana	G Ľ. Štúra Trenčín	5.03	2.50	5.00	2.50	0.00	-	12.20	17.23
19	Cuc Bruno	G BA Grösslingova	13.92	4.00	0.50	1.50	-	5	2.80	16.72
20	Bachratý Martin		6.50	5.00	0.30	-	-	-	6.96	13.46
21	Lešková Andrea	G Lipany	7.68	4.00	0.10	-	-	-	5.49	13.17
22	Vanta Radovan	G BA Metodova	12.74	-	-	-	-	-	-	12.74
23	Rigdová Emília	OG Kukučínova Poprad	12.00	-	-	-	-	-	-	12.00
24	Maixner Michal	OG ZA Varšavská	11.75	-	-	-	-	-	-	11.75
25	Pločeková Andrea	G Piešťany	11.19	-	-	-	-	-	-	11.19
26	Jursa Jakub	G KE Alejová	10.90	-	-	-	-	-	-	10.90
27	Petrucha Michal	G BA Metodova	9.50	-	-	-	-	-	-	9.50
28	Matulová Daniela	G BA Papánka	4.02	1.50	0.30	1.50	-	-	4.47	8.49
29	Hudák Adam	G KE M.R.Štefánika	2.05	-	-	-	-	-	-	2.05