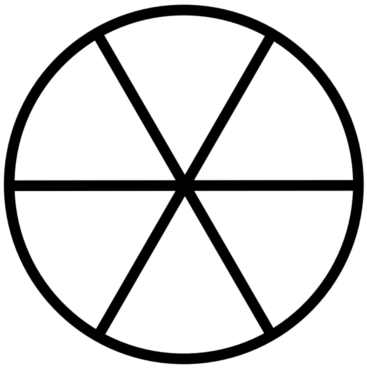
FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

2. kolo letnej časti 24. ročníka
B – kategória (mladší)
školský rok 2008/2009
termín odoslania riešení
15. 4. 2009 (Pozor streda!)

www.fks.sk

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
otazky@fks.sk

B-2.1 Koleso (4 body, riešia len prváci)



Predstavte si takéto. Ste režisérom vysokorozpočtového filmu a máte starostí nad hlavu. Herci prichádzajú do práce nevyspaní a pod vplyvom alkoholu. Rekvizity sú nekvalitné a rozpadajú sa vám pod rukami. Nestíhate mŕtvu čiaru a váš finančný partner sa vám vyhráža, že stiahne svoje financie z projektu. Hlavnej herečke sa na líci vyhodil pupák a teraz odmieta predstúpiť pred kamery. A navyše, občas sa stane, že keď snímate kamerou točiace sa koleso, vo výslednom filme sa koleso netočí vôbec, ba čo viac, niekedy sa dokonca točí dozadu. Vysvetlite, ako je to možné a zistite, pre akú najmenšiu rýchlosť otáčania kolesa (koľko otáčok za sekundu) bude koleso na filme stáť. Predpokladajte koleso také ako na obrázku. Film sa točí kamerou, ktorá berie 24 obrázkov za sekundu (teda, ako keby sa 24 krát za sekundu odfotí celú scénu).

B-2.2 Vajco (5 bodov)

Vo FKS máme vajcia. Uvarené v rýchlovarnej kanvici sa stávajú každodennou proteínovou zásobárňou matfyzom unaveného FKSáka. A pri takom olovrante človeka začnú napadať veci.. Napríklad: Vezmite vajce a nejako ho upevnite na stôl tak, aby stálo na svojej širšej špičke. Priamo zhora naň zatlačte doskou. Odmerajte:

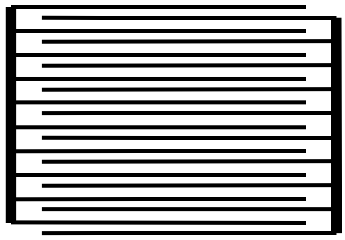
a) Aká sila je potrebná na rozbitie vajca?
b) Ako veľmi túto hodnotu ovplyvní, ak vajce vyfúkneme?

Prípadný rozdiel medzi hodnotami v a) a b) stručne vysvetlite.

B-2.3 Maličkosť (5 bodov)

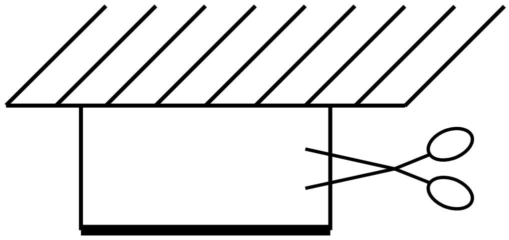
Kubo má na stole položenú svoju maličkosť. Trochu do nej drcol (fyzikálne: udelil jej nejakú rýchlosť), vďaka čomu sa začala pohybovať rovnobežne s hranou stola. Po dvoch sekundách od drcnutia maličkosť dosiahla okraj stola vzdialený jeden meter. Má Kubova maličkosť kolieska?

B-2.4 Kniha (5 bodov)



Filip minule zobral dve najnovšie vydania Odviate vetrom a stranu po strane ich „zasekol“ do seba, tak ako na obrázku. Jedno Odviate vetrom váži pol kila ($m = 0{,}5$ kg), má $N = 600$ strán, koeficient trenia medzi dvoma listami papiera je $f = 0{,}5$, rozmery knihy sú 20 cm × 30 cm ($a = 20$ cm, $b = 30$ cm). Predpokladajte, že väzba kníh je veľmi flexibilná a vôbec „nemá problém“ s tým, že musí poňať dvojnásobné množstvo strán. Akou silou musíme knihy ťahať od seba, aby sme ich rozdelili, ak v popísanej konštelácii voľne ležia položené na stole?

B-2.5 Záves (5 bodov)
Palička si visí. Zrazu prestrihneme jeden zo špagátov na ktorých visí. Akou silou bude v okamihu tesne po prestrihnutí napínaný druhý špagát? Hmotnosť paličky je *m* a mohli by sme vám o nej prezradiť ešte kopec ďalších zaujímavých a zbytočných parametrov, ale už mi došla fantázia :)



Tento seminár podporujú
KTFDF FMFI UK,
JSMF,
iuventa

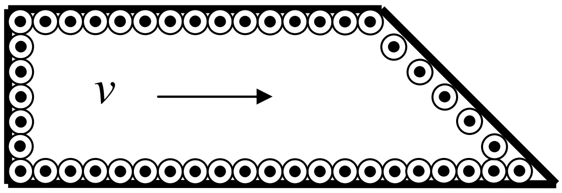
FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

3. kolo letnej časti 24. ročníka
B – kategória (mladší)
školský rok 2008/2009
termín odoslania riešení
11. 5. 2009

www.fks.sk

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
otazky@fks.sk

B-3.1 Tank (4 bodov, riešia len prváci)
Predstavte si tank, ktorý sa pohybuje po zemi rýchlosťou v. Tank má pás, ktorý vyzerá tak, ako na obrázku. Ktorým smerom a akými veľkými rýchlosťami sa pohybujú jednotlivé kusy pásu tanku? Sklon prednej časti pásu je 45°.

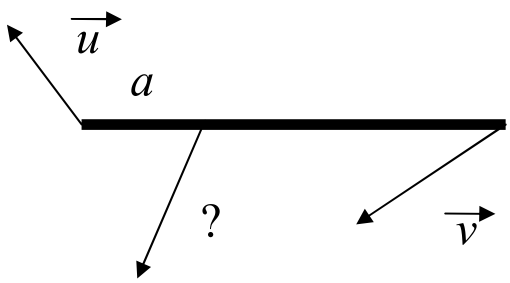


B-3.2 Utopená loptička (5 bodov)
Pingpongovú loptičkú s polomerom r a hmotnosťou m držíme ponorenú 10 cm pod voľným povrchom vody. Zrazu ju pustíme. Do akej výšky vyskočí? Brzdné sily pôsobiace na loptičku môžete zanedbať.

B-3.3 Tyčka (5 bodov)
Traja kamaráti chytili tyč. Jano ju chytil za jeden kraj, Jano za druhý a Jano vo vzdialenosti a od kraja. Krajní Janovia sa v istú chvíľu rozhodli, že tyč budú niesť rýchosťami u a v tak ako na obrázku. Tyč je neroztiahnuteľná a má dĺžku l.

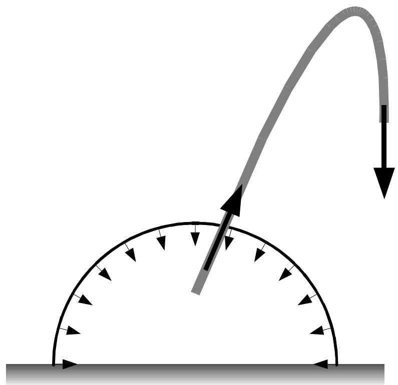
a) Aké vlastnosti musia spĺňať vektory u a v aby takáto situácia mohla nastať?
b) Ako sa má v tomto okamihu pohybovať stredný Jano, aby ostal v kontakte s tyčou?
c) Ako sa má v tomto okamihu pohybovať stredný Jano, aby ostal v kontakte s tyčou a stále bol od krajného Jana vzdialený o a?

Ako odpovede na otázky od vás chceme geometrický postup, ako zo zadaných vektorov skonštruujete to, čo treba.



B-3.4 Vyfúkačka (5 bodov)

Vezmite si slamku, pravítko, saponát, vodu, fotoaparát, bravčové karé a stopky. Vytvorte na hladkom povrchu polbublinu a nechajte ju cez slamku vyfúknuť. Pokúste sa zistiť, od akej mocniny *n* začiatočného polomeru *r* bubliny závisí čas *t* jej vyfúknutia!



Poznámka: Predpokladajte závislosť $t = C \cdot r^n$ *a meranie nezabudnite viackrát zopakovať. Pri analýze dát sa vám môže hodiť lineárna závislosť* $\log t = \log C + n \log r$. *Ak ste s logaritmami ešte nepracovali, neváhajte sa obzrieť na internete (http://sk.wikipedia.org/wiki/Logaritmus) alebo v knižkách.*

B-3.5 Príklad (5 bodov)

Mek Kajver utiekol pred špatňáčkmi na neznámu planétu, ktorá sa nápadne podobá na našu Zem – a rád by sa z nej dostal preč. Má k dispozícii raketu. Spolu so všetkým vybavením, nádržami na palivo, a tak ďalej, váži 10 ton, pričom ďalších 10 ton paliva sa dá natankovať do jej nádrží. Spaliny vznikajúce spálením paliva opúšťajú trysku rakety rýchlosťou 23 km/s a ich hmotnosť je 10 kg za sekundu. Mek odštartuje z povrchu planéty t.j. zo vzdialenosti 6 378km od jej stredu, hmotnosť planéty je $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, gravitačná konštanta $6{,}67 \cdot 10^{-11}$. Zistite

a) Akým zrýchlením sa bude raketa pohybovať hneď po zapnutí motorov?
b) Podarí sa Mekovi opustiť gravitačné pôsobenie planéty (t.j. získať potrebnú rýchlosť na únik do nekonečna?) Ak áno, akou rýchlosťou by sa (do nekonečna) dostal? Ak nie, do akej maximálnej vzdialenosti od stredu planéty vyletí?
c) Koľko hmotnosti môže ešte pribrať / sa musí zbaviť, aby mu palivo stačilo akurát na opustenie gravitačného pôsobenia planéty (aby do nekonečna priletel nulovou rýchlosťou?)

Ako už zadanie úlohy napovedá, v tomto prípade nebazírujeme na všeobecných riešeniach – uspokojí nás hocaká približná metóda, ktorou dostanete čo najpresnejší výsledok. V prípade použitia počítača, nám pošlite rozumný popis toho, čo ste vlastne robili (program, resp. excelovský sheet alebo aspoň jeho popis, resp. hocičo iné použijete), aby sa z toho opravovateľ vysomáril.

Tento seminár podporujú
KTFDF FMFI UK,
JSMF,
iuventa

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 1. série
B – kategória (mladší)
24. ročník
letný semester
školský rok 2008/2009

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
otazky@fks.sk

www. **.sk**

B-1.1 Fajo (opravovala Janka)

„Tak, a teraz ten check-in stihnem", povedal si Fajo po tom, čo mu naposledy lietadlo do Londýna zdrhlo pred nosom. Jeho úloha je však neľahká. Stojí na letisku na konci dlhočiznej chodby a potrebuje ňou celou prejsť. Aby sa cestujúci príliš nenachodili, sú v chodbe nainštalované pohyblivé pásy. Človek, ktorý si na ne stúpi, je unášaný konštantou rýchlosťou tým správnym smerom. Fajo je odhodlaný kráčať rýchlosťou 6 km/h a to ako po rovnej zemi, tak aj po páse. Má však ešte jeden problém: Na topánke sa mu rozviazala šnúrka. Jej zaviazanie mu bude trvať presne 15 sekúnd – počas týchto 15 sekúnd bude stáť (na zemi alebo na páse). Ak chce chodbou prejsť za čo najkratší čas, má si zaviazať šnúrku na páse, alebo mimo neho? Odpoveď poriadne zdôvodnite. Pokiaľ nebudete vedieť s úlohou v tomto stave pohnúť, skúste si za neznáme parametre (dĺžka chodby, dĺžka pásov, atď…) navoliť nejaké konkrétne čísla a úlohu zrátať pre ne.

Úloha sa dala riešiť rôzne. Najpriamočiarejšie je napísať si, koľko bude Fajovi trvať prejdenie chodby pre každý prípad (zaviazanie šnúrky mimo pásu a na ňom), a potom tieto časy porovnať. Skúsme sa však zamyslieť. Predstavme si troch Fajov: Fajo1 si zavezuje šnúrku na páse, Fajo2 mimo pásu a Fajo s čiarkou (Fajo') si zavezuje šnúrku na páse, avšak popri zavezovaní ešte kráča proti pásu takou istou rýchlosťou akou sa pohybuje pás (a teda vzhľadom na zem vlastne stojí). Prečo vlastne zavádzame Faja', keď takýto Fajo odporuje podmienkam zo zadania (pri zavezovaní sa hýbe?) Pretože odporuje-neodporuje, je hneď vidno, že čo sa týka časov potrebných na prechod letiskom Fajo' = Fajo2 a tiež Fajo' > Fajo1. Preto evidentne Fajo2 > Fajo1 t.j. šnúrku je výhodné zavezovať na páse.

B-1.2 Čakám, čakáš, čakáme (opravovali Halucinka a Tomáš)

Samo každodenne dochádza do školy poriadny kus cesty a pri tom sa na autobus čo? Čaká. Poslených 800 metrov cesty k zastávke už však Samuel vidí, čo sa na zastávke deje. V rámci riadenia sa heslom „čakáš – nežiješ" zvolil pre posledných 800 metrov nasledovnú stratégiu: pokiaľ ešte nevidel na zastávku prísť autobus, beží rýchlosťou 12 km/h*. Pokiaľ autobus videl, spomalí a chôdzou (6* km/h*) dôjde zvyšok dráhy. Koľko Samo v priemere čaká na zastávke, ak autobusy chodia v 10 minútových intervaloch a Samo chodí z domu úplne náhodne?.*

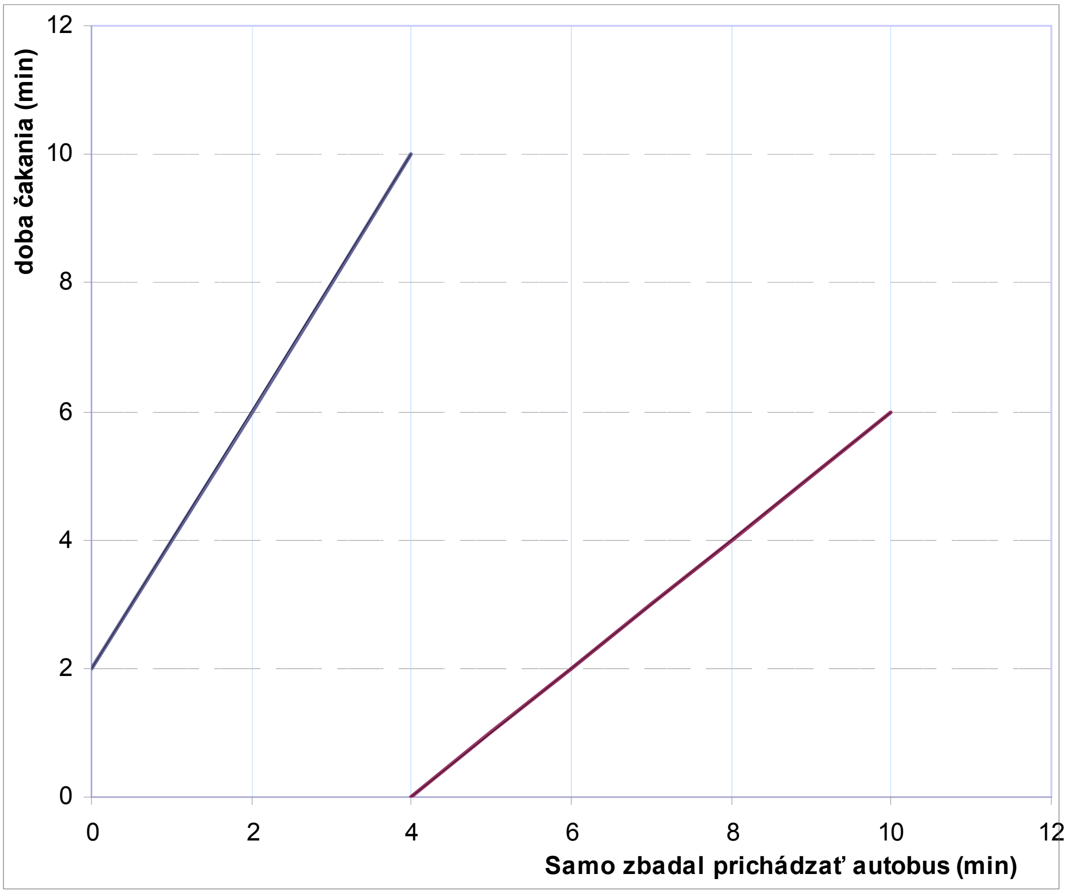
V okamihu keď Samo prvý krát uvidí zastávku, začneme merať čas. Niekedy od teraz po 10 minút bude zo zastávky odchádzať autobus, pričom tento čas je úplne náhodný. My potrebujeme vedieť, koľko bude čakať v priemernom prípade – musíme teda ako keby „spriemerovať všetky možnosti" ktoré môžu nastať. Ako sa takýto priemer robí si hneď ukážeme. Definujme si funkciu $f(t)$ ako dĺžku čakania, ktorá Samuela čaká za predpokladu, že v čase t uvidel zo zastávky odchádzať autobus. Priemerná výška grafu funkcie f bude potom odpovedať priemernej dobe čakania Sama na autobus. A ako bude $f(t)$ presne vyzerať? V prvom rade, ako ľahký výpočet ukáže, Samo sa na zastávku dostane za 4 minúty behom alebo za 8 minút chôdzou. Z tohto hneď vidíme, že $f(0) = 2$ min – Samo okamžite prechádza do chôdze, 8 minút kráča na zastávku, tam čaká 2 minúty. Ďalej zaujímavá hodnota je $f(4)$. Po 4 minúte behu Samo akurát dobehol na zastávku, z ktorej *akurát* odchádza autobus. Podľa toho či ho stihne, bude čakať 0 alebo 10 minút. V tomto bode bude mať teda funkcia ako keby 2 funkčné hodnoty[1]. Ďalej pre časy väčšie ako 4 minúty Samo už čaká na zastávke a

[1] Rigorózni matematici odpustia…

keď autobus príde tak doň nasadne. Preto pre tieto časy platí triviálne $f(t) = t - 4$ min. Ostáva už len vyšetriť správanie f na prvých štyroch minútach. Od času, kedy Samo uvidel autobus lineárne závisí dráha, ktorú ešte musí prejsť na zastávku a teda aj čas, ktorý mu tento prechod potrvá, a teda aj čas, ktorý bude ešte čakať. Spojíme funkčné hodnoty v čase 0 a 4 min rovnou čiarou (linearita) a máme tu,

TAMTADADÁÁÁÁÁÁÁÁ

graf funkcie f. Prehliadnite si ho, aký je sličný.



Celková plocha pod grafom funkcie f na skúmanom intervale je 42 minút štvorcových[2], čo vydelené jeho šírkou 10 minút dáva priemernú výšku (= dobu čakania) 4,2 minúty.

B-1.3 Tyč (opravoval Samo)

Mek Kajver sa zase raz dostal do peknej šlamastiky. Špatňáčci ho zavreli do kockovej cely o hrane dĺžky a. Z cely sa dostane iba ak dokáže zapôsobiť na bočnú stenu silou o veľkosti $F_{\text{veľká}}$. Mek Kajver vytiahol z vrecka tyč dĺžky $l > a$. Tyč oprel o stenu a zavesil sa na ňu ako na obrázku. Predpokladajte že trenie medzi tyčou a stenami je nulové, tyč je nehmotná avšak dokonale pevná. Naopak, náš hrdina má hmotnosť M a je dosť ohybný. Už predpokladáte? Tak potom skúste odpovedať:

a) Kam sa má na tyč zavesiť, aby táto pôsobila na stenu čo najväčšou silou?

b) Akú veľkosť a aký smer bude mať vtedy táto sila?

Aká maximálna sila sa dá uvedenou technikou dosiahnuť, ak má tyč nastaviteľnú dĺžku?

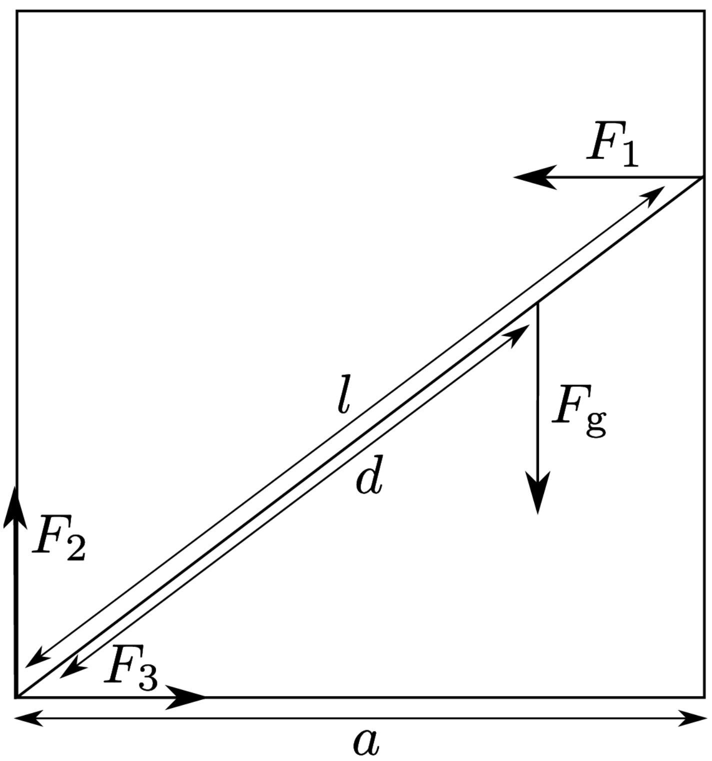
Začnime tým, že oprášime svoje fyzikálne vedomosti z dynamiky. Jedným z najdôležitejších fyzikálnych zákonov je Newtonovo $F = ma$, kde F je súčet všetkých síl pôsobiacich na teleso, m je jeho hmotnosť a a je zrýchlenie jeho ťažiska. Obdobou tohto zákona pre rotačné pohyby telies upevnených na nehybnej osi je $N = I\varepsilon$, kde N je súčet

---

[2] Čo kukáte, jak keby ste ešte nevideli serióznu jednotku plochy :)

všetkých momentov síl, ktoré pôsobia na teleso, I je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom k danej osi a ε je uhlové zrýchlenie telesa. Všimnime si, čo nám tieto dva zákony hovoria pre teleso, ktoré je v pokoji. Aby teleso bolo v pokoji, musí mať zrýchlenie rovné nule, to však (pre telesá s nenulovou hmotnosťou) znamená, že súčet všetkých síl pôsobiacich na teleso musí byť rovný nule. Radi by sme využili aj vzťah, ktorý poznáme pre rotačné pohyby, na to by však najskôr teleso muselo byť upevnené na nehybnej osi? Čo s tým urobíme? Všimneme si, že ak je teleso v pokoji – nehýbe sa, môžeme ho hocikde prevŕtať a prevliecť tadiaľ, bez toho, že by sme tým čokoľvek ovplyvnili, malú osku, ktorá bude (keďže teleso sa nehýbe) nehybná. Po takomto prevŕtaní už môžeme smelo využiť druhú rovnicu, z ktorej vyplýva, že súčet momentov síl vzhľadom na osku musí byť nulový, aby sa teleso nehýbalo. Keďže osku sme si mohli zvoliť kdekoľvek, znamená to, že súčet momentov síl musí byť nulový vzhľadom na ľubovoľný bod, čo nám dáva netušené možnosti pri počítaní tohto príkladu.

Nuž, po stručnom teoretickom úvode sa môžeme pustiť do samotného riešenia. No a keďže základom dobrého riešenia je dobrý obrázok, jeden si nakreslíme.



Obr. 1: Sily pôsobiace na tyč

Na tyč pôsobia štyri sily, tiažová sila nášho hrdinu, sila od pravej steny, sila od ľavej steny (šikovnému riešiteľovi je jasné, že sa ich veľkosti rovnajú) a nakoniec ešte sila od podlahy. Poďme si spočítať momenty síl vzhľadom na roh miestnosti, o ktorý je tyč opretá. Keďže vieme, že ich súčet musí byť rovný nule, dostávame rovnosť:

$$\frac{F_g a d}{l} = F_1 \sqrt{l^2 - a^2}$$

Už by malo byť vidno, že sila F_1, ktorou bojar láme stenu, bude maximálna, ak sa zavesí čo najbližšie k nej, teda ak $d = l$. Veľkosť sily vtedy bude:

$$\frac{F_g a}{\sqrt{l^2 - a^2}} = F_1$$

A už možno vidieť prekvapivý výsledok, ak môžeme dĺžku tyče nastavovať, maximálnu silu vytvoríme keď dĺžka tyče bude len o málo väčšia ako šírka miestnosti. Pritom veľkosť sily, ktorú sme schopní vyprodukovať, *neexistuje žiadny horný limit*. No nie je to skvelé? Samozrejme, obmedzení technického charakteru je neúrekom (tyč má svoje rozmery, pri veľkých tlakoch sa deformuje…)

Úlohu sa nám podarilo správne vyriešiť, zostáva však otázka, či by sa niečo zmenilo, keby sme si zvolili os v inom bode tyče. Snaživý riešiteľ si môže na niekoľkých osiach vyskúšať, že by sa skutočne nič nezmenilo a výsledok by bol ten istý. To znamená, že každá takáto ďalšia rovnica pre inú os sa dá vykombinovať z nami napísaných rovníc pre rovnováhu. Okrem iného to teda znamená aj toľko, že nemá zmysel si pri počítaní podobného príkladu voliť viacero rôznych osí a písať momentové rovnice pre ne – každá takáto rovnica navyše nám pridá nulovú informáciu[3].

B-1.4 Delovka (opravoval Jano)

Delová guľa je vystrelená zvislo nahor a v najvyššom bode sa rozdelí na tri rovnaké časti. Časť pohybujúca sa zvislo dopadne na zem po čase T1. Zvyšné dve časti dopadnú v rovnakom čase T2 (T1 < T2). V akej výške H sa guľa rozletela?

Guľa si letí nahor zvislým vrhom a v najvyššom mieste letu, čo tu zrazu? „Voľačo ma dvíha, čosi sa porobilo… lietam sprava doľava!?“ Takto by umelec[4] popísal situáciu. Guľa v najvyššom bode akoby na okamih zastala (t.j. jej hybnosť a aj rýchlosť je rovná nule). Preto ak sa guľa v tomto okamihu rozletí, bude súčet hybností rozletených častí tesne po rozletení nula. Inými slovami magický ZZH (zákon zachovania hydrantu, pardon hybnosti), nám hovorí $0 = p_1 + p_2 + p_3$, kde p_1 označuje hybnosť najskôr dopadnuvšieho fragmentu a zvyšné p-čka prislúchajú zvyšným fragmentom. Z toho, že jedinou následne pôsobiacou silou je tiažová, ktorá nezávisí od miesta, kde sa nachádzame ani od rýchlosti plynie, že pohyby vo vodorovnom a zvislom smere sú nezávislé. Pohyb vo vodorovnom smere nás teda vôbec zaujímať nemusí[5] a preto pre jednoduchosť môžeme predpokladať, že žiadny nie je.[6]

Teda odteraz sa sústredíme výhradne na zvislý smer. V prvom rade zo zadania vyplýva, že všetky kusy sú rovnaké. Ďalej, hybnosť dvoch neskôrdopadnutých fragmentov musela byť po výbuchu rovnaká a teda $p_2 = p_3$. Hmotnosti sú rovnaké a tak ZZH bude viesť na rovnicu $v_1 + 2v_2 = 0$, a teda nech $v_1 = v$ a $v_2 = v/2$, teda kusy letiace nahor majú zvislú zložku rýchlosti polovičnú.

Pre kus$_1$ sa teda koná pád nadol s počiatočnou rýchlosťou v v smere nadol z výšky H. Rovnica pre jeho výšku od času je

$$y_1 = -gt^2/2 - vt + H,$$

dosadením podmienky pre dopad $y_1(t_1) = 0$ máme $H = gt_1^2/2 + vt_1$, naľavo je hľadaná výška výbuchu a napravo krásny výraz, akurát tú rýchlosť v nepoznáme.

Pre ostatné dva kusy je zvislá situácia rovnaká, a síce letia nahor rýchlosťou $v/2$ a zároveň padajú voľným pádom z výšky H. Rovnica pre ich výšku od času je

---

3 Po čínsky sa to povie aj takto: $\sum (r_i + r') \times F_i = \sum r_i \times F_i$

4 Karpatské chrbáty – Skočil som na mínu (Karpatské Chrbáty – 3 (1999))

5 To, ako sa fragment pohybuje vo vodorovnom smere nijako neovplyvňuje to, kedy dopadne na zem.

6 Symetrický prípad troch rovnakých hybností smerujúcich do vrcholov rovnostranného trojuholníka je len špeciálnym prípadom, nie všeobecným riešením. Preto šli body dolu.

$$y_2 = -gt^2/2 + vt/2 + H \ .$$

Opäť dosadíme podmienky pre dopad $y_2(t_2) = 0$ a máme analogicky $H = gt_2^2/2 + vt_2$.

Dostali sme 2 lineárne rovnice o dvoch neznámych *H*, *v*. To vieme ľahko vyriešiť, stačí ich napríklad vhodne prenásobiť a sčítať a dostaneme výsledný vzťah

$$H = \frac{gT_1T_2(T_1 + 2T_2)}{2(2T_1 + T_2)} \ .$$

B-1.5 Experimentálka? (opravoval Jakub)

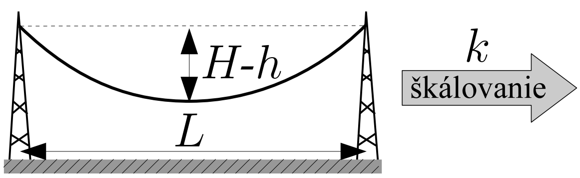
Elektrické vedenie vysokého napätia pozostáva zo stĺpov, na ktorých je vo výške H = 55 m *upevnených 6 medených vodičov (2-krát trojfázovo). Z bezpečnostných dôvodov nemôže vodič vysokého napätia klesnúť pod výšku h = 40* m *nad povrch zeme. Rozostup stĺpov je L = 300* m. *Urč celkovú dĺžku vodičov potrebných pre dĺžku vedenia 100 L (teda 30* km*)! Tiež zisti, koľkokrát menšie je najvyššie (mechanické) napätie vo vodiči voči jeho medzi pevnosti! Môžu sa ti hodiť údaje: hustota medi ρ = 8 930* kg m^{-3}*, medza pevnosti medi v ťahu σ_t = 450* MPa. *Pri tejto úlohe nás nezaujíma všeobecný výsledok, postačí, ak nám s dostatočnou presnosťou povieš, koľko ti to vyšlo konkrétne pre zadané hodnoty. K riešeniu samozrejme pripoj komentár, ako si to robil, prečo je to tak dobre a ak máš len približný výsledok, tak aj odhad chyby.*

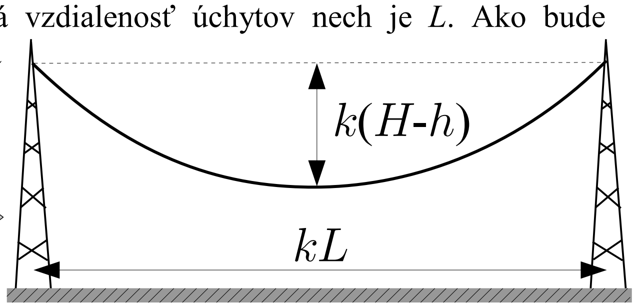
Fúúu… Toto sa vôbec nepodobá na nejakú rozumnú stredoškolskú úlohu. Však toto môže byť celkom *praktická* vec! Vraj experimentálka…?

Úlohu budeme riešiť pre prípad, že vodiče sú v najnižšom mieste *práve* vo výške *h*, ako som napísal aj na debatu. Za nedôslednosť v zadaní sa ospravedlňujem.

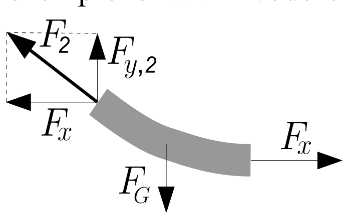
Je celkom rozumné skúsiť nahradiť neznámy tvar vodičov čímsi známym, čo sa na ne podobá. Tak to urobila väčšina z vás a použila pritom zväčša lomenú čiaru alebo kružnicový oblúk a získala dosť dobrý výsledok. Tento prístup sa mi nepáči, lebo asi nikto z vás nevie zistiť, akej veľkej chyby sa pritom dopustil. To určenie chyby je totiž obdobne ťažké ako nájsť presné riešenie. Zvolil som preto *experimentálny* prístup, ktorý je síce vo výsledku menej presný ako tá kružnica, avšak ktorého chybovosť mám lepšie pod kontrolou.

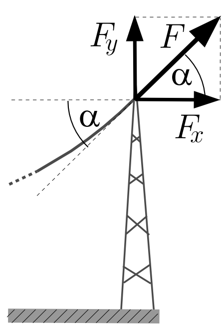
Ako prvé sa vysporiadame s tými rozmermi. Keď sa človek tak popozerá ako vyzerajú všelijaké visiace šnúrky a retiazky a vedenia a špagáty, tak zistí, že všetky visia tak nejako podobne. Skúsme naše pozorovanie trochu formalizovať: majme lano dĺžky *l* upevnené na oboch koncoch rovnako vysoko. Vodorovná vzdialenosť úchytov nech je *L*. Ako bude vyzerať lano *k*-krát dlhšie a natiahnuté na vzdialenosti *k*-krát dlhšej?





Lano bude vyzerať úplne rovnako, len to celé bude *k*-krát väčšie. Prečo? Nuž preto, lebo pôvodné lano zaujalo energeticky najvýhodnejšiu polohu. Zrejme *k*-krát dlhšie lano môže prekonávať vodorovnú vzdialenosť *kL* majúc rovnaký tvar ako pôvodné lano. A keďže pre pôvodné lano to bola najvýhodnejší tvar, tak to bude aj pre nové lano.[7]





Potom si ale môžem povedať, že

---

[7] Keď malo pôvodné lano ťažisko v hĺbke *d* pod úchytmi, tak nové bude mať v hĺbke *kd*. Nemôže ho mať hlbšie, lebo keby existoval taký tvar, že ťažisko nového lana by bolo hlbšie, tak by existoval tvar pre *k*-krát menšie lano taký, že ťažisko lana by bolo hlbšie ako *d*. Čo je spor.

namiesto skúmania elektrického vedenia môžem pekne doma v plnom komforte zavesiť špagát s rozostupom úchytov $L' = 3$ m a výškou previsu $(H - h)' = 15$ cm.[8] Môžem zmerať dĺžku špagátu l', ktorý som na to použil a napísať odpoveď l'/k.

Ďalej by som chcel zistiť to mechanické napätie. Najprv si musíme uvedomiť, že horizontálna zložka napätia v lane je pozdĺž celého lana rovnaká. Dôvod nájdeme na obrázku vpravo, kde sme si zakreslili sily pôsobiace na kus lana ľubovoľnej dĺžky, ktorého jeden koniec sa nachádza v najnižšom bode lana. Na tento kus pôsobí lano ťahovými silami sprava a zľava a ešte naň pôsobí tiaž. Lano je statické a teda sily musia byť v rovnováhe. Preto musia byť vodorovné zložky napätia v každom bode lana rovnaké ako v jeho najnižšej časti, čo znamená, že všade budú rovnaké.

Potom je už ľahké určiť maximálne napätie. Aha, zvislá zložka napätia je podľa obrázku hore rovná tiaži lana medzi daným miestom a najbližším najnižším bodom lana. Takže najväčšie napätie musí byť pri stožiaroch. Veľkosť maximálneho napätia F pritom je $F = F_y / \sin\alpha$. Uhol α viem odmerať, však moje lanko je geometricky podobné s drôtom. Nuž a sila F_y má podľa predošlých argumentov veľkosť tiaže polovice drôtu medzi 2 stožiarmi, čiže $F_y = Sl\rho g/2$. Medza pevnosti lana je $\sigma_t S$. V zadaní požadovaný pomer sa nazýva koeficient bezpečnosti, označím ho K, a rovná sa $K = \dfrac{\sigma_t S}{F} = \dfrac{2\sigma_t}{l\rho g}\sin\alpha$.

Moje meranie: Zobral som si pevný špagát a upevnil ho na vrch 2 zárubní vo vzdialenosti $L' = (756{,}5 \pm\ 0{,}3)$ cm. Previsnutie lana som potom úmerne tomu nastavil na hodnotu $(H - h)' = L'/L\,(H - h) \approx 37{,}8$ mm. Pri tomto previsnutí som si pravítkom spravil dotyčnicu v bode úchytu a vo veľkom pravouhlom trojuholníku zmeral odvesny. Získal som tak uhol v bode úchytu $\alpha = (11{,}1 \pm 0{,}2)\,°$. Potom som si urobil na špagáte značky v miestach uchytenia a položil ho na zem. Natiahol som ho približne rovnakou silou ako keď visel a zafixoval. Zmeral som jeho dĺžku $l' = (762{,}6 \pm 0{,}5)$ cm.

Moje výsledky: Dĺžka potrebných drôtov je $(181{,}45 \pm 0{,}2)$ km. Dĺžka drôtov zistená analytickým výpočtom pre dokonale ohybné nenaťahovateľné lano je 181,194 km. Rozdiel je spôsobený chybou metódy a „nedokonalosťou" použitého materiálu. Koeficient bezpečnosti mi vyšiel $K = (6{,}54 \pm 0{,}13)$.

Hodnotenie: Za riešenie dĺžky priblížením lomenej čiary sa dal dostať celý 1 bod, priblíženie kružnicou alebo parabolou mohlo získať 2 body. Za správne určené maximálne mechanické napätie v drôtoch sa dalo pri aproximácii lomenou čiarou získať 1,5 boda, kružničiari/parabolici mohli získať 2 body. Viac ako 4 body sa dali získať použitím postupu, kde sa dá chyba rozumne odhadnúť – najjednoduchšie experimentom.

Dodatok č.1: Pri riešení sme využili predpoklad, že prierez drôtov je konštantný.

Dodatok č.2: Schéma nášho riešenia pozostávala s rozdelenia úlohy na experimentálnu a teoretickú časť, pričom sme použili nejaký model lana (dokonale ohybné, nenaťahovateľné). Vôbec sme však neoverili, či náš model súhlasí s experimentom. Tento prístup je v experimentálnej praxi bežný, takže neostáva vám iné ako si zvykať ☹.

Dodatok č.3: Môžeme si všimnúť, že mechanické napätie v drôtoch je prakticky konštantné, lebo veľkosť maximálneho napätia F je skoro rovnaká ako veľkosť vodorovnej zložky F_x. Ak by sme teda chceli zarátať aj natiahnutie drôtov, tak môžeme s veľmi dobrou presnosťou napísať rovnosť $d = l \Big/ \left(1 + \dfrac{\sigma_t}{KE}\right)$, kde d je dĺžka drôtov v nenatiahnutom stave a $E = 130$ MPa je Youngov modul pružnosti medi. Natiahnutie vplyvom mechanického napätia v drôtoch je približne 0,053 % a celková potrebná dĺžka reálnych vodičov je preto asi o 100 m menšia.

Dodatok č.4: Laná v ideálnom prípade nevisia ani ako lomené čiary, ani ako kružnicové oblúky, ani ako časti paraboly. Pre málo prehnuté laná sú tie priblíženia kružnicou a parabolou dosť úspešné, avšak v skutočnosti visia ideálne laná ako kosínus hyperbolický…

[8] Zvolil som si teda koeficient podobnosti $k = 1/100$.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina B – kategórie po 1. sérii letného semestra 24. ročníka

	Meno	Škola	B-1.1	B-1.2	B-1.3	B-1.4	B-1.5	☠	∑1
1	Kováč Ondrej	GsvCaM	–	4,50	4,50	5,00	4,00	–	18,00
2	Vlček Andrej	EvSŠ Lipt. Mikuláš	2,00	–	5,00	5,00	4,50	–	16,50
3	Ficková Klára	G KE Poštová	4,00	4,50	3,50	4,00	–	–	16,00
4	Pločeková Andrea	G Piešťany	–	4,70	2,50	3,40	4,50	–	15,10
5	Bučková Lucia	G Piešťany	–	5,00	2,50	3,40	4,00	–	14,90
6	Švančara Patrik	G Ľ. Štúra Trenčín	4,00	2,00	4,00	3,00	3,50	–	14,50
7	Kosec Peter	G Ľ. Štúra Trenčín	4,00	5,00	1,00	3,00	2,00	–	14,00
8	Bogárová Zuzana	G Ľ. Štúra Trenčín	–	5,00	4,90	2,00	1,00	–	12,90
9	Horňák Marián		4,00	4,50	0,50	3,00	–	–	12,00
	Savinec Michal	GPH Michalovce	3,50	5,00	1,00	1,50	2,00	–	12,00
11	Kireš Jakub	G KE Poštová	3,80	3,50	2,00	2,00	2,50	–	11,80
12	Kubincová Petra	ŠPMNDAG	–	5,00	3,50	3,00	–	–	11,50
	Pálenik Juraj	ŠPMNDAG	–	4,00	3,50	3,00	1,00	–	11,50
14	Pistráková Alexandra	G KE Poštová	3,50	2,50	3,50	1,00	1,50	0	11,00
15	Mrocková Mária	G BA J.Hronca	–	5,00	3,00	–	2,50	–	10,50
16	Heželyová Slávka	ŠPMNDAG	–	5,00	0,00	5,00	–	–	10,00
	Večerík Matej	ŠPMNDAG	–	5,00	0,00	5,00	–	–	10,00
18	Ďuratný Miloslav		1,50	3,00	4,00	0,10	1,00	–	9,50
	Faguľová Kristína	G KE Poštová	4,00	3,50	1,00	1,00	–	–	9,50
	Komanová Kristína		4,00	3,50	0,00	–	2,00	–	9,50
21	Galovičová Soňa	G ZA Okružná	4,00	5,00	–	–	–	–	9,00
	Guričan Pavol	G BA Grösslingova	–	5,00	0,00	4,00	–	–	9,00
23	Lami Jozef	G KE Poštová	4,00	0,30	3,50	1,80	–	1	8,60
24	Kögler Pavol	G Galanta	1,00	4,50	0,00	1,00	2,00	–	8,50
	Mikulaj Pavol		4,00	4,00	0,00	0,50	–	–	8,50
26	Jančo Tomáš	G Ľ. Štúra Trenčín	–	2,50	2,00	0,90	3,00	–	8,40
27	Santer Jakub	GMH	–	4,00	2,00	–	2,00	–	8,00
28	Masár Juraj	G Bilíkova	–	4,50	0,00	3,40	–	–	7,90
	Trousilová Jitka		1,50	–	2,00	3,40	1,00	–	7,90
30	Múthová Denisa	G Bil, Žilina	–	5,00	0,00	0,80	2,00	–	7,80
31	Baxová Zuzana		2,00	3,50	–	1,00	–	–	6,50
	Erdödyová Lívia	GPH Michalovce	1,50	4,00	–	1,50	1,00	–	6,50
33	Kramárik Lukáš	G Ľ. Štúra Trenčín	–	2,00	0,00	1,00	3,20	–	6,20
34	Kopf Michal	G Opava	3,80	3,50	–	1,30	–	3	5,60
35	Bartko Matúš	G Ľ. Štúra Trenčín	–	1,00	0,00	0,20	3,50	–	4,70
36	Bohiniková Alžbeta	G BA Grösslingova	–	3,50	0,00	–	–	–	3,50
	Dzurjová Silvia	GPH Michalovce	–	–	0,00	3,50	–	–	3,50
38	Vranák Daniel		1,50	0,50	0,00	1,00	0,00	–	3,00
39	Dobrotka Matúš	G BN Bánovce	0,50	2,00	0,00	0,10	0,00	–	2,60
40	Čurmová Zuzana	GPH Michalovce	1,50	–	0,00	–	–	–	1,50
41	Čurmová Jaroslava	GPH Michalovce	–	0,50	–	0,50	–	–	1,00

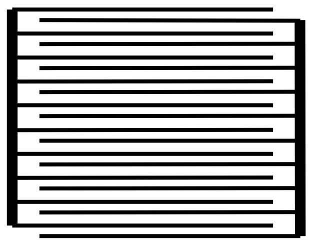
FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

2. kolo letnej časti 24. ročníka
A – kategória (staršia)
školský rok 2008/2009
termín odoslania riešení
15. 4. 2009

www. **.sk**

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
otazky@fks.sk

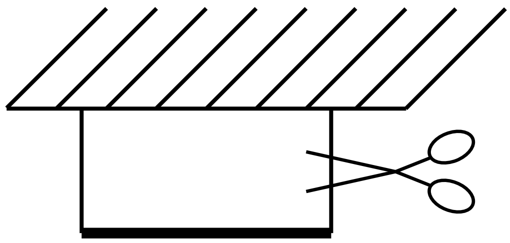
A–2.1 Kniha (5 bodov)



Filip minule zobral dve najnovšie vydania Odviate vetrom a stranu po strane ich „zasekol“ do seba, tak ako na obrázku. Jedno Odviate vetrom váži pol kila ($m = 0{,}5$ kg), má $N = 600$ strán, koeficient trenia medzi dvoma listami papiera je $f = 0{,}5$, rozmery knihy sú 20 cm x 30 cm ($a = 20$ cm, $b = 30$ cm). Predpokladajte, že väzba kníh je veľmi flexibilná a vôbec „nemá problém“ s tým, že musí poňať dvojnásobné množstvo strán. Akou silou musíme knihy ťahať od seba, aby sme ich rozdelili, ak v popísanej konštelácii voľne ležia položené na stole?

A–2.2 Záves (5 bodov)

Palička si visí. Zrazu prestrihneme jeden zo špagátov na ktorých visí. Akou silou bude v okamihu tesne po prestrihnutí napínaný druhý špagát? Hmotnosť paličky je m a mohli by sme vám o nej prezradiť ešte kopec ďalších zaujímavých a zbytočných parametrov, ale už mi došla fantázia :)



A–2.3 Maličkosť (5 bodov)

Kubo má na stole položenú svoju maličkosť. Trochu do nej drcol (fyzikálne: udelil jej nejakú rýchlosť), vďaka čomu sa začala pohybovať rovnobežne s hranou stola. Po dvoch sekundách od drcnutia maličkosť dosiahla okraj stola vzdialený jeden meter. Má Kubova maličkosť kolieska?

A–2.4 Malý princ… (5 + 1 bod)

si len tak sedí na svojej planétke o hmotnosti M. Zrazu okolo nej prefrčí asteroid o hmotnosti m rýchlosťou v. Koľko energie z celkovej kinetickej energie asteroidu dokáže malý princ zužitkovať? Aby ste si lepšie vedeli predstaviť, ako vyzerá také získavanie energie, uvedieme jeden ilustračný príklad: Vezmete dynamo (také malé oné s kolieskom, majú to niektoré bicykle. Otáčaš kolesom – vyrábaš prúd), namotáte naň dostatočné množstvo nekonečne tenkého, nekonečne pevného a nehmotného špagátu, ktorého druhý koniec harpúnujete do asteroidu a potom už len čakáte, koľko elektriny vám odvíjajúce sa lanko na dyname vyprodukuje, kým asteroid nezastane. Aby sa vám ľahšie rátalo môžete predpokladať, že vzdialenosť planétky od priamky po ktorej letel asteroid je veľmi malá. Bonusový bod dostanete, ak úlohu zrátate pre všeobecnú vzdialenosť d.

Tento seminár podporujú
KTFDF FMFI UK,
JSMF,
iuventa

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

3. kolo letnej časti 24. ročníka
A – kategória (staršia)
školský rok 2008/2009
termín odoslania riešení
11. 5. 2009

www. .sk

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
otazky@fks.sk

A–3.1 Utopená loptička (5 bodov)
Pingpongovú loptičkú s polomerom r a hmotnosťou m držíme ponorenú 10 cm pod voľným povrchom vody. Zrazu ju pustíme. Do akej výšky vyskočí? Brzdné sily pôsobiace na loptičku môžete zanedbať.

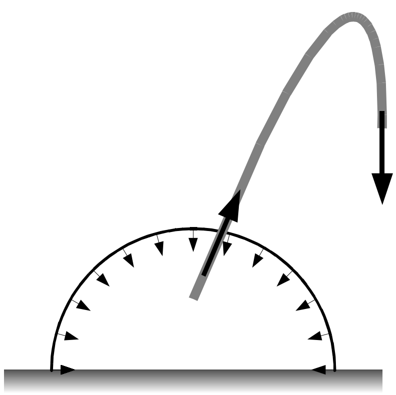
A–3.2 Numerika (5 bodov)
Mek Kajver utiekol pred špatňáčkmi na neznámu planétu, ktorá sa nápadne podobá na našu Zem – a rád by sa z nej dostal preč. Má k dispozícii raketu. Spolu so všetkým vybavením, nádržami na palivo, a tak ďalej, váži 10 ton, pričom ďalších 10 ton paliva sa dá natankovať do jej nádrží. Spaliny vznikajúce spálením paliva opúšťajú trysku rakety rýchlosťou 23 km/s a ich hmotnosť je 10 kg za sekundu. Mek odštartuje z povrchu planéty t.j. zo vzdialenosti 6 378 km od jej stredu, hmotnosť planéty je $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, gravitačná konštanta $6{,}67 \cdot 10^{-11}$. Zistite:

a) Akým zrýchlením sa bude raketa pohybovať hneď po zapnutí motorov?
b) Podarí sa Mekovi opustiť gravitačné pôsobenie planéty (t.j. získať potrebnú rýchlosť na únik do nekonečna?) Ak áno, akou rýchlosťou by sa (do nekonečna) dostal? Ak nie, do akej maximálnej vzdialenosti od stredu planéty vyletí?
c) Koľko hmotnosti môže ešte pribrať / sa musí zbaviť, aby mu palivo stačilo akurát na opustenie gravitačného pôsobenia planéty (aby do nekonečna priletel nulovou rýchlosťou?)

Ako už zadanie úlohy napovedá, v tomto prípade nebazírujeme na všeobecných riešeniach – uspokojí nás hocaká približná metóda, ktorou dostanete čo najpresnejší výsledok. V prípade použitia počítača, nám pošlite rozumný popis toho, čo ste vlastne robili (program, resp. excelovský sheet alebo aspoň jeho popis, resp. hocičo iné použijete), aby sa z toho opravovateľ vysomáril.

A–3.3 Vyfúkačka (5 bodov)
Vezmite si slamku, pravítko, saponát, vodu, fotoaparát, bravčové karé a stopky. Vytvorte na hladkom povrchu polbublinu a nechajte ju cez slamku vyfúknuť. Pokúste sa zistiť, od akej mocniny n začiatočného polomeru r bubliny závisí čas t jej vyfúknutia!

Poznámka: Predpokladajte závislosť $t = C \cdot r^n$ *a meranie nezabudnite viackrát zopakovať. Pri analýze dát sa vám môže hodiť lineárna závislosť* $\log t = \log C + n \log r$. *Ak ste s logaritmami ešte nepracovali, neváhajte sa obzrieť na internete (http://sk.wikipedia.org/wiki/Logaritmus) alebo v knižkách.*

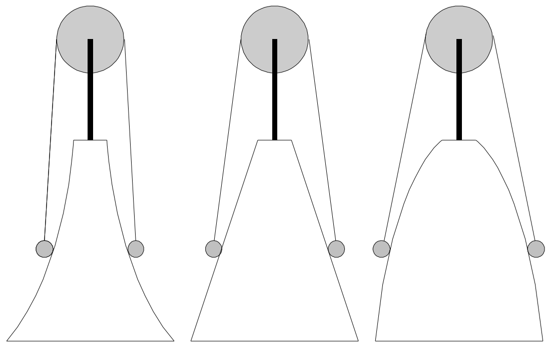


A–3.4 Nakladačka (5 bodov + 2 bonusové)

Po tom, čo Bzdušo presviedčal pouličných gangstrov, že diferenciálne rovnice sú mocnejšia zbraň než revolver, dostal od nich takúto nakladačku: Má zistiť, či sú rovnovážne polohy na jednotlivých kladkách stabilné, indiferentné alebo labilné (pozri obrázok). Pomôžete mu? Hmotnosti zavesených telies sú rovnaké. Predpokladajte, že v prípade zakrivených povrchov je ich polomer krivosti výrazne menší než dĺžka použitého lana.

Poznámka1: Bonusové body od nás dostanete, ak úlohu vyriešite pre všeobecný prípad.

Poznámka2: Odpoveď „Nie“ ako riešenie príkladu neakceptujeme :)



Tento seminár podporujú
KTFDF FMFI UK,
JSMF,
iuventa

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 1. série
A – kategória (starší)
24. ročník
letný semester
školský rok 2008/2009

www.fks.sk

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
otazky@fks.sk

A–1.1 Čakám, čakáš, čakáme (opravovali Halucinka a Tomáš)

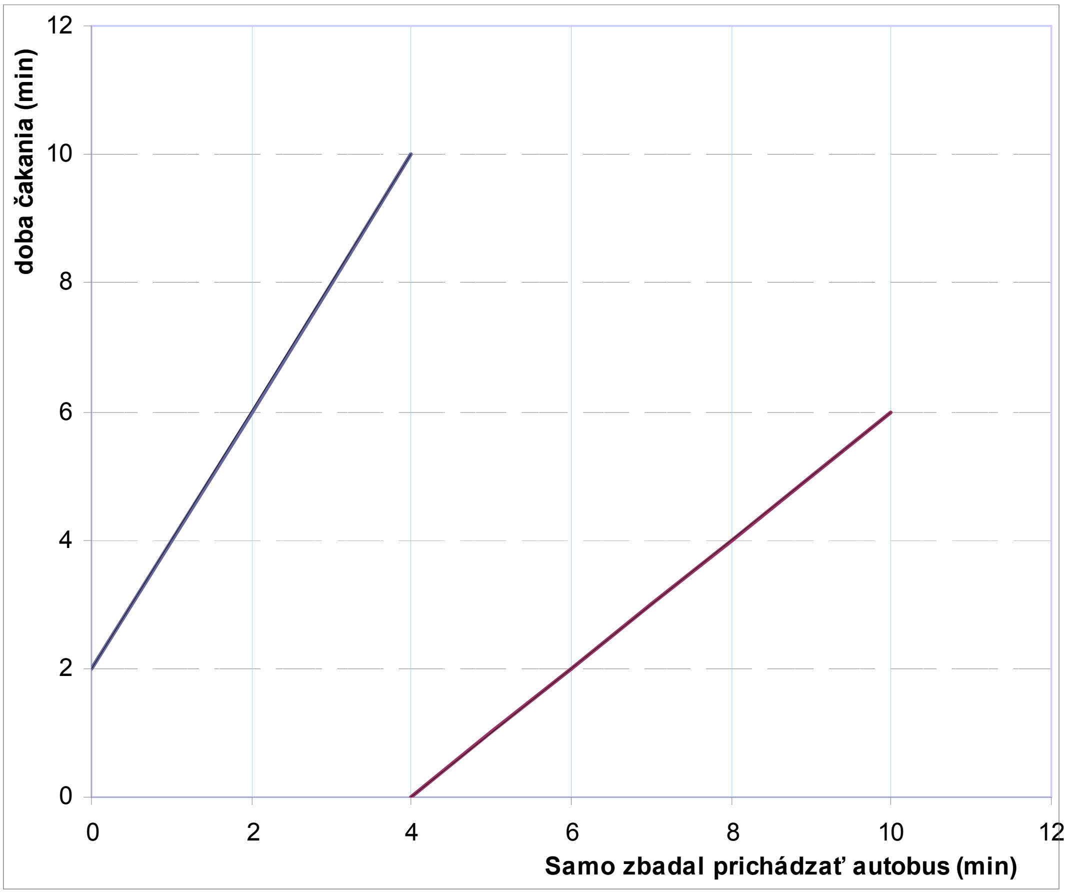
Samo každodenne dochádza do školy poriadny kus cesty a pri tom sa na autobus čo? Čaká. Poslených 800 metrov cesty k zastávke už však Samuel vidí, čo sa na zastávke deje. V rámci riadenia sa heslom „čakáš–nežiješ“ zvolil pre posledných 800 metrov nasledovnú stratégiu: pokiaľ ešte nevidel na zastávku prísť autobus, beží rýchlosťou 12 km/h. *Pokiaľ autobus videl, spomalí a chôdzou (6* km/h*) dôjde zvyšok dráhy. Koľko Samo v priemere čaká na zastávke, ak autobusy chodia v 10 minútových intervaloch a Samo chodí z domu úplne náhodne?.*

V okamihu keď Samo prvý krát uvidí zastávku, začneme merať čas. Niekedy od teraz po 10 minút bude zo zastávky odchádzať autobus, pričom tento čas je úplne náhodný. My potrebujeme vedieť, koľko bude čakať v priemernom prípade – musíme teda ako keby „spriemerovať všetky možnosti“ ktoré môžu nastať. Ako sa takýto priemer robí si hneď ukážeme. Definujme si funkciu $f(t)$ ako dĺžku čakania, ktorá Samuela čaká za predpokladu, že v čase t uvidel zo zastávky odchádzať autobus. Priemerná výška grafu funkcie f bude potom odpovedať priemernej dobe čakania Sama na autobus. A ako bude $f(t)$ presne vyzerať? V prvom rade, ako ľahký výpočet ukáže, Samo sa na zastávku dostane za 4 minúty behom alebo za 8 minút chôdzou. Z tohto hneď vidíme, že $f(0) = 2$ min – Samo okamžite prechádza do chôdze, 8 minút kráča na zastávku, tam čaká 2 minúty. Ďalej zaujímavá hodnota je $f(4)$. Po 4 minúte behu Samo akurát dobehol na zastávku, z ktorej *akurát* odchádza autobus. Podľa toho či ho stihne, bude čakať 0 alebo 10 minút. V tomto bode bude mať teda funkcia ako keby 2 funkčné hodnoty[1]. Ďalej pre časy väčšie ako 4 minúty Samo už čaká na zastávke a keď autobus príde tak doň nasadne. Preto pre tieto časy platí triviálne $f(t) = t - 4$ min. Ostáva už len vyšetriť správanie f na prvých štyroch minútach. Od času, kedy Samo uvidel autobus lineárne závisí dráha, ktorú ešte musí prejsť na zastávku a teda aj čas, ktorý mu tento prechod potrvá, a teda aj čas, ktorý bude ešte čakať. Spojíme funkčné hodnoty v čase 0 a 4 min rovnou čiarou (linearita) a máme tu,

TAMTADADÁÁÁÁÁÁÁÁ

graf funkcie f. Prehliadnite si ho, aký je sličný.

[1] Rigorózni matematici odpustia.



Celková plocha pod grafom funkcie *f* na skúmanom intervale je 42 minút štvorcových[2], čo vydelené jeho šírkou 10 minút dáva priemernú výšku (= dobu čakania) 4,2 minúty.

A–1.2 Peťove momentky (opravoval Filip)

Predpokladajte, že moment zotrvačnosti homogénneho rovnostranného trojuholníka s hmotnosťou m a stranou a okolo osi prechádzajúcej ťažiskom a kolmej na trojuholník je $I = ka^2m$, kde k je nejaká konštanta.
a) Prečo môžeme predpokladať, že I je v tomto tvare? (že také k existuje?)
b) Aké sú momenty zotrvačnosti vyšrafovaných štvrtín trojuholníku okolo pôvodnej osi?
c) Zrátajte k.

Poďme pekne zaradom. Výsledky, ktoré získame tak budeme môcť použiť v nasledujúcich častiach. Ono je to totiž zadané tak, aby to pekne vyšlo.[3]

a) Ako dobre poznáme, moment zotrvačnosti hmotného bodu vzhľadom na nejakú os (v našom prípade prechádza cez ťažisko kolmo na rovinu trojuholníka) je mr^2. Celkom intuitívne je aj to, že výsledný moment zotrvačnosti nejakého telesa vieme zrátať ako súčet momentov zotrvačnosti hmotných bodov, ktoré tvoria teleso[4]. Pre celkový moment I tak dostávame tak rovnicu $I = \sum m_i r_i^2$ kde m_i je hmotnosť i-teho kúsku r_i je jeho vzdialenosť od osi.

Túto rovnicu už len stačí trošku upraviť. Vzdialenosť r_i si vyjadrime ako nejaký p_i násobok dĺžky strany a. V tom prípade je p_i obyčajné číslo (nemá jednotku). To isté

---

[2] Čo kukáte, jak keby ste ešte nevideli serióznu jednotku plochy :)

3 Áno, vedúci si zaslúžia čokoládu.

4 Ak tam hmotné body nevidíme, tak si naše teleso môžeme nasekať na drobné kúsky, ktoré už môžeme aproximovať hmotnými bodmi.

spravme aj s hmotnosťou, takže $m_i = q_i.m$. Dosadíme to do nášho vzorca pre *I* a dostávame:

$$I = \sum \left(q_i m (p_i a)^2\right) = ma \sum \left(q_i p_i^{\ 2}\right).$$

Ako vidíme, sčitujeme bezrozmerné čísla *q* a *p* a dá sa teda očakávať, že hodnota sumy nebude závisieť od rozmerov ani hmotnosti objektu, ale čisto od jeho geometrie. Nič nám nebráni, aby sme tú sumu nazvali „*k*“ a sme hotoví: $I = kma^2$.

b) A poďme ďalej. Najskôr sa venujme tomu trojuholníčku v strede. Keďže má polovičné rozmery a štvrtinovú hmotnosť ako veľký, jeho moment zotrvačnosti bude 1/16 momentu zotrvačnosti pôvodného trojuholníka, teda $I_{\mathrm{m}} = \dfrac{I}{16}$. Aké jednoduché.

Ale čo s tým krajným? Naň použijeme tzv. Steinerovu vetu. Je to užitočná vecička, preto radi vypotíme trochu krvi pri jej dokázaní. Pokiaľ nepatríte k najmotivovanejším čitateľom, skočte na najbližší nahrubo zvýraznený text. Vo vašom riešení dokazovať Steinerovu vetu samozrejme nebolo treba. Opäť začnime so vzorcom $I_i = m_i \left|\vec{R}_i\right|^2$, kde vektor $\vec{R}_i$ bude vektor od ťažiska veľkého trojuholníka do *i*-teho bodu v malom krajnom trojuholníku. Rozložme ho na dva vektory, r_i je vektor z ťažiska malého trojuholníka do bodu *i* a r_t je vektor z ťažiska veľkého trojuholníka do ťažiska malého. A teraz sčítajme momenty zotrvačnosti všetkých bodov. Dostaneme tak rovnicu:

$$I_{\mathrm{kraj}} = \sum m_i \vec{R}_i^2$$

$$I_{\mathrm{kraj}} = \sum m_i \left(\vec{r}_i + \vec{r}_t\right)^2$$

$$I_{\mathrm{kraj}} = \sum m_i \vec{r}_i^{\ 2} + 2\sum m_i \vec{r}_i \vec{r}_t + \sum m_i \vec{r}_t^{\ 2}$$

Pri takejto rovnici sa väčšina normálnych ľudí začína vo výpočtoch strácať. Preto sa radšej zamyslime. Prvý člen na pravo je presne to isté, ako moment zotrvačnosti I_{m} malého trojuholníka okolo osi prechádzajúcej jeho ťažiskom. Tretí člen napravo sa dá zjednodušiť. Vektor r_t je rovnaký pre všetky body a preto ho môžeme vyňať a sumujeme iba hmotnosť. Čiže dostaneme $\dfrac{m}{4} r_t^2$. A to už dobre poznáme, je to moment zotrvačnosti hmotného bodu s hmotnosťou malého trojuholníčka (čiže štvrtina celého) okolo osi prechádzajúcej ťažiskom veľkého trojuholníka.

Zostal nám už len druhý člen $2\sum m_i \vec{r}_i \vec{r}_t$. Poďme ho upraviť, r_t je konštantné a tak ho vyberme pred sumu a máme: $2\vec{r}_t \sum m_i \vec{r}_i$. Aha! Ťažisko je presne to miesto, kde je táto suma nulová, veď tak je ťažisko definované. To znamená, že celý druhý člen je nulový a máme veľmi známy vzťah:

$$I_{\mathrm{kraj}} = \sum m_i \vec{r}_i^{\ 2} + \vec{r}_t^{\ 2} \sum m_i$$

$$I_{\mathrm{kraj}} = I_m + \frac{m}{4} r_t^2$$

Tento vzťah sa nazýva **Steinerova veta** a je to úplne super vec. Pomocou nej vieme vyrátať moment zotrvačnosti vzhľadom na ľubovoľnú os ako súčet momentu zotrvačnosti vzhľadom na *rovnobežnú* os prechádzajúcu ťažiskom a moment zotrvačnosti hmotného bodu hmotnosti celého telesa[5] v mieste ťažiska.

c) No v našich výsledkoch sa stále objavuje neznáme *I*. Teraz použijeme fintu:) Vieme, že celkový moment zotrvačnosti *I* je rovný súčtu momentov zotrvačností jednotlivých častí trojuholníka, čiže napríklad naznačených 4 malých trojuholníkov – jeden v strede a tri krajné:

5 V našom prípade celý krajný trojuholník, ktorý má štvrtinovú hmotnosť ako celý, tak aby vás nemiatlo to delenie štyrmi.

$$I = I_{\mathrm{m}} + 3I_{\mathrm{kraj}}$$

$$I = I_{\mathrm{m}} + 3\left(I_{\mathrm{m}} + \frac{m}{4} r_t^2 \right)$$

Ďalej vieme (z časti a), že $I_{\mathrm{m}} = \dfrac{I}{16}$ a keď sa pozrieme na obrázok, tak zistíme aj to, že r_t je jedna tretina výšky veľkého trojuholníka, čiže $r_t = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a$. Dosadíme a upravujeme:

$$I = 4I_{\mathrm{m}} + 3\left(\frac{m}{4} \cdot \frac{3}{36} a^2 \right)$$

$$I = \frac{I}{4} + \frac{1}{16} ma^2$$

$$I = \frac{1}{12} ma^2$$

Hotovo. Kto má chuť, môže si skúsiť zrátať moment zotrvačnosti štvorca. Ide to rovnako a zíde sa to na skúške na matfyze:)

A–1.3 Experimentálka? (opravovala Tinka, vzorák Jakub)

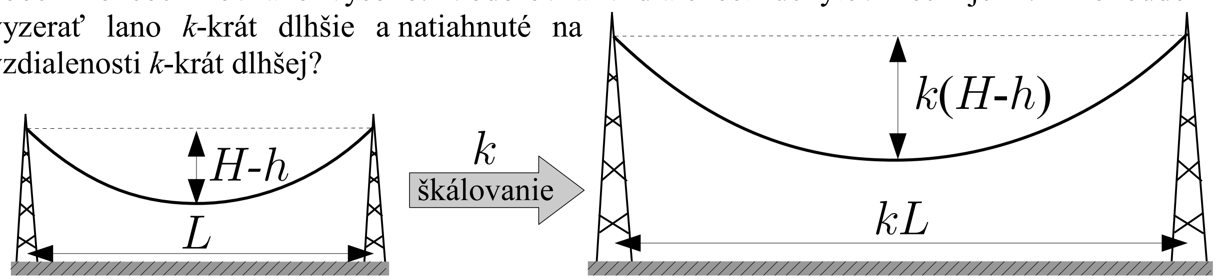
Elektrické vedenie vysokého napätia pozostáva zo stĺpov, na ktorých je vo výške H = 55 m *upevnených* 6 *medených vodičov (2krát trojfázovo). Z bezpečnostných dôvodov nemôže vodič vysokého napätia klesnúť pod výšku* h = 40 m *nad povrch zeme. Rozostup stĺpov je* L = 300 m*. Urč celkovú dĺžku vodičov potrebných pre dĺžku vedenia* 100 L *(teda* 30 km*)! Tiež zisti, koľkokrát menšie je najvyššie (mechanické) napätie vo vodiči voči jeho medzi pevnosti! Môžu sa ti hodiť údaje: hustota medi* ρ = 8 930 kg m^{-3}*, medza pevnosti medi v ťahu* σ_t = 450 Mpa*. Pri tejto úlohe nás nezaujíma všeobecný výsledok, postačí, ak nám s dostatočnou presnosťou povieš, koľko ti to vyšlo konkrétne pre zadané hodnoty. K riešeniu samozrejme pripoj komentár, ako si to robil, prečo je to tak dobre a ak máš len približný výsledok, tak aj odhad chyby.*

Fúúu… Toto sa vôbec nepodobá na nejakú rozumnú stredoškolskú úlohu. Však toto môže byť celkom *praktická* vec! Vraj experimentálka…?

Úlohu budeme riešiť pre prípad, že vodiče sú v najnižšom mieste *práve* vo výške h, ako som napísal aj na debatu. Za nedôslednosť v zadaní sa ospravedlňujem.

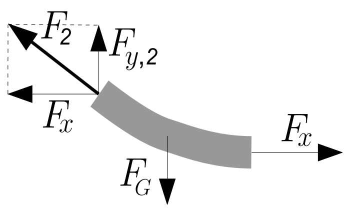
Je celkom rozumné skúsiť nahradiť neznámy tvar vodičov čímsi známym, čo sa na ne podobá. Tak to urobila väčšina z vás a použila pritom zväčša lomenú čiaru alebo kružnicový oblúk a získala dosť dobrý výsledok. Tento prístup sa mi nepáči, lebo asi nikto z vás nevie zistiť, akej veľkej chyby sa pritom dopustil. To určenie chyby je totiž obdobne ťažké ako nájsť presné riešenie. Zvolil som preto *experimentálny* prístup, ktorý je síce vo výsledku menej presný ako tá kružnica, avšak ktorého chybovosť mám lepšie pod kontrolou.

Ako prvé sa vysporiadame s tými rozmermi. Keď sa človek tak popozerá ako vyzerajú všelijaké visiace šnúrky a retiazky a vedenia a špagáty, tak zistí, že všetky visia tak nejako podobne. Skúsme naše pozorovanie trochu formalizovať: majme lano dĺžky l upevnené na oboch koncoch rovnako vysoko. Vodorovná vzdialenosť úchytov nech je L. Ako bude vyzerať lano k-krát dlhšie a natiahnuté na vzdialenosti k-krát dlhšej?

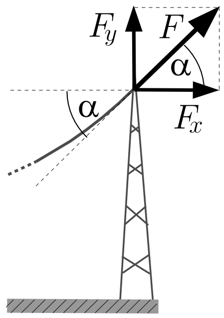


Lano bude vyzerať úplne rovnako, len to celé bude k-krát väčšie. Prečo? Nuž preto, lebo pôvodné lano zaujalo energeticky najvýhodnejšiu polohu. Zrejme k-krát dlhšie lano môže prekonávať vodorovnú vzdialenosť kL majúc rovnaký tvar ako pôvodné lano. A keďže pre pôvodné lano to bola najvýhodnejší tvar, tak to bude aj pre nové lano.[6]

Potom si ale môžem povedať, že namiesto skúmania elektrického vedenia môžem pekne doma v plnom komforte zavesiť špagát s rozostupom úchytov $L' = 3$ m a výškou previsu $(H-h)' = 15$ cm.[7] Môžem zmerať dĺžku špagátu l', ktorý som na to použil a napísať odpoveď l'/k.



Ďalej by som chcel zistiť to mechanické napätie. Najprv si musíme uvedomiť, že horizontálna zložka napätia v lane je pozdĺž celého lana rovnaká. Dôvod nájdeme na obrázku vpravo, kde sme si zakreslili sily pôsobiace na kus lana ľubovoľnej dĺžky, ktorého jeden koniec sa nachádza v najnižšom bode lana. Na tento kus pôsobí lano ťahovými silami sprava a zľava a ešte naň pôsobí tiaž. Lano je statické a teda sily musia byť v rovnováhe. Preto musia byť vodorovné zložky napätia v každom bode lana rovnaké ako v jeho najnižšej časti, čo znamená, že všade budú rovnaké.



Potom je už ľahké určiť maximálne napätie. Aha, zvislá zložka napätia je podľa obrázku hore rovná tiaži lana medzi daným miestom a najbližším najnižším bodom lana. Takže najväčšie napätie musí byť pri stožiaroch. Veľkosť maximálneho napätia F pritom je $F = F_y / \sin\alpha$. Uhol α viem odmerať, však moje lanko je geometricky podobné s drôtom. Nuž a sila F_y má podľa predošlých argumentov veľkosť tiaže polovice drôtu medzi 2 stožiarmi, čiže $F_y = Sl\rho g/2$. Medza pevnosti lana je $\sigma_t S$. V zadaní požadovaný pomer sa nazýva koeficient bezpečnosti, označím ho K, a rovná sa $K = \dfrac{\sigma_t S}{F} = \dfrac{2\sigma_t}{l\rho g}\sin\alpha$.

Moje meranie: Zobral som si pevný špagát a upevnil ho na vrch 2 zárubní vo vzdialenosti $L' = (756{,}5 \pm 0{,}3)$ cm. Previsnutie lana som potom úmerne tomu nastavil na hodnotu $(H-h)' = L'/L\,(H-h) \approx 37{,}8$ mm. Pri tomto previsnutí som si pravítkom spravil dotyčnicu v bode úchytu a vo veľkom pravouhlom trojuholníku zmeral odvesny. Získal som tak uhol v bode úchytu $\alpha = (11{,}1 \pm 0{,}2)°$. Potom som si urobil na špagáte značky v miestach uchytenia a položil ho na zem. Natiahol som ho približne rovnakou silou ako keď visel a zafixoval. Zmeral som jeho dĺžku $l' = (762{,}6 \pm 0{,}5)$ cm.

Moje výsledky: Dĺžka potrebných drôtov je $(181{,}45 \pm 0{,}2)$ km. Dĺžka drôtov zistená analytickým výpočtom pre dokonale ohybné nenaťahovateľné lano je 181,194 km. Rozdiel je spôsobený chybou metódy a „nedokonalosťou" použitého materiálu. Koeficient bezpečnosti mi vyšiel $K = (6{,}54 \pm 0{,}13)$.

Hodnotenie: Za riešenie dĺžky priblížením lomenej čiary sa dal dostať celý 1 bod, priblíženie kružnicou alebo parabolou mohlo získať 2 body. Za správne určené maximálne mechanické napätie v drôtoch sa dalo pri aproximácii lomenou čiarou získať 1,5 boda, kružničiari/parabolici mohli získať 2 body. Viac ako 4 body sa dali získať použitím postupu, kde sa dá chyba rozumne odhadnúť – najjednoduchšie experimentom.

Dodatok č.1: Pri riešení sme využili predpoklad, že prierez drôtov je konštantný.

Dodatok č.2: Schéma nášho riešenia pozostávala s rozdelenia úlohy na experimentálnu a teoretickú časť, pričom sme použili nejaký model lana (dokonale ohybné, nenaťahovateľné). Vôbec sme však neoverili, či náš model súhlasí s experimentom. Tento prístup je v experimentálnej praxi bežný, takže neostáva vám iné ako si zvykať ☹.

Dodatok č.3: Môžeme si všimnúť, že mechanické napätie v drôtoch je prakticky konštantné, lebo veľkosť maximálneho napätia F je skoro rovnaká ako veľkosť vodorovnej zložky F_x. Ak by sme teda chceli zarátať aj natiahnutie drôtov, tak môžeme s veľmi dobrou

[6] Keď malo pôvodné lano ťažisko v hĺbke d pod úchytmi, tak nové bude mať v hĺbke kd. Nemôže ho mať hlbšie, lebo keby existoval taký tvar, že ťažisko nového lana by bolo hlbšie, tak by existoval tvar pre k-krát menšie lano taký, že ťažisko lana by bolo hlbšie ako d. Čo je spor.

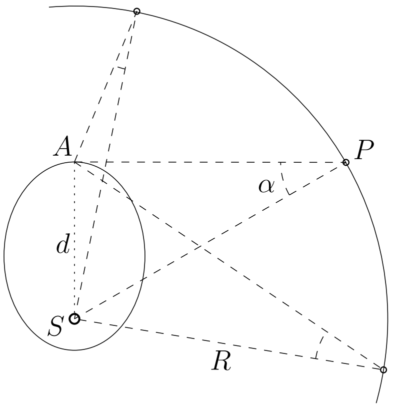
[7] Zvolil som si teda koeficient podobnosti $k = 1/100$.

presnosťou napísať rovnosť $d = l \Big/ \left(1 + \dfrac{\sigma_t}{KE}\right)$, kde d je dĺžka drôtov v nenatiahnutom stave a $E = 130$ MPa je Youngov modul pružnosti medi. Natiahnutie vplyvom mechanického napätia v drôtoch je približne 0,053 % a celková potrebná dĺžka reálnych vodičov je preto asi o 100 m menšia.

Dodatok č.4: Laná v ideálnom prípade nevisia ani ako lomené čiary, ani ako kružnicové oblúky, ani ako časti paraboly. Pre málo prehnuté laná sú tie priblíženia kružnicou a parabolou dosť úspešné, avšak v skutočnosti visia ideálne laná ako kosínus hyperbolický…

A–1.4 Peťov Kepler a Keplerov Peťo (opravovali Azag a Emi)

Okolo hviezdy obiehajú dve planéty (A a B) v tej istej rovine. Vzdialenejšia z nich (A) má os otáčania takmer kolmú na rovinu obehu a všetky ostatné parametre (hmotnosť, vzdialenosť od centrálnej hviezdy, hustotu, priemernú plošnú hustotu škôl v prírode…) rovnaké ako naša Zem. Mimozemšťanovi na jej rovníku sa podarilo vypozorovať, že planéta B zapadá vždy najneskôr dve hodiny po hviezde. Aká je obežná doba druhej planéty?

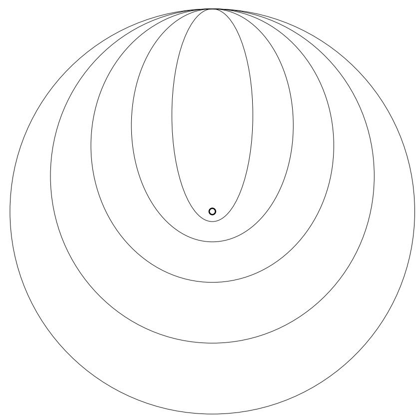


Nuže oč tady kráčí. Z toho, že planeta zapadá nejvýše dvě hodiny od západu slunce je jasné, že se na obloze vždy vyskytuje poblíž slunce, a tedy je vůči mimozemšťanově planetě vnitřní planetou s relativně menší trajektorií. Takovou situaci zachycuje první obrázek.[8]

Planeta P se otáčí kolem své osy a tím slunce i planeta A postupně zapadají. Z tohoto principu je jasné, že mezi oběma západy se musí planeta P pootočit o úhel α. Protože rychlost otáčení je konstantní, čas mezi oběma západy určuje jen velikost tohoto úhlu. Otázka tedy je, pro jakou pozici všech tří těles je tento úhel maximální.

Zřejmě tehdy, když bude planeta A v aféliu, protože tehdy bude úsečka SA nejdelší. Ještě zbývá určit polohu planety P. Pro maximální úhel α platí, že kružnice opsaná SAP se bude dráhy planety P dotýkat v jednom bodě.[9] Potom ale její střed musí ležet na úsečce SP a to v jejím středu. Bod A potom ale leží na Thaletově kružnici a SAP je tedy pravoúhlý. Zachycuje to jedna z nakreslených pozic planety P. Teď už snadno spočítáme vzdálenost d planety A od slunce v aféliu. Platí totiž

$$d = R\sin\alpha = R\sin\left(2\pi\frac{2\,\mathrm{h}}{24\,\mathrm{h}}\right) = R\sin\frac{\pi}{6} = \frac{R}{2}.$$



Máme tedy jeden parametr elipsy. Jenže pro její úplný popis bychom potřebovali dva. Žádný druhý ale získat nemůžeme, proto můžeme určit jen jakýsi interval, jak brzy uvidíme. Na druhém obrázku jsou nakresleny různé elipsy, které mají stejnou vzdálenost afélia d. Zřejmě hlavní poloosa těchto elips je tedy

$$a = \tfrac{1}{2}d \ldots d = \tfrac{1}{4}R \ldots \tfrac{1}{2}R.$$

Z Keplerova třetího zákona potom dostáváme

---

[8] Trajektorii mimozemšťanovy planety jsme aproximovali kružnicí, protože trajektorie Země má velmi malou excentricitu.

[9] Jinak by existovalo ještě jedno místo, ve kterém by kružnice opsaná protnula dráhu planety P a ve všech bodech mezi těmito dvěma by byl pozorovací úhel větší. (Rozmyslete.)

$$T = T_{\mathrm{Z}}\left(\frac{a}{R}\right)^{3/2} = \left(\tfrac{1}{4}\right)^{3/2}\ldots\left(\tfrac{1}{2}\right)^{3/2}\ \text{roku} \approx 0{,}13\ldots0{,}35\ \text{roku},$$

kde T_{Z} je oběžná doba mimozemšťanovy planety neboli Země.

Ještě proveďme malou diskuzi řešení. Například jsme mlčky předpokládali, že se všechny tři tělesa do kýžené pozice dostanou. To by ovšem ve skutečnosti mohlo trvat velmi dlouho a pozorovatel by se toho vůbec nemusel dožít. Pravděpodobně tedy naměří maximální čas, který bude o něco menší než teoretický čas podle toho, jaké bude mít štěstí. Tento fakt je ovšem v zadání vyjádřen tím, že je čas zadán jen s přesností na hodiny. Stejně tak zanedbání faktu, že se planeta mezi oběma západy o něco posune, se snadno vejde do požadované přesnosti.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina A – kategórie po 1. sérii letného semestra 24. ročníka

	Meno	Škola	A–1.1	A–1.2	A–1.3	A–1.4	Bonus	☠	∑1
1	Polačko Martin	G KE Alejová	5,00	5,00	5,00	3,50	0,00	–	18,50
2	Hruška Eugen	G Hlohovec	5,00	5,00	4,00	3,50	0,88	–	18,38
3	Štyráková Kamila	G POH, Dolný Kubín	4,70	4,50	4,20	4,00	0,90	–	18,30
4	Krejčír Andrej	G PD Prievidza	5,00	4,50	3,00	4,75	0,95	–	18,20
5	Bačo Ladislav	G KE Poštová	5,00	5,00	4,70	2,00	1,10	–	17,80
6	Bogár Ján	G Ľ. Štúra Trenčín	5,00	4,80	3,50	3,00	1,21	–	17,51
7	Kieferová Mária	GSF Žilina	5,00	5,00	2,50	3,75	0,00	–	16,25
8	Matejovičová Lenka	G BA J.Hronca	5,00	4,80	2,20	3,50	0,00	–	15,50
9	Vanya Peter	G BA J.Hronca	4,00	4,20	3,50	3,50	0,00	–	15,20
10	Chudjak Martin	SPŠ Martin	4,50	3,00	2,00	3,50	1,82	–	14,82
	Hašík Juraj	G BA Grösslingova	5,00	2,50	1,50	4,00	1,82	–	14,82
12	Cocuľová Zuzana	G KE Poštová	5,00	4,70	2,00	0,50	1,90	–	14,10
13	Cuc Bruno	G BA Grösslingova	2,00	2,50	4,00	3,50	1,92	–	13,92
14	Honzáková Kateřina	GJK Praha	5,00	5,00	4,70	3,50	0,66	5	13,86
15	Kuklišová Nina	G BA Metodova	4,50	4,50	3,00	1,00	0,00	–	13,00
16	Vanta Radovan	G BA Metodova	5,00	1,00	1,50	3,25	1,99	–	12,74
17	Midlik Adam	G J.A.R. Prešov	5,00	1,50	–	3,50	2,00	–	12,00
	Rigdová Emília	OG Kukučínova Poprad	5,00	3,00	2,00	0,00	2,00	–	12,00
	Rohár Pavol	G KE M.R.Štefánika	5,00	3,00	2,00	–	2,00	–	12,00
20	Maixner Michal	OG ZA Varšavská	0,50	2,50	4,00	4,75	0,00	–	11,75
21	Pločeková Andrea	G Piešťany	4,70	–	4,50	–	1,99	–	11,19
22	Jursa Jakub	G KE Alejová	4,70	4,20	2,00	–	0,00	–	10,90
23	Petrucha Michal	G BA Metodova	5,00	4,50	–	–	0,00	–	9,50
24	Lešková Andrea	G Lipany	1,00	2,00	–	3,00	1,68	–	7,68
25	Hagara Michal	G BA J.Hronca	5,00	5,00	–	–	2,00	5	7,00
26	Bachratý Martin		5,00	–	–	–	1,50	–	6,50
27	Baxová Jana	G Ľ. Štúra Trenčín	2,00	1,00	0,80	–	1,23	–	5,03
28	Matulová Daniela	G BA Papánka	0,50	0,50	2,00	–	1,02	–	4,02
29	Hudák Adam	G KE M.R.Štefánika	1,50	–	–	0,00	0,55	–	2,05