FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 3. série
B – kategória (mladší)
24. ročník
zimný semester
školský rok 2008/2009

www.fks.sk

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
otazky@fks.sk

B-3.1 Spotrebná úloha (opravovala Katka, vzorák Tomáš)

Kamoš má také super auto, ktoré má namakaný digitálny displej, kde mu ukazuje všetky možné údaje, ktoré by ho mohli zaujímať: Ako rýchlo ide, aké sú otáčky motora, koľko ľudí je v aute a akého sú pohlavia, kde stojí najbližšia policajná hliadka, v akom okruhu sa nenachádza štýlovejšie auto ako to jeho a mnohé iné. Zaujímavý je údaj o spotrebe. Keď auto stojí, ale ide na voľnobeh na displeji svietila spotreba 0,6 litra / hodinu. Keď sme sa pohli rovnomerným pohybom z mierneho kopca, pričom sme šli stále na voľnobeh (čiže motor pracoval s rovnakým výkonom ako pri státí) domýšľavá elektronika spotrebu okamžite prerátala a na palubnej doske zasvietil údaj 1,1 litra / 100 km. Ako rýchlo sme išli z kopca?

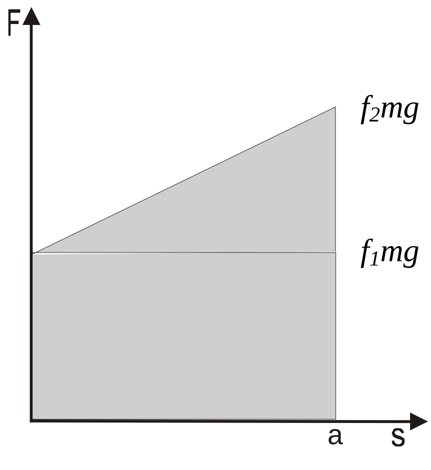
Iste všetci uznáme, že mať takéto auto je neuveriteľne praktické. Ako sa píše v zadaní, auto v oboch prípadoch pracuje s rovnakým výkonom, a má teda rovnakú spotrebu (na čas). Ak označíme v rýchlosť, ktorú chceme vyrátať, tak spotreba je jednak 0,6 litra / hodinu a zároveň sa rovná spotrebe 1,1 litra / (100 km / v), pretože (100 km / v) je čas, za ktorý prejdeme 100km dráhu a 1,1 litra je v zadaní uvedené ako množstvo benzínu, ktoré po prejdení takejto dráhy spotrebujeme. Máme teda jednu a tú istú spotrebu vyjadrenú dvoma spôsobmi a nič nám nebráni dať ich do rovnosti: $\frac{1{,}1\,\mathrm{l}}{100 km / v} = \frac{0{,}6\,\mathrm{l}}{\mathrm{h}}$ a vyjadriť z nej

$v = \frac{600}{11}$ km/h ≈ 55 km/h.

B-3.2 ...bavlnená tkanina pôvodom z Orientu, originálne slúžiaca na dekoráciu stien, neskôr používaná na pokrývanie dlážok plniac najmä hygienickú, tepelnoizolačnú a dekoratívnu funkciu (opravovala Tinka, vzorák Tinka)

Koberec je položený na parketách, po ktorých sa pohybuje s trením f1. Zarovno s parketami je betónová podlaha po ktorej sa koberec pohybuje s trením f2. Vodorovným ťahaním chceme koberec presunúť z parkiet na betón. Koľko práce na to budeme potrebovať ? Koberec má rozmery obdĺžnika a x b, hmotnosť m, a pohyb, ktorý chceme vykonať je znázornený obrázkom.

Tak najprv by sa patrilo zistiť, čo sú to za sily, kvôli ktorým musíme nejakú prácu konať. Dá sa ľahko uvidieť, že výslednica vo vertikálnom smere je nulová (koberec nelevituje a nespráva sa ani nijako inak podozrivo) a že keď chceme koberec rozpohybovať, proti nám pôsobí len trecia sila a tú potrebujeme vyrovnať (odpor vzduchu a iné lahôdky prirodzene zanedbávame). Tak fajn, čo my ale vieme o vzťahu práce a sily? $W = Fs$. Dráhu poznáme, keďže roh koberca sa musí presunúť na miesto toho predchádzajúceho, máme $s = a$. Ale tá potvora F sa mení. Pretože okamžitá trecia sila je závislá od toho, aká časť koberca leží na parketách. Pri pohybe na časť na parketách pôsobí trecia sila $F_1 = f_1 m_1 g$ a na kúsok na betóne zase $F_2 = f_2 m_2 g$ (domýšľavý čitateľ hneď vidí, že sme si koberec rozdelili na dve časti, m_1 je hmotnosť tej časti koberca, ktorá je na parketách a m_2 na betóne). A keďže chceme, aby sa pohyboval celý koberec, tak musíme prekonať trenie na oboch častiach a teda potrebujeme v tej chvíli silu $F = F_1 + F_2$.



Ak si predstavíme, že koberec sme potiahli vzdialenosť x z pôvodnej polohy, jednoduchou trojčlenkou porátame hmotnosti koberca na parketách a na betóne, tak zistíme, že výsledná sila, ktorou musíme ťahať, je nasledovná: $F = f_1 m \frac{a-x}{a} g + f_2 m \frac{x}{a} g$.

No fajn. A čo s tým? Verím, že ste si už našli čas na prečítanie vzorákov z minulej série a preto pre vás nebude novinkou, že práca je plocha pod grafom závislosti sily od dráhy. Zostrojiť ten graf nie je problém, veď sme akurát zrátali, ako vyzerá závislosť F od x! Dôležité je, že to bude lineárna funkcia – kus priamky (ako vidno zo vzorčeka pre F). Začíname v $f_1 mg$ a končíme v $f_2 mg$, pričom samozrejme nie je jasné, ktorá z hodnôt je väčšia. Obrázok zachytáva iba jeden prípad, ale verím, že všetci vidíte, že je to v konečnom dôsledku jedno - plocha je rovnaká. Keď si ju zrátame ako súčet obdĺžnika a trojuholníka a troška poupravujeme, dostaneme, že

$$W = \frac{(f_1 + f_2) gma}{2},$$

čo je aj správne riešenie.

A teraz k tomu, čo ste mi popísali. Najčastejšie ste zabudli zdôvodniť, prečo by ten graf mal byť lineárny. Keby ten koberec mal iný tvar, celé by to mohlo vyzerať inak, preto som to „odmenila“ –0,5 bodom. Ani úvahy o spriemerovaní koeficientov trenia neboli korunované veľkým počtom bodov, pretože to, že vyšiel rovnaký výsledok, je v podstate náhoda.

B-3.3 Obyčajný pohyb po kružnici (opravoval Robo, vzorák Robo)

V klasickej súradnicovej sústave máme nakreslenú kružnicu s polomerom R. Na nej, v bode [R,0] sa nachádza hmotný bod s hmotnosťou m, ktorý sa v čase t = 0 začne pohybovať otáčavým pohybom, s konštantnou uhlovou rýchlosťou ω, proti smeru hodinových ručičiek.

a) Akú veľkú časť kružnice (v uhlových jednotkách) má hmotný bod prejdenú v čase t? (v čase 0 mal prejdených 0 radiánov)

b) Aké sú súradnice x, y bodu v čase t?

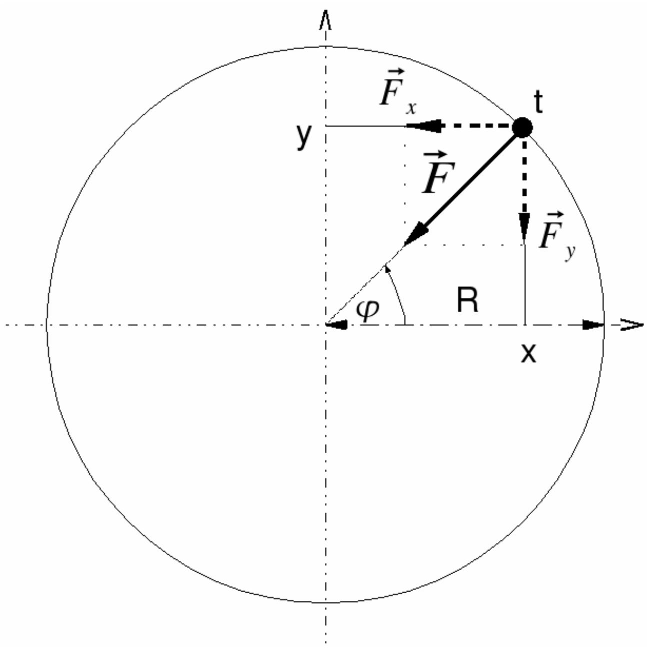
c) Aká veľká sila F je potrebná na to, aby sa bod pohyboval popísaným spôsobom? Aký je jej smer?

d) Ak silu vyrátanú v bode c) rozložíme na x-ovú a y-ovú zložku, aká veľká bude x-ová zložka? Inými slovami ako vyzerá závislosť Fx(t) t.j. x-ovej zložky sily od času?

e) Ako vyzerá Fx v závislosti od x, teda Fx(x)?

f) Ako pomocou a) - e) vyšetriť pohyb hmotného bodu viazaného na x-ovú os, na ktorý pôsobí sila F(x) = -k.x kde k je nejaká kladná konštanta?

Ahojte! Verím, že táto úloha patrila do kategórie nenáročnejších, a preto hneď začnime sumarizujúcim obrázkom. Na ňom je znázornená situácia, v ktorej sa hmotný bod s hmotnosťou m nachádza v (nami zvolenom) čase t. Ako tiež vidieť, väčšina z podúloh a) až f) je geometrického rázu (hranie sa s goniometrickými funkciami a rozklad vektora na zložky). Ale poďme pekne systematicky.



a) Z definície uhlovej rýchlosti je táto rovná podielu zmene uhla, ktorú bod pri pohybe po kružnici prekoná za istý čas, a tohto času. Úpravou tohto vzťahu máme

$$\varphi = \omega t .$$

b) Z obrázku vidíme, ako ľahko vyjadriť cos φ a sin φ pomocou súradníc x, y a R. Úpravou potom máme:

$$x = R \cdot \cos \varphi = R \cdot \cos (\omega \cdot t) \quad (1)$$
$$y = R \cdot \sin \varphi = R \cdot \sin (\omega \cdot t) \quad (2)$$

c) Hmotný bod je udržovaný na svojej kružnicovej trajektórii vďaka pôsobeniu dostredivej sily F, ktorá smeruje, ako už z jej názvu vyplýva, do stredu kružnice (t.j. do súradnicového bodu [0, 0]). Pre jej veľkosť platí známy vzťah:

$$F = m \cdot a_d = m \cdot \omega^2 \cdot R, \qquad (3)$$

kde a_d je veľkosť dostredivého zrýchlenia.

d) Podobne ako v podúlohe b), aplikovaním goniometrických funkcií cos φ a sin φ,ako to vyplýva z obrázku, pre veľkosti x-ovej a y-ovej zložky dostredivej sily F dostávame:

$$F_x = -\ F \cdot \cos\varphi = -\ m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \cos\varphi \ \Rightarrow\ F_x(t) = -\ m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \cos(\omega \cdot t) \qquad (4)$$
$$F_y = -\ F \cdot \sin\varphi = -\ m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \sin\varphi \qquad (5)$$

Mínusko je pri oboch zložkách sily preto, lebo obe zložky sily majú smer opačný, než je smer súradnicových osí, ako je to viditeľné z obrázka.

e) Závislosť $F_x(x)$ získame, ak do vzťahu (4) pre závislosť x-ovej zložky sily od času dosadíme vzťah (1), teda formálne zapísané:

$$F_x(x) = -\ m \cdot \omega^2 \cdot x \qquad (6)$$

f) Keď sme si už všetko potrebné postupne predpripravili, môžeme sa pustiť do „zlatého klinca úlohy“. Pohliadnime na vzťah (6) a porovnajme ho so silou $F(x) = -\ k \cdot x$ zo zadania. Vidíme, že oba zápisy sa principiálne nelíšia, pretože hmotnosť m aj uhlová rýchlosť ω sú konštantami. Teda konštantou k pre náš prípad bude:

$$-\ m \cdot \omega^2 \cdot x = -\ k \cdot x \qquad \Rightarrow \qquad k = m \cdot \omega^2 \qquad (7)$$

Ak bude kladná konštanta k predstavovať tuhosť pružiny a sila $F(x) = -\ k \cdot x$ predstavovať silu spôsobujúcu kmitanie hmotného bodu (závažia) zaveseného na pružinke, potom z posledného vzťahu (7) získame známy učebnicový vzťah pre uhlovú frekvenciu vlastných kmitov pružinového oscilátora $\omega^2 = k/m$. Ak si uvedomíme, že jeden kmit závažia na pružinke trvá presne toľko, koľko trvá prislúchajúcemu hmotnému bodu, kým raz obehne kružnicu, vieme z tohto veľmi elegantne odvodiť vzorec pre periódu takýchto kmitov. Dopočítajte si to, nezabudnite však pri tom na to, že ω sa meria v radiánoch za sekundu a kruh má celkovo 2π radiánov.

Toť vsio. ☺

B-3.4 Kosa z nosa (opravoval JAno, vzorák JAno)

Keď v lete na kúpalisku vyjdem z vody, je mi zima napriek tomu, že teplota okolitého vzduchu je väčšia, ako tepota vody, ktorá ma obklopovala dovtedy. Prečo je to tak? Vysvetlite tento jav z mikroskopického hľadiska (z hľadiska pohybu molekúl vody resp. vzduchu)

Kosa je pekná beštia, hoci aj v lete.

Podľa časticového modelu sveta sa látky skladajú z malých neviditeľných častíc, ktoré sa chaoticky pohybujú[1] všetkými smermi. Častice pri svojom pohybe do seba narážajú a tak si vymieňajú hybnosť a (pohybovú) energiu. Ak má niektorá častica šťastie, podarí sa jej pri zrážke svojej kamarátke kus energie ukradnúť a získať tak nadpriemernú kinetickú energiu aj rýchlosť, iná – smoliarka - zas s energiou môže klesnúť pod priemer. Vidíme teda, že častice

---

[1]Častice v plynoch sa pohybujú viac-menej voľne, častice kvapalín sčasti voľne (Brownovsky) okolo v čase premenlivých polôh vo vnútri objemu kvapaliny (viazané v objeme kvapaliny) a častice pevných látok sa pohybujú (kmitajú) len vrámci dovolených polôh v látke daných chemickými väzbami (štruktúrou látky).

zďaleka všetky nemajú rovnakú rýchlosť a energiu, vyskytujú sa medzi nimi rýchle, priemerne, no aj podpriemerne rýchle častice.

Pri kontakte dvoch telies, kde častice jedného majú v *priemere* väčšiu energiu ako častice druhého, je väčšina zrážok takých, kedy častice prvého telesa energiu stratia a častice druhého energiu získajú. To vedie k postupnému vyrovnávaniu priemernej energie na časticu v oboch telesách. Z bežného života sme zvyknutí, že niečo podobné sa deje s teplotou, keď sa stretnú dve rôzne teplé telesá. Šikovnému fksákovi už asi začína byť jasné, že teplota nie je nič iné ako priemerná energia častice v telese.

Po dlhom a nezáživnom úvode sa môžeme dostať k samotnému problému.

Keď sme vyšli z vody, na povrchu tela sme si trochu vody zobrali so sebou vo forme tenkej vrstvy a kvapiek na pokožke. Táto voda bola predtým okrem nás v styku s ostatnou vodou v bazéne a teraz je v kontakte so vzduchom a parami vody vzduchu. Dôjde k tepelnej výmene a pokusu o dosiahnutie rovnovážneho stavu, teda voda sa ohreje od nás a vzduchu. Čiže častice vody sa zrážajú s časticami vzduchu a nášho tela a vymieňajú si energiu až do rovnovážneho stavu(v priemere rovnomerného rozdelenia energie). K tomuto dochádza rovnako aj v bazéne, ktorý takto „ohrievame“.

Ako sa tak častice zrážajú a vymieňajú si energiu, stane sa, že niektorá má na chvíľu viac energie ako priemerná častica v látke. Ak sa častica pohybuje dostatočnou rýchlosťou, aby prekonala silové pôsobenia ostatných častíc, uvoľní sa a letí voľne preč, pokiaľ na niečo nenarazí. Z pohľadu zostavšej látky táto prišla o nadpriemerne energetickú časticu a teda jej priemerná energia (teplota) klesne. Tento jav sa v makroskopickom hľadisku prejavuje ako vyparovanie a látka pri ňom spotrebúva tepelnú energiu – teplo nazývané skupenské teplo vyparovania.

Nastáva však aj opačný dej, keď voľné častice látky – pary v okolí (u nás v okolitom vzduchu) narazia na povrch látky a po zrážke už nebudú mať dosť energie, aby opäť uleteli. V takom prípade sa do vody vrátila nadpriemerne energetická častica a teplota vody (priemerná energia) stúpla. Preto ak sa už vo vzduchu nachádza príliš veľa častíc vody, k ďalšiemu ochladzovaniu dochádzať nebude, lebo v priemere rovnako veľa častíc bude kvapalinu opúšťať, ako sa bude do nej vracať. Makroskopicky hovoríme o relatívnej vzdušnej vlhkosti (pomeru toho, koľko pár vo vzduchu je k tomu, koľko treba na rovnováhu). Vzduch na kúpalisku však nebýva dostatočne vlhký na to, aby zabránil odparovaniu sa vody z nášho tela, keďže kúpalisko je veľkým, dobre vetraným otvoreným priestranstvom. Avšak ak sa niekedy kúpete dlhšie v zavretej kúpeľni, môže sa vzduch v nej zvlhčiť natoľko, že vám po vyjdení z vane vôbec nebude zima.

Nuž dobre, ale prečo sa niečo takéto nedeje aj pod vodou? Aj tam sú predsa rýchle molekuly, ktoré sa môžu rozhodnúť nás opustiť. Pod vodou je však nutné si uvedomiť, že sme obklopení hrubou vrstvou vody a rovnako veľa molekúl, ktoré odchádzajú z našej bezprostrednej blízkosti, k nám prichádza z okolitých kútov bazéna. Situácia je teda rovnaká, ako keby sme boli vo vlhkom vzduchu, koľko molekúl nás opustí, toľko príde nových a priemerná teplota sa nemení. Ešte jeden argument. Keby od nás odchádzalo viac rýchlych častíc, ako k nám prichádza, niekam by muselo prichádzať viac častíc, ako odtiaľ odchádza. Niekde v bazéne by sa musela hromadiť teplá voda. To je však blbosť, lebo všetky kúty bazéna sú si rovné a nie je dôvod, aby teplá voda niektorý z nich uprednostňovala :-).

K hodnoteniu: keď v zadaní chceme mikroskopický prístup, tak ho naozaj chceme. Keď vieš, že sa voda vyparuje, tak je to fajn, ale bolo by lepšie aj napísať, prečo sa to deje a hlavne, prečo to ochladzuje! Ďalej, správne skonštatovanie (tip?), čo sa deje, je pekná vec, ale my chceme od vás aj úvahy, prečo sa to deje práve takto, a tiež približné odhady, ktoré efekty sú významnejšie ako iné spolu so zdôvodnením. Aj gravitácia mesiaca vplýva na odparovanie.. aj mastnota pokožky.. potenciálnych efektov je neúrekom a je prácou fyzika, aby z nepreberného množstva vyselektoval niekoľko najdôležitejších.

P.S.: Choďte si zaplávať, je to zdravé.

B-3.5 Dúfam, že všetci máte nainštalovaný Excel (opravoval Jakub, vzorák Jakub)

...pretože ak nie, ste masochisti, pre riešenie nasledujúcej úlohy ho budete potrebovať. Z vraku športového auta vytiahli čiernu skrinku, ktorá obsahuje údaje o tom, čo sa stalo pred haváriou. Konkrétne, obsahuje údaje o zrýchlení auta v každej sekunde. Za koncom zadania nasleduje 300 čísel, ktoré sú zrýchlenia auta v ms^{-2} *za posledných 5 minút jazdy, každé číslo odpovedá priemernému zrýchleniu v jednej sekunde, prvé číslo – prvá sekunda, atď... Z čiernej skrinky sme sa tiež dozvedeli, že pred 5 minútami bol vypnutý motor a auto teda s najväčšou pravdepodobnosťou stálo.*

Zistite:

a) (2body) Akú dlhú dráhu auto za posledných 5 minút prešlo?

b) (1bod) Akú maximálnu rýchlosť pri svojom pohybe dosiahlo?

c) (2body) Akú rýchlosť malo auto v polovici prejdenej dráhy?

d) (1 bod) Snažil sa vodič tesne pred nárazom zabrzdiť?

Snažte sa o čo najpresnejší výsledok.

`0 0 0 0 0 0.06 0.16 0.25 0.34 …(286 čísel)… 0.41 0.4 -4.1 -8.1 -9.1 -8.5`

Úvodom sa patrí ospravedlniť za miernu dezinformáciu. Na vstupe sme zadali 301 čísel. Ja som sa s tým bavil tak 20 minút. Dúfam, že vy menej. (*Ja som to nebol!*)

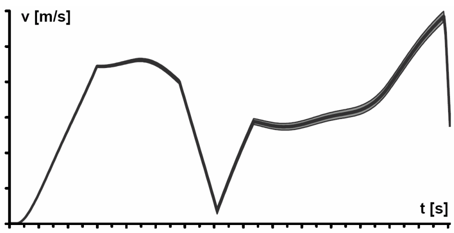
Časť d) Poďme zodpovedať najprv to, čo ide najľahšie. Z posledných čísel záznamu okamžite vidím, že v posledných 4 sekundách pred nárazom malo auto relatívne vysoké spomalenie, porovnateľné s tiažovým zrýchlením. To znamená, že vodič pred nárazom brzdil.

Časť b) Zavediem označenie v(k) pre rýchlosť na konci k-tej sekundy. Podobne, priemerné zrýchlenie počas k-tej sekundy, ktoré mám v zadaní, označím $a(k)$. Predpokladáme, že rýchlosť na začiatku bola nulová, teda $v(0) = 0$. Keď poznám $v(k)$, tak viem spočítať aj

$$v(k + 1) = v(k) + a(k + 1) \cdot 1 \text{ sekunda.}$$

Takto postupne popočítam rýchlosť na konci 1., 2., 3., ... až 301-vej sekundy. Spomedzi rýchlostí nájdem maximálnu. Najľahšie ju človek nájde v grafe $v(t)$ a potom si príslušnú hodnotu odčíta v tabuľke.

Mali by sme určiť aj chybu nášho výsledku. Nie je to zložité, stačí si uvedomiť, že neistota vstupných dát $a(k)$ je zhruba 0,005 ms^{-2}, lebo zrýchlenia sú udané (prevažne) na 2 desatinné miesta. Preto v každom výpočtovom kroku od $v(k)$ ku $v(k + 1)$ zväčšujem absolútnu chybu rýchlosti o aspoň 0,005 m/s. Chyba určenia rýchlosti $v(k)$ je teda $\Delta v = 0{,}005k$ m/s. Priložený graf dokumentuje rýchlosť auta aj s odchýlkou. Maximálna dosiahnutá rýchlosť auta bola (58,5 ± 1,5) m/s.



Časť a) Keď som si už spočítal rýchlosť na konci každej sekundy, tak už celkom ľahko spočítam aj dráhu prejdenú na konci každej sekundy. Analogicky ako v predošlom odstavci si označím $s(k)$ dráhu prejdenú na konci k-tej sekundy. Ak by som pohyb počas $(k + 1)$-vej sekundy považoval za prakticky rovnomerný, tak by som napísal rovnicu

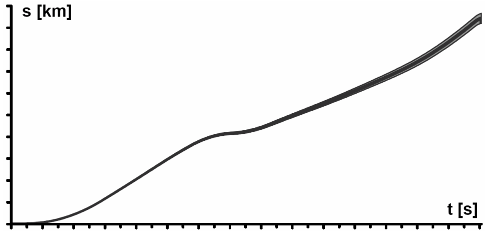
$$s(k + 1) = s(k) + v(k) \cdot 1 \text{ sekunda.} \qquad \text{(I)}$$

Keďže som bol však zadaním usmernený k tomu, aby som našiel najpresnejší možný výsledok, tak skúsim niečo lepšie. Môžem považovať pohyb auta počas $(k + 1)$-vej sekundy za rovnomerne zrýchlený. Potom bude platiť rovnica

$$s(k + 1) = s(k) + v(k) \cdot 1 \text{ sekunda} + \tfrac{1}{2}\, a(k + 1) \cdot (1 \text{ sekunda})^2. \qquad \text{(II)}$$

Táto rovnica by mala byť presnejšia ako tá predošlá, lebo zohľadňuje aj zmenu rýchlosti počas bežiacej $(k + 1)$-vej sekundy. Nebude však úplne presná, lebo auto sa nepohybuje v každej sekunde rovnomerne zrýchlene, hodnota $a(k)$ je len hodnota *priemerného* zrýchlenia počas k-tej sekundy. Všimnite si, že zatiaľ čo na výpočet rýchlostí $v(k)$ nám znalosť priemerného zrýchlenia $a(k)$ stačila *dokonale*, teraz nám stačí už iba približne!

Opäť by sme sa mali zamyslieť nad presnosťou.[2] V každom výpočtovom kroku k absolútnej chybe určenia $s(k)$ pridávam chybu určenia výrazu $\Delta v(k) \cdot 1$ sekunda = $0{,}005k$ m a chybu $\frac{1}{2}\Delta a(k+1) \cdot (1\ \text{sekunda})^2 = 0{,}0025$ m, ktorá je voči tej predošlej zanedbateľná. Chyba v určení prejdenej dráhy potom je súčtom aritmetického radu a platí pre ňu vzťah $\Delta s(k) \approx 0{,}0025k^2$ m.



Dráha prejdená automobilom je $s = (9{,}4 \pm 0{,}2)$ km. Pomocou rovnice (I) by sme dostali výsledok odlišný o zhruba 15 m, z čoho vidno, že komplikácia so zrýchleným pohybom nevedie k hodnotnejšiemu výsledku. To sa však nedá ľahko povedať vopred, iba overiť dodatočne.

Časť c) je teraz už brnkačka. Stačí nám v tabuľke hodnôt $s(k)$ nájsť hodnotu $s/2$ a už vieme čas $t = k$ sekúnd, v ktorom auto prechádzalo polovicu dráhy a stačí nám kuknúť do tabuľky $v(k)$ a určiť požadovanú rýchlosť. Opäť, v záujme spresnenia výsledkov by sme mohli nájsť také k, pre ktoré bude platiť $s(k) < s/2 < s(k+1)$ a v rámci $(k+1)$-vej sekundy uvažovať rovnomerný pohyb a nájsť ten čas presnejšie. Keďže však ani prejdenú dráhu s vieme len s veľkou neistotou, tak aj k viem určiť len približne a to $k = 171 \pm 6$. Chyba určenia $\Delta v(k)$ pre príslušné k je na úrovni 0,9 m/s. Rozdiel rýchlostí pre prípustné k-čka je v rovnakom ráde. Vďaka tomu **nemá zmysel** počítať rýchlosť v čase $t = 170{,}975...$ s. Hľadaná rýchlosť je približne $(28{,}5 \pm 1)$ m/s $\approx (103 \pm 4)$ km/h.

Hodnotenie : Numerické hodnoty výsledkov boli v tejto úlohe dôležité, preto som za ne udeľoval 50% bodového zisku príslušnej časti. V *časti a)* som stŕhal 0,5b, ak riešiteľ použil rovnicu (I) kvôli tomu, že zadaním bol motivovaný snažiť sa viac. V *časti c)* sa ambiciózne spresňovanie výsledku nestretlo s bodovým zvýhodnením. Chyby neurčil žiaľ nikto, paušálne za to šlo 0,5b dolu. Za uvedenie výsledku s priveľa ciframi som bral -0,2b. Podobne, v *d)* bolo treba spomenúť aj to, že spomalenie bolo priveľké na to, aby šlo o pozvoľné spomaľovanie.

---

[2] Treba si uvedomiť, že pre dráhu nemáme presný výpočet. Pre divoko sa meniace zrýchlenie počas 1 sekundy dokonca vieme dostať ľubovoľne veľkú chybu určenia prejdenej dráhy! Zdá sa však celkom rozumné predpokladať, že auto sa nehrá na vyplašeného býka dráždeného toreadorom, ktorý počas jednej sekundy zmení 8x smer a dokopy má prakticky nulové zrýchlenie. V takom prípade sú naše počty v poriadku, avšak chybu výsledku nevieme určiť zodpovedne, vieme ju iba odhadnúť.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina B – kategórie po 3. sérii zimného semestra 24. ročníka

	Meno a priezvisko	Škola	B- 3.1	B-3.2	B-3.3	B-3.4	B-3.5	☠	①+②	Σ
1	Ficková Klára	G KE Poštová	2.00	5.00	4.50	2.20	5.30	-	38.70	55.70
2	Bogárová Zuzana	G Ľ. Štúra Trenčín	-	4.50	6.00	3.00	5.10	-	32.25	50.85
3	Savinec Michal	GPH Michalovce	4.00	0.50	4.00	4.40	4.00	-	31.80	48.20
4	Švančara Patrik	G Ľ. Štúra Trenčín	3.00	4.50	-	4.50	5.50	-	30.20	47.70
5	Jančo Tomáš	G Ľ. Štúra Trenčín	-	5.00	5.00	2.00	5.50	-	29.09	46.59
6	Kireš Jakub	G KE Poštová	4.00	4.00	5.50	2.15	5.50	-	27.20	46.20
7	Kováč Ondrej	GsvCaM	-	5.00	6.00	4.60	5.40	-	23.65	44.65
8	Kubincová Petra	ŠPMNDAG	-	5.00	5.00	-	4.80	-	29.75	44.55
9	Kopf Michal	G Opava	3.00	-	1.00	4.40	-	-	36.00	44.40
10	Kosec Peter	G Ľ. Štúra Trenčín	4.00	4.50	3.50	2.00	4.80	-	27.10	43.90
11	Galovičová Soňa	G ZA Okružná	4.00	4.70	3.00	2.00	4.80	-	27.20	43.70
12	Baxová Zuzana		4.00	0.50	3.50	4.30	5.10	-	25.90	42.80
13	Bučková Lucia	G Piešťany	-	4.90	5.50	5.00	5.00	-	21.80	42.20
14	Vlček Andrej	EvSŠ Lipt. Mikuláš	4.00	5.00	5.00	2.00	-	-	25.50	41.50
15	Guričan Pavol	G BA Grösslingova	-	5.00	4.00	2.00	5.30	-	24.75	41.05
16	Lami Jozef	G KE Poštová	4.00	0.20	2.00	2.30	4.50	1	29.10	40.90
17	Součková Kamila	Ev. Lýc. BA	-	3.00	-	4.85	4.10	2	30.30	40.25
18	Kramárik Lukáš	G Ľ. Štúra Trenčín	-	4.30	4.00	2.50	5.50	-	23.00	39.30
19	Pločeková Andrea	G Piešťany	-	2.00	4.50	4.40	4.50	-	23.60	39.00
20	Múthová Denisa	G Bil, Žilina	-	4.50	3.00	4.92	4.60	-	21.40	38.42
21	Bartko Matúš	G Ľ. Štúra Trenčín	-	4.50	2.50	1.80	4.30	-	25.00	38.10
22	Pálenik Juraj	ŠPMNDAG	-	5.00	5.50	4.91	4.80	-	16.80	37.01
23	Večerík Matej	ŠPMNDAG	-	1.50	2.00	4.40	4.50	-	24.20	36.60
24	Mrocková Mária	G BA J.Hronca	-	0.50	3.50	3.00	4.80	-	22.80	34.60
25	Kögler Pavol	G Galanta	4.00	0.20	3.50	0.50	4.80	-	20.20	33.00
26	Valová Simona	G Piešťany	-	1.50	3.50	3.00	4.50	-	20.20	32.70
27	Kubinová Mária	G POH, Dolný Kubín	-	0.70	2.00	2.00	-	-	19.30	24.00
28	Faguľová Kristína	G KE Poštová	3.00	-	-	0.60	-	-	19.30	22.90
29	Ďuratný Miloslav		-	-	-	-	-	-	21.00	21.00
30	Dobrotka Matúš	G BN Bánovce	2.00	0.50	0.50	1.30	1.50	-	11.40	16.70
31	Čurmová Zuzana	GPH Michalovce	0.50	-	-	4.60	-	-	11.50	16.60
32	Mikulaj Pavol		-	-	-	-	-	-	16.45	16.45
33	Erdödyová Lívia	GPH Michalovce	-	0.50	4.00	1.50	3.60	2	7.50	15.10
34	Chudá Tatiana	G Piešťany	-	-	-	-	-	-	14.70	14.70
35	Čurmová Jaroslava	GPH Michalovce	-	0.50	2.00	4.60	-	-	7.55	14.65
36	Fecková Daniela	G BA Pankúchova	-	-	-	4.50	-	-	10.00	14.50
37	Kyjaková Katarína	G ZA Okružná	-	0.00	-	1.10	0.50	-	10.50	12.10
38	Makara Ján	GPH Michalovce	-	-	-	-	-	-	10.70	10.70
39	Mrázová Lucia	GPH Michalovce	-	-	-	-	-	-	10.20	10.20
40	Klembarová Barbora	OG Kukučínova Poprad	-	-	-	-	-	-	9.00	9.00
41	Valigová Zuzana	GPH Michalovce	-	-	-	-	-	-	7.65	7.65
42	Chlapečka Adam	G Ľ. Štúra Trenčín	-	-	-	-	-	-	6.70	6.70
	Kmeťová Katarína	OG Kukučínova Poprad	-	-	-	-	-	-	6.70	6.70
44	Marečáková Barbora	OG Kukučínova Poprad	-	-	-	-	-	-	6.50	6.50
45	Šturc Peter	G AV Levice	-	-	-	-	-	-	3.20	3.20
46	Dzurjová Silvia	GPH Michalovce	-	-	-	-	-	-	1.75	1.75
47	Bohiniková Alžbeta	G BA Grösslingova	-	-	-	-	-	-	1.50	1.50
48	Masár Juraj	G Bilíkova	-	-	-	-	-	-	1.00	1.00
49	Maliková Lucia	ZŠsMŠ Liptovská Teplička	-	-	-	-	-	-	0.00	0.00

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

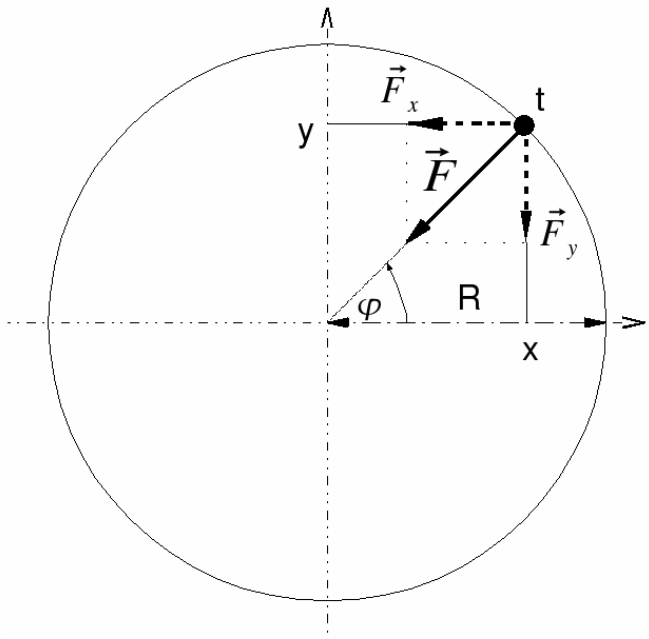
vzorové riešenia 3. série
A – kategória (starší)
24. ročník
zimný semester
školský rok 2008/2009

www.fks.sk

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
otazky@fks.sk

A-3.1 Obyčajný pohyb po kružnici (opravoval Robo)

V klasickej súradnicovej sústave máme nakreslenú kružnicu s polomerom R. Na nej, v bode [R,0] sa nachádza hmotný bod s hmotnosťou m, ktorý sa v čase t = 0 začne pohybovať otáčavým pohybom, s konštantnou uhlovou rýchlosťou ω, proti smeru hodinových ručičiek.
a) Akú veľkú časť kružnice (v uhlových jednotkách) má hmotný bod prejdenú v čase t? (v čase 0 mal prejdených 0 radiánov)
b) Aké sú súradnice x, y bodu v čase t?
c) Aká veľká sila F je potrebná na to, aby sa bod pohyboval popísaným spôsobom? Aký je jej smer?
d) Ak silu vyrátanú v bode c) rozložíme na x-ovú a y-ovú zložku, aká veľká bude x-ová zložka? Inými slovami ako vyzerá závislosť $F_x(t)$ t.j. x-ovej zložky sily od času?
e) Ako vyzerá F_x v závislosti od x, teda F_x (x)?
f) Ako pomocou a)– e) vyšetriť pohyb hmotného bodu viazaného na x-ovú os, na ktorý pôsobí sila F(x) = -kx kde k je nejaká kladná konštanta?



Ahojte! Verím, že táto úloha patrila do kategórie nenáročnejších, a preto hneď začnime sumarizujúcim obrázkom. Na ňom je znázornená situácia, v ktorej sa hmotný bod s hmotnosťou *m* nachádza v (nami zvolenom) čase *t*. Ako tiež vidieť, väčšina z podúloh a) až f) je geometrického rázu (hranie sa s goniometrickými funkciami a rozklad vektora na zložky). Ale poďme pekne systematicky.

a) Z definície uhlovej rýchlosti je táto rovná podielu zmene uhla, ktorú bod pri pohybe po kružnici prekoná za istý čas, a tohto času. Úpravou tohto vzťahu máme

$$\varphi = \omega t$$

b) Z obrázku vidíme, ako ľahko vyjadriť cos φ a sin φ pomocou súradníc x, y a R. Úpravou potom máme:

$$x = R\cos\varphi = R\cos(\omega t) \tag{1}$$
$$y = R\sin\varphi = R\sin(\omega t) \tag{2}$$

c) Hmotný bod je udržovaný na svojej kružnicovej trajektórii vďaka pôsobeniu dostredivej sily F, ktorá smeruje, ako už z jej názvu vyplýva, do stredu kružnice (t.j. do súradnicového bodu [0, 0]). Pre jej veľkosť platí známy vzťah:

$$F = ma_{\mathrm{d}} = m\omega^2 R, \tag{3}$$

kde a_{d} je veľkosť dostredivého zrýchlenia.

d) Podobne ako v podúlohe b), aplikovaním goniometrických funkcií cos φ a sin φ, ako to vyplýva z obrázku, pre veľkosti x-ovej a y-ovej zložky dostredivej sily F dostávame:

$$F_x = -F\cos\varphi = -m\omega^2 R\cos\varphi \;\Rightarrow\; F_x(t) = -m\omega^2 R\cos(\omega t) \qquad (4)$$
$$F_y = -F\sin\varphi = -m\omega^2 R\sin\varphi \qquad (5)$$

Mínusko je pri oboch zložkách sily preto, lebo obe zložky sily majú smer opačný, než je smer súradnicových osí, ako je to viditeľné z obrázka.

e) Závislosť $F_x(x)$ získame, ak do vzťahu (4) pre závislosť x-ovej zložky sily od času dosadíme vzťah (1), teda formálne zapísané:

$$F_x(x) = -m\omega^2 x \qquad (6)$$

f) Keď sme si už všetko potrebné postupne predpripravili, môžeme sa pustiť do „zlatého klinca úlohy“. Pohliadnime na vzťah (6) a porovnajme ho so silou $F(x) = -kx$ zo zadania. Vidíme, že oba zápisy sa principiálne nelíšia, pretože hmotnosť m aj uhlová rýchlosť ω sú konštantami. Teda konštantou k pre náš prípad bude:

$$-m\omega^2 x = -kx \Rightarrow \qquad k = m\omega^2 \qquad (7)$$

Ak bude kladná konštanta k predstavovať tuhosť pružiny a sila $F(x) = -kx$ predstavovať silu spôsobujúcu kmitanie hmotného bodu (závažia) zaveseného na pružinke, potom z posledného vzťahu (7) získame známy učebnicový vzťah pre uhlovú frekvenciu vlastných kmitov pružinového oscilátora $\omega^2 = k/m$. Ak si uvedomíme, že jeden kmit závažia na pružinke trvá presne toľko, koľko trvá prislúchajúcemu hmotnému bodu, kým raz obehne kružnicu, vieme z tohto veľmi elegantne odvodiť vzorec pre periódu takýchto kmitov. Dopočítajte si to, nezabudnite však pri tom na to, že ω sa meria v radiánoch za sekundu a kruh má celkovo 2π radiánov.

Toť vsio. ☺

A-3.2 Pružina (opravoval Bzdušo)

Homogénnu pružinu s pokojovou dĺžkou l, celkovou hmotnosťou m a tuhosťou k zavesíme za jeden koniec a necháme natiahnuť sa vplyvom gravitácie. Aká bude dlhá?

Pružina čo? Visí.[1] A pod ťarchou vlastnej tiaže sa nejako natiahne. Notorické pozorovanie je, že sa natiahne *nerovnomerne*. Dôvod je jednoduchý: V každom mieste je pružina naťahovaná len tiažou tej svojej časti, ktorá je pod ním.

Ako celok je pružina natiahnutá nerovnomerne. No pokiaľ sa pozrieme na jej dosť malý úsek, ten je už natiahnutý *pomerne rovnomerne* (tým rovnomernejšie, čím menší úsek sledujeme). Nič nám nebráni predstaviť si, že celá pružina je v skutočnosti zložená z viacerých menších pružín.[2] Označme ich počet N. No a predpokladajme, že každá z týchto častí je už natiahnutá rovnomerne (predpoklad ♥).

Ak chceme zistiť, ako sa natiahli tieto malé drobizgy (odtiaľ dolný index $_\mathrm{D}$), potrebujeme poznať ich parametre. Tie sú

$$l_\mathrm{D} = \frac{l}{N} \qquad m_\mathrm{D} = \frac{m}{N} \qquad k_\mathrm{D} = Nk\,,$$

---

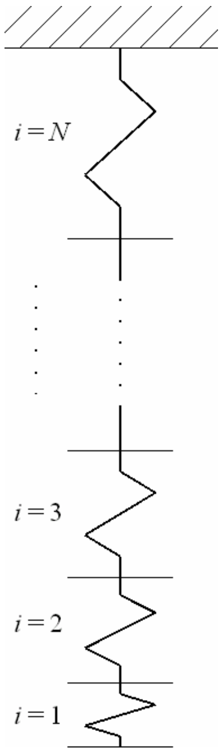
[1] Vzorové riešenie pre vetu „*Mama išla do obchodu a kúpila mlieko,*“ je napríklad „*Mama išla do obchodu a mlieko čo? Kúpila.*“

[2] Pre jednoduchosť si možno predstaviť, že týmito menšími pružinami sú jednotlivé závity. My však v riešení pôjdeme v delení ešte ďalej.

kde sa pristavíme len pri poslednej rovnici. Keby sme pružinu naťahovali konštantnou silou F, tak sa predĺži o F/k. Ak si ju predstavíme ako N menších častí, predĺži sa o $N \cdot F / k_{\mathrm{D}}$. Ide však o *to isté* natiahnutie! To nás už dovedie k rovnosti $k_{\mathrm{D}} = Nk$.

Z obrázku vpravo vidno, že *i*tu pružinu odspodu naťahuje tiaž $(i-1)$ pružín pod ňou. Jej dĺžka teda bude (podľa vzťahu $\Delta l = F/k$)

$$l_i = l_D + \frac{(i-1)m_D g}{k_D} = \frac{l}{N} + \frac{(i-1)mg}{N^2 k},$$



kde sme samozrejme nezabudli na pokojovú dĺžku každej pružinky.

Celkovú dĺžku pružiny teraz získame jednoduchým sčítaním dĺžok všetkých natiahnutých drobizgov, teda

$$L = \sum_{i=1}^{N} l_i = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{l}{N} + i\frac{mg}{N^2 k} - \frac{mg}{N^2 k}\right) = l + \frac{mg(N+1)}{2Nk} - \frac{mg}{Nk},$$

kde sme využili vzťah $1+2+\cdots+N = N(N+1)/2$. Ak si teraz uvedomíme, že ♥ je splnené tým lepšie, čím na menšie úseky delíme pružinu, stačí spraviť limitu $N \to \infty$. Vtedy v druhom člene je $(N+1)/N \approx 1$ a tretí člen klesá do nuly. Výsledok je preto

$$L = l + \frac{mg}{2k}.$$

Viac už nemám čo dodať. Snáď len, že ma potešilo veľké množstvo správnych riešení a že mám ešte jednu poznámku pod čiarou.[3]

A-3.3 Dúfam, že všetci máte nainštalovaný Excel (opravoval Filip, vzorák Jakub)

...pretože ak nie, ste masochisti, pre riešenie nasledujúcej úlohy ho budete potrebovať. Z vraku športového auta vytiahli čiernu skrinku, ktorá obsahuje údaje o tom, čo sa stalo pred haváriou. Konkrétne, obsahuje údaje o zrýchlení auta v každej sekunde. Za koncom zadania nasleduje 300 čísel, ktoré sú zrýchlenia auta v ms^{-2} za posledných 5 minút jazdy, každé číslo odpovedá priemernému zrýchleniu v jednej sekunde, prvé číslo – prvá sekunda, atď... Z čiernej skrinky sme sa tiež dozvedeli, že pred 5 minútami bol vypnutý motor a auto teda s najväčšou pravdepodobnosťou stálo.

Zistite:

a) (2body) Akú dlhú dráhu auto za posledných 5 minút prešlo?

b) (1bod) Akú maximálnu rýchlosť pri svojom pohybe dosiahlo?

c) (2body) Akú rýchlosť malo auto v polovici prejdenej dráhy?

d) (1 bod) Snažil sa vodič tesne pred nárazom zabrzdiť?

Snažte sa o čo najpresnejší výsledok.

```
0 0 0 0 0 0.06 0.16 0.25 0.34 …(286 čísel)… 0.41 0.4 -4.1 -8.1 -9.1 -8.5
```

Úvodom sa patrí ospravedlniť za miernu dezinformáciu. Na vstupe sme zadali 301 čísel. Ja som sa s tým bavil tak 20 minút. Dúfam, že vy menej. (*Ja som to nebol!*)

Časť d) Poďme zodpovedať najprv to, čo ide najľahšie. Z posledných čísel záznamu okamžite vidím, že v posledných 4 sekundách pred nárazom malo auto relatívne vysoké

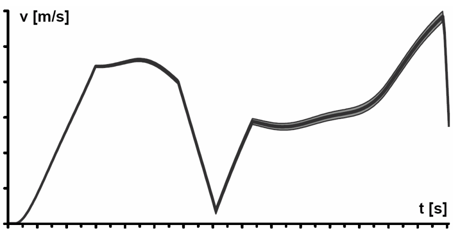
[3] Totiž, že na http://www.fks.sk/~bzduso/fyzika/prednasky/IYPT/2_Slinky_default_.ppt si môžu záujemci prečítať o problematike zavesených pružín ešte omnoho viac.

spomalenie, porovnateľné s tiažovým zrýchlením. To znamená, že vodič pred nárazom brzdil.

Časť b) Zavediem označenie $v(k)$ pre rýchlosť na konci $k$tej sekundy. Podobne, priemerné zrýchlenie počas $k$tej sekundy, ktoré mám v zadaní, označím $a(k)$. Predpokladáme, že rýchlosť na začiatku bola nulová, teda $v(0) = 0$. Keď poznám $v(k)$, tak viem spočítať aj

$$v(k+1) = v(k) + a(k+1)\cdot 1\ \text{sekunda}.$$

Takto postupne popočítam rýchlosť na konci 1., 2., 3., ... až 301. sekundy. Spomedzi rýchlostí nájdem maximálnu. Najľahšie ju človek nájde v grafe $v(t)$ a potom si príslušnú hodnotu odčíta v tabuľke.



Mali by sme určiť aj chybu nášho výsledku. Nie je to zložité, stačí si uvedomiť, že neistota vstupných dát $a(k)$ je zhruba 0,005 ms^{-2}, lebo zrýchlenia sú udané (prevažne) na 2 desatinné miesta. Preto v každom výpočtovom kroku od $v(k)$ ku $v(k+1)$ zväčšujem absolútnu chybu rýchlosti o aspoň 0,005 m/s. Chyba určenia rýchlosti $v(k)$ je teda $\Delta v = 0{,}005k$ m/s. Priložený graf dokumentuje rýchlosť auta aj s odchýlkou. Maximálna dosiahnutá rýchlosť auta bola (58,5 ± 1,5) m/s.

Časť a) Keď som si už spočítal rýchlosť na konci každej sekundy, tak už celkom ľahko spočítam aj dráhu prejdenú na konci každej sekundy. Analogicky ako v predošlom odstavci si označím $s(k)$ dráhu prejdenú na konci $k$tej sekundy. Ak by som pohyb počas $(k+1)$vej sekundy považoval za prakticky rovnomerný, tak by som napísal rovnicu

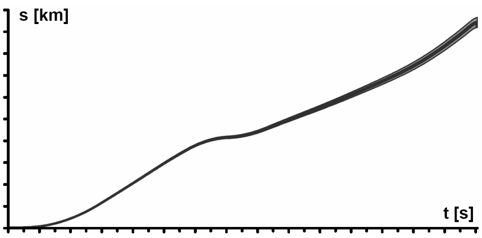
$$s(k+1) = s(k) + v(k)\cdot 1\ \text{sekunda}. \qquad \text{(I)}$$

Keďže som bol však zadaním usmernený k tomu, aby som našiel najpresnejší možný výsledok, tak skúsim niečo lepšie. Môžem považovať pohyb auta počas $(k+1)$vej sekundy za rovnomerne zrýchlený. Potom bude platiť rovnica

$$s(k+1) = s(k) + v(k)\cdot 1\ \text{sekunda} + \tfrac{1}{2}\, a(k+1)\cdot(1\ \text{sekunda})^2. \qquad \text{(II)}$$

Táto rovnica by mala byť presnejšia ako tá predošlá, lebo zohľadňuje aj zmenu rýchlosti počas bežiacej $(k+1)$-vej sekundy. Nebude však úplne presná, lebo auto sa nepohybuje v každej sekunde rovnomerne zrýchlene, hodnota $a(k)$ je len hodnota *priemerného* zrýchlenia počas k-tej sekundy. Všimnite si, že zatiaľ čo na výpočet rýchlostí $v(k)$ nám znalosť priemerného zrýchlenia $a(k)$ stačila *dokonale*, teraz nám stačí už iba približne!

Opäť by sme sa mali zamyslieť nad presnosťou.[4] V každom výpočtovom kroku k absolútnej chybe určenia $s(k)$ pridávam chybu určenia výrazu $\Delta v(k)\cdot 1$ sekunda $= 0{,}005k$ m a chybu $\tfrac{1}{2}\Delta a(k+1)\cdot(1\ \text{sekunda})^2 = 0{,}0025$ m, ktorá je voči tej predošlej zanedbateľná. Chyba v určení prejdenej dráhy potom je súčtom aritmetického radu a platí pre ňu vzťah $\Delta s(k) \approx 0{,}0025k^2$ m.



Dráha prejdená automobilom je $s = (9{,}4 \pm 0{,}2)$ km. Pomocou rovnice (I) by sme dostali výsledok odlišný o zhruba 15 m, z čoho vidno, že komplikácia so zrýchleným pohybom nevedie k hodnotnejšiemu

[4] Treba si uvedomiť, že pre dráhu nemáme presný výpočet. Pre divoko sa meniace zrýchlenie počas 1 sekundy dokonca vieme dostať ľubovoľne veľkú chybu určenia prejdenej dráhy! Zdá sa však celkom rozumné predpokladať, že auto sa nehrá na vyplašeného býka dráždeného toreadorom, ktorý počas jednej sekundy zmení 8x smer a dokopy má prakticky nulové zrýchlenie. V takom prípade sú naše počty v poriadku, avšak chybu výsledku nevieme určiť zodpovedne, vieme ju iba odhadnúť.

výsledku. To sa však nedá ľahko povedať vopred, iba overiť dodatočne.

Časť c) je teraz už brnkačka. Stačí nám v tabuľke hodnôt $s(k)$ nájsť hodnotu $s/2$ a už vieme čas $t = k$ sekúnd, v ktorom auto prechádzalo polovicu dráhy a stačí nám kuknúť do tabuľky $v(k)$ a určiť požadovanú rýchlosť. Opäť, v záujme spresnenia výsledkov by sme mohli nájsť také k, pre ktoré bude platiť $s(k) < s/2 < s(k+1)$ a v rámci $(k+1)$vej sekundy uvažovať rovnomerný pohyb a nájsť ten čas presnejšie. Keďže však ani prejdenú dráhu s vieme len s veľkou neistotou, tak aj k viem určiť len približne a to $k = 171 \pm 6$. Chyba určenia $\Delta v(k)$ pre príslušné k je na úrovni 0,9 m/s. Rozdiel rýchlostí pre prípustné *káčka* je v rovnakom ráde. Vďaka tomu **nemá zmysel** počítať rýchlosť v čase $t = 170{,}975...$ s. Hľadaná rýchlosť je približne $(28{,}5 \pm 1)$ m/s $\approx (103 \pm 4)$ km/h.

Hodnotenie : Numerické hodnoty výsledkov boli v tejto úlohe dôležité, preto som strhával body podľa presnosti. V *časti a)* som stŕhal 1 bod ak riešiteľ použil rovnicu (I) kvôli tomu, že zadaním bol motivovaný snažiť sa viac. V *časti c)* sa ambiciózne spresňovanie výsledku nestretlo s bodovým zvýhodnením. Za neurčenie chýb zisťovaných veličín som nestŕhal, za ich určenie som body upravoval smerom nahor. Avšak ak niekto chyby ani nespomenul, tak bol odmenený polbodovou stratou.

A-3.4 Skutočný príbeh(opravoval Samo)

V miestosti FKS máme sklenú nádobu s objemom V, ku ktorej je pripojená vývева. Stala sa však nepríjemná vec, v miestnosti sa nám premnožili mole a po tom, ako skonzumovali vifon, Fajove staré topánky a Spišskú borovičku, vyhrýzli do sklenenej nádoby malý otvor o ploche S. Na aký minimálny tlak je možné teraz nádobu vývevou vyčerpať? Predpokladajte, že vývева nezávisle na tlaku v nádobe z nej odčerpáva vzduch konštantným objemovým výtokom Q (litrov za sekundu). Vo FKS máme normálny atmosférický tlak a teplotu 20 °C.

Milé deti,

tento príklad bola asi tyčka. Jedine tak si viem vysvetliť to, že ste ho nikto nezrátali a to, že tento vzorák sa rodil tak dlho:-). Ono to ale predsa nemôže byť až také zlé, všakže? Odvážnemu šťastie praje, pusťme sa preto odvážne do riešenia problému!

Skôr, než začneme riešiť samotnú úlohu zo zadania, skúsme vyriešiť jednoduchší problém. Predstavme si malú uzavretú nádobu tvaru kocky, v ktorej sa nachádza plyn. My sa pokúsime zistiť, koľko častíc dopadne na stenu tejto nádoby za krátky čas Δt. Označme $n(v_x)$ počet častíc, ktorých veľkosť zložky rýchlosti v smere kolmom na stenu je z intervalu $\langle v_x - \mathrm{d}v, v_x + \mathrm{d}v\rangle$. Polovica týchto častíc zrejme bude mať smer rýchlosti k stene, polovica od steny. Zaujíma nás teda len $n(v_x)/2$ častíc, ktoré sa pohybujú v správnom smere. Aby tieto častice stihli za čas Δt vraziť do steny, nesmú byť od nej ďalej ako $v_x \Delta t$. Ak má strana kocky dĺžku a, tak molekúl, ktoré spĺňajú tieto podmienky bude:

$$\frac{n(v_x)v_x\Delta t}{2a}.$$

Všetkých molekúl bude teda spolu:

$$\sum_{i=0}^{i=\infty}\frac{n(v_x)v_x\Delta t}{2a} = \frac{n\Delta t}{2a}\frac{\sum_{i=0}^{i=\infty} n(v_x)v_x}{n}$$

kde n je počet všetkých častíc a $v_x = i \cdot \mathrm{d}v$

Všimnime si, že člen vpravo je priemerná veľkosť v_x . Vzťah sa teda dá prepísať ako:

$$\frac{n\Delta t}{2\mathrm{a}}\overline{|v_x|}$$

Potrebujeme už len vyjadriť priemernú veľkosť v_x pomocou $\overline{|v|}$ – priemernej veľkosti rýchlosti molekúl. Pri odvodzovaní budeme predpokladať, že všetky molekuly majú veľkosť rýchlosti $\overline{|v|}$, pozorný čitateľ odôvodní, prečo si to môžeme dovoliť. Veľkosť v_x nejakej častice je potom jednoznačne určená smerom, ktorým sa táto častica hýbe. Ak vektory rýchlosti všetkých častíc presunieme do spoločného počiatku, ich konce vytvoria sféru s polomerom $\overline{|v|}$. Naše v_x je potom rovné x-ovej súradnici bodu na sfére, ktorý zodpovedá danej častici. Rozdelíme sféru na dve polsféry tak, aby rez bol kolmý na x-ovú os. Keďže chceme spočítať priemer absolútnej hodnoty v_x obmedzíme sa iba na polsféru, s kladnými hodnotami v_x a zrátame priemernú hodnotu jej x-ových súradníc. Lež, čo to, finta! Tento priemer má predsa svoje meno! Volajú ho ťažisko! Priemerná hodnota v_x bude x-ová súradnica ťažiska, teda vzdialenosť ťažiska polsféry od jej stredu. A z tabuliek snaživý čitateľ vyčíta, že táto vzdialenosť je rovná polovici polomeru sféry, v našom prípade $\overline{|v|}/2$.

Za čas Δt do steny teda narazí

$$\frac{n\Delta t}{4a}\overline{|v|}$$

častíc.

Tento výsledok teraz využijeme na to, aby sme spočítali, koľko častíc prejde dierkou, ktorú vyhrýzli mole. Stačí dierku zakryť množstvom myslených kociek a čitateľ sa presvedčí, že vzťah na počet častíc, ktoré preletia dierkou v jednom smere, bude:

$$\frac{Sc_1\Delta t}{4}\overline{|v_1|}$$

Kde c_1 je koncentrácia častíc mimo nádoby a S je plocha dierky. Častice však nelietajú len z nádoby s vyšším tlakom do nádoby s nižším tlakom. Niektoré častice, bude ich však menej, lietajú aj v smere opačnom, tých bude zrejme

$$\frac{Sc_2\Delta t}{4}\overline{|v_2|}$$

Kde c_2 je koncentrácia častíc v nádobe. Celkový tok častíc dierkou do nádoby preto bude:

$$\frac{S}{4}\left(\overline{|v_1|}c_1 - \overline{|v_2|}c_2\right)$$

Pekný vzťah, no nie veľmi užitočný. Ujo internet a teta Wikipédia nám však prezradili, že:

$$\overline{|v|} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

kde M je molárna hmotnosť vzduchu.

Ujo vedúci Kubo nám zas prezradil, že sa nedopustíme veľkej chyby, ak budeme predpokladať, že v oboch nádobách má plyn rovnakú teplotu T. Ak teraz využijeme stavovú rovnicu, ktorá hovorí:

$$p = \frac{n}{V}RT = cRT$$

Dostaneme pre tok častíc dierkou do nádoby vzťah:

$$\frac{S(p_1 - p_2)}{\sqrt{2\pi MRT}}$$

Vývева odčerpáva častice objemovým tokom Q, prepočítané na tok častíc to je:

$$\frac{p_2 Q}{RT}$$

V ustálenom stave musí pritekať rovnako veľa častíc, ako odteká, oba toky sa preto musia rovnať. Z toho dostávame rovnosť:

$$\frac{S(p_1 - p_2)}{\sqrt{2\pi MRT}} = \frac{p_2 Q}{RT}$$

Keď vyjadríme tlak v nádobe:

$$p_2 = \frac{S\sqrt{RT}}{S\sqrt{RT} + Q\sqrt{2\pi M}}$$

A máme výsledok. Ostáva otázka, nie nepodstatná, nakoľko je tento výsledok správny. Nuž, dovolili sme si počas riešenia množstvo zanedbaní. Predpokladali sme, že teploty v oboch nádobách budú rovnaké, predpokladali sme, že plyn je ideálny a tvárili sme sa, že cez dierku prejde rovnako veľa častíc, ako by dopadlo na terčík rovnakej plochy. To však nie je úplne to isté, pretože po dopade na terčík sa častice odrazia späť, avšak po prejdení dierkou sa nám späť neodrazí nič a v okolí dierky bude po čase menšia koncentrácia molekúl ako inde v nádobe. Preto tento výsledok netreba brať príliš vážne a uvedomiť si, že je len približný.

Toľko vzorové riešenie, teraz trocha kritiky našich riešiteľov. Kritika padá hlavne na plecia riešieľov, ktorí získali viac ako pol boda. Potešili ma najväčšími bludmi. Čo ma pri opravovaní najviac hnevalo bolo, že rátate príklad o plyne a nikomu ani len nenapadne uvažovať, že by snáď mohol byť aj stlačiteľný. Takmer všetci ste svorne tvrdili, že objemové prietoky musia byť rovnaké a netrápite sa detailom, že pri rôznych tlakoch môže mať to isté množstvo vzduchu rôzny objem. Niektorí ste na mňa vytiahli nové pojmy ako tlaková energia a tvrdili, že je rovná súčinu tlaku a objemu. Iné riešenie sa ma snažilo presvedčiť, že pri izotermickom deji sa nedodáva teplo. A zaklincoval to expert, ktorý vyhlásil, že molekuly sa môžu hýbať iba v šiestich smeroch a dosť. Úplne všetci bernoullisti a energetisti zabudli vo svojich rovniciach na člen za vnútornú energiu plynu a vôbec nikomu nenapadlo, že rýchlosť tečúceho vzduchu nemusí byť v každom bode kolmá na dierku. Riešenia na mňa robili dojem snahy nasilu poskladaných vzorcov opísaných z učebnice fyziky bez štipky snahy porozumieť tomu, čo píšem. Takto sa však fyzika nerieši, to nie je súťaž, kto si tipne lepší vzorec. Píšem len to, čomu naozaj rozumiem, inak splodím krásne bludy. To by však asi chcelo začať riešiť ten seminár skôr ako pať minút pred záverečnou pošty, všakže?:-)

Nuž, nepotešili ste ma, ani ja Vás nepoteším a bodíkov veľa nerozdám:-(

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina A – kategórie po 3. sérii zimného semestra 24. ročníka

	Meno a priezvisko	Škola	A- 3.1	A-3.2	A-3.3	A-3.4	③	☠	①+②	Σ
1	Bogár Ján	G Ľ. Štúra Trenčín	5.00	5.00	5.60	1.00	18.39	-	41.14	59.53
2	Honzáková Kateřina	GJK Praha	6.00	5.00	5.80	0.50	18.93	-	40.15	59.07
3	Bačo Ladislav	G KE Poštová	6.00	5.00	5.50	1.00	19.08	-	38.08	57.15
4	Hruška Eugen	G Hlohovec	5.50	3.50	5.60	1.00	17.60	-	36.44	54.03
5	Polačko Martin	G KE Alejová	6.00	1.00	5.60	1.00	13.60	-	38.00	51.60
6	Matejovičová Lenka	G BA J.Hronca	6.00	4.50	6.00	0.50	17.00	-	31.80	48.80
	Vanta Radovan	G BA Metodova	5.00	5.00	5.50	1.00	18.32	-	30.49	48.80
8	Maixner Michal	OG ZA Varšavská	5.00	4.50	4.50	1.50	15.50	-	32.60	48.10
9	Štyráková Kamila	G POH, Dolný Kubín	4.00	3.00	5.10	0.00	14.50	-	32.20	46.69
10	Kováč Jakub	GsvCaM	4.50	5.00	5.30	1.00	15.80	-	30.50	46.30
11	Lešková Andrea	G Lipany	4.50	2.00	5.10	0.10	14.11	-	30.36	44.47
12	Jursa Jakub	G KE Alejová	5.00	5.00	5.40	0.01	15.41	-	29.00	44.41
13	Midlik Adam	G J.A.R. Prešov	5.00	5.00	4.10	-	16.33	-	27.74	44.07
14	Hagara Michal	G BA J.Hronca	6.00	1.00	5.60	0.10	15.06	-	27.21	42.27
15	Kieferová Mária	GSF Žilina	6.00	1.50	3.50	0.50	11.50	-	30.70	42.20
16	Horňák Filip	G BA Grösslingova	5.00	4.50	-	1.00	10.92	2	29.94	40.85

17	Rohár Pavol	G KE M.R.Štefánika	4.00	1.00	3.50	-	10.80	-	30.00	40.80
18	Hudák Adam	G KE M.R.Štefánika	3.50	1.00	5.00	-	11.88	-	28.55	40.42
19	Batmendijnová Kristína	G Stará Ľubovňa	3.00	3.00	5.60	-	11.60	-	28.20	39.80
20	Petrucha Michal	G BA Metodova	4.00	5.00	5.80	-	14.80	-	24.90	39.70
21	Hašík Juraj	G BA Grösslingova	4.00	5.00	4.60	-	13.88	2	24.70	38.58
22	Chudjak Martin	SPŠ Martin	3.50	-	4.00	-	9.68	-	28.57	38.24
23	Vanya Peter	G BA J.Hronca	5.00	1.00	5.60	1.00	12.60	-	25.50	38.10
24	Bosák Radomír	G BA Grösslingova	6.00	5.00	5.60	0.50	17.10	-	20.80	37.90
25	Ďurian Michal	G Piešťany	2.00	2.00	4.50	0.00	10.80	-	25.88	36.67
26	Rigdová Emília	OG Kukučínova Poprad	-	-	3.60	-	4.92	-	30.62	35.54
27	Cocuľová Zuzana	G KE Poštová	5.00	2.50	4.60	-	14.50	-	18.76	33.25
28	Kuzma Tomáš	G KE Alejová	6.00	1.00	5.00	-	12.00	-	21.00	33.00
29	Kuklišová Nina	G BA Metodova	4.50	4.50	5.50	0.00	14.50	-	16.20	30.70
30	Zajaček Michal	Ev. Lýc. BA	5.00	1.00	-	0.00	6.00	-	23.40	29.40
31	Pinnaka Prabhat Rao	G India	6.00	3.50	-	-	9.50	-	18.50	28.00
32	Kramárik Lukáš	G Ľ. Štúra Trenčín	4.00	-	5.50	-	11.88	-	15.66	27.54
33	Cuc Bruno	G BA Grösslingova	5.50	5.00	5.10	0.50	18.00	-	9.12	27.12
34	Baxová Katarína	G Ľ. Štúra Trenčín	-	-	-	-	-	-	24.50	24.50
35	Kubinová Mária	G POH, Dolný Kubín	2.00	-	-	-	2.80	-	17.83	20.63
36	Výška Martin	G Alej, Praha	-	-	-	-	-	-	20.50	20.50
37	Eiben Eduard	G KE Poštová	-	-	-	-	-	-	20.00	20.00
38	Šimko Stanislav	G BA J.Hronca	-	-	-	-	-	-	17.45	17.46
39	Hojčka Michal	G Partizánske	-	-	-	-	-	-	17.00	17.00
40	Krejčír Andrej	G PD Prievidza	-	-	-	-	-	-	16.96	16.96
41	Katsiaryna Artsiushina	G Minsk	-	-	-	-	-	-	14.50	14.50
42	Görcsösová Andrea	G KE Alejová	-	-	-	-	-	-	14.01	14.01
43	Liščinský Miroslav	G KE Alejová	-	-	-	-	-	-	13.80	13.80
44	Sládek Filip	GAB Námestovo	-	-	-	-	-	-	9.53	9.53
45	Baranová Jana	G KE Alejová	-	-	-	-	-	-	8.17	8.16
46	Bendová Lenka	G BA J.Hronca	-	-	-	-	-	-	7.50	7.50
47	Vaváčková Martina	G Tábor	-	-	-	-	-	-	7.20	7.20
48	Matulová Daniela	G BA Papánka	-	-	-	-	-	-	5.36	5.36
49	Stripajová Svetlana	G POH, Dolný Kubín	-	-	-	-	-	-	5.00	5.00
50	Marcinek Ján	G Kremnica	-	-	-	-	-	-	2.00	2.00
	Stupka Roman	G Kremnica	-	-	-	-	-	-	2.00	2.00
52	Suchomelová Dana	G Ľ. Štúra Trenčín	-	-	-	-	-	-	1.50	1.50
53	Mohammad Adam	Ostrava	-	-	-	-	-	-	1.42	1.42
54	Marhefka Eduard	G Spišská Stará Ves	-	-	-	-	-	-	1.00	1.00
55	Kňažeková Petra	G Ľ. Štúra Trenčín	-	-	-	-	-	-	0.00	0.00
	Maliková Lucia	ZŠsMŠ Liptovská Teplička	-	-	-	-	-	-	0.00	0.00
	Sedlačková Barbora	G Sereď	-	-	-	-	-	-	0.00	0.00