FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 1. série
B – kategória (mladší)
23. ročník
zimný semester
školský rok 2007/2008

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
otazky@fks.sk

www. **.sk**

B-1.1 Jano (opravoval **Jano** Hreha, vzorák Jakub)

Kamarát Jano sa vlani dal na bežkovanie. Odvtedy chodí ako telo bez duše a stále opakuje veci ako: “Ja to nechápem”, “čort aby to zčrevil” (eskimácke nárečie) alebo “Ty máš vysokú školu, tak mi to vysvetli”. O čo ide? Nechajme prehovoriť Jana:
“Ja to nechápem, že mám na nohe totie bežky a každou robím rovnaké pohyby dopredu aj dozadu, tak ako je možné, že sa začnem pohybovať dopredu, a nie napríklad dozadu, alebo prečo nestojím na mieste?”
Ozaj, prečo?

Zima sa pomaly blíži, tak by bolo fajn, mať jasno aspoň teoreticky, ako to s tým bežkovaním vlastne chodí. Úvodom si ujasnime štýl behu - totiž napr. korčulovanie určite nie je o posúvaní nôh dopredu a dozadu a teda do úvahy najskôr prichádza iba tzv. turistický štýl (jazda so sklzom) v stope.

Zrejme prvá očividná skutočnosť determinujúca smer jazdy sú palice. O nich určite nikto nepovie, že nám napomáhajú hýbať sa hocijakým smerom. Kto skúšal bežkovať bez palíc, ten vie, že to síce ide, ale nič moc to nie je. Keď sa mi raz zlomila palica, tak som si radšej zobral 5-kilovú bakuľu, len aby som sa mal čím postrkovať vpred (a mal som zároveň aj posilňovanie ramien v cene).

Druhý argument vystihuje samotný princíp pohybu prakticky všektých suchozemských chodiacich organizmov (nás nevynímajúc). Totiž výpoveď o zhodnosti pohybov nohami vpred a vzad je STRAŠNE, AŽ NESKUTOČNE zavádzajúca. Je to asi také isté, ako povedať, že pri chôdzi robím len jednou nohou vpred a druhou vzad a že prečo vlastne idem dopredu? Nuž lebo vždy stojím iba na jednej, od ktorej sa odrážam a druhú dávam nad zemou **bez premáhania trenia** vpred. Podobne je to aj na bežkách, aj keď sa to nemusí na prvý pohľad každému zdať tak očivodné, keďže lyže nezdvíhame. Každopádne prenášaním hmotnosti bežkár spôsobuje, že **drvivá väčšina hmotnosti spočíva pri odraze na lyži, ktorá by sa akurát chcela hýbať dozadu**. Naopak, lyža smerujúca dopredu je odľahčená. Výsledný efekt je, že trecia sila smerom dopredu je menšia a preto sa môžem odraziť vpred. Toto je snáď najdôležitejší fakt, ktorý sme očakávali nájsť v riešeniach.

Keďže však bežky sú oveľa prefíkanejšie fungujúce laty, tak si o nich povieme čosi viac. Totiž, keď si rozfázujeme pohyb pri turistickom štýle sklzom, tak ľahko rozpoznáme 2 fázy: odraz a následný sklz (alebo šmyk; skrátka fáza, keď sa veziem).

1. Odraz prebieha, ako sme si už povedali, pri nerovnomernom zaťažení lyže. Profil (viď obr.) zaťaženej bežky, od ktorej sa odrážam, je v strednej časti lyže – pod topánkou – zatlačený do stopy. A práve stred lyže má zamedziť prešmyknutiu lyže dozadu pri odraze (a zároveň sa na ňu nesmie nalepovať sneh, lebo to nepríjemne brzdí, až človek stojí na fleku a nemôže sa hnúť). Preto sa zvykne voskovať (viac o voskoch nájdete na www.hiking.sk). Dokonca sa voskuje nažehlovaním vo viacerých vrstvách podľa predpokladaného vývoja teploty na jednotlivých úsekoch trasy (skúste sa opýtať niekoho, kto išiel *Bielu stopu SNP* a dozviete sa viac...). Súčasné trendy pre amatérov smerujú rozhodne viac k šupinatým bežkám, ktoré prešmykujú úplne minimálne vďaka schodíkovitým šupinám, viď obrázok. To ináč spôsobuje, že koeficient trenia je rozličný pre smer dopredu a smer dozadu! Takéto zuby môžu spôsobiť, že koeficient trenia na vhodnom podklade môže byť väčší ako 1, čo je minimálne nezvyčajné.

Ďalej vieme aj to, že statický koeficient trenia býva väčší ako šmykový. To sú všetko faktory, ktoré hrajú s nami pri odraze. Naviac si pomáhame palicami.

2. Sklz je tá príjemnejšia fáza, v ktorej sa veľa nenarobíme (ruky cez palice na začiatku ešte zaberajú – preto sú bežkárske palice take dlhé) a napriek tomu prejdeme slušnú vzdialenosť. Pri sklze je už zaťaženie lyží rovnomerné, profil lyže nie je v strede vtláčaný do snehu a kĺžeme po prednej a zadnej časti lyže, ktoré majú malý koeficient trenia v porovnaní so strednou časťou. Na bežkách teda prejdeme vačší úsek sklzom, keď stojíme na oboch lyžiach rovnomerne ako keď sa postavíte iba na jednu!
Preto si má bežky človek kupovať presne na HMOTNOSŤ. Aby sa mu lyža prehýbala vtedy, keď to potrebuje. Príliš tvrdá nám bude pri odraze prešmykovať dozadu, s mäkkou sa zase ďaleko nedošmýkame pri sklze.

B-1.2 Kara vaňa (vzorák Marek a Kubus, opravovali Maťo, Marek, Judita a Tinka)

Karavána putuje cez púšť z mesta A do mesta B po jedinej ceste, ktorá ich spája. Pohybuje sa stálou rýchlosťou 2 km/h. Kvôli ohrozeniu banditami vyšle každých 6 hodín prieskumníka do mesta A a tiež do mesta B. Prieskumníci sa pohybujú rýchlosťou 4 km/h. Koľko času uplynie medzi príchodmi dvoch po sebe idúcich skautov v mieste A resp. B?

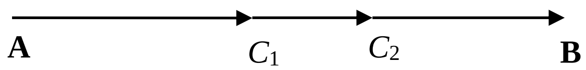
Pozrime sa najprv, ako často budú prieskumníci prichádzať do mesta B, konkrétne sa pozrime na ľubovoľných dvoch za sebou idúcich prieskumníkov. Povedzme, že prvého z nich vyslala karavána v mieste C_1 v čase T_1. (Pozri ilustračný obrázok.) Jeho cesta mu trvala nejaký čas t, takže v meste B zaznamenali jeho príchod v čase $T_1 + t$. O šesť hodín po jeho vyslaní, teda v čase $T_2 = T_1 + 6\text{h}$, vyslala karavána druhého prieskumníka. Keďže sa však sama pohybuje rýchlosťou 2 km/h, za tých 6 hodín prešla 12 km smerom k mestu B (a druhý prieskumník teda štartoval až z bodu C_2, ako na obrázku). O túto vzdialenosť má druhý prieskumník kratšiu dráhu oproti prvému. Rýchlosťou 4km/h prejdú prieskumníci túto vzdialenosť za 3 hodiny, čo znamená, že druhému trvala cesta do mesta len čas $t - 3\text{h}$. Dorazil teda v čase

$$T_2 + (t - 3\text{h}) = (T_1 + 6\text{h}) + (t - 3\text{h}) = T_1 + t + 3\text{h},$$

čo je tri hodiny po prvom prieskumníkovi. Takúto úvahu môžeme zopakovať pre hocijakých dvoch po sebe idúcich prieskumníkov, takže do mesta B prichádzajú prieskumníci každé tri hodiny.

V prípade mesta A je situácia podobná, až na to, že karavána sa od mesta vzďaľuje. Ak sa znova pozrieme na dvojicu za sebou idúcich prieskumníkov, druhý z nich musí prejsť o 12 kilometrov dlhšiu dráhu ako prvý, takže mu bude trvať tri hodiny navyše, kým sa vôbec dostane do miesta, odkiaľ tento prvý prieskumník štartoval. Do mesta A budú teda skauti prichádzať v deväťhodinových intervaloch.

(Obrázok k prvej situácii)



B-1.3 Zo života domorodcov (opravovala Janka)

Aborigínec Miro rieši vážny problém. V príručke pre manželov "Žijeme šťastne, až kým nepomrieme" sa dočítal, že hmotnosť správnej manželky tvorí 80% hmotnosti muža. Rozhodol sa toto pravidlo otestovať. Zobral svoju manželku na zamrznutý rybník s vodorovným, všaderovnakohladkým ľadom, postavili sa doprostred rybníka a následne sa prudko odstrčili. Po odstrku sa Miro dokĺzal 10 metrov, jeho manželka iba 8. Vypočítajte pomer ich hmotností!

Ahojte, určite vás trápi, tak ako mňa, či bude Miro so svojou ženičkou žiť šťastne, až kým nepomrú ☺. Tak sa na nich pozrime.

Indexom 1 budeme označovať všetko, čo sa spája s Mirom a indexom 2 všetko, čo sa týka jeho ženy.

Na začiatku stoja pri sebe. Ich celková hybnosť je nulová. V okamihu odrazenia platí zákon zachovania hybnosti:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0$$

V praxi je jasné, že keď sa dvaja odrazia, pohybujú sa presne „od seba“. To znamená, že zabudneme na šípky nad v-čkami a rovno zapíšeme vzťah pre veľkosti rýchlostí.

$$v_1 m_1 = v_2 m_2 \tag{1}$$

Pohyb Mira je pri kĺzaní rovnomerne spomalený vďaka trecej sile $F_{t1} = m_1 a_1 = m_1 g f$, kde f je súčiniteľ šmykového trenia (predpokladáme, že obaja manželia majú rovnako šmykľavú aborigínsku obuv). Z toho si vyjadríme zrýchlenie (spomalenie). Nezávisí od hmotnosti, takže bude rovnaké pre oboch

$$a_1 = a_2 = a = gf \qquad (2).$$

Dráha, ktorú Miro prekĺže je

$$s_1 = v_1 t_1 - 1/2 a_1 t_1^2 \qquad (3).$$

Jeho rýchlosť na konci kĺzania bude nulová, čiže platí

$$v_{na\ konci} = 0 = v_1 - a t_1.$$

Odtiaľ pre dobu kĺzania:

$$t_1 = v_1 / a \qquad (4).$$

Po dosadení vzťahov (2) a (4) do (3) dostaneme

$$s_1 = \frac{v_1^2}{2fg}$$

a pre Mirovu rýchlosť[1]

$$v_1 = \sqrt{2fgs_1}\,.$$

Rýchlosť jeho žienky si vyjadríme podobne a dosadíme do rovnice (1)

$$m_1\sqrt{2fgs_1} - m_2\sqrt{2fgs_2} = 0\,.$$

Po úprave a dosadení hodnôt zo zadania vidíme, že pomer ich hmotností je

$$\frac{m_1}{m_2} = \sqrt{\frac{s_2}{s_1}} = \sqrt{\frac{8}{10}} \approx 89\%.$$

Tak toto vôbec nie je ten ideálny pomer... Čo už, dúfajme, že to na ich šťastie nebude mať veľký vplyv ☺.

Viacerí ste úlohu riešili cez energie, čo je samozrejme tiež správny prístup. Po odsotení má každý z manželov nejakú pohybovú energiu ktorú musí „minúť" na kĺzanie sa po ľade, čo nie je problém zapísať do rovníc.

B-1.4 Temperatúrometer (opravovali Bea a Bzdušo)

Lekársky teplomer je úžasná vecička. Okrem toho, že za päť minút vie zabezpečiť ospravedlnenku do školy, vyznačuje sa zaujímavými vlastnosťami pri meraní: strčíte ho pod pazuchu a ortuť za chvíľu ukazuje jubilejných 40 stupňov. Keď však teplomer vyberiete, ortuťový stĺpček nezačne hneď klesať, ale slušne čaká, kým ho tzv. strasiete. Vysvetlite, prečo je to tak.

Ahojte deťušiky. Skôr, než sa pustíte do čítania vzoráku, tak vás upozorňujeme, že nie všetko, čo sa tu dočítate, muselo byť v správnom riešení, ale vzhľadom na naozaj rôznorodé vysvetlenia bude tento vzorák obsahovať naozaj podrobný pokec. Mnohí ste tiež poriadne nevedeli, ako taký teplomer presne vyzerá. Tak presne týmto začneme. ☺

Teplomer je celý sklenený, až na stupnicu a ortuťovú náplň. Teda aj nádobka je zo skla a nie z kovu (Naozaj nie je z kovu. Strieborná sa nám zdá byť kvôli optickým vlastnostiam teplomera. Koho by to viac zaujímalo, môže si pozrieť vzorák úlohy A-3.2 spred dvoch rokov na http://www.fks.sk/archiv/2005_06/21vzorA3.doc. Keď ponoríte teplomer do vody, rozoznáte jeho sklenené steny.) Medzi vonkajším obalom a vnútornou rúrkou je zriedený vzduch. Rúrka má na spodku pomerne veľkú nádobku plnú ortuti. Kúsok za nádobkou je rúrka mrte zúžená, čo si prakticky každý z vás všimol a tak isto každý pochopil, že tu niekde je zakopaný pes. Rohlík. V rúrke sa nachádza ortuť a nad ňou kvázi-vákuum (veľmi zriedený vzduch pri malom tlaku + nasýtené pary odparenej ortuti a skla).

Začneme stručným opisom toho, čo sa deje, keď si meriame teplotu. Ortuť v nádobke bude zväčšovať svoj objem a preto sa začne pretláčať zúženým miestom rúrky a ortuťový stĺpec nad stupnicou stúpa. (Sklo má asi päťkrát menší koeficient objemovej rozťažnosti, takže zväčšovanie objemu samotnej nádržky si nebudeme všímať). Keď sa teplota vyrovná s teplotou tela, nárast objemu sa zastaví

[1] Tento výsledok sa dal odvodiť aj jednoduchšie – fintou. Keď si predstavíme odsotenie a následné brzdenie ako obrátený film, bude to vyzerať tak, že obidvaja pištíci s daným zrýchlením nie spomaľujú ale zrýchľujú na dráhach s_1 a s_2 konečnou rýchlosťou v. Počiatočná rýchlosť (pri obrátenom filme) je nulová a tak môžme použiť známy vzorec..

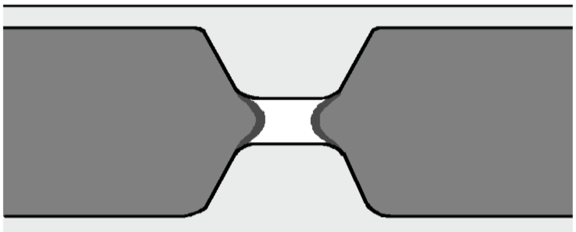
a vybraním teplomera zistíme, akí sme teplí (nie teplí ako teplí, ale teplí ako teplí). V tom okamihu sa začne sústava (teplomer so všetkým čo je v ňom) ochladzovať a ortuť zmršťovať. Stupnica teplomera však stále ukazuje konštantnú, najväčšiu dosiahnutú hodnotu.

Poďme sa na to pozrieť okom laika. Každý z vás si zrejme vzal do rúk teplomer, strčil pod pazuchu, zmeral si teplomer a pozoroval, čo sa deje. Po obzretí teplomeru zo všetkých strán si možno všimnúť, že časť rúrky medzi nádobkou a zúženým miestom nie je úplne zaplnená ortuťou, ale je tam isté prázdne miesto. Je veľmi podozrivé, že táto „medzera" sa začína práve na zúženom mieste. Za neklesanie teploty na stupnici teda môže zúžené miesto. Úloha však nemala byť iba experimentom bez vysvetlenia, ale bolo potrebné nájsť za týmto javom fyzikálne vysvetlenie.

Ako riešitelia ste prišli väčšinou k jednej z nasledujúcich dvoch teórií. Začneme prvou z nich, ktorá za hlavného páchateľa považuje viskozitu ortuti a treciu silu pôsobiacu na kvapalinu prúdiacu v zúženom mieste rúrky. Ortuť sa kvôli ochladzovaniu začne sťahovať, čo spôsobí, že v rúrke by sa mala začať pohybovať istou rýchlosťou. Väčšina ortuti sa nachádza v nádobke, preto možno povedať, že jej prietok v každej časti rúrky by mal byť prakticky rovnaký, a preto by musela v zúženom mieste prúdiť niekoľkonásobne rýchlejšie. Zrejme ste sa už stretli s tým, že keď kvapalina prúdi trubicou, tak na ňu pôsobia odporové sily pochádzajúce od stien trubice a z vnútorného trenia kvapaliny samej o seba. Čím užšiu trubicu máme a čím rýchlejšie kvapalina prúdi, tým väčší odpor musí prekonávať. Inými slovami, slamku na pitie „prefúknete" oveľa ľahšie ako napríklad ihlu z injekčnej striekačky. V našom prípade sa môže stať, že trenie spôsobí v ortuťovom stĺpčeku taký ťah, že sa jednoducho roztrhne (ako keby ste sa snažili zo zeme vytiahnuť zakopaný špagát, ktorý ale v zemi drží natoľko pevne, že ho pretrhnete)

Samotné toto riešenie má však nepríjemné dôsledky. Nakoľko vizkózne trecie sily sú úmerné rýchlosti prúdenia, ortuť by sa (aj keď veeeľmi pomaly ale predsa) do nádobky vrátila. V snahe overiť túto teóriu sme spravili experiment, pri ktorom sme ortuti nechali šancu stekať niekoľko dní, ukazovaná teplota sa však nezmenila.

Neostáva než zamyslieť sa nad niečím iným, ako je samotné vizkózne trenie. Spomenieme si, že ortuť má (pre nás trochu nie bežné) kapilárne vlastnosti. V kapiláre by mal povrch ortute tvar kopčeka a nie jamky, ako to robí voda, pretože molekuly ortuti sa k sebe priťahujú viac, ako ich priťahujú molekuly skla. V zúženine je ortuti (čo do objemu) veľmi veľmi málo, vzhľadom na svoj objem má ale obrovský povrch. Preto sa ortuť bude zúženine vyhýbať, ako to len pôjde. Samozrejme, pri zvyšovaní teploty nemá ortuť na výber (keď si totiž kvapalina povie, že sa teplom roztiahne, tak to myslí sakra vážne a tlaky potrebné na to, aby ste jej to vyhovorili, sú nesmierne). Pri chladnutí však ortuť do nádobky zatláča iba pomerne malý tlak vzduchu v rúrke. Povrchradaminimalizujúca ortuť rýchlo opustí zúženinu a situácia bude vyzerať ako na obrázku. Kým ortuť „nemotivujete" dostatočne na to, aby sa natlačila do energeticky nevýhodnej zúženiny, žiadny tok sa konať nebude. Striasanie teplomera a s ním spojená odstredivá sila je zase (zdá sa) pre ortuť dostatočnou silovou motiváciou, natlačiť sa do zúženiny.



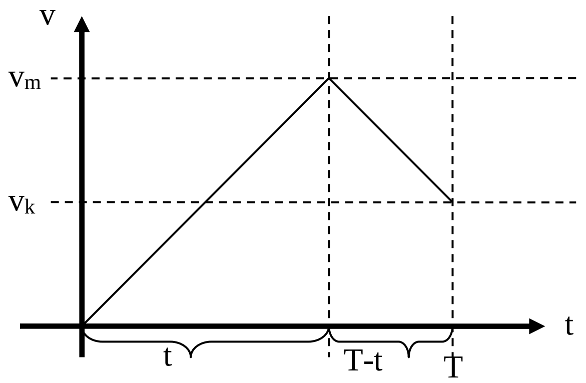
Napokon niečo k hodnoteniu. Kto sa zastavil pri tom, že za to môže zúžené miesto a ďalej to nevysvetlil, dostal cca 1 bod, kto vymyslel teóriu rôznu od týchto, má spravidla niečo medzi 2 a 3 bodmi. Riešenia, ktorých gro bolo len trenie, dostali niečo medzi 3 a 4 bodmi. Riešenie založené na kapilárnych javoch dostali medzi 3 a 5 bodmi. V B-kategórii sme boli prívetivejší. Všetko v závislosti na tom, ako poriadne ste to vysvetlili. Takže tak. Zasa nejaký prínos do praktického života ☺

B-1.5 Free ride (vzorák Maťo a Kubus, opravoval Maťo, Peťo a George ☺)

Vodič autobusu Janko Podivný by rád predviedol cestujúcim vymoženosti svojej mašiny. Povedal si preto, že vzdialenosť medzi Hornou a Dolnou Maríkovou (presne 1 km po rovnej ceste) prejde za presne pol minúty, pričom bude štartovať z nuly a cieľom prejde rýchlosťou 100 km.h^{-1}. Zároveň si nechce veľmi ničiť motor ani brzdy a preto by bol rád, aby maximálna hodnota absolútnej hodnoty zrýchlenia počas celej jazdy bola čo najmenšia. Ako presne má Janíček jazdiť, aby sa mu splnil sen?

Na začiatok si všimneme, že priemerná rýchlosť autobusu musí byť 120 km/h, lebo platí $v_p = s/t$ = 1 km/30s = 120 km/h. Keďže cieľom chce prejsť rýchlosťou 100 km/h, bude teda počas svojho pohybu musieť aj brzdiť. Pri brzdení je vlastne hodnota zrýchlenia záporná, ale nás zaujíma absolútna hodnota. Intuitívne je jasné, že aby bola absolútna hodnota zrýchlenia čo najmenšia, nesmie sa počas celej jazdy meniť –ak by sa na chvíľku zdvihla, tak by už nebola najmenšia, a ak by na chvíľu klesla, musela by sa niekde zvýšiť, aby sme dobehli časovú stratu. No a samozrejme, najprv bude istý čas zrýchľovať a potom spomaľovať, aby počas pohybu dosiahol čo najväčšiu rýchlosť (a mohol ju teda dosahovať pozvoľna). Poďme si takúto situáciu preskúmať.

Nech má teda zrýchlenie/spomalenie rovnakú hodnotu a počas celej jazdy. Nakreslíme si obrázok a označme si hodnoty:



v_m = maximálna rýchlosť počas jazdy,
v_k = konečná rýchlosť autobusu = 100 km/h,
S = celková prejdená dráha = 1000 m,
T = celkový čas = 30 s.

V prvom úseku autobus rovnomerne zrýchľuje z 0 na v_m so zrýchlením a, platí teda $T = v_m/a$ a prejde dráhu $s = ½at^2$. V druhom úseku rovnomerne spomaľuje z v_m na v_k spomalením a, pričom mu to bude trvať celý zvyšný čas $T - t$ a prejde celú zvyšnú dráhu $S - s$. Bude teda platiť

$$T - t = \frac{v_m - v_k}{a} \qquad \text{a} \qquad S - s = v_k(T - t) + \frac{1}{2}a.(T - t)^2.$$

Dostali sme sústavu štyroch rovníc so štyrmi neznámymi v_m, s, t a a. Postupným vyjadrovaním neznámych, dosadzovaním a úpravami dostaneme kvadratickú rovnicu pre a,

$$a^2T^2 + a(-4S + 2T.v_k) - v_k^{\ 2} = 0.$$

Z tejto kvadratickej rovnice vyjde pre zadané hodnoty T, S a v_k len jeden zmysluplný koreň $a \approx 2{,}9$ m/s^{-2} (druhý vyšiel záporný). Postupným dosadením do rovníc vyjde: $t \approx 19{,}8$ s , $T - t \approx 0{,}2$ s, $v_m \approx 57{,}2$ m/s ≈ 206 km/h.

Ešte nám zostáva poriadne zdôvodniť, prečo práve takáto taktika umožní Jankovi predviesť svoj kúsok s čo najmenšou absolútnou hodnotou zrýchlenia. Rozdeľme si v mysli jeho pohyb v čase na dve fázy – na pohyb od času 0 po čas t (tj. prvých asi 19,8 sekundy) a potom v čase t až T = 30 s. A teraz si predstavme, že by existovala stratégia pohybu taká, že maximálna absolútna hodnota zrýchlenia by bola menšia ako naše vypočítané a (označme ju b). Keďže na začiatku Jankova mašina stojí, je jasné, že nech robí čo robí, v prvej fáze pohybu neprejde väčšiu dráhu ako $½bt^2$. (Ak sa to nezdá až také jasné, zrejme prejde najväčšiu dráhu keď bude mať najväčšiu rýchlosť a tú bude mať vtedy keď bude stále len čo najviac zrýchľovať.) Podobne, keďže v čase T musí mať rýchlosť v_k, je jasné, že v druhej fáze neprejde väčšiu dráhu ako v prípade že by celý čas „spomaľoval na doraz“, teda $v_k(T - t) + ½b(T - t)^2$. (Ak sa to nezdá až také jasné, skúste si celý pohyb „prehrať“ spätne a porovnajte s argumentom o prvej fáze.)

Celkovo teda neprejde väčšiu dráhu ako $½bt^2 + v_k(T - t) + ½b(T - t)^2$, čo je však menej ako $½at^2 + v_k(T - t) + ½a(T - t)^2$ = 1 km. (Táto nerovnosť vyplýva z nerovnosti $b < a$.) Jednoducho, ak by si trúfol ísť zrýchlením nanajvýš b, akokoľvek by potom jazdil, neprešiel by za určených 30 sekúnd dráhu 1 km.

Preto je vypočítané zrýchlenie a naozaj minimálne potrebné. Janko musí teda rovnomerne zrýchľovať po čas $t \approx 19{,}8$ sekundy so zrýchlením $a \approx 2{,}9$ m/s^{-2} na rýchlosť asi 206 km/h a potom spomaľovať zvyšných cca 10,2 sekundy na konečnú rýchlosť 100 km/h.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 1. série
A – kategória (starší)
23. ročník
zimný semester
školský rok 2007/2008

www. **.sk**

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
otazky@fks.sk

A-1.1 Kara vaňa (vzorák Marek a Kubus, opravovali Maťo, Marek, Judita a Tinka)

Karavána putuje cez púšť z mesta A do mesta B po jedinej ceste, ktorá ich spája. Pohybuje sa stálou rýchlosťou 2 km/h. Kvôli ohrozeniu banditami vyšle každých 6 hodín prieskumníka do mesta A a tiež do mesta B. Prieskumníci sa pohybujú rýchlosťou 4 km/h. Koľko času uplynie medzi príchodmi dvoch po sebe idúcich skautov v mieste A resp. B?

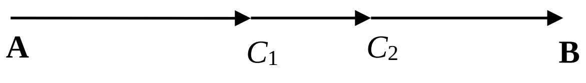
Pozrime sa najprv, ako často budú prieskumníci prichádzať do mesta B, konkrétne sa pozrime na ľubovoľných dvoch za sebou idúcich prieskumníkov. Povedzme, že prvého z nich vyslala karavána v mieste C_1 v čase T_1. (Pozri ilustračný obrázok.) Jeho cesta mu trvala nejaký čas t, takže v meste B zaznamenali jeho príchod v čase $T_1 + t$. O šesť hodín po jeho vyslaní, teda v čase $T_2 = T_1 + 6\text{h}$, vyslala karavána druhého prieskumníka. Keďže sa však sama pohybuje rýchlosťou 2 km/h, za tých 6 hodín prešla 12 km smerom k mestu B (a druhý prieskumník teda štartoval až z bodu C_2, ako na obrázku). O túto vzdialenosť má druhý prieskumník kratšiu dráhu oproti prvému. Rýchlosťou 4km/h prejdú prieskumníci túto vzdialenosť za 3 hodiny, čo znamená, že druhému trvala cesta do mesta len čas $t - 3\text{h}$. Dorazil teda v čase

$$T_2 + (t - 3\text{h}) = (T_1 + 6\text{h}) + (t - 3\text{h}) = T_1 + t + 3\text{h},$$

čo je tri hodiny po prvom prieskumníkovi. Takúto úvahu môžeme zopakovať pre hocijakých dvoch po sebe idúcich prieskumníkov, takže do mesta B prichádzajú prieskumníci každé tri hodiny.

V prípade mesta A je situácia podobná, až na to, že karavána sa od mesta vzďaľuje. Ak sa znova pozrieme na dvojicu za sebou idúcich prieskumníkov, druhý z nich musí prejsť o 12 kilometrov dlhšiu dráhu ako prvý, takže mu bude trvať tri hodiny navyše, kým sa vôbec dostane do miesta, odkiaľ tento prvý prieskumník štartoval. Do mesta A budú teda skauti prichádzať v deväťhodinových intervaloch.

(Obrázok k prvej situácii)



A-1.2 Temperatúrometer (opravovali Bea a Bzdušo)

Lekársky teplomer je úžasná vecička. Okrem toho, že za päť minút vie zabezpečiť ospravedlnenku do školy, vyznačuje sa zaujímavými vlastnosťami pri meraní: strčíte ho pod pazuchu a ortuť za chvíľu ukazuje jubilejných 40 stupňov. Keď však teplomer vyberiete, ortuťový stĺpček nezačne hneď klesať, ale slušne čaká, kým ho tzv. strasiete. Vysvetlite, prečo je to tak.

Ahojte deťušiky. Skôr, než sa pustíte do čítania vzoráku, tak vás upozorňujeme, že nie všetko, čo sa tu dočítate, muselo byť v správnom riešení, ale vzhľadom na naozaj rôznorodé vysvetlenia bude tento vzorák obsahovať naozaj podrobný pokec. Mnohí ste tiež poriadne nevedeli, ako taký teplomer presne vyzerá. Tak presne týmto začneme. ☺

Teplomer je celý sklenený, až na stupnicu a ortuťovú náplň. Teda aj nádobka je zo skla a nie z kovu (Naozaj nie je z kovu. Strieborná sa nám zdá byť kvôli optickým vlastnostiam teplomera. Koho by to viac zaujímalo, môže si pozrieť vzorák úlohy A-3.2 spred dvoch rokov na http://www.fks.sk/archiv/2005_06/21vzorA3.doc. Keď ponoríte teplomer do vody, rozoznáte jeho sklenené steny.) Medzi vonkajším obalom a vnútornou rúrkou je zriedený vzduch. Rúrka má na spodku pomerne veľkú nádobku plnú ortuti. Kúsok za nádobkou je rúrka mrte zúžená, čo si prakticky každý z vás všimol a tak isto každý pochopil, že tu niekde je zakopaný pes. Rohlík. V rúrke sa nachádza ortuť a nad ňou kvázi-vákuum (veľmi zriedený vzduch pri malom tlaku + nasýtené pary odparenej ortuti a skla).

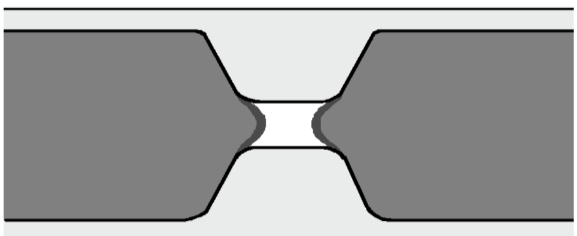
Začneme stručným opisom toho, čo sa deje, keď si meriame teplotu. Ortuť v nádobke bude zväčšovať svoj objem a preto sa začne pretláčať zúženým miestom rúrky a ortuťový stĺpec nad stupnicou stúpa. (Sklo má asi päťkrát menší koeficient objemovej rozťažnosti, takže zväčšovanie objemu samotnej nádržky si nebudeme všímať). Keď sa teplota vyrovná s teplotou tela, nárast objemu sa zastaví a vybraním teplomera zistíme, akí sme teplí (nie teplí ako teplí, ale teplí ako teplí). V tom okamihu sa začne sústava (teplomer so všetkým čo je v ňom) ochladzovať a ortuť zmršťovať. Stupnica teplomera však stále ukazuje konštantnú, najväčšiu dosiahnutú hodnotu.

Poďme sa na to pozrieť okom laika. Každý z vás si zrejme vzal do rúk teplomer, strčil pod pazuchu, zmeral si teplomer a pozoroval, čo sa deje. Po obzretí teplomeru zo všetkých strán si možno všimnúť, že časť rúrky medzi nádobkou a zúženým miestom nie je úplne zaplnená ortuťou, ale je tam isté prázdne miesto. Je veľmi podozrivé, že táto „medzera“ sa začína práve na zúženom mieste. Za neklesanie teploty na stupnici teda môže zúžené miesto. Úloha však nemala byť iba experimentom bez vysvetlenia, ale bolo potrebné nájsť za týmto javom fyzikálne vysvetlenie.

Ako riešitelia ste prišli väčšinou k jednej z nasledujúcich dvoch teórií. Začneme prvou z nich, ktorá za hlavného páchateľa považuje viskozitu ortuti a treciu silu pôsobiacu na kvapalinu prúdiacu v zúženom mieste rúrky. Ortuť sa kvôli ochladzovaniu začne sťahovať, čo spôsobí, že v rúrke by sa mala začať pohybovať istou rýchlosťou. Väčšina ortuti sa nachádza v nádobke, preto možno povedať, že jej prietok v každej časti rúrky by mal byť prakticky rovnaký, a preto by musela v zúženom mieste prúdiť niekoľkonásobne rýchlejšie. Zrejme ste sa už stretli s tým, že keď kvapalina prúdi trubicou, tak na ňu pôsobia odporové sily pochádzajúce od stien trubice a z vnútorného trenia kvapaliny samej o seba. Čím užšiu trubicu máme a čím rýchlejšie kvapalina prúdi, tým väčší odpor musí prekonávať. Inými slovami, slamku na pitie „prefúknete“ oveľa ľahšie ako napríklad ihlu z injekčnej striekačky. V našom prípade sa môže stať, že trenie spôsobí v ortuťovom stĺpčeku taký ťah, že sa jednoducho roztrhne (ako keby ste sa snažili zo zeme vytiahnuť zakopaný špagát, ktorý ale v zemi drží natoľko pevne, že ho pretrhnete)

Samotné toto riešenie má však nepríjemné dôsledky. Nakoľko vizkózne trecie sily sú úmerné rýchlosti prúdenia, ortuť by sa (aj keď veeeľmi pomaly ale predsa) do nádobky vrátila. V snahe overiť túto teóriu sme spravili experiment, pri ktorom sme ortuti nechali šancu stekať niekoľko dní, ukazovaná teplota sa však nezmenila.

Neostáva než zamyslieť sa nad niečím iným, ako je samotné vizkózne trenie. Spomenieme si, že ortuť má (pre nás trochu nie bežné) kapilárne vlastnosti. V kapiláre by mal povrch ortute tvar kopčeka a nie jamky, ako to robí voda, pretože molekuly ortuti sa k sebe priťahujú viac, ako ich priťahujú molekuly skla. V zúženine je ortuti (čo do objemu) veľmi veľmi málo, vzhľadom na svoj objem má ale obrovský povrch. Preto sa ortuť bude zúženine vyhýbať, ako to len pôjde. Samozrejme, pri zvyšovaní teploty nemá ortuť na výber (keď si totiž kvapalina povie, že sa teplom roztiahne, tak to myslí sakra vážne a tlaky potrebné na to, aby ste jej to vyhovorili, sú nesmierne). Pri chladnutí však ortuť do nádobky zatláča iba pomerne malý tlak vzduchu v rúrke. Povrchradaminimalizujúca ortuť rýchlo opustí zúženinu a situácia bude vyzerať ako na obrázku. Kým ortuť „nemotivujete“ dostatočne na to, aby sa natlačila do energeticky nevýhodnej zúženiny, žiadny tok sa konať nebude. Striasanie teplomera

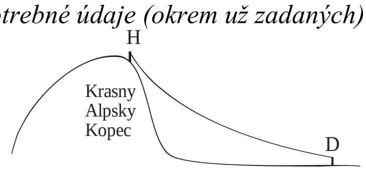


a s ním spojená odstredivá sila je zase (zdá sa) pre ortuť dostatočnou silovou motiváciou, natlačiť sa do zúženiny.

Napokon niečo k hodnoteniu. Kto sa zastavil pri tom, že za to môže zúžené miesto a ďalej to nevysvetlil, dostal cca 1 bod, kto vymyslel teóriu rôznu od týchto, má spravidla niečo medzi 2 a 3 bodmi. Riešenia, ktorých gro bolo len trenie, dostali niečo medzi 3 a 4 bodmi. Riešenie založené na kapilárnych javoch dostali medzi 3 a 5 bodmi. V B-kategórii sme boli prívetivejší. Všetko v závislosti na tom, ako poriadne ste to vysvetlili. Takže tak. Zasa nejaký prínos do praktického života ☺

A-1.3 Západná civilizácia (opravoval Jakub)

Pri poslednom výlete do Álp sme našli lanovku. Lanovka slúžila na transport materiálu, jedla a batohov lenivých západných turistov z miesta D (dole) na miesto H (hore) (pozri obrázok). Odhadli sme, že jeden meter lana váži asi 1kg a dĺžka lana je 2km. Vypočítajte, akou silou je napínané lano v dolnej, a akou v hornej stanici, keď lanovka nenesie žiadny náklad. Potrebné údaje (okrem už zadaných) odčítajte z obrázku.



Pozrime sa na lano ako na jeden celok (alebo erudovanejšie by sa dalo povedať, že ideme skúmať sústavu všetkých častí tvoriacich lano dokopy). Na túto sústavu pôsobia nasledovné sily: tiažová sila $\vec{F}_G$ (= súčet gravitačnej a tiažovej sily), sila pôsobiaca v hornej stanici $\vec{F}_1$ a v dolnej stanici $\vec{F}_2$, vztlaková sila, odporová sila (keby fúkalo ☺), nejaké elektromagnetické sily (asi nezohrajú dôležitý part) a iné drobizgy...

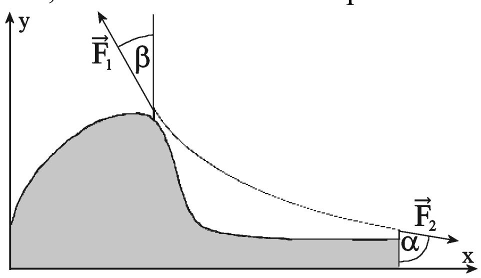
Dôkladným pozorovaním lana za pekného letného bezveterného počasia môžeme prísť k záveru, že lano sa prakticky nehýbe. To ale znamená, že na lano ako celok pôsobí nulová výslednica síl

$$\vec{F}_{výsl} = \vec{0} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_G + \vec{F}_{drobizgy}$$

čo môžeme rozpísať po zložkách (a s drobizgom sa už ďalej hrať nebudeme)

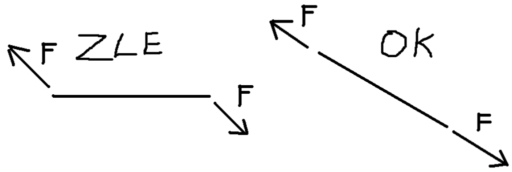
$$\left(\vec{F}_{výsl}\right)_X = F_{1x} + F_{2x} = 0 \Leftrightarrow -F_{1x} = F_{2x} = F$$

$$\left(\vec{F}_{výsl}\right)_Y = F_{1y} + F_{2y} - F_G = 0$$



Ďalší veľký objav je, že napätie (sila) pôsobiace v lane (a teda aj v staniciach) pôsobí vždy v smere dotyčnice lana. Verím, že je každému intuitívne jasné, prečo je to práve tak. Ak nie, tak poskytujem bez copyright-u vysvetlenie Filipa Kubinu:

„Vcíťme sa do malého kúsku lana. Je ako na roztrhanie, ťahajú ho z oboch strán. Samozrejme, je tu aj tiažová sila, ale tá je oproti ťahovej sile lana pre malý kúsok zanedbateľná. Akú polohu zaujme? No takú rovnovážnu, teda takú že ho tie sily nepretáčajú, ale ho ťahajú za konce od seba. Viď obrázky.“ Takto to funguje pre dobre ohybné lano, no ale laná sú predsa od toho, aby boli dobre ohybné, či nie? No áno.



Potom rovnice pre y-ové zložky síl viem prepísať do tvaru

$$mg = F_{1y} + F_{2y} = F/\tan\beta - F/\tan\alpha = F(\cot\beta - \cot\alpha)$$

Odtiaľ viem poľahky vyjadriť F. Ďalej už jednoducho $F_1 = F/\sin\beta$; $F_2 = F/\sin\alpha$.

Ukážeme si, ako úlohu vyriešiť v obrázku. Rovnica pre x-ové zložky hovorí, že mám nakresliť sily $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$ tak, že ich x-ové zložky budú mať presne opačné veľkosti. Inak môžu byť ľubovoľne dlhé. Tu si treba uvedomiť, že zmena ich dĺžky spôsobí zmenu ‘mierky‘ pre všetky sily na obrázku, ktorý môžeme chápať ako ‘silovú mapu’ a výsledok sa tým neovplyní. ‘Mierku‘ totiž zistím tak, že sčítam *y*-ové zložky (pozor: F_{2y} je záporná!) síl $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$ a dĺžka, ktorá mi vyjde, prislúcha sile $F_G = mg \approx 20$ kN. Keď už mám ‘mierku‘, tak potom ľahko zistím hľadané veľkosti síl jednoduchou trojčlenkou. Tu pozdravujem Lenku Matejovičovú, ktorá tento spôsob s výhodou použila.

Moje výsledky po precíznom rysovaní sú $F_1 \approx 26$ kN, $F_2 \approx 13$ kN. Tu by to chcelo ešte určiť chybu merania. Nakoľko však najväčšej chyby sa dopúšťame pri určení smeru dotyčnice v staniciach, tak sa musíme vrátiť späť k vyjadreniu F_1, F_2 cez uhly α a β:

$$F_1 = \frac{mg}{(\cot\beta - \cot\alpha)\sin\beta} = \frac{mg\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta} = \frac{mg\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$$

$$F_2 = \frac{mg}{(\cot\beta - \cot\alpha)\sin\alpha} = \frac{mg\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta} = \frac{mg\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$

Vidíme však, že určiť neistotu takéhoto výrazu nie je celkom v silách bežného stredoškoláka. Preto urobíme len odhad chyby. Povedzme, že sme nakreslili dotyčnicu s presnosťou ± 5°. Odmeriame uhly α a β, určíme F_1, F_2 (malo by nám vyjsť niečo podobné ako rysovaním) a potom spočítame F_1 tak, že dosadíme do vzťahu namiesto $\alpha \to \alpha \pm 5°$ a namiesto $\beta \to \beta \pm 5°$ (skúsime postupne všetky 4 kombinácie). Najväčšia odchýlka potom dáva horný odhad chyby, ktorej sa dopúšťame v dôsledku nepresností dotyčníc. K tomu by sme ešte mali prirátať chyby rysovania, ale nakoľko tie by mali byť pri presnej práci oveľa menšie, tak ich môžeme zanedbať. Takúto analýzu chýb treba urobiť pri každej úlohe, kde do riešenia vstupuje neurčitosť!

Moje meranie: $\alpha \approx 80°$; $\beta \approx 30°$. Riešenie $F_1 \approx (26 \pm 4)$ kN; $F_2 \approx (13 \pm 5)$ kN.

Mimochodom, zatiaľ čo na uhle α sme sa mnohí dosť dobre zhodli, tak uhol β vykazoval veľkú fluktuáciu od 28° po 50°, čo znamená, že sa asi nedal určiť veľmi presne, a preto bolo potrebné uvažovať o presnosti určenia síl F_1, F_2. Inak, tá výsledná nepresnosť je v ráde kN, teda nemá zmysel písať výsledok na viac ako 2 platné cifry!

Bodovanie: bolo vcelku tolerantné, za chýbajúci odhad chýb som nič nestŕhal. Dokonca ani za tie uhly β, ktoré boli už dosť mimo toho, čo moje oko pripúšťa ako možné.

Poznámka na záver pre tých, ktorým silou-mocou chýbalo ťažisko, tak ono NEBUDE v jeho strede, ale bude MIMO samotného telesa lana, podobne ako to je u prstenca.

Poznámka pre fajnšmekrov: Ak aplikujme výsledok našej analýzy na maličký kúsok lana, tak dostaneme priebeh napätia v lane: *x*-ová zložka napätia v lane bude konštantná, *y*-ová sa bude sprava doľava meniť (v našom obrázku rásť) o tiaž kúsku, o ktorý sme sa posunuli v smere k druhému koncu.

A-1.4 Ťažké straty (opravoval Škrek, vzorák Tomáš)

Odmerajte, koľko percent infračervených lúčov z diaľkového ovládača od televízora sa pohltí pri prechode jedným listom kancelárskeho papiera.

Otec : „Tomáš, čo to robíš?“
Ja : „Meriam, koľko percent výkonu diaľkového ovládača pohltí jeden list papiera.“
O : „Kedy si budem môcť ísť klikať?“
J: „10 minút oci, 10 minút.“
O : „Bože, čo s vami v tej škole robia... Daj si tam nové baterky, tieto sú už staré.“
J : „Neboj, oci, to nezávisí od celkového výkonu.“
O: „Furt musíš dačo vymýšľať.“
Otec, s výrazom akoby ma chcel vydediť, znechutene odíde na záchod.

Akože, toto sa vám nestáva pravidelne? Vitajte na našom seminári. No a ako to s tým naozaj je? Najprv bez papiera. Ovládač pri známom kliknutí vyžiari do priestoru nejakú energiu (označme ju *A*). Pre jednoduchosť budeme predpokladať, že ovládač vyžiari signál do polpriestoru ktorý je „pred“

ovládačom[1]. Energia ovládačom dodaná sa homogénne „rozoskupí“ na polovičku povrchu gule[2], ktorá po čase t má už polomer ct kde c je rýchlosť svetla. V okamihu, keď signál narazí na prijímač, má polguľa nejaký polomer r. Prijímač si predstavíme ako malú krabičku, ktorá má senzor o ploche S. Ak tento senzor celou svojou plochou prijíme signál s energiou aspoň E, telka sa zapne[3]. Keď to dáme celé dokopy, telka sa zapne, pokiaľ platí nerovnica:

$$A\frac{S}{2\pi r^2} \geq E$$

To, čo sa nám podarí zmerať, je maximálna vzdialenosť r, pre ktorú sa telka ešte zapne. Vtedy v našej nerovnosti nastáva hraničný prípad, t.j. platí rovnosť.

Ďalej, čo sa stane keď tesne pred ovládač strčíme n hárkov papiera[4]? Ak jeden hárok utlmí signál na x-tinu jej pôvodnej energie, n hárkov papiera pohltí $x.x.....x$ (n krát) = x^n energie. Energia, ktorá bude mať to šťastie, že nebude pohltená, sa ďalej rozptýli na polovicu povrchu gule presne tak isto ako jej kolegyňa z prvého odstavca. Úplne analogicky tak môžeme zapísať rovnicu:

$$Ax^n \frac{S}{2\pi r_n^2} = E$$

kde r_n je maximálna vzdialenosť, z ktorej ešte zapneme telku, ak pred ovládačom trčí n papierov. Teraz už je jasné, že pokiaľ zmeriame maximálne vzdialenosti r_n a r_m pre dva rôzne počty papierov n a m, ľahko odvodíme, že

$$x = \sqrt[n-m]{\frac{r_n^2}{r_m^2}}$$

Aké hodnoty m, n zvoliť tak, aby sme dostali čo najpresnejší výsledok? Pragmatická odpoveď je, že také, aby som nemusel telku zapínať „od susedov“ a tiež také, aby som sa nemusel priblížiť k telke na 1cm, kde hovoriť o presnom meraní je nepodarený žart. Samozrejme, očakávame, že hocijaké m, n by sme mali dostať rovnaký výsledok a ak to tak nevyjde, je načase byť smutný.

Kde sú nepresnosti nášho merania? V prvom rade, pokiaľ meriame v obývačke, veľký vplyv má signál, ktorý sa do telky dostáva odrazom od stien miestnosti. Vtedy teda úplne presne neplatí základný predpoklad výpočtu – že energia sa rozoskupí na polovicu povrchu gule. Ďalej, papier žiarenie nielen pohlcuje, ale aj odráža. Naše x súvisí so žiarením, ktoré neprejde – jedná sa teda o pohltené plus odrazené žiarenie. Ak začneme uvažovať s koeficientom odrazivosti k (vyjadruje, koľko energie sa odrazí od jedného papiera), môžeme pomocou neho dorátať, koľko sa odrazí od n papierov. Celkovo tak do rovníc získavame ďalšiu neznámu, ktorú odstránime získaním ďalšej rovnice, napríklad, budeme merať maximálnu vzdialenosť nie pre dva, ale tri rôzne počty papierov. Kto si dal robotu s týmto „bonusom“ má u mňa veľké fialovoružové plus, Samo Hapák, ktorý aj veľmi precízne vyhodnotil chyby merania má dokonca fialovoružové krát.

V mojom experimente pre môj ovládač mi vyšlo postupne 7%, 12% a 10%, pre rôzne hodnoty $m, n,$ pričom chyby merania pri všetkých troch číslach sú v intervale +-3%. Horšie je, že rôznosť čísel naznačuje, že odrazivosť signálu od stien miestnosti ako aj od samotného papiera zohráva istú (nie úplne zanedbateľnú) rolu.

Nedá mi nespomenúť ešte zopár neortodoxných eskamotérov, vierozvestcov v oblasti modernej techniky, ktorým „obyčajný meter smrdí“. Prinášanie ďalších technologických zázrakov do experimentu vnáša zo sebou ďaľšie nepresnosti ktoré nemáme pod kontrolou. Pri našom primitívnom experimente vieme presne, na čo si máme dať pozor, aby sme zlepšili presnosť (robiť to v zatemnenej miestnosti s nekonečnými stenami a bodovým ovládačom na telku). Zatiaľ čo zlepšit citlivosť CCD

---

[1] toto zjednodušenie nakoniec nezmení nič na platnosti výsledku, ako si môžete overiť

[2] ďalší zjednodušujúci predpoklad, bez ktorého by to ale o čosi pracnejším výpočtom vyšlo rovnako a pre vás ďalšia domáca úloha. :)

[3] teraz je načase namietnuť, že telku nezapíname istou energiou ale istým výkonom t.j. energiou za čas. Totiž, ak energiu budem dodávať dostatočne pomaly, prijímač si nemusí všimnúť, že sa niečo deje, aj keď energie bude v súčte celkom dosť. Naša energetická predstava je však dobrá vďaka tomu, že prijímanie signálu trvá vždy trvá presne toľko, koľko jeho vysielanie a teda čas nie je dôležitý.

[4] prečo sa neuspokojíme s jedným papierom a rovno ich tam strkáme n? Krátka odpoveď je, že sme mamonári a jeden papier nie je nikdy dosť. Ešte kratšia odpoveď je, že uvidíme za chvíľku.

displeja na kamere sa mi zdá ťažšie. Navyše pri komerčných výrobkoch nemáme zväčša šancu zistiť, do akej miery sú údaje o zázraku správne.
A koľko to malo vyjsť? Správna odpoveď je, že každému inak. Lebo každý má inú telku.