

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

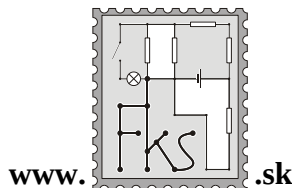
vzorové riešenia 2. série

B – kategória (mladší)

22. ročník

letný semester

školský rok 2006/2007



FKS, KTFDF FMFI UK

Mlynská dolina

842 48 Bratislava

riesenia@gmail.com

info@fks.sk

B–2.1 Ohrievač (opravoval Džony)

Máme dva rovnaké elektrické ohrievače s konštantným vnútorným odporom R . V rámci akcie „zahrej svoj organizmus“ zapojíme

a) jeden

b) obidva, sériovo, t.j. za seba

ohrievače do elektrickej siete. V ktorom prípade dostaneme viac tepla, a koľkokrát viac to bude?

Ahoj! Práve sme sa vrátili z výletu, kde by sa ohrievače veru zišli. Tomášovi zamrzol na spacáku zips a nemohol sa dostať von. Pomohol mu až privolaný zbor dobrovoľných zvaračov z obce Látky. Nakoľko sú to chlapi na svojom mieste a v elektrine fundovaní, vypýtal som si od nich radu, ako vyriešiť tento príklad. Navrhli mi toto:

Výkon P (t.j. koľko tepla dostaneme z ohrievača za sekundu) súčiastky s odporom R je daný vzťahom $P = UI$, kde U je napätie na súčiastke a I je prúd, ktorý prechádza obvodom. Prúd v obvode s odporom R je podľa Ohmovho zákona daný vzťahom $I = U/R$. Keď toto dosadíme do vzťahu pre výkon, dostaneme $P = U^2/R$ (1).

Skúsme si obe situácie osobitne rozobrať. V prvej sme v obvode s napätím U mali len jeden ohrievač s odporom R . Teda výkon je daný práve vzťahom (1). V druhej situácii sme zapojili (tiež do obvodu s napätím U , keďže napätie v slušnej sieti sa ani pri rôznej záťaži nemení) sériovo dva ohrievače. Môžeme sa na ne pozeráť ako na jednu súčiastku s výsledným odporom $R + R = 2R$. Ak túto hodnotu dosadíme do vzťahu pre výkon, zisťujeme, že výsledný výkon je polovičný $P = U^2/2R$. Je to trochu prekvapivé, že zapojenie dvoch ohrievačov nám dá menej tepla (a to až o polovicu) ako zapojenie jedného. Poučenie ako v rozprávke so šťastným koncom: Menej je niekedy viac! Menší odpor znamená väčší prúd, a teda vyšší výkon.

B–2.2 Autobus (opravoval Kubo)

S akým zrýchlením by musel vyštartovať autobus so zadným náhonom, aby sa postavil na zadné (t.j. predné kolesá sa aspoň na chvíľu ocitnú vo vzduchu)? Potrebne údaje odhadnite alebo zistite.

Podme vyšetriť okamih, keď sa autobus už-už ide odlepiť prednými kolesami od vozovky. Najprv rozoberieme sily pôsobiace na autobus a potom sa pozrieme na momenty týchto síl. Zanedbáme moment zotrvačnosti kolesa, ktorý je o niekoľko rádov menší ako moment zotrvačnosti autobusu (totiž kolesá pri zrýchľovaní autobusu zväčšujú svoju uhlovú rýchlosť, tým aj svoj moment hybnosti a kvôli zákonu zachovania momentu hybnosti pôsobia momentom sily na autobus – snažia sa ho zdvihnúť – avšak slabo). Ďalej zanedbáme odpor prostredia, a to hneď z dvoch dôvodov:

1. Aerodynamika je celkom zložitá.

2. Ak ste niekedy videli zdvíhať sa motorku či bike na zadné koleso, tak to bolo vždy pri relatívne nízkej rýchlosti, keď odpor prostredia nehrá rolu.

SILY: Budeme sa na situáciu pozeráť zo vzťažnej sústavy spojennej s vozovkou. Pri odliepaní sa autobusu od vozovky zrejme spočíva celá tiaž vozidla na zadných kolesách. Takže môžeme smelo písať $\vec{F}_n = \vec{F}_g$, kde $\vec{F}_n$ označuje normálovú zložku sily pôsobiacej na styčnej ploche zadného kolesa s vozovkou a $\vec{F}_g$ je tiaž autobusu. Ďalej si označme $\vec{F}_t$ treciu silu na kolese (t.j. tangenciálnu alebo dotyčnicovú zložku sily pôsobiacej na styčnej ploche kolesa s vozovkou). Vieme, že reakčná sila k $\vec{F}_n$ vykompenzuje tiaž. Reakčná sila k $\vec{F}_t$ spôsobí

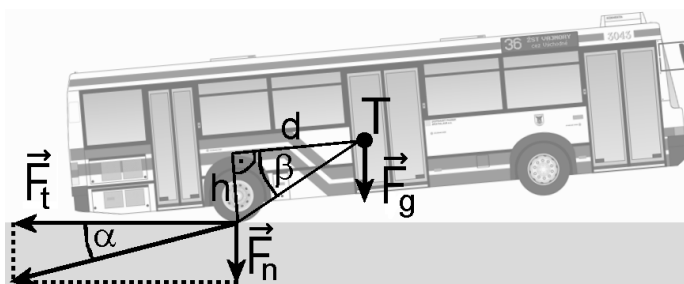
zrýchlenie autobusu $\vec{a} = -\vec{F}_t/m$ (znamienko mínus je tam kvôli tomu, že reakčná sila má opačnú orientáciu ako $\vec{F}_t$). Tým sme so silami skončili.

MOMENTY SÍL: Teraz využijeme vzťažnú sústavu spojenú s ťažiskom autobusu (Pozor, to je neinerciálna vzťažná sústava a pôsobí v nej na autobus fiktívna zotrvačná sila v jeho ťažisku udeľujúca celému autobusu zrýchlenie $-\vec{a}$.) Keďže moment sily spočítame ako $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, kde $\vec{r}$ je polohový vektor z počiatku vzťažnej sústavy (v našom prípade z ťažiska) do pôsobiska sily $\vec{F}$. Hneď vidíme, že výsledný moment všetkých síl pôsobiacich v ťažisku (ťažovej aj zotrvačnej) je nulový, pretože z definície ich $\vec{r}$ je nulové. My hľadáme situáciu, keď sa autobus práve ide odlepiť. Vtedy by mal byť celkový moment síl pôsobiacich na autobus nulový. To ale znamená, že výslednica síl $\vec{F}_v = \vec{F}_n + \vec{F}_t$ musí smerovať do ťažiska (momenty síl pôsobiacich v jednom bode môžeme hľadať aj tak, že sily najprv sčítame, a až potom dosadíme do vzorca $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$). Potom

$$|\vec{M}| = rF \sin \varphi = rF \sin 180^\circ = 0.$$

To ale znamená, že

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta \Rightarrow \\ \tan \alpha &= \frac{|\vec{F}_n|}{|\vec{F}_t|} = \frac{mg}{ma} = \frac{h}{d} = \tan \beta \\ \Rightarrow a &= \frac{d}{h} g \end{aligned}$$



Je zrejmé, že ak bude zrýchlenie autobusu väčšie ako vypočítané a , tak sa náš autobus začne odliepať od zeme a zdvíhať. Pre náš Ikarus 415 z obrázka je odhadom $d = 2$ m; $h = 1$ m, potom $a \approx 20 \text{ ms}^{-2}$. To sa nedá veľmi dosiahnuť, lebo koeficient (pokojuvého) trenia f nezvykne byť väčší ako 1, nehovoriac o tom, že autobus na to zrejme ani nemá potrebný výkon (o tom si čosi povieme v ďalšej sérii). Celý postup však rovnako dobre funguje aj pre motorku, či bicykel a pri nich už vďaka priaznivejšiemu pomeru d/h nie je problém frajersky vyraziť vpred na zdvíhajúcom sa tátošovi.

Komentár k vašim riešeniam: áno, ono sa to bude otáčať okolo osi zadných kolies. Ak si však zvolím vzťažnú sústavu spojenú s touto osou, tak treba uvážiť momenty všetkých pôsobiacich síl – a tu ste, neviem prečo, väčšinou sily medzi zadnými kolesami a vozovkou vôbec neuvažovali. A pritom tie sily vôbec nie sú zlé: udržiavajú autobus na ceste (neprepadá sa) a umožňujú nám zrýchliť. To je predsa dôležité! A naopak, naozaj si môžeme zvoliť akúkoľvek inú vzťažnú sústavu a zrátať moment pôsobiacich síl v tejto sústave. A keďže požadujem, aby sa autobus ešte akurát neotáčal, tak aj v sústave spojenej s ťažiskom autobusu, aj s oskou kolesa, aj so styčnou plochou kolesa a vozovky – vždy musí byť výsledný moment nulový a ja si môžem vybrať tú sústavu, ktorá sa mi páči najviac. Ak máte radšej viac škaredších rovníc, tak si to riešte pokojne aj v sústave spojenej pevne s kolesom (neinerciálna, zrýchlene rotujúca) – ale zbytočne si sťažujete život.

B–2.3 Sekunda a pol (opravoval Robo K.)

Odmerajte svoju reakčnú dobu, t.j. minimálny čas, ktorý uplynie medzi vonkajším, dostatočne zreteľným podnetom a nejakou vašou dostatočne jednoduchou a fyzicky nenáročnou akciou. Oceníme, ak vymyslíte čo najviac spôsobov, bez použitia počítača alebo podobného programovateľného zariadenia (môžete použiť obyčajné stopky).

Zdravím všetkých reakcionárov. Keďže táto úloha bola predovšetkým o vašej kreativite a jej obzoroch, rozhodol som sa aj vzorák poňať netradične a miesto v ňom prenechať vo veľkej miere vám. Ale najskôr predsa len malý biologický úvod. Je fajn si uvedomiť, na aký druh podnetu reakčný čas meriam. Ak si podnety rozdelíme podľa zmyslov, ktorými ich

vnímame, môžu byť akustické, vizuálne, chuťové, čuchové a hmatové. Nikto z vás neskušal merať odpoveď na chuťový a čuchový podnet, čo je škoda ☺.

Veľkou skupinou reakcií na podnet sú reflexy. Nemnoho z vás sa pokúsilo merať reflexný reakčný čas. Pochvala patrí Martinovi Trískovi a Lukášovi Konečnému, ktorí odhadovali reakčný čas na žmurkací a zrenicový reflex, odtrhnutie ruky od horúceho predmetu a pod. Ja ešte dodávam ten najznámejší tzv. patelárny reflex (vystrelenie nohy od kolena nadol po údere na oblasť pod kolenným jabĺčkom). Keďže odpoveď na informáciu o zaregistrovaní podnetu receptormi spracuje miecha „automaticky“, reakčný čas patelárneho reflexu sa pohybuje v okolí 120 milisekúnd. Toľko k reflexom, druhú skupinu odpovedí našej nervovej sústavy na podnety z okolia, na ktoré odpovedáme vedome, nazvime pracovne „reakcie“. Začnem prehliadkou vašich prístupov k vizuálnym podnetom. Tie ste najčastejšie merali dvoma metódami, pracovne si ich nazvime stopková a pravítková metóda.

Najjednoduchšie realizovateľná je stopková metóda. Vezmem si do rúk stopky, napríklad na mobile, a spustím časomieru. Mojou úlohou je zastaviť ju stlačením tlačítka, keď sa na displeji objaví určitý cieľový čas. Pri jeho dosiahnutí zastavím stopky a rozdiel medzi časom na displeji a cieľovým časom môžeme považovať za reakčný čas. Jeho hodnoty sa u vás pohybovali najčastejšie v rozmedzí 170 – 350 ms. Problémom tohto spôsobu merania je rýchle preblikávanie číslíc na displeji, preto je vhodné za cieľový čas zvoliť práve skokový okamih, kedy sa číslo na displeji výrazne zmení, napríklad naskočí desiata sekunda, minúta a pod.

Na pravítkovú metódu potrebujem už asistenta (dobré sa to realizuje, ak mám k dispozícii Borisovu Š.A. ☺) Asistent drží v ruke pravítko a stopky. Moje prsty obopínajú pravítko a sú v polohe pripravenej na jeho zovretie, pričom sa nachádzajú na určitej počiatkovej centimetrovej hodnote. Keď asistent pustí pravítko, začne padat voľným pádom. Po mojom zachytení pravítka odčítam na stupnici, v akej vzdialenosti od počiatkovej hodnoty

som ho zachytil. Zo vzorca pre dobu voľného pádu (chronicky známe $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$) určím reakčný

čas, ktorého hodnoty sa pohybovali v rozmedzí 150 – 220 ms.

Reakčný čas na hmatový podnet ste najčastejšie merali rôznymi druhmi šťuchnutí perom a iných pomôcok do pre experimentálnu obeť vopred neznámej časti tela, prípadne aj ťahaním za vlasy a iným agresívnymi spôsobmi. Vyhliadnutá obeť samozrejme zjojkla, zvýskla, podľa chuti, niekedy aj vynadala. Páchateľ týchto zvrhlostí sa samozrejme zameral len a len na meranie reakčného času od úderu po výkrik, ktorý sa pohyboval v okolí 400 ms. Tento spôsob má však jeden háčik, a to, že čo odmeriam, sú vlastne reakčné časy dva. Obete a stopujúceho páchatel'a. Preto je údaj na stopkách potrebné predeliť vhodným koeficientom, napríklad 2. Navyše páchatel' nedokáže stopky spustiť presne v čase udelenia podnetu, meraný čas je veľmi krátky, a páchatel' reakciu obete očakáva, čím sa výsledok skresľuje.

Na záver som si vybral akustický spôsob rekordéra počtu zrealizovaných spôsobov meraní Filipa Kubinu. Vyberám pasáž z jeho riešenia: „S pomocníkom sa dohodnem na nasledovnej hre. Zapne stopky a bude hovoriť po jednom písmená *a* alebo *b*. Ja sa ich posnažím zopakovať. Teda on povie napr. *b*, ja to zopakujem a on zase povie ďalšie písmeno, ja to zas zopakujem, ... Celá hra bude mať desať písmen (aby som zväčšil presnosť a zanedbal také vplyvy ako sú stopky). Tým, že hovoríme dve rôzne písmená zabránim tomu, že by som nečakal na podnet, ale iba rýchlo povedal desať „áčok“. Jedno písmenko sú teda dva reakčné časy. Najprv ja zachytím podnet, nasleduje moja reakčná doba, zopakujem písmenko, on zachytí podnet, nasleduje jeho reakčná doba, on povie nové písmenko. Hra má desať sérií, preto nameraný čas je 20 reakčných dôb.“ Tu si dovoľím prerušiť Filipov výklad údajom o nameranom priemernom reakčnom čase z jeho piatich meraní, (ten bol 0,32 s). Dôležitá poznámka: „pri 7%-nej odchýlke merania“. Mnoho z vás zabudlo, ako sa namerané údaje vyhodnocujú. Že výsledkom nie je jedna hodnota, ale interval hodnôt v tvare priemerná hodnota ± relatívna odchýlka merania (alternatívne udaná percentuálne).

Po skončení hitparády vašich nápadov nasleduje trocha faktografie. Aký je teda reakčný čas ľudí? Odpoveď znie: Koho ako. Keďže každý z nás má jedinečné fyziologické, intelektuálne a všakové iné danosti, naše reakčné časy sú rôzne. Ako teda pristupovať

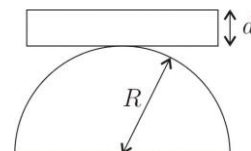
k údaju, že priemerný reakčný čas človeka je 200 ms? Odpoveď je ukrytá v hĺbkách štatistiky. Po troche googlenia a prehľadávania Wikipedie som našiel nasledovnú stránku <http://www.humanbenchmark.com/tests/reactiontime/stats.php>. Môžeme si tam všimnúť rozloženie reakčných časov v populácii, ktoré pripomína „tvar zvona“ (odborne sa tomu zvonu hovorí Gaussova krivka), ktorý dosahuje svoje maximum v okolí 200 milisekúnd. Navyše aj reakčné časy na rôzne druhy podnetov sú odlišné. Tak napríklad na vizuálny podnet je to vraj 250 ms, na akustický 170 ms a na dotkový 150 ms.

Na záver som si nechal príhodu zo sveta šprintérov, ktorých reakčné časy sa pohybujú v okolí 150 ms. Praktickým problémom pri atletických súťažiach je zistiť, či šprintér odštartoval predčasne (tzv. ulial štart). Pre tento účel sa nachádza v atletických pravidlách ustanovenie, že za chybný (uliaty) štart sa považuje „kratšia štartová reakcia ako 0,1 s“. Ako sa to meria? Podľa tlaku pretekárových nôh vyvíjaných na štartové bloky. Možno si spomínate na škandál, ktorý sa udial počas majstrovstiev sveta v atletike Paríž 2003, kedy bol vo finále v behu na 100 m diskvalifikovaný jeden z medailových top favoritov. Americký šprintér Jon Drummond, ktorý hodinu so slzami v očiach odmietal opustiť bežeckú dráhu neustále opakujúc „I did not move“. Štartér však tvrdil, že údaje z blokov mu tvrdia, že ulial štart. Ich analýza po pretekoch (http://www.trackandfieldnews.com/general/features/2003/drummond_reaction_graph_field.html) však ukázala, že Drummond sa skutočne pri štarte nepohol a jeho skutočný reakčný čas bol 130 ms! Počítač chybné vyhodnotil štartovú sekvenciu ...

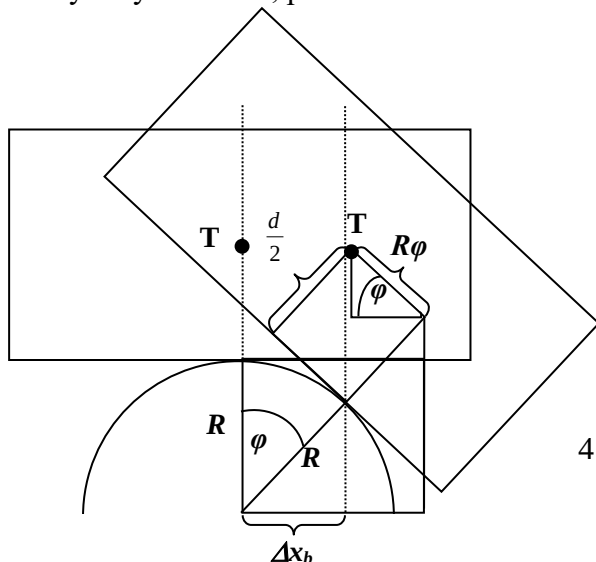
Na úplný záver ešte poznámka, ako som tento príklad hodnotil. Veľa z vás asi nie je nadšených bodmi, ktoré ste si našli. Keďže v zadaní bolo písané čosi o oceňovaní, nemal som inú možnosť ako oceniť vás bodovo (margotky sa minuli ...). A síce tak, že kto navrhol a urobil meranie len jedným spôsobom, dostal 3 b., kto dvoma, dostal 4 b. a kto trom a viac, dostal 5 bodov. Ďalej som strhával 0,5 b. za chýbajúcu diskusiu (pár slov o tom, čo všetko ovplyvnilo nameraný výsledok a pod.), 0,5 b. za neopakovanie merania (Peťo vám odkazuje, že najbližšiu experimentálku bude opravovať on a bude na takéto prípady mimoriadne alergický! ☺) a pridával 0,5 b. v obzvlášť zreteľných prípadoch (napríklad za poctivé spracovanie meraní aj s odchýlkami). A zazvonil zvonec a reakčnej rozprávke je koniec.

B–2.4 Stabilita (opravovala Bea)

Polguľa s polomerom R je pevne pripevnená na vodorovnej podlažke. Položíme na ňu dosku s hrúbkou d . Doska má ťažisko presne nad najvyšším bodom polgule a medzi ňou a polgoulou je dostatočne veľké trenie, aby nič neprešmykovalo. Rozhodnite, či táto poloha bude stabilná, t.j. prežije doska malé ťuknutie?



Pohyb dosky je najjednoduchšie predstaviť si ako otáčavý pohyb okolo bodu (osi), kde sa doska dotýka polgule. (Pri pohybe dosky sa teda os otáčania stále posúva, to však nevadí). Labilná poloha sa teraz bude prejavovať tak, že pri malom vychýlení sa ťažisko dostane za zvislicu prechádzajúcu dotykovým bodom, tiažová sila pôsobiaca na dosku ju bude ťahať dole z polgule a doska spadne. Preto stabilná poloha je len taká, v ktorej aj po vychýlení o malý uhol φ bude ťažisko na správnej strane zvislice (čiže tak, aby sa pôsobením tiažovej sily doska vracala späť do vodorovnej polohy). V prípade, že sa ťažisko aj po vychýlení nachádza presne nad dotykovým bodom, poloha bude invariantná (doska nespadne, ale sa ani nevráti).



Takže si popíšeme nejaké vzťahy medzi uhlami a vzdialenosťami, z ktorých nám vylezie, ako sa posúva ťažisko a dotykový bod vo vodorovnom smere. Chceme, aby platilo: $\Delta x_T < \Delta x_b$ (1) (Δx_T – posunutie ťažiska, Δx_b – posunutie dotykového bodu). Posunutie dotykového bodu sa vyjadrí celkom pekne: $\Delta x_b = R \sin \varphi$ (2). Pri posunutí ťažiska si musíme najprv

uvedomiť, že vzdialenosť na doske medzi dotykovými bodmi je rovnaká ako dĺžka trajektórie, ktorú prešiel dotykový bod po povrchu polgule, čiže $R\varphi$. Potom

$$\Delta x_T = \left(R + \frac{d}{2}\right) \sin \varphi - R\varphi \cos \varphi \quad (3).$$

Keď dosadíme (2) a (3) do nerovnosti (1), dostaneme:

$$\left(R + \frac{d}{2}\right) \sin \varphi - R\varphi \cos \varphi < R \sin \varphi.$$

Po úprave:

$$\frac{d}{2} \sin \varphi < R\varphi \cos \varphi.$$

Uhol φ je podľa zadania veľmi malý a pre také malé uhly môžeme nahradiť: $\sin \varphi = \varphi$, $\cos \varphi = 1$. Tým sa nám rovnica zjednoduší na tvar:

$$\frac{d}{2} \varphi < R\varphi.$$

Tam sa to pekne vykrátí a máme výsledok, kedy je poloha stabilná: $\frac{d}{2} < R$. Naopak, ak platí

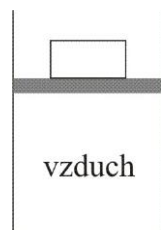
$\frac{d}{2} > R$ doska „neprežije“ ani malé ťuknutie. V prípade $\frac{d}{2} = R$ nevieme presne povedať, aká je poloha, museli by sme spraviť presnejšiu analýzu a neuspokojiť sa napríklad s $\sin \varphi = \varphi$, čo by sa teraz ukázalo ako nedostatočne presný odhad. V praxi však môžeme predpokladať, že takáto rovnosť nikdy nenastane, $d/2$ a R nikdy nebudú úplne rovnaké. Na záver ešte dodám, že iným zaujímavým prístupom bolo zrátať polohovú energiu dosky. Ak táto pri malom vychýlení narastie, sústava bude stabilná, ak klesne, stretneme sa na zemi.

B-2.5 Plyny (opravoval Robo A.)

Do valca dáme ideálny dvojatómový plyn a zhora ho uzavrieme pohyblivým piestom. Piest ako taký má hmotnosť m . Teraz na piest

- položime
- nepoložíme

šuter s hmotnosťou M a počkáme kým sa sústava ustáli, jej teplota bude v oboch prípadoch rovnaká ako teplota v miestosti (t.j. v prípade a) bude piest stlačený viac, lebo plyn je stláčaný väčším tlakom). Teraz ohrejeme plyn o teplotu ΔT . Ktoej zo sústav a), b) bude treba pri tom dodať viac tepla?



Zdravím všetkých, ktorí čítajú tento vzorák, teda tých, ktorí majú problémy s plynmi. Myslím, že tentokrát ste žiadne problémy mať nemali, keďže tento príklad bol naozaj ľahučký.

Tak sa na to pozrime. Podľa zadania je plyn dvojatómový, teda má 5 stupňov voľnosti (ak neviete, o čom točím, tak nerobte paniku, pre riešenie príkladu je táto informácia nepotrebná). Označme N počet molekúl v nádobe, k Boltzmanovu konštantu, S plochu piestu, p_a atmosferický tlak a $s = 5$ počet stupňov voľnosti nášho plynu. Rozoberme najprv prípad, keď na piest nepoložíme šuter. Plyn v nádobe má tlak, ktorý je súčtom atmosferického tlaku a tlaku,

ktorým tlačí piest svojou tiažou na plyn: $p = p_a + \frac{mg}{S}$. Keďže v tomto výraze vystupujú samé

konštanty, pôjde očividne o izobarický dej. Dodané teplo vypočítame z prvého termodynamického zákona: $Q = \Delta U + W'$, kde ΔU je zmena vnútornej energie a W' práca vykonaná plynom. Pre vnútornú energiu dvojatómového plynu máme dobre známy vzorec

(teda dobre známy na vysokej škole): $U = \frac{s}{2} NkT$. Potom je jasné, že jej zmena bude:

$\Delta U = \frac{s}{2} Nk\Delta T$. Teraz si uvedomíme, čo je práca vykonaná plynom. Plyn pri izobarickom ohrievaní zväčšuje svoj objem, teda sa dvíha piest, čím plyn koná prácu. Teda nám stačí zistiť, o akú dĺžku Δh sa zdvihne piest. Pre plyn pred a po zohriatí platia stavové rovnice $pV_1 = NkT$ a $pV_2 = Nk(T + \Delta T)$. Odtiaľ:

$$\Delta h = \frac{V_2 - V_1}{S} = \frac{Nk\Delta T}{pS}$$
$$W' = \Delta h p S = Nk\Delta T.$$

Sčítaním výrazov konečne dostávame $Q = \frac{s+2}{2} Nk\Delta T$. Vidíme, že výsledok nezávisí od

hmotnosti piestu. Teda ak by sme miesto hmotnosti m mali hmotnosť $m + M$, výsledok by sa nezmenil. Preto môžeme konštatovať, že teplo dodané plynu musí byť v oboch prípadoch rovnaké. Náš šuter je teda úplne zbytočný, neviem, načo sme ho tam vlastne dávali. Kto si zaspomínal na hodiny fyziky, mal by sa rozpomenúť na konštanty c_v a c_p , čo sú merné tepelné kapacity plynu pri konštantnom objeme / tlaku. Keďže konštanta c_p je konkrétne jedno číslo (pre daný plyn) nezávislá od tlaku, ktorým plyn stláčame, je už samotná existencia c_p dôvodom, prečo nám to vyšlo tak, ako vyšlo. Úloha sa teda dala zadať aj inak – dokážte že existuje čosi ako konštanta c_p .

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

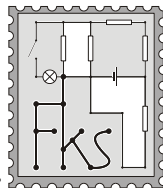
vzorové riešenia 2. série

A – kategória (starší)

22. ročník

letný semester

školský rok 2006/2007



www.fks.sk

FKS, KTFDF FMFI UK

Mlynská dolina

842 48 Bratislava

riesenia@gmail.com

info@fks.sk

A–2.1 Sekunda a pol (opravoval Robo K.)

Odmerajte svoju reakčnú dobu, t.j. minimálny čas, ktorý uplynie medzi vonkajším, dostatočne zreteľným podnetom a nejakou vašou dostatočne jednoduchou a fyzicky nenáročnou akciou. Oceníme, ak vymyslíte čo najviac spôsobov, bez použitia počítača alebo podobného programovateľného zariadenia (môžete použiť obyčajné stopky).

Zdravím všetkých reakcionárov. Keďže táto úloha bola predovšetkým o vašej kreativite a jej obzorech, rozhodol som sa aj vzorák poňať netradične a miesto v ňom prenechať vo veľkej miere vám. Ale najskôr predsa len malý biologický úvod. Je fajn si uvedomiť, na aký druh podnetu reakčný čas meriam. Ak si podnety rozdelíme podľa zmyslov, ktorými ich vnímame, môžu byť akustické, vizuálne, chuťové, čuchové a hmatové. Nikto z vás neskúšal merať odpoveď na chuťový a čuchový podnet, čo je škoda ☺.

Veľkou skupinou reakcií na podnet sú reflexy. Nemnoho z vás sa pokúsilo merať reflexný reakčný čas. Pochvala patrí Martinovi Trískovi a Lukášovi Konečnému, ktorí odhadovali reakčný čas na žmurkací a zrenicový reflex, odtrhnutie ruky od horúceho predmetu a pod. Ja ešte dodávam ten najznámejší tzv. patelárny reflex (vystrelenie nohy od kolena nadol po údere na oblasť pod kolenným jabĺčkom). Keďže odpoveď na informáciu o zaregistrovaní podnetu receptormi spracuje miecha „automaticky“, reakčný čas patelárneho reflexu sa pohybuje v okolí 120 milisekúnd. Toľko k reflexom, druhú skupinu odpovedí našej nervovej sústavy na podnety z okolia, na ktoré odpovedáme vedome, nazvime pracovne „reakcie“. Začnem prehliadkou vašich prístupov k vizuálnym podnetom. Tie ste najčastejšie merali dvoma metódami, pracovne si ich nazvime stopková a pravítková metóda.

Najjednoduchšie realizovateľná je stopková metóda. Vezmem si do rúk stopky, napríklad na mobile, a spustím časomieru. Mojou úlohou je zastaviť ju stlačením tlačítka, keď sa na displeji objaví určitý cieľový čas. Pri jeho dosiahnutí zastavím stopky a rozdiel medzi časom na displeji a cieľovým časom môžeme považovať za reakčný čas. Jeho hodnoty sa u vás pohybovali najčastejšie v rozmedzí 170 – 350 ms. Problémom tohto spôsobu merania je rýchle preblikávanie číslíc na displeji, preto je vhodné za cieľový čas zvoliť práve skokový okamih, kedy sa číslo na displeji výrazne zmení, napríklad naskočí desiata sekunda, minúta a pod.

Na pravítkovú metódu potrebujem už asistenta (dobré sa to realizuje, ak mám k dispozícii Borisovu Š.A. ☺) Asistent drží v ruke pravítko a stopky. Moje prsty obopínajú pravítko a sú v polohe pripravej na jeho zovretie, pričom sa nachádzajú na určitej počiatkovej centimetrovej hodnote. Keď asistent pustí pravítko, začne padat voľným pádom. Po mojom zachytení pravítka odčítam na stupnici, v akej vzdialenosti od počiatkovej hodnoty

som ho zachytil. Zo vzorca pre dobu voľného pádu (chronicky známe $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$) určím reakčný

čas, ktorého hodnoty sa pohybovali v rozmedzí 150 – 220 ms.

Reakčný čas na hmatový podnet ste najčastejšie merali rôznymi druhmi šťuchnutí perom a iných pomôcok do pre experimentálnu obeť vopred neznámej časti tela, prípadne aj ťahaním za vlasy a iným agresívnymi spôsobmi. Vyhlídnutá obeť samozrejme zjojkla, zvýskla, podľa chuti, niekedy aj vynadala. Páchateľ týchto zvrhlostí sa samozrejme zamerlal len a len na meranie reakčného času od úderu po výkrik, ktorý sa pohyboval v okolí 400 ms. Tento spôsob má však jeden háčik, a to, že čo odmeriam, sú vlastne reakčné časy dva. Obete a stopujúceho

páchatel'a. Preto je údaj na stopkách potrebné predeliť vhodným koeficientom, napríklad 2. Navyše páchatel' nedokáže stopky spustiť presne v čase udelenia podnetu, meraný čas je veľmi krátky, a páchatel' reakciu obete očakáva, čím sa výsledok skresľuje.

Na záver som si vybral akustický spôsob rekordéra počtu zrealizovaných spôsobov meraní Filipa Kubinu. Vyberám pasáž z jeho riešenia: „S pomocníkom sa dohodnem na nasledovnej hre. Zapne stopky a bude hovoriť po jednom písmená *a* alebo *b*. Ja sa ich posnažím zopakovať. Teda on povie napr. *b*, ja to zopakujem a on zase povie ďalšie písmeno, ja to zas zopakujem, ... Celá hra bude mať desať písmen (aby som zväčšil presnosť a zanedbal také vplyvy ako sú stopky). Tým, že hovoríme dve rôzne písmená zabránim tomu, že by som nečakal na podnet, ale iba rýchlo povedal desať „áčok“. Jedno písmenko sú teda dva reakčné časy. Najprv ja zachytím podnet, nasleduje moja reakčná doba, zopakujem písmenko, on zachytí podnet, nasleduje jeho reakčná doba, on povie nové písmenko. Hra má desať sérií, preto nameraný čas je 20 reakčných dôb.“ Tu si dovoľm prerušiť Filipov výklad údajom o nameranom priemernom reakčnom čase z jeho piatich meraní, (ten bol 0,32 s). Dôležitá poznámka: „pri 7%-nej odchýlke merania“. Mnoho z vás zabudlo, ako sa namerané údaje vyhodnocujú. Že výsledkom nie je jedna hodnota, ale interval hodnôt v tvare priemerná hodnota $\pm$ relatívna odchýlka merania (alternatívne udaná percentuálne).

Po skončení hitparády vašich nápadov nasleduje trocha faktografie. Aký je teda reakčný čas ľudí? Odpoveď znie: Koho ako. Keďže každý z nás má jedinečné fyziologické, intelektuálne a všakovaké iné danosti, naše reakčné časy sú rôzne. Ako teda pristupovať k údaju, že priemerný reakčný čas človeka je 200 ms? Odpoveď je ukrytá v hĺbkinách štatistiky. Po troche googlenia a prehľadávania Wikipédie som našiel nasledovnú stránku <http://www.humanbenchmark.com/tests/reactiontime/stats.php>. Môžeme si tam všimnúť rozloženie reakčných časov v populácii, ktoré pripomína „tvar zvona“ (odborne sa tomu zvonu hovorí Gaussova krivka), ktorý dosahuje svoje maximum v okolí 200 milisekúnd. Navyše aj reakčné časy na rôzne druhy podnetov sú odlišné. Tak napríklad na vizuálny podnet je to vraj 250 ms, na akustický 170 ms a na dotykový 150 ms.

Na záver som si nechal príhodu zo sveta šprintérov, ktorých reakčné časy sa pohybujú v okolí 150 ms. Praktickým problémom pri atletických súťažiach je zistiť, či šprintér odštartoval predčasne (tzv. ulial štart). Pre tento účel sa nachádza v atletických pravidlách ustanovenie, že za chybný (uliaty) štart sa považuje „kratšia štartová reakcia ako 0,1 s“. Ako sa to meria? Podľa tlaku pretekárových nôh vyvíjaných na štartové bloky. Možno si spomínate na škandál, ktorý sa udial počas majstrovstiev sveta v atletike Paríž 2003, kedy bol vo finále v behu na 100 m diskvalifikovaný jeden z medailových top favoritov. Americký šprintér Jon Drummond, ktorý hodinu so slzami v očiach odmietal opustiť bežeckú dráhu neustále opakujúc „I did not move“. Štartér však tvrdil, že údaje z blokov mu tvrdia, že ulial štart. Ich analýza po pretekoch (http://www.trackandfieldnews.com/general/features/2003/drummond_reaction_graph_field.html) však ukázala, že Drummond sa skutočne pri štarte nepohol a jeho skutočný reakčný čas bol 130 ms! Počítač chybné vyhodnotil štartovú sekvenciu ...

Na úplný záver ešte poznámka, ako som tento príklad hodnotil. Veľa z vás asi nie je nadšených bodmi, ktoré ste si našli. Keďže v zadaní bolo písané čosi o oceňovaní, nemal som inú možnosť ako oceniť vás bodovo (margotky sa minuli ...). A síce tak, že kto navrhol a urobil meranie len jedným spôsobom, dostal 3 b., kto dvoma, dostal 4 b. a kto troma a viac, dostal 5 bodov. Ďalej som strhával 0,5 b. za chýbajúcu diskusiu (pár slov o tom, čo všetko ovplyvnilo nameraný výsledok a pod.), 0,5 b. za neopakovanie merania (Peťo vám odkazuje, že najbližšiu experimentálku bude opravovať on a bude na takéto prípady mimoriadne alergický! ☺) a pridával 0,5 b. v obzvlášť zreteľahodných prípadoch (napríklad za poctivé spracovanie meraní aj s odchýlkami).

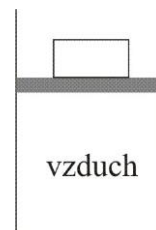
A zazvonil zvonec a reakčnej rozprávke je koniec.

A-2.2 Plyny (opravoval Robo A.)

Do valca dáme ideálny dvojatómový plyn a zhora ho uzavrieme pohyblivým piestom. Piest ako taký má hmotnosť m . Teraz na piest

- a) položíme
- b) nepoložíme

šuter s hmotnosťou M a počkáme kým sa sústava ustáli, jej teplota bude v oboch prípadoch rovnaká ako teplota v miestosti (t.j. v prípade a) bude piest stlačený viac, lebo plyn je stláčaný väčším tlakom). Teraz ohrejeme plyn o teplotu ΔT . Ktoej zo sústav a), b) bude treba pri tom dodať viacej tepla?



Zdravím všetkých, ktorí čítajú tento vzorák, teda tých, ktorí majú problémy s plynmi. Myslím, že tentokrát ste žiadne problémy mať nemali, keďže tento príklad bol naozaj ľahučký.

Tak sa na to pozrime. Podľa zadania je plyn dvojatómový, teda má 5 stupňov voľnosti (ak neviete, o čom točím, tak nerobte paniku, pre riešenie príkladu je táto informácia nepotrebná). Označme N počet molekúl v nádobe, k Boltzmanovu konštantu, S plochu piestu, p_a atmosférický tlak a $s = 5$ počet stupňov voľnosti nášho plynu. Rozoberme najprv prípad, keď na piest nepoložíme šuter. Plyn v nádobe má tlak, ktorý je súčtom atmosférického tlaku a tlaku, ktorým tlačí piest svojou tiažou na plyn: $p = p_a + \frac{mg}{S}$. Keďže v tomto výraze vystupujú samé

konštanty, pôjde očividne o izobarický dej. Dodané teplo vypočítame z prvého termodynamického zákona: $Q = \Delta U + W'$, kde ΔU je zmena vnútornej energie a W' práca vykonaná plynom. Pre vnútornú energiu dvojatómového plynu máme dobre známy vzorec (teda dobre známy na vysokej škole): $U = \frac{S}{2} NkT$. Potom je jasné, že jej zmena bude:

$\Delta U = \frac{S}{2} Nk\Delta T$. Teraz si uvedomíme, čo je práca vykonaná plynom. Plyn pri izobarickom ohrievaní zväčšuje svoj objem, teda sa dvíha piest, čím plyn koná prácu. Teda nám stačí zistiť, o akú dĺžku Δh sa zdvihne piest. Pre plyn pred a po zohriatí platia stavové rovnice $pV_1 = NkT$ a $pV_2 = Nk(T + \Delta T)$. Odtiaľ:

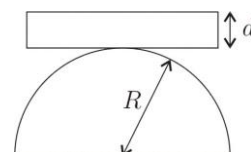
$$\Delta h = \frac{V_2 - V_1}{S} = \frac{Nk\Delta T}{pS}$$
$$W' = \Delta h p S = Nk\Delta T.$$

Sčítaním výrazov konečne dostávame $Q = \frac{s+2}{2} Nk\Delta T$. Vidíme, že výsledok nezávisí od

hmotnosti piestu. Teda ak by sme miesto hmotnosti m mali hmotnosť $m + M$, výsledok by sa nezmenil. Preto môžeme konštatovať, že teplo dodané plynu musí byť v oboch prípadoch rovnaké. Náš šuter je teda úplne zbytočný, neviem, načo sme ho tam vlastne dávali. Kto si zaspomínal na hodiny fyziky, mal by sa rozpomenúť na konštanty c_v a c_p , čo sú merné tepelné kapacity plynu pri konštantnom objeme / tlaku. Keďže konštanta c_p je konkrétne jedno číslo (pre daný plyn) nezávislá od tlaku, ktorým plyn stláčame, je už samotná existencia c_p dôvodom, prečo nám to vyšlo tak, ako vyšlo. Úloha sa teda dala zadať aj inak – dokážte že existuje čosi ako konštanta c_p .

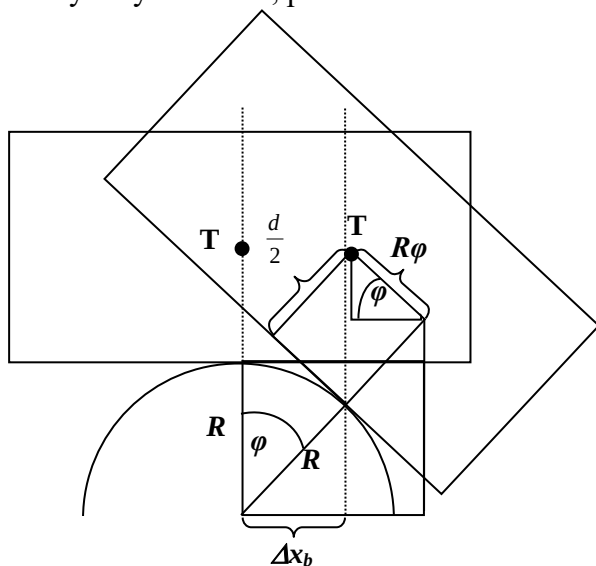
A-2.3 Stabilita (opravovala Bea)

Polguľa s polomerom R je pevne pripevnená na vodorovnej podložke. Položíme na ňu dosku s hrúbkou d . Doska má ťažisko presne nad najvyšším bodom polgule a medzi ňou a polgulou je dostatočne veľké trenie, aby nič neprešmykovalo. Rozhodnite, či táto poloha bude stabilná, t.j. prežije doska malé ťuknutie?



Pohyb dosky je najjednoduchšie predstaviť si ako otáčavý pohyb okolo bodu (osi), kde sa doska dotýka polgule. (Pri pohybe dosky sa teda os otáčania stále posúva, to však nevadí). Labilná poloha sa teraz bude prejavovať tak, že pri malom vychýlení sa ťažisko dostane za

zvislicu prechádzajúcu dotykovým bodom, tiažová sila pôsobiaca na dosku ju bude ťahať dole z polgule a doska spadne. Preto stabilná poloha je len taká, v ktorej aj po vychýlení o malý uhol φ bude ťažisko na správnej strane zvislice (čiže tak, aby sa pôsobením tiažovej sily doska vracala späť do vodorovnej polohy). V prípade, že sa ťažisko aj po vychýlení nachádza presne nad dotykovým bodom, poloha bude invariantná (doska nespadne, ale sa ani nevráti).



Takže si popíšeme nejaké vzťahy medzi uhlami a vzdialenosťami, z ktorých nám vylezie, ako sa posúva ťažisko a dotykový bod vo vodorovnom smere. Chceme, aby platilo: $\Delta x_T < \Delta x_b$ (1) (Δx_T – posunutie ťažiska, Δx_b – posunutie dotykového bodu). Posunutie dotykového bodu sa vyjadří celkom pekne: $\Delta x_b = R \sin \varphi$ (2). Pri posunutí ťažiska si musíme najprv uvedomiť, že vzdialenosť na doske medzi dotykovými bodmi je rovnaká ako dĺžka trajektórie, ktorú prešiel dotykový bod po povrchu polgule, čiže $R\varphi$. Potom

$$\Delta x_T = \left(R + \frac{d}{2} \right) \sin \varphi - R\varphi \cos \varphi \quad (3).$$

Keď dosadíme (2) a (3) do nerovnosti (1), dostaneme:

$$\left(R + \frac{d}{2} \right) \sin \varphi - R\varphi \cos \varphi < R \sin \varphi.$$

Po úprave:

$$\frac{d}{2} \sin \varphi < R\varphi \cos \varphi.$$

Uhol φ je podľa zadania veľmi maličký a pre také malé uhly môžeme nahradiť: $\sin \varphi = \varphi$, $\cos \varphi = 1$. Tým sa nám rovnica zjednoduší na tvar:

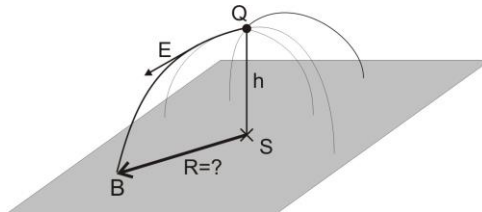
$$\frac{d}{2} \varphi < R\varphi.$$

Tam sa to pekne vykráti a máme výsledok, kedy je poloha stabilná: $\frac{d}{2} < R$. Naopak, ak platí

$\frac{d}{2} > R$ doska „neprežije“ ani malé ťuknutie. V prípade $\frac{d}{2} = R$ nevieme presne povedať, aká je poloha, museli by sme spraviť presnejšiu analýzu a neuspokojiť sa napríklad so vzťahom $\sin \varphi = \varphi$, čo by sa teraz ukázalo ako nedostatočne presný odhad. V praxi však môžeme predpokladať, že takáto rovnosť nikdy nenastane, $d/2$ a R nikdy nebudú úplne rovnaké. Na záver ešte dodám, že iným zaujímavým prístupom bolo zrátať polohovú energiu dosky. Ak táto pri malom vychýlení narastie, sústava bude stabilná, ak klesne, stretne sa na zemi.

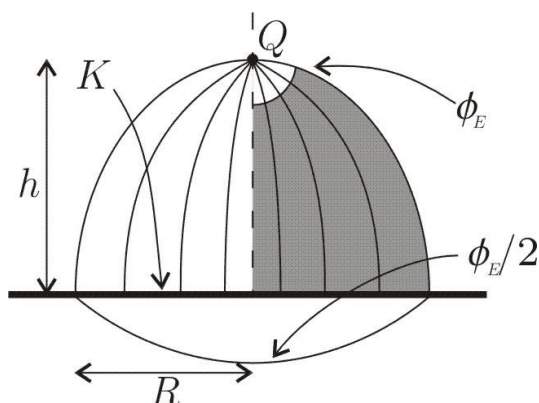
A-2.4 Sila v čiarach (opravoval Peťo)

Majme vodič, uzemnenú nekonečne širokú aj dlhú dosku a vo vzdialenosti h od nej bodový náboj s veľkosťou Q (bod, v ktorom je náboj budeme označovať tiež Q). Označme S kolmý priemet Q na dosku. Bod B nech je bod, v ktorom siločiar, ktorá začína v Q a v tomto bode je rovnobežná s rovinou dosky, pretína dosku.



- Ukážte (netreba príliš formálne), že pokiaľ zo sústavy odoberieme uzemnenú dosku, ale pridáme náboj $-Q$ tak, aby bol umiestnený symetricky (t.j. uzemnená doska by bola bývala presne v strede medzi Q a $-Q$), dostaneme rovnaké elektrické pole ako predtým.
- Vyrátajte vzdialenosť $|SB|$.

Ahojte. Odpoveď na prvú otázku nám poskytne tzv. Faradayova klieť. Ide o to, že pokiaľ skúmame pole v dutine obklopenej vodičom, výsledok je ovplyvnený len nábojmi nachádzajúcimi sa vo vnútri tejto dutiny. Postarajú sa o to voľné náboje v samotnom vodiči, ktoré sa vždy rozmiestnia práve tak, aby v ňom bolo nulové pole. Ak k vodivej platni prinesieme náboj Q , voľné náboje sa preskupia tak, aby bol na nej stále potenciál $0V$ (uzemnenosť). Je rozumné predpokladať, že lokálne elektromagnetické zákony by sa nezmenili, keby sme celý vesmír uzavreli do obrovskej uzemnenej plechovej konzervy. Preto sa polpriestor vymedzený rovinou a nábojom Q dá predstaviť ako veľmi veľká dutina obklopená zo všetkých strán vodičom, pričom zvyšné steny sú v nekonečnej vzdialenosti od Q . Ak preto na opačnú stranu roviny pridáme náboj $-Q$, pole v okolí Q tým nezmeníme. Zmeníme však rozloženie náboja na vodivej platni. Pretože po pridaní $-Q$ bude potenciál v mieste roviny rovný nule (dorátajte!) všetky voľné náboje sa vrátia späť na svoje miesta, samotná rovina bude neutrálna a môžeme si ju odmyslieť. Výsledná inenzita je preto súčtom intenzít od Q a $-Q$ a to je práve to, čo chcelo byť v a).



Pokiaľ nás zaujíma vzdialenosť $|SB|$, musíme si spomenúť na Gaussov zákon. Podľa neho je tok $\vec{E}$ ľubovoľnou uzavretou plochou rovný náboju v jej vnútri predelenému ϵ_0 . Označme kruh so stredom v S a polomerom $R = |SB|$ ako K . Ďalej rotujeme sivo vyfarbený útvar na obrázku o 360° okolo čiarkovanej osi kolmej na rovinu, až kým nedostaneme kupolovitý útvar s malou polguľovou jamkou na vrchu. Podstavou tohto útvaru je kruh K a nakoľko v jeho vnútri nie sú nijaké náboje, musí byť tok elektrického poľa jeho povrchom rovný

nule. Nie je ťažké uviesť si, že dovnútra vteká tok $\Phi_E = \frac{1}{2} \frac{Q}{\epsilon_0}$ (polovica všetkých siločiar opúšťajúca Q). Ide o tok stenami polguľovej jamky na vrchu rotačného útvaru, ktorá zospodu tesne obklopuje náboj Q . Ak máme nakoniec dostať nulu, musí rovnako veľa elektrického poľa aj vytiecť. Pretože bočné steny nášho rotačného útvaru sú rovnobežné so siločiarami, tok nimi je nulový a jediné miesto, ktorým môže elektrické pole uniknúť von je kruh K .

Tok cez K je súčtom dvoch rovnakých príspevkov od Q a $-Q$, preto ak budem uvažovať iba tok poľa od náboja Q , dostanem $\Phi_E / 2$. Nakoniec si musíme uviesť, že tok poľa od Q cez kruh K je rovnaký, ako tok cez guľový segment zodpovedajúci guľi so stredom v Q a polomerom $\sqrt{h^2 + R^2}$, ktorého podstavu tvorí kruh K . Ak totiž spojíme kruh K so spomínaným guľovým segmentom, dostaneme uzavretú plochu, vo vnútri ktorej opäť nie sú nijaké náboje, teda to, čo vteká dnu cez kruh K , musí vytiecť von cez časť gule. Z geometrie vieme, že povrch guľového segmentu daných rozmerov je rovný

$$2\pi R \sqrt{h^2 + R^2}$$

a pretože všade na ňom má pole od Q veľkosť $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0(h^2 + R^2)}$, tok kruhom K je presne

$$\left(1 - \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}}\right) \frac{Q}{4\epsilon_0}.$$

To je ale rovné $\frac{\Phi_E}{2} = \frac{1}{4} \frac{Q}{\epsilon_0}$, z čoho dostaneme $R = \sqrt{3}h$.