# FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

**vzorové riešenia 1. série**
**B** – kategória (mladší)
22. ročník
letný semester
školský rok 2006/2007

**www.fks.sk**

**FKS, KZDF FMFI UK**
**Mlynská dolina**
**842 48 Bratislava**
*riesenia@gmail.com*
*info@fks.sk*

---

**B-1.1 Vysávač** (opravoval Robo K.)

*Vysávač si predstavíme ako krabicu, z ktorej vyčuhuje rúra. Vieme, že vo vysávači sa nachádza turbína, ktorá sa po zapnutí otáča okolo osi, ktorej smer poznáme. Čo však nevieme je, či sa turbína okolo osi otáča v smere alebo proti smeru hodinových ručičiek. Navrhnite experiment, ktorým by sa dala táto dilema vyriešiť bez rozobratia vysávača.*

Vítam všetkých (staro)nových riešiteľov pri príklade, ktorý nemal vysať vašu odvahu do letnej časti, ale naopak ju nabudiť vysaním čo najviac bodov do výsledkovky. Ale poďme in medias res na „prípad vysávač“. V nasledovných riadkoch vám ponúknem jeden z možných prístupov, ako hľadieť na zadaný problém.

Vo fyzike je mnoho užitočných fyzikálnych veličín, ktoré sa zachovávajú, t.j. za určitých okolností (izolovanosť telesa, resp. sústavy a pod.) nemenia svoju hodnotu. Takou veličinou je aj moment hybnosti, zvyčajne sa značiaci $L$[1]. Ako je to teda so zachovávaním sa momentu hybnosti? Stručne povedané, celkový moment hybnosti sa v izolovanej sústave zachováva. Spĺňa podmienku izolovanosti vysávač zo zadania? Nie, pretože vysávač nasáva a vysáva vzduch, čím nám pribudne uvažovať aj odporové sily vzduchovej masy. Preto by sme mali náš experimentálny vysávač umiestniť do vákua ☺.

Keď už sme sa šťastne vysporiadali so vzduchovými nepríjemnosťami, rozpíšme si, čo vlastne moment hybnosti ako veličina vyjadruje. Pre jeho veľkosť môžeme písať nasledovné: $L = I.\Omega,$ kde $I$ je moment zotrvačnosti telesa (v našom prípade vysávača a turbíny) vzhľadom na os otáčania a $\Omega$ veľkosť uhlovej rýchlosti otáčania okolo tejto osi. Ak má platiť ZZMH[2], musí sa moment hybnosti sústavy zachovávať, t.j. ostať konštantným pred roztočením turbíny a po nej. To platí, ak sa moment hybnosti zapnutej turbíny $L_T$ bude rovnať momentu hybnosti vysávača $L_V$. Uvedený fakt možno stručne zaznamenať v nasledovnej rovnici:

$$L_T + L_V = 0 \qquad \rightarrow \qquad I_T.\ \Omega_T = -\ I_V\ .\ \Omega_V = I_V.\ (-\Omega_V)$$

Keďže momenty zotrvačnosti sú kladné konštanty, znamienko mínus pri uhlovej rýchlosti vysávača znamená jej „zápornú“ veľkosť, čo neznamená nič iné ako to, že má opačný smer ako uhlová rýchlosť turbíny.

Nasleduje chvíľa „testovania bez násilia“. Položme náš vysávač na podložku s nulovým trením. Ak teda vysávač bude rotovať v smere hodinových ručičiek, znamená to rotáciu turbíny proti smeru hodinových ručičiek a naopak. Šťastný riešiteľ ostane sýty piatimi bodmi a vysávač ostane celý pre sobotné domáce upratovanie. Nebolo lepšie radšej ho rozobrať? ☺

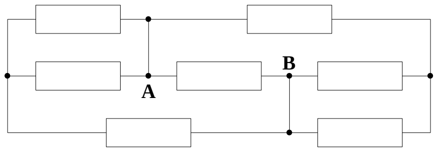
---

[1] Malá poznámka pre fyzikálnych fajnšmekrov alias o inom pohľade na riešenie úlohy: moment hybnosti je vektorová veličina, t.j. okrem veľkosti má aj smer. Je definovaný ako $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Čítaj: moment hybnosti $\vec{L}$ je vektorový súčin polohového vektora $\vec{r}$ (vektor vychádzajúci zo zvoleného počiatku súradnej sústavy do konkrétneho hmotného bodu telesa) a hybnosti $\vec{p}$ tohto bodu. O vektorovom súčine v definícii momentu hybnosti nám stačí pre túto chvíľu vedieť len toľko, že vďaka nemu je smer momentu hybnosti $\vec{L}$ (a o ten nám v tejto úlohe ide) kolmý na oba vektory $\vec{r}$ a $\vec{p}$. Ak má platiť ZZMH, potom sa musí moment hybnosti turbíny rovnať momentu hybnosti vysávača (vektorovo !!). Dva vektory sa rovnajú, ak majú rovnakú veľkosť a opačný smer. To zabezpečím tak, že „vymením“ smer hybností, teda turbína bude rotovať opačným smerom ako vysávač. Stručne a z rýchlika povedané ... ☺

[2] zákon zachovania momentu hybnosti

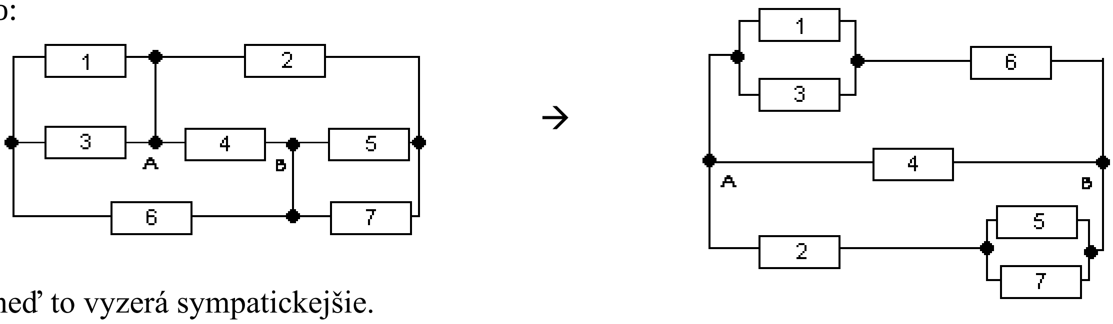
**B-1.2 Wodporné okienko** (opravovala Bea)

*Zistite odpor medzi bodmi A a B v schéme na obrázku. Každý rezistor má odpor 7 Ω.*




Ahojte detváky, sústredko už pomerne dávno pominulo. Dokonca načim rátať 2. a pomaly 3.sériu. Ale keďže sa je prečo snažiť, tak len smelo do nich, do tých príkladov, oni sa už poddajú☺

Po prvé: Všimneme si schému. Vyzerá podozrivo...všimneme si drôty vedúce z uzlov A a B do najbližších uzlov tak, že sa na nich nenachádza resistor. Tieto drôty vlastne nemajú žiaden odpor, keď ho ako sa na slušného fyzika patrí zanedbáme. Preto taký drôt nahradím jedným uzlom a prekreslím takto:




A hneď to vyzerá sympatickejšie.

Po druhé: Začnem konečne rátať. Rezistory 1 a 3 sú zapojené paralelne. Takisto aj rezistory 5 a 7. Ich výsledný odpor označím $R_a$ . Vypočítame ho ako:

$$R_a = \frac{R^2}{R+R} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$$

Medzi uzlami AB zostali tri vetvy. Jedna z nich (4) má odpor *R*. Ďalšie dve majú paralelne zapojené odpory veľkosti R/2 a R, potom vďaka sériovému zapojeniu majú odpor 3R/2. Takže spočítam odpor medzi uzlami AB definitívne:

$$R_0 = \frac{\frac{3}{2}R*R*\frac{3}{2}R}{\frac{3}{2}R*R+R*\frac{3}{2}R+\frac{3}{2}R*\frac{3}{2}R} = \frac{\frac{9}{4}R^3}{\frac{21}{4}R^2} = \frac{9}{21}R$$

$$R_0 = \frac{9}{21}*7\Omega = 3\Omega$$

Za obrázky ďakujem Tinke Batmendijnovej, ktorej týmto Tomáš posiela kačku. Tak toť vsio. Len tak do budúcna. Nenechajte sa zákerne zlákať niečím, čo vyzerá inak, ako čo to znamená, veľa čokoládových vajec v záhrade prajem a hru na klub chystá Fajo, už tomu chýba len doťuknúť...

---

**B-1.3** (vzorák Kubo, opravovala Baška)

*Predpokladám, že každý z vás bol aspoň raz v živote fascinovaný šťukacím perom. Šťuk zapne sa, šťuk, vypne. Odmerajte, akú prácu vykonáme pri stlačení šťukátka z najviac vysunutej do najviac zasunutej polohy.*

Zdravím všetkých, čo písu perom a z nudy zvyknú štukať. Teraz konečne zistíte, že takto sa vskutku schudnúť nedá (ale človek aspoň zamestná nevyťažený procák...).

Jedna z myšlienok, ako realizovať experiment, je nechať padať pero na šťukátko a merať výšku, z ktorej keď ho pustím, tak sa zapne. No tak som si zobral pero, ktorého mi nebolo ľúto a púšťal som ho. Tu musím konštatovať, že na rôznych podložkách som dostal rozličné výšky. Pre moje mnou obetované pero to bolo 60 až 80cm. Ďalej som pozoroval, ako vysoko asi vyskočí to pero, keď dopadne a nešťukne. To bolo takých 15cm. Do tretice som skúšal, ako vysoko vyskočí pero, keď ho nechám vypnúť sa (síce sme hovorili o práci pri zapnutí pera, ale malo by to byť dosť dobre to isté – rozdielne môžu byť tie sekundárne malé štuky). Napodiv mi pero nevyskočilo ani 10cm. Táto metóda ma teda veľmi nepresvedčila. Verím, že ani vás, a tiež verím, že je vám jasné, čo sa mi nepáči.

Moja druhá metóda využíva vlastnosti pružiny. Silu $F$, ktorou musíme pôsobiť na pružinu, väčšinou považujeme za lineárnu v závislosti od jej predĺženia $x$ (čo je dobré priblíženie). Takejto sile

$F = kx$ odpovedá potenciálna energia $E = \frac{1}{2} kx^2$.

Potom prácu, ktorú vykonáme pri jej stlačení vypočítam:

$$W = E_{p2} - E_{p1} = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}k(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(kx_2 + kx_1)d = \frac{1}{2}(F_2 + F_1)d$$

kde $d$ je dĺžka, po ktorej pôsobím, a $F_1$, resp. $F_2$ je sila, ktorou na pružinu pôsobím na začiatku, resp. na konci štuknnutia. Ako to pomerať? No jednoducho: zoberiem strúhatko a postavím pero doň smerom nadol. Potom na šťukátko postavím odmerku na vodu , ktorú podopieram iba zboku, aby pekne stála na šťukátku. Ideálna je valcová odmerka, ktorú ani veľmi podopierať netreba (vadí nám trenie). No a potom dolievam vodu. Odmerku s vodou potom odvážim vtedy, keď prvýkrát trochu nádoba klesne ($F_1 = m_1g$) a vtedy , keď pero šťukne ($F_2 = m_2g$). Tu som zanedbal hmotnosť častí pera, ktoré klesajú spolu s nádobou (tuha a časť šťukacieho mechanizmu). Snáď mi to prepáčite. Moje namerané údaje: $d = (10 \pm 1)$ mm; $m_1 = (0{,}10 \pm 0{,}05)$ kg; $m_2 = (0{,}40 \pm 0{,}05)$ kg, ku ktorým poznamenávam, že odchýlku som určil ako celý najmenší dielik pri meraní dĺžky a pri meraní hmotnosti je to mnou uznaná rozumná hodnota (lebo naša váha má najmenší dielik 10g – ale ja si o nej myslím svoje...; v podstate som sa viac spoľahol na stupnicu odmerky a jej najmenší dielik je 50ml). Výsledok: $W = (25 \pm 8)$ mJ.

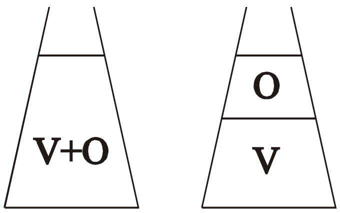
Takže ak nechcete pribrať, tak hor sa do 40 miliónov štuknutí a potom si s pokojným svedomím môžete dopriať 1 keksík alebo polovičku klasickej 100-gramovej čokolády. Dobrú chuť ☺.

Čo sa týka bodovania: ak ste to robili ako pružinu, super. Treba si však všimnúť, že keď pružinu naťahujeme, tak sila, ktorú na to potrebujeme, sa mení – rastie, čím viac ju natiahneme. To je veľmi dôležité a ak ste si to nevšimli, moc bodov za to nebude. Zákon zachovania energie je dobrá vec ale treba si všimnúť, kam všade nám môže tá energia utiecť, a ako presne sme schopní odmerať to, čo potrebujeme. A taktiež platí, že dva vzorce a veľa čísel nie je úplne to, čo stačí vidieť na riešení. Chcelo by to nejak vysvetliť, čo a ako ste merali, a prečo.

---

**B-1.4 Banka** (vzorák Kubus, opravoval Marcel)

*V labáku máme dve rovnaké kužeľové banky (tzv. Erlenmeyerove). Do jednej nalejeme nejaké množstvo vody a približne rovnako veľa oleja tak, aby olej plával v súvislej vrstve na vode. Do druhej banky nalejeme rovnako veľa vody a rovnako veľa oleja ako do prvej, ale teraz bankou poriadne zatrepeme, aby sa voda s olejom zmiešali. V ktorej banke bude na dne väčší tlak a prečo? Nezabudnite svoju odpoveď poriadne zdôvodniť! (Predpokladajte, že objem zmesi oleja a vody po pomiešaní bude rovnaký ako pred pomiešaním.)*




Tlak na dne banky bude súčtom atmosférického tlaku a hydrostatického tlaku kvapaliny v banke. Atmosférický je v oboch prípadoch rovnaký. Akože sa to počíta hydrostatický tlak? Predsa $p = \rho.g.h$! Pričom $\rho$ je hustota kvapaliny, $h$ je výška kvapalinového stĺpca nad bodom, kde meriame tlak, a $g$ pozná každý. Ale pozor. Hustota $\rho$ nie je hocijaká hustota, ktorú nájdeme v zadaní a vieme ju dosadiť do vzorca. Zamyslime sa, odkiaľ sme vôbec dostali rovnicu „$p = \rho.g.h$" (domáca úloha), a zistíme, že ju vieme zmysluplne (a bez zložitých dodatkov) použiť iba v jednoduchom prípade, keď je kvapalina homogénna. Ako teda zrátame hydrostatický tlak na dne nádoby, keď bude olej plávať na vode?

Našťastie si situáciu môžeme jednoducho rozložiť. Olej pôsobí na vodu tlakom $p_o = \rho_o.g.h_o$, ktorý sa spolu s tlakom vody $p_v = \rho_v.g.h_v$ prenáša na dno. ($\rho_o$ je hustota oleja, $h_o$ výška olejovej vrstvy, podobne pre vodu) Celkový hydrostatický tlak na dno nádoby v nepremiešanom prípade bude teda

$$p_1 = \rho_o.g.h_o + \rho_v.g.h_v$$

Keď kvapaliny premiešame, hustota zmesi bude

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\rho_O V_O + \rho_V V_V}{V_O + V_V},$$

keďže predpokladáme že objem kvapaliny sa zmiešaním nezmenil. (A hmotnosť určite nie.) Celkový hydrostatický tlak na dno nádoby v premiešanom prípade bude teda

$$p_2 = \frac{\rho_O V_O + \rho_V V_V}{V_O + V_V} g(h_O + h_V).$$

Rozdiel tlakov bude teda

$$p_1 - p_2 = \frac{(\rho_O h_O + \rho_V h_V).(V_O + V_V)g}{V_O + V_V} - \frac{(\rho_O V_O + \rho_V V_V).(h_O + h_V)g}{V_O + V_V} =$$

$$= \frac{[(\rho_O h_O + \rho_V h_V).(V_O + V_V) - (\rho_O V_O + \rho_V V_V).(h_O + h_V)]g}{V_O + V_V} =$$

$$= \frac{(\rho_V h_V V_O + \rho_O h_O V_V - \rho_V V_V h_O - \rho_O V_O h_V)g}{V_O + V_V} = \frac{(\rho_V - \rho_O).(h_V V_O - h_O V_V)g}{V_O + V_V} =$$

$$= \frac{(\rho_V - \rho_O).\left(\frac{h_V}{V_V} - \frac{h_O}{V_O}\right)g}{(V_O + V_V)V_O V_V}.$$

Teraz si už len všimnime, že $(\rho_v - \rho_o)$ je kladné, lebo voda má väčšiu hustotu ako olej. $(h_v/V_v - h_o/V_o)$ je záporné, pretože $h_v/V_v < h_o/V_o$. Toto si ľahko všimneme z tvaru nádoby: voda je v spodnej časti, preto výška ktorú zaberá nejaký jej objem $(h_v/V_v)$, je menšia, ako výška, ktorú zaberá rovnaký objem oleja $(h_o/V_o)$ (ktorý je vo vrchnej časti nádoby). Ak neveríte, môžete si popočítať objemy zrezaných kužeľov.

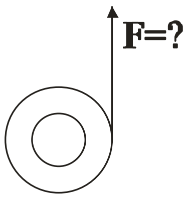
Zvyšné členy sú zjavne kladné, preto celý výraz pre $p_1 - p_2$ bude záporný. Čiže $p_1 < p_2$. Čiže väčší tlak budeme mať v druhom, premiešanom prípade.

Pozrime sa na to celé ešte raz, tentoraz sedliackym rozumom. Tlak na dne banky je všade rovnaký, pozrime sa teda na miesta v strede dna, nad ktorým je len kvapalina a potom vzduch – kde nezavadzajú steny banky. V nepremiešanom prípade je nad týmito miestami nejaký stĺpec vody a oleja. Keď kvapaliny v banke premiešame, do tohto stĺpca sa homogénne premieša všetka kvapalina z nádoby. Všimnime si, že v miestach "mimo tohto stĺpca", t.j. na okrajoch banky, bolo pred premiešaním viac vody ako oleja – pretože voda je na spodku a teda je jej v okrajových častiach nádoby "oveľa viac" ako oleja. Takže premiešaním sa do stredového stĺpca dostane viac vody ako tam bolo pretým. No a keďže je voda hustejšia ako olej, tlak nám premiešaním stúpne.

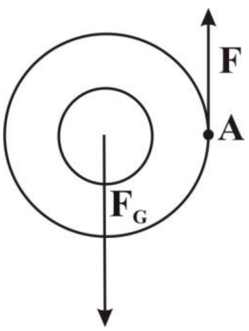
Takýchto "sedliackych" resp. "bezvzorcových" úvah sa dalo vymyslieť viac, a ak boli korektné a správne, dostali s (našou) radosťou (že nemusíme kontrolovať húfy rovníc) 5 bodov.

Ešte jedna poznámka na koniec. Viacerí z vás sa nechali zviesť vzorcom $p = F/S$ pre tlak. Tento vzorec je nepochybne správny, ale analýza pôsobiacich síl je už zložitejšia. Okrem tiažovej sily kvapaliny tu totiž pôsobia aj kolmé sily od stien banky (pôsobiace na kvapalinu a prenášajúce sa pomocou nej na dno). Tieto sily pôsobia vždy a v každej nádobe, vo valcovej sa však na ne vždy vďačne zabudne, keďže pôsobia iba vodorovne a vzájomne sa vyrušia. Teraz však pôsobia aj smerom dole a prispievajú k tlaku kvapaliny na dno. Veľmi pofidérne povedané, premiešaním vrstiev sa do vyšších častí nádoby dostane viac hustejšej kvapaliny (vody), čím stúpne celkový tlak na bočné steny nádoby, čím zároveň stúpne sila od stien na kvapalinu, čím stúpne aj tlak na dne nádoby. Bodka.

**B-1.5 Harmasan** (vzorák Marcelka, opravoval Juro)




*Rolku toaletného papiera s celkovou hmotnosťou m, vonkajším polomerom R a vnútorným polomerom r chytíme za voľný koniec a necháme padať (a pritom sa odvíjať). Vyrátajte silu, ktorou bude napínaný odmotaný koniec toaleťáku tesne po pustení. Všetky trenia a nehomogenity v rámci rolky môžete zanedbať.*




Ahojte deťúrence.

Toto je úúúplne klasická úloha na otáčavé pohyby, ktorá sa rieši spôsobom „zapíšem rovnice a porátam“, takže nemá význam snažiť sa o nejaké intuitívnejšie a krajšie riešenie. Tak poďme na to:

Na rolku pôsobia dve sily – gravitácia ($F_G = mg$) a sila ťahu, ktorá vzniká v odmotanom toaleťáku ($F$). Zrýchlenie rolky (v smere nadol) teda je:

$$a = (F_G - F)/m = g - F/m$$

Tiež vieme, že na rolku pôsobí moment sily. Vzhľadom na bod A je veľkosť momentu sily $F_G R$. Označme si $I_A$ moment zotrvačnosti rolky vzhľadom na bod A (vypočítame ho neskôr). Dostávame rovnicu pre uhlové zrýchlenie rolky:

$$\varepsilon = F_G R/I_A = mgR/I_A \tag{2}$$

Ešte poznáme vzťah medzi uhlovým zrýchlením rolky ($\varepsilon$) a zrýchlením ($a$):

$$\varepsilon = a/R \tag{3}$$

Dosadením (3) do (2) dostávame:

$$a = mgR^2/I_A$$

Takže

$$mgR^2/I_A = g - F/m$$

$$mg(1 - mR^2/I_A) = F$$

Už potrebujeme dorátať len moment zotrvačnosti $I_A$ a sme hotoví. Najprv sa pozrime na moment zotrvačnosti $I$ okolo osi rolky.

V tabuľkách si môžeme nájsť, že plný homogénny valec s polomerom $R$ má moment zotrvačnosti $1/2\,mR^2$. Moment zotrvačnosti našej rolky vypočítame ako rozdiel momentu zotrvačnosti valca s polomerom $R$ a momentu zotrvačnosti valca s polomerom $r$ (pričom oba valce majú hustotu rovnakú ako rolka). Veľký valec má hmotnosť $m\dfrac{R^2}{R^2 - r^2}$ a malý valec má hmotnosť $m\dfrac{r^2}{R^2 - r^2}$. Takže

$$I = \frac{1}{2}m\frac{R^2}{R^2 - r^2}R^2 - \frac{1}{2}m\frac{r^2}{R^2 - r^2}r^2 = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$$

Vieme, že $I_A = I + mR^2$, preto

$$I_A = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2) + mR^2 = \frac{1}{2}m(3R^2 + r^2)$$

Dosadením vzťahu do rovnice pre silu dostávame konečný výsledok (hurá!):

$$F = mg(1 - mR^2/I_A) = mg\frac{R^2 + r^2}{3R^2 + r^2}$$

# FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

**vzorové riešenia 1. série**
**A** – kategória (starší)
22. ročník
letný semester
školský rok 2006/2007

**www.** **.sk**

**FKS, KZDF FMFI UK**
**Mlynská dolina**
**842 48 Bratislava**
*riesenia@gmail.com*
*info@fks.sk*

---

**A-1.1 Perie** (vzorák Kubo, opravovala Baška)

*Predpokladám, že každý z vás bol aspoň raz v živote fascinovaný šťukacím perom. Šťuk zapne sa, šťuk, vypne. Odmerajte, akú prácu vykonáme pri stlačení šťukátka z najviac vysunutej do najviac zasunutej polohy.*

Zdravím všetkých, čo písu perom a z nudy zvyknú štukať. Teraz konečne zistíte, že takto sa vskutku schudnúť nedá (ale človek aspoň zamestná nevyťažený procák...).

Jedna z myšlienok, ako realizovať experiment, je nechať padať pero na šťukátko a merať výšku, z ktorej keď ho pustím, tak sa zapne. No tak som si zobral pero, ktorého mi nebolo ľúto a púšťal som ho. Tu musím konštatovať, že na rôznych podložkách som dostal rozličné výšky. Pre moje mnou obetované pero to bolo 60 až 80cm. Ďalej som pozoroval, ako vysoko asi vyskočí to pero, keď dopadne a nešťukne. To bolo takých 15cm. Do tretice som skúšal, ako vysoko vyskočí pero, keď ho nechám vypnúť sa (síce sme hovorili o práci pri zapnutí pera, ale malo by to byť dosť dobre to isté – rozdielne môžu byť tie sekundárne malé štuky). Napodiv mi pero nevyskočilo ani 10cm. Táto metóda ma teda veľmi nepresvedčila. Verím, že ani vás, a tiež verím, že je vám jasné, čo sa mi nepáči.

Moja druhá metóda využíva vlastnosti pružiny. Silu $F$, ktorou musíme pôsobiť na pružinu, väčšinou považujeme za lineárnu v závislosti od jej predĺženia $x$ (čo je dobré priblíženie). Takejto sile

$F = kx$ odpovedá potenciálna energia $E = \frac{1}{2} kx^2$.

Potom prácu, ktorú vykonáme pri jej stlačení vypočítam:

$$W = E_{p2} - E_{p1} = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}k(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(kx_2 + kx_1)d = \frac{1}{2}(F_2 + F_1)d$$

kde $d$ je dĺžka, po ktorej pôsobím, a $F_1$, resp. $F_2$ je sila, ktorou na pružinu pôsobím na začiatku, resp. na konci štuknnutia. Ako to pomerať? No jednoducho: zoberiem strúhatko a postavím pero doň smerom nadol. Potom na šťukátko postavím odmerku na vodu , ktorú podopieram iba zboku, aby pekne stála na šťukátku. Ideálna je valcová odmerka, ktorú ani veľmi podopierať netreba (vadí nám trenie). No a potom dolievam vodu. Odmerku s vodou potom odvážim vtedy, keď prvýkrát trochu nádoba klesne ($F_1 = m_1g$) a vtedy , keď pero šťukne ($F_2 = m_2g$). Tu som zanedbal hmotnosť častí pera, ktoré klesajú spolu s nádobou (tuha a časť šťukacieho mechanizmu). Snáď mi to prepáčite. Moje namerané údaje: $d = (10 \pm 1)$ mm; $m_1 = (0{,}10 \pm 0{,}05)$ kg; $m_2 = (0{,}40 \pm 0{,}05)$ kg, ku ktorým poznamenávam, že odchýlku som určil ako celý najmenší dielik pri meraní dĺžky a pri meraní hmotnosti je to mnou uznaná rozumná hodnota (lebo naša váha má najmenší dielik 10g – ale ja si o nej myslím svoje...; v podstate som sa viac spoľahol na stupnicu odmerky a jej najmenší dielik je 50ml). Výsledok: $W = (25 \pm 8)$ mJ.

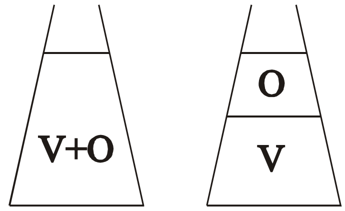
Takže ak nechcete pribrať, tak hor sa do 40 miliónov štuknutí a potom si s pokojným svedomím môžete dopriať 1 keksík alebo polovičku klasickej 100-gramovej čokolády. Dobrú chuť ☺.

Čo sa týka bodovania: najlepšie je pozrieť sa na to ako na pružinu, ale treba si všimnúť, že je už na začiatku trochu stlačená – teda že sila $F_1$ nie je nulová (ak nie -0,5b). Dobrý bol aj spôsob cez zákon zachovania energie, ak ste si uvedomili čo tam môže byť zle. A ak si niekto nevšimol, že sila, ktorou stláčate pružinu, nieje konštantná (!), nuž, za veľa to nebolo...

---

**A-1.2 Banka** (opravoval Kubus)

*V labáku máme dve rovnaké kužeľové banky (tzv. Erlenmeyerove). Do jednej nalejeme nejaké množstvo vody a približne rovnako veľa oleja tak, aby olej plával v súvislej vrstve na vode. Do druhej banky nalejeme rovnako veľa vody a rovnako veľa oleja ako do prvej, ale teraz bankou poriadne zatrepeme, aby sa voda s olejom zmiešali. V ktorej banke bude na dne väčší tlak a prečo? Nezabudnite svoju odpoveď poriadne zdôvodniť! (Predpokladajte, že objem zmesi oleja a vody po pomiešaní bude rovnaký ako pred pomiešaním.)*




Tlak na dne banky bude súčtom atmosférického tlaku a hydrostatického tlaku kvapaliny v banke. Atmosférický je v oboch prípadoch rovnaký. Akože sa to počíta hydrostatický tlak? Predsa $p = \rho.g.h$! Pričom $\rho$ je hustota kvapaliny, $h$ je výška kvapalinového stĺpca nad bodom, kde meriame tlak, a $g$ pozná každý. Ale pozor. Hustota $\rho$ nie je hocijaká hustota, ktorú nájdeme v zadaní a vieme ju dosadiť do vzorca. Zamyslime sa, odkiaľ sme vôbec dostali rovnicu „$p = \rho.g.h$“ (domáca úloha), a zistíme, že ju vieme zmysluplne (a bez zložitých dodatkov) použiť iba v jednoduchom prípade, keď je kvapalina homogénna. Ako teda zrátame hydrostatický tlak na dne nádoby, keď bude olej plávať na vode?

Našťastie si situáciu môžeme jednoducho rozložiť. Olej pôsobí na vodu tlakom $p_o = \rho_o.g.h_o$, ktorý sa spolu s tlakom vody $p_v = \rho_v.g.h_v$ prenáša na dno. ($\rho_o$ je hustota oleja, $h_o$ výška olejovej vrstvy, podobne pre vodu) Celkový hydrostatický tlak na dno nádoby v nepremiešanom prípade bude teda

$$p_1 = \rho_o.g.h_o + \rho_v.g.h_v$$

Keď kvapaliny premiešame, hustota zmesi bude

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\rho_O V_O + \rho_V V_V}{V_O + V_V},$$

keďže predpokladáme že objem kvapaliny sa zmiešaním nezmenil. (A hmotnosť určite nie.) Celkový hydrostatický tlak na dno nádoby v premiešanom prípade bude teda

$$p_2 = \frac{\rho_O V_O + \rho_V V_V}{V_O + V_V} g(h_O + h_V).$$

Rozdiel tlakov bude teda

$$p_1 - p_2 = \frac{(\rho_O h_O + \rho_V h_V).(V_O + V_V)g}{V_O + V_V} - \frac{(\rho_O V_O + \rho_V V_V).(h_O + h_V)g}{V_O + V_V} =$$

$$= \frac{[(\rho_O h_O + \rho_V h_V).(V_O + V_V) - (\rho_O V_O + \rho_V V_V).(h_O + h_V)]g}{V_O + V_V} =$$

$$= \frac{(\rho_V h_V V_O + \rho_O h_O V_V - \rho_V V_V h_O - \rho_O V_O h_V)g}{V_O + V_V} = \frac{(\rho_V - \rho_O).(h_V V_O - h_O V_V)g}{V_O + V_V} =$$

$$= \frac{(\rho_V - \rho_O).\left(\frac{h_V}{V_V} - \frac{h_O}{V_O}\right)g}{(V_O + V_V)V_O V_V}.$$

Teraz si už len všimnime, že ($\rho_v - \rho_o$) je kladné, lebo voda má väčšiu hustotu ako olej. ($h_v/V_v - h_o/V_o$) je záporné, pretože $h_v/V_v < h_o/V_o$. Toto si ľahko všimneme z tvaru nádoby: voda je v spodnej časti, preto výška ktorú zaberá nejaký jej objem ($h_v/V_v$), je menšia, ako výška, ktorú zaberá rovnaký objem oleja ($h_o/V_o$) (ktorý je vo vrchnej časti nádoby). Ak neveríte, môžete si popočítať objemy zrezaných kužeľov.

Zvyšné členy sú zjavne kladné, preto celý výraz pre $p_1 - p_2$ bude záporný. Čiže $p_1 < p_2$. Čiže väčší tlak budeme mať v druhom, premiešanom prípade.

Pozrime sa na to celé ešte raz, tentoraz sedliackym rozumom. Tlak na dne banky je všade rovnaký, pozrime sa teda na miesta v strede dna, nad ktorým je len kvapalina a potom vzduch – kde nezavadzajú steny banky. V nepremiešanom prípade je nad týmito miestami nejaký stĺpec vody a oleja. Keď kvapaliny v banke premiešame, do tohto stĺpca sa homogénne premieša všetka kvapalina z nádoby. Všimnime si, že v miestach "mimo tohto stĺpca", t.j. na okrajoch banky, bolo pred premiešaním viac vody ako oleja – pretože voda je na spodku a teda je jej v okrajových častiach nádoby "oveľa viac" ako oleja. Takže premiešaním sa do stredového stĺpca dostane viac vody ako tam bolo pretým. No a keďže je voda hustejšia ako olej, tlak nám premiešaním stúpne.

Takýchto “sedliackych” resp. “bezvzorcových” úvah sa dalo vymyslieť viac, a ak boli korektné a správne, dostali s (našou) radosťou (že nemusíme kontrolovať húfy rovníc) 5 bodov.

Ešte jedna poznámka na koniec. Viacerí z vás sa nechali zviesť vzorcom $p = F/S$ pre tlak. Tento vzorec je nepochybne správny, ale analýza pôsobiacich síl je už zložitejšia. Okrem tiažovej sily kvapaliny tu totiž pôsobia aj kolmé sily od stien banky (pôsobiace na kvapalinu a prenášajúce sa pomocou nej na dno). Tieto sily pôsobia vždy a v každej nádobe, vo valcovej sa však na ne vždy vďačne zabudne, keďže pôsobia iba vodorovne a vzájomne sa vyrušia. Teraz však pôsobia aj smerom dole a prispievajú k tlaku kvapaliny na dno. Veľmi pofidérne povedané, premiešaním vrstiev sa do vyšších častí nádoby dostane viac hustejšej kvapaliny (vody), čím stúpne celkový tlak na bočné steny nádoby, čím zároveň stúpne sila od stien na kvapalinu, čím stúpne aj tlak na dne nádoby. Bodka.

---

**A-1.3 Reťaz** (opravoval Dzoni, vzorák Durko)

*Fajo sa rozhodol odvážiť si svoju obľúbenú reťaz. Na zem položil najlepšiu a najmodernejšiu váhu, akú v celom ústave našiel, chytil reťaz za jeden koniec tak, že sa druhým visiacim koncom akurát dotýkala váhy, a pustil ju. Fajo stihol zaregistrovať, že najväčšia hmotnosť, akú počas celého pádu váha ukazovala, bola 6 kg – potom sa váha urazila a odmietla sa zúčastňovať pri takýchto slaboduchých experimentoch. Zistite skutočnú hmotnosť reťaze*

Fajo má rád reťaze a často sa s nimi hrá. Všetko je to otázkou výkladu. Ak bude výklad vo Fajovom železiarstve krásny, Fajo určite bude spokojný. Aspoň tak, ako zvykne svokra byť. Ale svokru nikto nemá rád. A preto na ňu Fajo použije reťaz. Pred tým si ju ale zváži...

Najprv si vyjasnime, čo sa stane, keď na váhu hodíme dačo tak dokonale sféricky symetrické, ako napríklad Faja. Čím ťažšieho (sféricky symetrickejšieho) Faja tam hodím, tým väčšiu výchylku na váhe zaregistrujem. To je jasné. Ale hĺbavej duši nemôže ujsť fakt, že ak tam Faja šmarím rýchlostou rozvášneného orangutana, tak isto nameriam výchylku neporovnateľne väčšiu ako keď ho tam položím sťa trojsekundové bábä. Z tohoto nenáročného experimentu môžeme dôjsť k záveru, že práve hybnosť je tá veličina ktorá zaváži, a nie je to hybnosť ale *zmena* hybnosti za čas. S toho dochádzame k prvému poznatku zhmotnenému do tejto rovnice:

$$F_{váha} = F_{kusu} + \frac{\Delta p_{retaz}}{\Delta t}.$$

$F_{váha}$ je sila pôsobiaca na váhu, $F_{kusu}$ je tiaž kusu reťaze ktorý už je na váhe a $\Delta p_{retaz}$ je zmena hybnosti reťaze ktorá sa udeje ze časový okamih $\Delta t$.

Poďme sa teraz venovať druhému členu. V nejakom čase dopadne na váhu kúsok reťaze a ten zmení svoju hybnosť, zastane. Predpokladáme, že pokiaľ je kúsok dostatočne malý, tak dopadá po celý čas konštantnou rýchlosťou $v$. Zmena hybnosti je potom

$$\Delta p_{retaz} = \Delta x \rho v$$

kde $\Delta x$ je dĺžka dopadnuvšieho kúsku, a $v$ jeho rýchlosť, $\rho$ je dĺžková hustota ale na ňu sa môžeme vykašľať, takže odteraz $\rho = 1$ kg/m. Ďalej si stačí uvedomiť že, $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v$ a potom $\frac{\Delta p_{retaz}}{\Delta t} = v^2$.

Z rovnomerne zrýchleného pohybu máme

$$x = \frac{1}{2}gt^2 \text{ a } v = gt \Rightarrow v = \sqrt{2xg},$$

kde $x$ je dráha, akú urazil koniec reťaze, prípadne dĺžka reťaze, ktorá už spočíva na váhe.

Čo sa týka prvého člena ($\rho = 1$) $\qquad F_{kusu} = xg$.

Keď to dáme celé dokopy dostávame, že

$$F_{váha} = xg + v^2 = xg + 2xg = 3xg.$$

To je maximálne pre $x = l$, $l$ je dĺžka reťaze. A teda

$$F_{\max} = 6g = 3gl \Rightarrow l = 2 \qquad (\rho = 1).$$

Reťaz teda váži dva kilogramy. A dosť, čo ak sa Fajo začne hrať s reťazcami? Napríklad obchodnými?

---

**A-1.4 Lúč kráľovský** (vzorák Tomáš, opravoval Jakub)

*Predstavte si lúč svetla v tvare – (toto je prierez lúča, lúč sa pohybuje kolmo na papier resp. obrazovku). Takýto lúč vznikne napríklad použitím úzkej vodorovnej štrbiny na klasickú baterku. Podobne, použitím zvislej štrbiny dostávame lúč* **|**.

a) *vymyslite optickú sústavu, ktorá zmení – lúč na | (šírka prvého lúča by sa mala rovnať výške druhého)*
b) *vymyslite optickú sústavu, ktorá otočí hocijaký lúč, ktorý do nej príde o 90°, teda napríklad z lúča / sa stane \.*

V prvom rade, k zadaniu. Aby malo nejaký zmysel, lúč po transformácii by sa mal pohybovať tým istým smerom ako pred ňou. Ťažko ma presvedčíte, že ste z lúča – spravili | ,pokiaľ jeden sa pohybuje vodorovne a druhý zvislo. Body sme za to však väčšinou nestrhávali, najmä pokiaľ šlo túto chybu relatívne jednoducho opraviť.

Obidve konštrukcie spravíme pomocou niekoľkých rovinných zrkadiel. Rád by som tento príklad obohatil nejakým inšpiratívnym obrázkom, avšak už so samotnej predstavy, že mám kresliť niečo trojrozmerné, sa mi zdupčievajú všetky chlpy, takže, budete musieť naštartovať svoju predstavivosť a predstaviť si klasickú súradnicovú sústavu. Teraz sa musíme dohodnúť, ako budeme popisovať rovinné zrkadlá. Asi najjednoduchší popis je popis normálovým vektorom, t.j. vektorom kolmým na rovinu zrkadla. Znamená to asi toľko, že keď uvidíte napr. vektor (0,0,1), t.j. vektor ktorý trčí dohora (ak si predstavujete súradnice tak isto ako ja), tak tento vektor kóduje zrkadlo, ktoré sa nachádza v rovine x,y (teda, v rovine kolmej na daný vektor). Samozrejme, nevieme presne, kde v priestore sa zrkadlo nachádza. Toto však bude jasné z kontextu, zrkadlo sa bude nachádzať presne tam, kde očakávame lúč – aby vôbec došlo k odrazu.

Predstavme si teraz lúč, ktorý putuje v smere osi *x*. (môže to byť lúč s prierezom – alebo | ). Teraz lúč postupne narazí na zrkadlo (1,0,1), čo ho odrazí v smere osi z, ďalej (0,1, -1) ho odrazí v smere *y* a nakoniec (-1,-1,0) zase v smere osi *x*. Keď prevediete tzv. dôkaz mávaním rukami, ľahko sa presvedčíte, že táto sústava nám ozaj transformuje oba lúče tak, ako treba.

V ďalšom texte budeme dosť používať také, že lúč smerujúci dohora, doprava.. samozrejme, nemyslí sa tým, smer, ktorým sa pohybuje lúč, ale orientácia štrbiny. Teda, lúč smerom hore, znamená lúč, ktorý sa šíri napríklad pozdĺž osi x, ale má prierez v tvare |.

Keď sme vyriešili prvú časť úlohy a vzniká prirodzená otázka, či takáto sústava nevyrieši aj druhú časť úlohy. Na toto budeme potrebovať zaviesť orientáciu lúčov. To znamená, že napríklad lúč | môžeme chápať ako lúč hore alebo dole. Orientáciu si môžme predstaviť tak, že na príslušný koniec | dokreslíme šípku. Teraz môžeme spraviť klasickú fintu: vyberieme si dve konkrétne šípky (konkrétne, doprava a hore) a všetky ostatné budeme rozkladať na súčty nejakých násobkov týchto dvoch šípiek. Je to presne to isté, ako keby ste chceli silu rozložiť na jej horizontálnu a vertikálnu zložku. Hocijaká sústava, ktorá bude správne otáčať vybrané šípky (doprava a hore) musí potom správne otáčať aj hocijakú inú šípku, pretože táto vznikla ich zložením. Toto tvrdenie ľahko dokážete, ak uveríte pár základným tvrdeniam o zrkadlách, konkrétne, že zrkadlá nemenia dĺžky zobrazovaných úsečiek, ani uhly nimi zovreté.

Kde je teda problém? Keď si ešte raz zamávate rukami, ale tentoraz sa k lúčom budete správať ako k orientovaným živočíchom (teda nebudete si predstavovať lúč |, ale konkrétne lúč hore) zistíte, že popísaná sústava transformuje lúč doprava na lúč hore a lúč hore na lúč doprava. Jedná sa teda o transformáciu $f(\alpha) = 90° - \alpha$, kde $\alpha$ je uhol pootočenia lúča, pričom lúč chápeme aj s orientáciou ($\alpha = 0°$ je hore, $\alpha = 90°$ doprava). Toto zobrazenie teda len náhodou robí to čo má, pre dva konkrétne lúče.

Čo teda s tým? Vyššie popísaná transformácia má jednu zaujímavú vlastnosť, lúč s $\alpha = 45°$ a tiež $\alpha = 135°$ (v obidvoch prípadoch sa jedná o lúč / ) necháva na mieste. Pootočením celej sústavy viem teda spraviť napríklad transformáciu, ktorá bude nechávať na mieste lúč |, t.j. $g(\alpha) = -\alpha$. No a verte či nie, zložením transformácií $g$ a $f$ v správnom poradí dostávame transformáciu $h(\alpha) = 90° + \alpha$, čo je presne hľadané pootočenie. Na vyriešenie druhej časti úlohy teda potrebujeme celkovo 6 zrkadiel, hoci niektorým z vás sa tento počet podarilo zredukovať na 4. Ak sa ma pýtate, ako si to celé predstaviť, sklamem vás. V mojom skromnom pohľade, našli sme nejaké zobrazenia (konkrétne zobrazenia, ktoré $\alpha$ zobrazia na čosi $-\alpha$) a vhodne z nich vyskladali to, čo treba, ďalšie snahy o predstavu toho systému nemajú prílišný zmysel. Ak sa na nič nepýtate, ale rovno si to celé predstaviť viete, ste zrelí na drsnú kariéru v oblasti vedy, prípadne autizmu.