FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 3. série
B – kategória (mladší)
22. ročník
zimný semester
školský rok 2006/2007

www.fks.sk

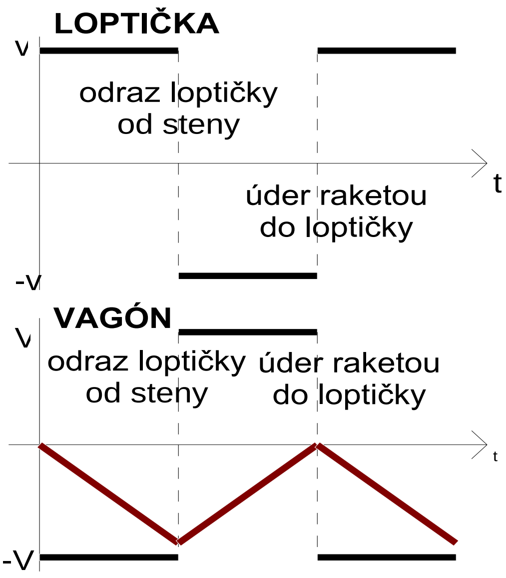
FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@gmail.com
info@fks.sk

B–3.1 Squash (opravoval Marián)

Predstavte si, že stojíte v železničnom vagóne, ktorý je odstavený na stanici, avšak nie zabrzdený. Z dlhej chvíle vytiahnete squashovú raketu, loptičku a začnete si "pinkať" o stenu. Popíšte, ako sa bude pohybovať vagón počas tejto skvelej duchpovznášajúcej hry. O tom, že vagóny ŽSR sú spravidla dokonale pevné, všetky súčiastky dokonale naolejované (nulové trenie) atď, atď... snáď ani nemusíme polemizovať.

Ahojte. Kľúčovým v tomto príklade je všimnúť si, že výsledná sila, ktorá zvonka pôsobí na vagón a všetko v ňom, je nulová. Preto jej ťažisko nemôže zmeniť svoju polohu. Ak sa aj predmety vo vnútri budú pohybovať, bude to iba tak, aby sa výsledné ťažisko nehýbalo.

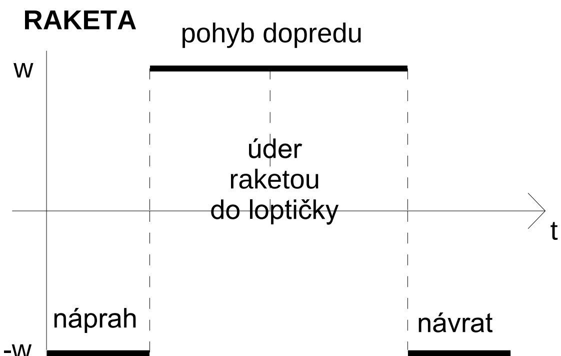
Čo sa teda pri pinkaní pohybuje? Samozrejme loptička a raketa spolu s mojou rukou. Sledujme najskôr pohyb loptičky a tým spôsobený pohyb vagóna. Ak sa loptička pohybuje rýchlosťou v, musí sa vagón pohybovať rýchlosťou $V = mv / M$ opačným smerom, aby ťažisko stálo (ak nie je jasné, premyslieť). Pozor, obe rýchlosti sú vzhľadom na zem! (V našom prípade bude rýchlosť vagóna oveľa menšia, ako rýchlosť loptičky, takže to je skoro to isté, ako rýchlosť vzhľadom na vagón.) Ak vám to pripomína zákon zachovania hybnosti, nebude to náhoda (aj toto premyslieť). Loptička narazí na stenu vagóna a bude sa pohybovať rýchlosťou $-v$, vagónu neostane nič iné, ako ísť rýchlosťou $-V$. To dostaneme aj vtedy, keď si náraz loptičky o stenu popíšeme dokonale pružnou zrážkou dvoch telies. Odporúčam vyskúšať. Potom loptička letí k nám, my do nej udrieme raketou a ona letí späť k stene.



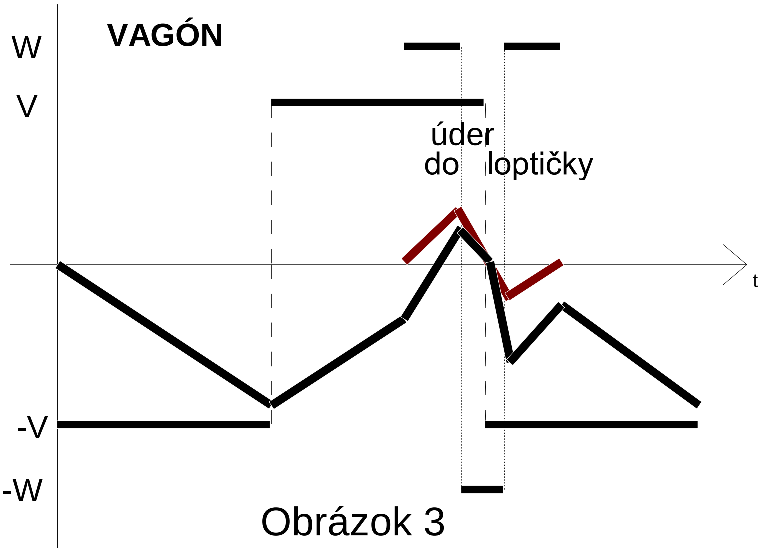
Obrázok 1

Nakoniec to bude vyzerať tak, že rýchlosť vagóna v čase bude vyzerať asi ako na obrázku 1. Tam je rovno zakreslená aj jeho poloha v čase. Vidíme teda, že vagón sa bude posúvať dozadu a potom naspäť na pôvodné miesto.

Čo s tým spraví pohyb ruky? Úder do loptičky je technicky veľmi náročná činnosť. Pozostáva z náprahu raketou smerom dozadu, pohybom smerom dopredu, dotiahnutím úderu a návratom rakety k telu. Zjednodušene bude graf rýchlosti rakety počas úderu vyzerať ako na obrázku 2. Ak má raketa s rukou hmotnosť m_0, potom bude veľkosť rýchlosti vagóna, ktorú spôsobí pohyb rukou $W = m_0 w / M$. Zakreslíme si túto rýchlosť a patričnú výchylku do grafu pre polohu vagóna. Uvedomíme si pri tom, že hybnosť ruky pri údere bude aj pri normálnom



Obrázok 2



Obrázok 3

„pinkaní“ väčšia ako hybnosť loptičky počas letu, takže $W > V$, závisí to však od typu loptičky (t.j. pružnosti zrážky s raketou) a nálady hráča. Každopádne, bude to vyzerať asi ako na obrázku 3. Tento obrázok je aj výsledkom našich úvah nakoľko popisuje pohyb vagóna pri našom svojskom krátení voľného času.

Na záver niekoľko úvah. V prvom rade je dobré si uvedomiť, že rýchlosť V bude v skutočnosti veeeľmi malička, nakoľko pomer hmotností loptičky a vagóna je asi 50 g / 10000 kg = 1 / 1 000 000, čo pri lopte letiacej rýchlosťou 100 km/h je asi 0,03 mm/s. Hmotnosť ruky je síce na úrovni kilogramov, jej rýchlosť bude ale niekoľko krát menšia, takže rýchlosť W bude na úrovni milimetrov za sekundu. No a pohyb raketou pri údere nie je vôbec taký jednoduchý, raketa spomaľuje a zrýchľuje postupne, ruka nie je jediné, čo sa hýbe atď. Takže v momente úderu bude výchylka zvlnená, ale pravdepodobne nie tak úhľadne ako to vyšlo nám. A samozrejme, počas pinkania si aj sem tam podbehneme a tak, čo prinesie ďalšie, náhodne rozmiestnené zvlnenia.

Pri opravovaní som od vás vyžadoval iba minimum znalostí o tom, ako presne ten squash funguje. Stačilo správane popísať pohyb lopty a nezabudnúť nejak rozumne zarátať pohyb ruky pri údere. Tiež som chcel, aby ste spomenuli, že v skutočnosti ide o veľmi malé výchylky. Na úplný záver by som sa chcel poďakovať Jurovi za vysvetlenie, ako presne funguje squashová technika a squash vôbec. Vyzerá to byť zábava, asi si to skúsim.

B–3.2 Výmena stráží (opravoval Martin, vzorák Tomáš)

Predstavte si dokonalý ultramoderný dom, ktorý si dal postaviť Grino Zelený. Kvôli svojmu ekologickému presvedčeniu je dom dokonale tepelne zaizolovaný. Po pár týždňoch však sranda skončila. Obrovský smrad, ktorý sa v hermeticky (vzduchotesne) uzavretom dome nahromadil, donútil nešťastného majiteľa, aby zľavil zo svojich ekologických požiadaviek a do domu nainštaloval výmenník vzduchu. Výmenník má za úlohu zabezpečovať výmenu vzduchu medzi vnútrajškom a vonkajškom. Boli by sme však radi, keby vnútorný vzduch, predtým než ho definitívne vypustíme von, odovzdal čo najväčšie percento svojho tepla čerstvému prichádzajúcemu vzduchu (samozrejme, vzduchy sa nesmú premiešať) (predpokladáme, že teplota vonku je nižšia ako vnútri). Ako navrhnúť čo najefektívnejší výmenník a koľko percent tepla je (teoreticky) možné týmto spôsobom "zachrániť"?

Tento príklad v sebe – aspoň na prvý pohľad – nechával veľa otvorených otázok. Chceme vyvetrať len raz, alebo chceme nájsť spôsob vetrania, ktorý sa bude používať nafurt? Bude Grinovi až tak vadiť, keď mu na chvíľu v izbe spravíme vákuum? Čo presne je v zadaní spomínaná účinnosť? Nemohol by obyvateľ domu zbúrať jednu stenu, zabezpečiť tak vetranie navždy a potom sa zohrievať pohľadom na akvárium?

S trochou tvorivého ducha ľahko definujeme účinnosť: Označme teploty vonku T_v, dnu T_d. Vonkajší vzduch vojde do výmenníka, kde sa ohreje na tepotu $T_v + \Delta T$.[1] Celkový rozdiel teplôt je $T_d - T_v$, a zvyšok medzi ΔT a $T_d - T_v$ musíme doohrievať kúrením. Účinnosť môžeme rozumne definovať napríklad ako podiel $\Delta T / (T_d - T_v)$. Tento vzorec výborne popisuje

---

[1] Zo zákona zachovania energie a z predpokladu, že vzduch pri ohrievaní mení svoj objem iba minimálne ľahko dostaneme, že vnútorný vzduch bude vychádzať z výmenníka s teplotou $T_d - \Delta T$

intuitívne chápanú účinnosť. Pokiaľ ako výmenník použijeme otvorené okno, dostaneme účinnosť blízku nule. Ak vzduchy (čerstvý horský a smradľavý obývačkový) na chvíľu naženieme do nádoby, ktorá je rozdelená na polovicu tak, aby sa nepremiešali, ale aby došlo k tepelnej výmene, ich teploty sa spriemerujú a my máme účinnosť 0,5. Najlepšie možné zákonu zachovania energie neodporujúce riešenie by sa dosiahlo tak, že vzduchy si „vymenia" teploty a doohrievať nemusíme nič – účinnosť 1 (100%). Ukážeme, že takéto riešenie je možné.

Všetko čo stačí, je zobrať dve dlhé duté rúrky s rôznymi polomermi a užšiu vložiť do širšej. Výmena vzduchov bude prebiehať takouto srandou, jeden vzduch pôjde menšou rúrkou, druhý väčšou (teda tým, čo z nej ostane) a to tak, aby vzduchy išli smerom **oproti sebe**. Pritom počas celej dĺžky rúry bude prebiehať tepelná výmena medzi rúrami. Túto teplotnú výmenu má zmysel chápať lokálne, teda, pýtať sa, koľko tepla (na jednotku plochy) si vzduchy vymieňajú v danom mieste. Jej veľkosť bude priamo úmerná rozdielu teplôt v danom bode (pri ustálenom stave). Teraz si dokážeme, že takéto zariadenie dostatočnej dĺžky naozaj vymení vzduchom teplotu. Zamerajme sa na nejaký konkrétny úsek dvojrúry. Vzduchy doň vstupujú s teplotami T_1, T_2 ($T_1 > T_2$) a opúšťajú ho s teplotami $T_2 + \Delta$, $T_1 - \Delta$. To znamená, že rozdiel teplôt vzduchov na jednom konci (vduchy idú oproti!) je $(T_1 - \Delta) - T_2$, na druhom konci $T_1 - (T_2 + \Delta)$. Tieto hodnoty sú rovnaké, čo znamená, že rýchlosť tepelnej výmeny na obidvoch koncoch uvažovaného úseku je rovnaká. A keďže úvahu je možné zopakovať pre hocijaký úsek rúry, vieme, že teplotná výmena v **celej dvojrúre je rovnako rýchla.** Celkové množstvo tepla, ktoré si vzduchy vymenia, je zhora limitované teplotným rozdielom $T_d - T_v$ (druhá veta termodynamická vylučuje účinnosť výmenníka väčšiu ako 1) a preto pri veľmi dlhej rúre bude tepelná výmena veľmi pomalá. Inými slovami, keď sa zameriame na hocijaký jeden meter veľmi dlhej rúry, teplotná výmena na ňom bude veľmi malá, t.j. rozdiel teplôt musí byť veľmi malý. Pre konce rúr to znamená, že vzduch z vnútra sa musí ochladiť na teplotu T_v a vzduch zvonku naopak oteplit na T_d, čo je presne to, čo sme chceli ukázať. QED.

To je všetko pekné, a ako na to mám prísť? Spýta sa (menovať nebudem) investigatívny duch ukrytý v investigatívnom riešiteľovi FKS. Asi každého napadne 50% riešenie spomínané v druhom odstavci. Prúdenie vzduchov v ňom by sa schematicky dalo popísať takto:

VOL → V → DNU; DNU → V → VOL[2].

Ekonomika v nás sa však búri, ako môžeme púšťať von vzduch, ktorý ešte obsahuje 50% získateľného tepla? Celé zariadenie by sa dalo vylepšiť pridaním ďalšieho výmenníka:

VOL → V_1 → V_2 → DNU; DNU → V_2 → V_1 → VOL.

Prečo však zastaviť tu? Pridaním ďalších výmenníkov sa predsa zariadenie ešte zefektívni.. Naša dvojrúra nie je nakoniec nič iné, ako nekonečne veľa nekonečne malých výmenníkov umiestnených tesne za seba. Šikovné, že. Keby človek nevie, že sa jedná o obyčajnú dvojrúru, povedal by si, že čosi také neexistuje. Priamočiarejšie (ale podľa mňa škaredšie) riešenie ako naše, by bolo zobrať takúto sústavu nekonečne veľa výmenníkov a pomocou limít ju porátať, čo niektorí z vás aj spravili (aj keď to nie je jednoduché). Na záver dodávam že výmenníky fungujúce na podobnom princípe sa do niektorých moderných domov skutočne inštalujú... nech žije modrozelená planéta.

---

[2] VOL = Vzduch Oravských Lesov, V = Výmenník, konkrétne, jedna nádoba, kde prebehne tepelná ale nie pachová výmena.

B–3.3 Ako sa Marián zoznámil s Cecíliou (opravoval RoboK)

Náš Marián má vzduchovku. Keďže nie je sadista a nikdy ním nebol, tak si jedno krásne popoludnie postavil na múrik plechovku od ananásu, samozrejme, že prázdnu, postavil sa obďaleč, namieril a strelil. Náboj sa predieral vzduchom rýchlosťou 240 m/s , šuchol o plechovku, tá sa pokrútila, pokývala, no zostala na múriku. "Tak a teraz," povedal si Marián, "do tretice všetko dobré." A vystrelil druhý raz. Vodorovne letiaci 6 gramový náboj trafil 80 gramovú plechovku, prestrelil jej obe steny a spadol 36 m za múrik. No ale plechovku, tú chúďa Cecília schytala, tak ako sa na tráve opaľovala, presne medzi lopatky. Mariánova hlava vykukla spoza múrika. 'Koľko metrov tá stvora leží za dvojmetrovým múrikom, že som ju nevidel?' Usmial sa na ňu: "Hups..."

Zdravím všetkých príležitostných ostrostrelcov a dúfam, že vždy triafate len a len do čierneho. A keď nie, aj nehody majú svoju inšpiračnú hodnotu, ako v prípade Mariána. Že, Marián?☺ Táák, keď sme si objasnili spoločenské pozadie príkladu, s chuťou sa vrhnime na jeho fyzikálnu stránku. Stručne a jasne možno myšlienku vyjadriť v dvoch slovných spojeniach: nepružná zrážka a vodorovný vrh. A niekoľko (prirodzených) zanedbaní, tak to už chodí ...

Začnime teda výstrelom, ktorý celú príhodu Mariána a Cecílie má na svedomí. Náboj výstrelom získal kinetickú energiu a hybnosť. Pri priestrele plechovky časť svojej kinetickej energie stráca (premení sa najmä na teplo) a zvyšná časť sa „prerozdelí“ medzi vodorovným vrhom padajúcu plechovku a náboj, t.j. kinetická energia našej sústavy náboj – plechovka sa nezachováva, teda ide o nepružnú zrážku. A teraz pár sľubovaných zanedbaní: dráhu vystreleného náboja považujem do zrážky za priamočiaru, neuvažujem odpor vzduchu a obe telesá – náboj a plechovku – budem považovať za hmotné body (ak by som tak nespravil a považoval ich za tuhé telesá, príklad by sa mohol veľmi ľahko zosunúť do „riadneho humusu“ ☺), ktoré budú po čelnej zrážke padať z múrika pohybom nazývaným vodorovný vrh. Uff ... Dosť bolo obkecu, poďme písmenkovať.

Označme si m hmotnosť náboja, M hmotnosť plechovky, V rýchlosť vystreleného náboja, S vzdialenosť bodu dopadu náboja od múrika, h výšku múrika, v rýchlosť plechovky získanú po zrážke, V' rýchlosť náboja po zrážke s nábojom a konečne s hľadanú vzdialenosť múrika od Cecíliinej hlávky. Uznávam, posledné tri riadky nevyzerajú prívetivo, ale keďže v zadaní boli uvedené len číselné hodnoty týchto veličín bez ich „písmenkového“ označenia, pre ďalšie naše úvahy je dohoda o označení nevyhnutná.

Pri nepružnej zrážke, ako už bolo spomenuté, sa nezachováva kinetická energia sústavy náboj – plechovka. Čo sa však zachová, bude hybnosť. Podľa nášho označenia bude teda platiť rovnosť medzi hybnosťou vystreleného náboja a hybnosťou plechovky a náboja v malom okamihu po zrážke, čo môžeme zapísať nasledovne:

$$mV = mV' + Mv \qquad (1)$$

Zo zadania poznáme hodnoty pre hmotnosti m, M a rýchlosť V. Nepoznáme rýchlosti po zrážke V', v. Tie však nie je problém získať zo vzťahov platných pre vodorovný vrh. Pre vzdialenosť dopadu náboja od múrika, na ktorom je položená plechovka a podobne aj pre vzdialenosť Cecíliinej hlavy, na ktorej plechovka pristála, platí:

$$S = V't \qquad (2)$$

$$s = vt, \qquad (3)$$

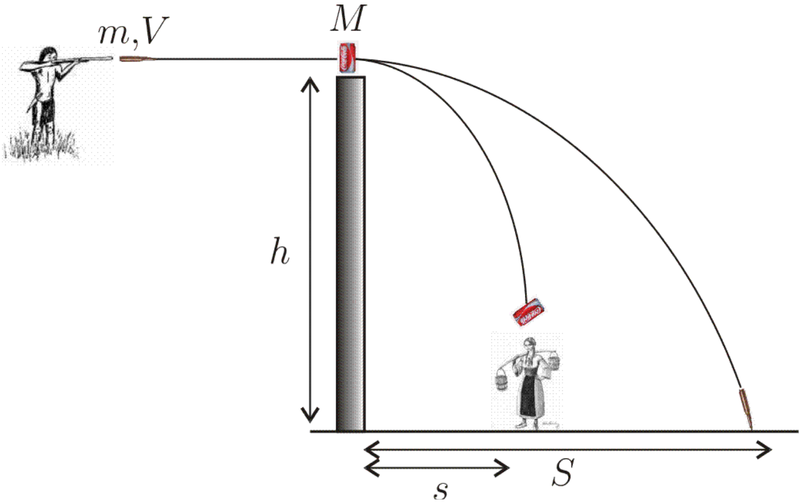
kde t je čas pádu náboja a plechovky, získam ho zo vzťahu pre voľný pád plechovky a náboja z múrika nasledovne:

$$h = gt^2 / 2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (4)$$

Postupným dosadením vzťahu (4) do vzorcov (2), (3) možno zistiť, akou rýchlosťou V' sa pohyboval náboj po prerazení plechovky. Túto rýchlosť

$$V' = S\sqrt{\frac{g}{2h}} \qquad (5)$$

spolu so vzťahom (3) možno dosadiť do zákona zachovania hybnosti (1). Ďalšie úpravy sú už len vecou technickej zručnosti. Záverom nášho snaženia je výsledný vzorec pre neznámu vzdialenosť nešťastnice Cecílie za múrikom:



$$s = \frac{m}{M}\left(V\sqrt{\frac{g}{2h}} - S\right) \quad (6)$$

Pre zadané hodnoty $m = 6$g, $M = 80$g, $V' = 240$m/s, $S = 36$ m, $h = 2$m zistíme, že Cecília sa pred Mariánom ukryla vo vzdialenosti približne 8,8 metra od múrika s položenou plechovkou. Napriek tomu však maskovanie nezaúčinkovalo ... ☺

B–3.4 Povedzžemi (opravoval Robo A., vzorák Tomáš)

Keď sa pozrieme do zrkadla, vidíme, že máme vymenenú ľavú ruku s pravou. Čo to presne znamená? Keď sa pozriem na svoj obraz v zrkadle a zdvihnem ľavú ruku, obraz zdvihne ruku, ktorá je (z môjho pohľadu) vľavo. Ak však bude oproti mne stáť Jožko M. pri prosbe "zdvihni ľavú ruku" zdvihne (z môjho pohľadu) ruku vpravo. Ľahko teda prídeme k záveru, že obraz sa podobá na Jožka až na to, že je trochu krajší a má vymenené strany. Zaujímavé ale je, že Jožko má síce vymenené vľavo – vpravo, ale nie hore – dole. Prečo je to tak? Ako neštudované a anatómie neznalé zrkadlo vie, ktorý rozmer má "preklopiť" a ktorý nie?

Tento príklad sa dal veľmi jednoducho a zároveň veľmi kvalitne zmrviť. Hneď vám ukážem ako. Stačilo, ak ste si ako hlavnú tézu vo vašom riešení zvolili niektorú z nasledujúcich odpovedí. Takže, odpoveď **nemá** vyzerať nasledovne:

- Vymenenie strán má na svedomí to, že oči sú v horizontálnej rodine.
- Ľavo-pravo sa vymení preto, lebo tento smer je kolmý na gravitáciu.
- Celé je to spôsobené relatívnosťou toho, čo je ľavá a pravá strana.
- Obraz nájdeme pomocou lúčov, viď obr. Evidentne má vymenené strany ale nie hore-dole.
- V skutočnosti obraz nie je preklopený, ale rovinne symetrický a všetko je to teda iba zavádzanie zadávateľmi príkladu.

Prečo sú tieto odpovede zlé? Prvé tri sú koniny, nechám vás rozmyslieť si prečo. Ďalšie dve veci sú pravdivé, ale absolútne to nie je odpoveď na otázku zo zadania. Tá je položená vcelku jasne. Ak poslednú vetu zadania beriem ako jemnú iróniu a dohodneme sa, že zrkadlo netuší kde je sever, potrebujeme na vysvetlenie nájsť nejakú **vlastnosť, ktorá odlišuje smer hore-dole od ľavo-pravo**. Z tohto pohľadu sú prvé dve z uvedených zlých odpovedí dobré a až na to, že sú úplne zlé, úprimne sa snažia riešiť nastolený problém.

No a ako to teda naozaj je? Dovoľte mi predstaviť vám svojho spolupracovníka Joža. Jožo je nátura priama, naivná a vie sa úprimne čudovať, pokiaľ sa dovtípi, že je čas na čudovanie. Aby sme si ešte raz navodili problém, postavme sa pred zrkadlo a poprosme: „Jožko, mohol by si sa postaviť niekam hen, nech si ťa viem porovnať so svojím obrazom v zrkadle.. “ Jožo sa dostane do príslušnej vzdialenosti (v takto abstraknej diskusii pre nás múry nie sú relevantným problémom) a kukne na mňa: „Ňáááá.. A ako presne sa mám postaviť?“ A presne v tomto to je. Ak sa Jožo postaví „oproti“ mne, bude mať vymenené ľavo-pravo. Ak spraví stojku, ľavo-pravo bude sedieť[3], ale hore-dole už nie. Ak sa postaví zadkom ku mne, nebude sedieť predok-zadok (v porovnaní s obrazom), ale všetko ostatné hej. Po chvíle experimentovania zistíme, že Jožko sa nemôže postaviť tak, aby naraz sedelo všetko. Pokiaľ sa Jozef snaží, aby sa môjmu obrazu čo najviac podobal, vyberie si prvú variantu, t.j. postaví sa proti mne a vymenené bude ľavo-pravo.

V našej mysli obraz v zrkadle interpretujeme ako snaživého Joža, ktorý sa snaží „tomutam“ čo najviac podobať. A keďže málokto si zmýli nohu s hlavou, kdežto ruky sú na nerozoznanie, bude mať práve tento rozmer Jožko pretočený. To, čo teda odlišuje pravo-ľavý smer od hore-dole je **človečia pravo-ľavá symetria**. Skutočne, neviete rozhodnúť, ktoré strany má v zrkadle vymenené zguľbaný kus kameňa. Zaujímavé je tiež predstaviť si ľudí, ktorí by boli hore-dole symetrickí ale ľavo-pravo nie (napríklad normálni „pootočení“ ľudia, ktorí majú upažené ruky, chodia po prstoch pravej ruky, ľavá ruka je najvyššia časť tela, hlava, nohy sú vľavo, vpravo). Takýto jedinec bude mať v zrkadle vymenené práve hore a dole.

B–3.5 Námornícka matrioška (opravovala Bea, vzorák Bea a Janka)

Majme dutý valec bez hornej podstavy, pre názornosť ho nazveme 'sud'. Napustíme doň trochu vody a položíme do neho menší sud tak, aby vo vnútri plával. Do menšieho suda položíme ešte menší sud. Napustíme trochu vody.. Celý proces opakujeme n-krát až nakoniec končíme s malým súdočkom. Teraz pomocou môjho obľúbeného prístroja DPZ (tzv. dômyselne premyslené zariadenie) zmeriame vzdialenosti podstáv vonkajšieho suda a súdočku. Ako sa zmení táto vzdialenosť, keď do súdočku dopustíme malé množstvo vody V? Sudy v sebe po celý čas bezkontaktne plávajú.

Akým postupom to ideme robiť? Zoberieme si najprv dva súdočky. Každému je jasné, že hrúbka stien tu nehrá žiadnu úlohu. Preto budeme uvažovať len súdky s nejakým objemom a hmotnosťou. A nechcem vás napínať, ale ani tá hmotnosť nie je podstatná. Keď použijeme Archimedov zákon (táto úvaha je za 0,5 boda) pre sústavu s prázdnym aj naliatym horným súdočkom (použijeme preň index 1 a čím budú súdočky väčšie, tým budú mať väčší index) po úprave dostaneme vzorce:

$$V_{p1} = \frac{m_1}{\rho},$$

$$V'_{p1} = \frac{m_1}{\rho} + V,$$

kde V_{p1} je ponorený objem druhého suda pred doliatím vod(k)y a V'_{p1} je objem ponorený po doliatí vod(k)y objemu V.

Keď si obzriete obrázok, všimnite si, že podstava poklesla o h_{p1} ale hladina sa zvýšila o h_{z1}. Toto spôsobila zmena objemu(a teda aj hĺbky) ponorenej časti horného súdka:

$$\frac{V'_{p1} - V_{p1}}{S_1} = h_{p1} + h_{z1}$$

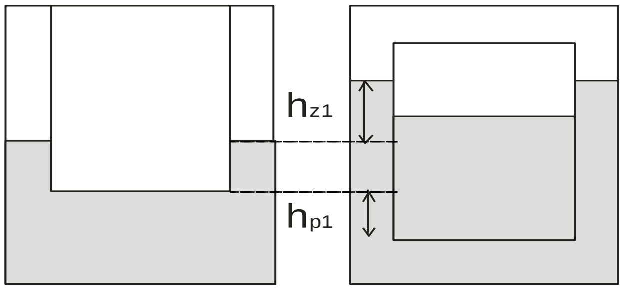
kde S_1 je obsah podstavy 1.súdka a h_{z1} vyjadríme:

$$h_z(S_2 - S_1) = h_{p1} S_1,$$

$$h_z = \frac{h_{p1} S_1}{S_2 - S_1},$$

keď si to všetko spojíme (a my sme takí šikovní, že to spraviť vieme☺) dostávame:

[3] Čo to presne znamená, že nejaký smer sedí, nechám na tvorivého čitateľa.



$$h_{p1} = V'_{p1} - V_{p1} - h_z,$$

$$h_{p1} = \frac{V}{S_1 - S_2}.$$

Kto sa dostal sem, má 2 body, no my sme ctižiadostiví a 2 body nám nestačia. Bojujme teda ďalej.

Zoberiem si tieto dva súdky a vopchám ich do väčšieho 3. s vod(k)ou. Na začiatku zase zaznamenám do análov, kde sa prázdny horný súdok nachádza a keď do neho dolejem vodu, deje sa čosi obdobné ako v predchádzajúcom prípade. 1. súdok klesne o to isté h_{p1} a hladina stúpne o to isté h_{z1} čo predtým. Teraz ak sa pozrieme na 2. sud ako sa správa vzhľadom k 3., dá sa to opísať ako dej, pri ktorom nalejeme objem V, ktorý nalievame do 1. súdka, akoby sme naliali do 2. súdka. Celkový pokles h_p dostaneme ako súčet h_{p1} a h_{p2}. Tak zrátame h_p:

$$h_p = h_{p1} + h_{p2},$$

$$h_p = \left(\frac{V}{S_1} - \frac{V}{S_2}\right) + \left(\frac{V}{S_2} - \frac{V}{S_3}\right),$$

$$h_3 = \frac{V}{S_1} - \frac{V}{S_3}.$$

Vidíme, že 2.súdok naozaj nemal vplyv na zmenu polohy 1. súdka.
Teraz ak chceme spočítať zmenu hĺbky pre n súdkov, máme vzťah:

$$h_p = h_{p1} + h_{p2} + \ldots + h_{pn},$$

$$h_p = \left(\frac{V}{S_1} - \frac{V}{S_2}\right) + \left(\frac{V}{S_2} - \frac{V}{S_3}\right) + \ldots + \left(\frac{V}{S_{n-1}} - \frac{V}{S_n}\right),$$

$$h_p = \frac{V}{S_1} - \frac{V}{S_n}.$$

Keď to rozpíšeme, všetko sa tam vyžere okrem prvého a posledného člena, čo znie dosť veselo.
☺☺☺
A veselo bude aj keď budú darčeky a oni budú☺
Budú pod SMREKOM v obývačke☺
Aj kapustnica bude☺
A doma budem☺
Aj sneh bude☺
Nový rok☺
Voš☺

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 3. série
A – kategória (starší)
22. ročník
zimný semester
školský rok 2006/2007

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@gmail.com
www. fks **.sk**
info@fks.sk

A–3.1 Výmena stráží (opravoval Martin, vzorák Tomáš)

Predstavte si dokonalý ultramoderný dom, ktorý si dal postaviť Grino Zelený. Kvôli svojmu ekologickému presvedčeniu je dom dokonale tepelne zaizolovaný. Po pár týždňoch však sranda skončila. Obrovský smrad, ktorý sa v hermeticky (vzduchotesne) uzavretom dome nahromadil, donútil nešťastného majiteľa, aby zľavil zo svojich ekologických požiadaviek a do domu nainštaloval výmenník vzduchu. Výmenník má za úlohu zabezpečovať výmenu vzduchu medzi vnútrajškom a vonkajškom. Boli by sme však radi, keby vnútorný vzduch, predtým než ho definitívne vypustíme von, odovzdal čo najväčšie percento svojho tepla čerstvému prichádzajúcemu vzduchu (samozrejme, vzduchy sa nesmú premiešať) (predpokladáme, že teplota vonku je nižšia ako vnútri). Ako navrhnúť čo najefektívnejší výmenník a koľko percent tepla je (teoreticky) možné týmto spôsobom "zachrániť"?

Tento príklad v sebe – aspoň na prvý pohľad – nechával veľa otvorených otázok. Chceme vyvetrať len raz, alebo chceme nájsť spôsob vetrania, ktorý sa bude používať nafurt? Bude Grinovi až tak vadiť, keď mu na chvíľu v izbe spravíme vákuum? Čo presne je v zadaní spomínaná účinnosť? Nemohol by obyvateľ domu zbúrať jednu stenu, zabezpečiť tak vetranie navždy a potom sa zohrievať pohľadom na akvárium?

S trochou tvorivého ducha ľahko definujeme účinnosť: Označme teploty vonku T_v, dnu T_d. Vonkajší vzduch vojde do výmenníka, kde sa ohreje na tepotu $T_v + \Delta T$.[1] Celkový rozdiel teplôt je $T_d - T_v$, a zvyšok medzi ΔT a $T_d - T_v$ musíme doohrievať kúrením. Účinnosť môžeme rozumne definovať napríklad ako podiel $\Delta T / (T_d - T_v)$. Tento vzorec výborne popisuje intuitívne chápanú účinnosť. Pokiaľ ako výmenník použijeme otvorené okno, dostaneme účinnosť blízku nule. Ak vzduchy (čerstvý horský a smradľavý obývačkový) na chvíľu naženieme do nádoby, ktorá je rozdelená na polovicu tak, aby sa nepremiešali, ale aby došlo k tepelnej výmene, ich teploty sa spriemerujú a my máme účinnosť 0,5. Najlepšie možné zákonu zachovania energie neodporujúce riešenie by sa dosiahlo tak, že vzduchy si „vymenia“ teploty a doohrievať nemusíme nič – účinnosť 1 (100%). Ukážeme, že takéto riešenie je možné.

Všetko čo stačí, je zobrať dve dlhé duté rúrky s rôznymi polomermi a užšiu vložiť do širšej. Výmena vzduchov bude prebiehať takouto srandou, jeden vzduch pôjde menšou rúrkou, druhý väčšou (teda tým, čo z nej ostane) a to tak, aby vzduchy išli smerom **oproti sebe**. Pritom počas celej dĺžky rúry bude prebiehať tepelná výmena medzi rúrami. Túto teplotnú výmenu má zmysel chápať lokálne, teda, pýtať sa, koľko tepla (na jednotku plochy) si vzduchy vymieňajú v danom mieste. Jej veľkosť bude priamo úmerná rozdielu teplôt v danom bode (pri ustálenom stave). Teraz si dokážeme, že takéto zariadenie dostatočnej dĺžky naozaj vymení vzduchom teplotu. Zamerajme sa na nejaký konkrétny úsek dvojrúry. Vzduchy doň vstupujú s teplotami T_1, T_2 $(T_1 > T_2)$ a opúšťajú ho s teplotami $T_2 + \Delta$, $T_1 - \Delta$. To znamená, že rozdiel teplôt vzduchov na jednom konci (vduchy idú oproti!) je $(T_1 - \Delta) - T_2$, na druhom konci $T_1 - (T_2 + \Delta)$. Tieto hodnoty sú rovnaké, čo znamená, že rýchlosť tepelnej výmeny na obidvoch koncoch uvažovaného úseku je rovnaká. A keďže úvahu je možné zopakovať pre hocijaký úsek rúry,

---

[1] Zo zákona zachovania energie a z predpokladu, že vzduch pri ohrievaní mení svoj objem iba minimálne ľahko dostaneme, že vnútorný vzduch bude vychádzať z výmenníka s teplotou $T_d - \Delta T$

vieme, že teplotná výmena v **celej dvojrúre je rovnako rýchla.** Celkové množstvo tepla, ktoré si vzduchy vymenia, je zhora limitované teplotným rozdielom $T_d - T_v$ (druhá veta termodynamická vylučuje účinnosť výmenníka väčšiu ako 1) a preto pri veľmi dlhej rúre bude tepelná výmena veľmi pomalá. Inými slovami, keď sa zameriame na hocijaký jeden meter veľmi dlhej rúry, teplotná výmena na ňom bude veľmi malá, t.j. rozdiel teplôt musí byť veľmi malý. Pre konce rúr to znamená, že vzduch z vnútra sa musí ochladiť na teplotu T_v a vzduch zvonku naopak otepliť na T_d, čo je presne to, čo sme chceli ukázať. QED.

To je všetko pekné, a ako na to mám prísť? Spýta sa (menovať nebudem) investigatívny duch ukrytý v investigatívnom riešiteľovi FKS. Asi každého napadne 50% riešenie spomínané v druhom odstavci. Prúdenie vzduchov v ňom by sa schematicky dalo popísať takto:

VOL → V → DNU; DNU → V → VOL[2].

Ekonomika v nás sa však búri, ako môžeme púšťať von vzduch, ktorý ešte obsahuje 50% získateľného tepla? Celé zariadenie by sa dalo vylepšiť pridaním ďalšieho výmenníka:

VOL → V_1 → V_2 → DNU; DNU → V_2 → V_1 → VOL.

Prečo však zastaviť tu? Pridaním ďalších výmenníkov sa predsa zariadenie ešte zefektívni.. Naša dvojrúra nie je nakoniec nič iné, ako nekonečne veľa nekonečne malých výmenníkov umiestnených tesne za seba. Šikovné, že. Keby človek nevie, že sa jedná o obyčajnú dvojrúru, povedal by si, že čosi také neexistuje. Priamočiarejšie (ale podľa mňa škaredšie) riešenie ako naše, by bolo zobrať takúto sústavu nekonečne veľa výmenníkov a pomocou limít ju porátať, čo niektorí z vás aj spravili (aj keď to nie je jednoduché). Na záver dodávam že výmenníky fungujúce na podobnom princípe sa do niektorých moderných domov skutočne inštalujú... nech žije modrozelená planéta.

A–3.2 Námornícka matrioška (opravovala Bea, vzorák Bea a Janka)

Majme dutý valec bez hornej podstavy, pre názornosť ho nazveme 'sud'. Napustíme doň trochu vody a položíme do neho menší sud tak, aby vo vnútri plával. Do menšieho suda položíme ešte menší sud. Napustíme trochu vody.. Celý proces opakujeme n-krát až nakoniec končíme s malým súdočkom. Teraz pomocou môjho obľúbeného prístroja DPZ (tzv. dômyselne premyslené zariadenie) zmeriame vzdialenosti podstáv vonkajšieho suda a súdočku. Ako sa zmení táto vzdialenosť, keď do súdočku dopustíme malé množstvo vody V? Sudy v sebe po celý čas bezkontaktne plávajú.

Akým postupom to ideme robiť? Zoberieme si najprv dva súdočky. Každému je jasné, že hrúbka stien tu nehrá žiadnu úlohu. Preto budeme uvažovať len súdky s nejakým objemom a hmotnosťou. A nechcem vás napínať, ale ani tá hmotnosť nie je podstatná. Keď použijeme Archimedov zákon (táto úvaha je za 0,5 boda) pre sústavu s prázdnym aj naliatym horným súdočkom (použijeme preň index 1 a čím budú súdočky väčšie, tým budú mať väčší index) po úprave dostaneme vzorce:

$$V_{p1} = \frac{m_1}{\rho},$$

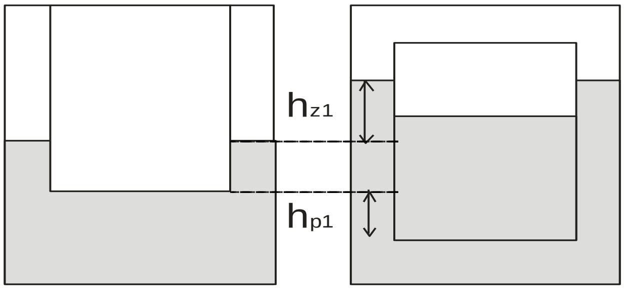
$$V'_{p1} = \frac{m_1}{\rho} + V,$$

kde V_{p1} je ponorený objem druhého suda pred doliatím vod(k)y a V'_{p1} je objem ponorený po doliatí vod(k)y objemu V.

Keď si obzriete obrázok, všimnite si, že podstava poklesla o h_{p1} ale hladina sa zvýšila o h_{z1}. Toto spôsobila zmena objemu(a teda aj hĺbky) ponorenej časti horného súdka:

---

[2] VOL = Vzduch Oravských Lesov, V = Výmenník, konkrétne, jedna nádoba, kde prebehne tepelná ale nie pachová výmena.



$$\frac{V'_{p1} - V_{p1}}{S_1} = h_{p1} + h_{z1},$$

kde S_1 je obsah podstavy 1.súdka a h_{z1} vyjadríme:

$$h_z(S_2 - S_1) = h_{p1} S_1,$$

$$h_z = \frac{h_{p1} S_1}{S_2 - S_1},$$

keď si to všetko spojíme (a my sme takí šikovní, že to spraviť vieme☺) dostávame:

$$h_{p1} = V'_{p1} - V_{p1} - h_z,$$

$$h_{p1} = \frac{V}{S_1 - S_2}.$$

Kto sa dostal sem, má 2 body, no my sme ctižiadostiví a 2 body nám nestačia. Bojujme teda ďalej.

Zoberiem si tieto dva súdky a vopchám ich do väčšieho 3. s vod(k)ou. Na začiatku zase zaznamenám do análov, kde sa prázdny horný súdok nachádza a keď do neho dolejem vodu, deje sa čosi obdobné ako v predchádzajúcom prípade. 1. súdok klesne o to isté h_{p1} a hladina stúpne o to isté h_{z1} čo predtým. Teraz ak sa pozrieme na 2. sud ako sa správa vzhľadom k 3., dá sa to opísať ako dej, pri ktorom nalejeme objem V, ktorý nalievame do 1. súdka, akoby sme naliali do 2. súdka. Celkový pokles h_p dostaneme ako súčet h_{p1} a h_{p2}. Tak zrátame h_p:

$$h_p = h_{p1} + h_{p2},$$

$$h_p = \left(\frac{V}{S_1} - \frac{V}{S_2}\right) + \left(\frac{V}{S_2} - \frac{V}{S_3}\right),$$

$$h_3 = \frac{V}{S_1} - \frac{V}{S_3}.$$

Vidíme, že 2.súdok naozaj nemal vplyv na zmenu polohy 1. súdka.
Teraz ak chceme spočítať zmenu hĺbky pre n súdkov, máme vzťah:

$$h_p = h_{p1} + h_{p2} + \ldots + h_{pn},$$

$$h_p = \left(\frac{V}{S_1} - \frac{V}{S_2}\right) + \left(\frac{V}{S_2} - \frac{V}{S_3}\right) + \ldots + \left(\frac{V}{S_{n-1}} - \frac{V}{S_n}\right),$$

$$h_p = \frac{V}{S_1} - \frac{V}{S_n}.$$

Keď to rozpíšeme, všetko sa tam vyžere okrem prvého a posledného člena, čo znie dosť veselo.
☺☺☺

A veselo bude aj keď budú darčeky a oni budú☺
Budú pod SMREKOM v obývačke☺
Aj kapustnica bude☺
A doma budem☺
Aj sneh bude☺
Nový rok☺
Voš☺

A–3.3 Povedzžemi (opravoval Robo A., vzorák Tomáš)

Keď sa pozrieme do zrkadla, vidíme, že máme vymenenú ľavú ruku s pravou. Čo to presne znamená? Keď sa pozriem na svoj obraz v zrkadle a zdvihnem ľavú ruku, obraz zdvihne ruku, ktorá je (z môjho pohľadu) vľavo. Ak však bude oproti mne stáť Jožko M. pri prosbe "zdvihni ľavú ruku" zdvihne (z môjho pohľadu) ruku vpravo. Ľahko teda prídeme k záveru, že obraz sa podobá na Jožka až na to, že je trochu krajší a má vymenené strany. Zaujímavé ale je, že Jožko má síce vymenené vľavo – vpravo, ale nie hore – dole. Prečo je to tak? Ako neštudované a anatómie neznalé zrkadlo vie, ktorý rozmer má "preklopiť" a ktorý nie?

Tento príklad sa dal veľmi jednoducho a zároveň veľmi kvalitne zmrviť. Hneď vám ukážem ako. Stačilo, ak ste si ako hlavnú tézu vo vašom riešení zvolili niektorú z nasledujúcich odpovedí. Takže, odpoveď **nemá** vyzerať nasledovne:

- Vymenenie strán má na svedomí to, že oči sú v horizontálnej rodine.
- Ľavo-pravo sa vymení preto, lebo tento smer je kolmý na gravitáciu.
- Celé je to spôsobené relatívnosťou toho, čo je ľavá a pravá strana.
- Obraz nájdeme pomocou lúčov, viď obr. Evidentne má vymenené strany ale nie hore-dole.
- V skutočnosti obraz nie je preklopený, ale rovinne symetrický a všetko je to teda iba zavádzanie zadávateľmi príkladu.

Prečo sú tieto odpovede zlé? Prvé tri sú koniny, nechám vás rozmyslieť si prečo. Ďalšie dve veci sú pravdivé, ale absolútne to nie je odpoveď na otázku zo zadania. Tá je položená vcelku jasne. Ak poslednú vetu zadania beriem ako jemnú iróniu a dohodneme sa, že zrkadlo netuší kde je sever, potrebujeme na vysvetlenie nájsť nejakú **vlastnosť, ktorá odlišuje smer hore-dole od ľavo-pravo**. Z tohto pohľadu sú prvé dve z uvedených zlých odpovedí dobré a až na to, že sú úplne zlé, úprimne sa snažia riešiť nastolený problém.

No a ako to teda naozaj je? Dovoľte mi predstaviť vám svojho spolupracovníka Joža. Jožo je nátura priama, naivná a vie sa úprimne čudovať, pokiaľ sa dovtípi, že je čas na čudovanie. Aby sme si ešte raz navodili problém, postavme sa pred zrkadlo a poprosme: „Jožko, mohol by si sa postaviť niekam hen, nech si ťa viem porovnať so svojím obrazom v zrkadle.. “ Jožo sa dostane do príslušnej vzdialenosti (v takto abstraknej diskusii pre nás múry nie sú relevantným problémom) a kukne na mňa: „Ňáááá.. A ako presne sa mám postaviť?“ A presne v tomto to je. Ak sa Jožo postaví „oproti“ mne, bude mať vymenené ľavo-pravo. Ak spraví stojku, ľavo-pravo bude sedieť[3], ale hore-dole už nie. Ak sa postaví zadkom ku mne, nebude sedieť predok-zadok (v porovnaní s obrazom), ale všetko ostatné hej. Po chvíle experimentovania zistíme, že Jožko sa nemôže postaviť tak, aby naraz sedelo všetko. Pokiaľ sa Jozef snaží, aby sa môjmu obrazu čo najviac podobal, vyberie si prvú variantu, t.j. postaví sa proti mne a vymenené bude ľavo-pravo.

V našej mysli obraz v zrkadle interpretujeme ako snaživého Joža, ktorý sa snaží „tomutam“ čo najviac podobať. A keďže málokto si zmýli nohu s hlavou, kdežto ruky sú na nerozoznanie, bude mať práve tento rozmer Jožko pretočený. To, čo teda odlišuje pravo-ľavý smer od hore-

[3] Čo to presne znamená, že nejaký smer sedí, nechám na tvorivého čitateľa.

dole je **človečia pravo-ľavá symetria**. Skutočne, neviete rozhodnúť, ktoré strany má v zrkadle vymenené zguľbaný kus kameňa. Zaujímavé je tiež predstaviť si ľudí, ktorí by boli hore-dole symetrickí ale ľavo-pravo nie (napríklad normálni „pootočení“ ľudia, ktorí majú upažené ruky, chodia po prstoch pravej ruky, ľavá ruka je najvyššia časť tela, hlava, nohy sú vľavo, vpravo). Takýto jedinec bude mať v zrkadle vymenené práve hore a dole.

A–3.4 Bored hero (opravoval Jakub, vzorák Tomáš)

Malý princ si jedného dňa povedal, že je načase ukončiť nudný život na svojej planéte s polomerom R a hmotnosťou m, ktorá je v celom objeme planéty rozmiestnená homogénne. Z krabice od ovečky vytiahol motor a pevne ho pripevnil k planéte. Motor bude po zapnutí fungovať tak, že dané miesto planéty ťahá silou konštantnej veľkosti F v dotyčnicovom smere k povrchu. Kvalitatívne odhadnite, ako sa bude planéta pohybovať po zapnutí motora.

Poznámka: Kvalitatívne odhadnúť znamená s istou presnosťou zistiť, ako bude vyzerať výsledný pohyb v čase. Keďže sa jedná o zložitý pohyb, nemusí sa vám podariť nájsť presné vyjadrenie polohy v čase, častokrát sa však dá o pohybe dosť presné "čosi" povedať. Napríklad, ak zistíme, že x-ová súradnica v čase vyzerá ako $x(t) = k.t^2 + f(t)$, *pričom pomer* $f(t)/t^2$ *sa bude s rastúcim časom zmenšovať k nule, vidíme, že sa jedná o “skoro rovnomerne zrýchlený pohyb“, čo je dobrý kvalitatívny odhad, aj keď f(t) presnejšie nepoznáme.*

Ahojte. Pripravte sa na dlhý vzorák, zastrúhajte si ceruzky a buďte pripravený na všetko! Lebo tento príklad to vyžaduje.

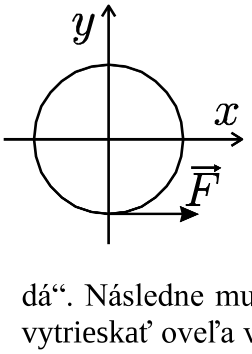
Na začiatok si ujasnime pojem motor. Keďže bol nešpecifikovaný, tak predpokladajme idealizovaný motor fungujúci na dosiaľ neobjavenom princípe. Koho by to veľmi trápilo, tak si môže predstaviť raketový motor s rýchlosťou výtokových plynov blízkou rýchlosti svetla (potom úbytok hmotnosti planéty môžem smelo zanedbať) – napr. také fotónové delo (alias smerová lampa) by to zvládlo...

Prvé, čo človeka (alebo cvičenú opicu) môže napadnúť je to, že ťažisko planétky prežije celý svoj krásny život v rovine určenej jeho polohou na začiatku, polohou motora pri zážihu a vektorom sily motora *F*. Prečo? Nuž preto, lebo ho žiadna sila z tejto roviny ´nevytlačí´.

Ďalej vieme celkom presne a ľahko určiť rotáciu planéty. Na toto sa pozriem z (neinerciálnej, má translačné zrýchlenie, ale moment zotrvačných síl vzhľadom na ťažisko je nulový) vzťažnej sústavy spojenej s ťažiskom planéty. Moment zotrvačnosti homogénnej gule (malého princa zanedbám – od toho je predsa malý ☺) vzhľadom na ťažisko je známy, $J_T = (2/5)\, mR^2$. Ďalej

$$|\vec{M}| = |\vec{F} \times \vec{R}| = FR \qquad \varepsilon = \frac{M}{J_T} = \frac{5F}{2mR} = konšt.$$

$$\omega(t) = \varepsilon t \qquad \varphi(t) = \frac{1}{2}\varepsilon t^2$$



Keď sme rotáciu jednoducho vyriešili, ďalšia otázka sa prirodzene bude týkať polohy ťažiska planéty v nejakom čase. Je evidentné, že pohyb bude maximálne chaotický, planétkou to bude hádzať naľavo, napravo.. Veľkosť zrýchlenia ťažiska je v každom okamihu rovná *F/m,* jeho smer sa však neustále mení a tak rýchlosť (polohu) v danom okamihu je možné získať integrálom, kde posčitujeme impulzy hybnosti cez všetky časy. Toto je však matematicky náročné a ani to nemalo byť cieľom tejto úlohy. Keď sa povie „kvalitatívne popíšte“, v praxi sa tým myslí „vytrieskajte z toho čo sa dá“. Následne musíte dúfať že ani nám sa (stredoškolskými prostriedkami) z toho nepodarilo vytrieskať oveľa viacej a teda budete mať dosť bodov. V rámci tohto vzoráku sa zameriame na dôkaz toho, že po prvých niekoľko otáčkach sa pohyb planétky bude podobať na rovnomerný priamočiary pohyb, zhruba odhadneme jeho rýchlosť a smer.

V prvej štvrtine prvej otáčky motor ťahá planétku „vpravo“ a „hore“ a toto bude aj výsledný smer jej pohybu. Prečo? Zamerajme sa najprv na „hore“. Predstavme si motor v dvoch okamihoch a to keď je natočený o uhol φ (φ > 180°) resp. Φ - 180° oproti pôvodnému smeru. Ľahko zistíte, že sily pôsobiace na planétku v y-ovom smere v týchto okamihoch majú opačnú veľkosť. Fintou je, že ku každému pootočeniu φ kedy motor ťahá „nadol“ sa dá nájsť pootočenie (konkrétne φ - 180°), kedy ťahá „hore“. V tomto pootočení sa ale planétka nachádzala skôr, rotovala teda pomalšie a strávila v ňom dlhší (aj keď nekonečne malý) čas. Preto tieto dva okamihy v súčte pohnú planétku smerom „nahor“. Úvahu je možné zopakovať pre hocijakú stredovo symetrickú dvojicu pootočení a po dostatočne dlhom čase sa s týchto kúskov nasčíta nejaká (ešte nevieme či konečná) hodnota rýchlosti smerom nahor v_{fin}.

Sranda je, že táto úvaha zafunguje, aj keby planéta na začiatku už rotovala nejakou nenulovou uhlovou rýchlosťou. To je dôležité, lebo po prejdení prvej polotáčky sa dostávame do presne tejto situácie (až na symetriu). Označme rýchlosť ťažiska v smere nahor v tomto okamihu v_{pol}. Keby sme v tomto okamihu ťažisko zastavili (rotáciu nie), planétka sa po dostatočne dlhom čase rozbehne nadol (a doľava) a to rýchlosťou v'_{fin}. Celkovo teda platí: $v_{fin} = v_{pol} - v'_{fin}$. Všetky hodnoty sú kladné, a preto $v_{fin} < v_{pol}$. Nielen, že to je dôkaz toho, že veľkosť rýchlosti bude konečná, zároveň je to návod, ako ju rozumne zhora odhadnúť. Prvá polotáčka trvá planétke

$$\sqrt{\frac{4\pi R m}{5F}}.$$

Priemet sily, ktorá po tento čas ťahala smerom dohora je určite menší ako F a preto

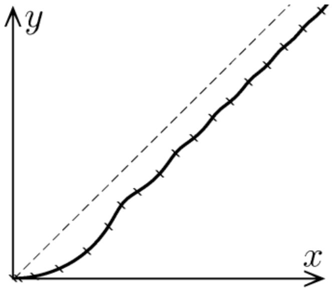
$$v_{fin} < v_{pol} < \sqrt{\frac{4\pi R F}{5m}}.$$

Len podotýkam, že presná hodnota získaná integrovaním je presne $\frac{1}{\sqrt{8}}$ z tohto čísla. Ak chceme získať rozumný dolný odhad, stačí si uvedomiť, $v_{fin} > v'_{fin}$ s využitím čoho $v_{fin} > v_{pol} / 2$. Dolný odhad pre v_{pol} vieme spraviť napríklad tak, že si uvedomíme, že v prvej polotáčke sme medzi pootočeniami rovnými 45° a 135° ťahaní nahor minimálne $\frac{\sqrt{2}}{2}F$, (čas medzi týmito pootočeniami nie je problém dostať presne), dostávame:

$$v_{fin} > \sqrt{\frac{\pi R F}{m}}\sqrt{\frac{1}{20}\left(\sqrt{3}-1\right)}.$$

Rozanalyzovať pohyb v smere osi x je máličko náročnejšie, nestačí nám totiž zameriavať sa na dvojice symetrických kúskov, je potreba analyzovať štvorice a to konkrétne φ, 180° - φ, 180° + φ, 360° - φ. Je tiež dobré uvedomiť si, že závislosť uhlovej rýchlosti v závislosti od pootočenia je odmocninová funkcia, ktorá je rastúca a konvexná. Pre takéto funkcie a kladné a,b platí $f(x + a)\, f(x) > f(x + a + b)\, f(x + b)$. Túto nerovnosť budete pri analýze pohybu v smere osi x potrebovať, preto, ak sa do toho pustíte, odporúčam nakresliť a skonštatovať, že je to triviálne.

Na záver pre lepšiu predstavu som priložil ešte trajektóriu (pre iné vstupné parametre F, m, R by vyzerala o čosi inak) spočítanú numericky na počítači. Tie kolmé čiaročky nám vyznačujú polohu planéty v rovnakých časových odstupoch – vidíme, že pohyb sa po počiatočnej fáze skutočne ustaľuje.



Bodovanie: 2,5b za rotáciu; 1,0b za dobrý odhad; 5,0b za korektné riešenie. Prajem príjemné sviatky, málo práce, veľa oddychu a tých správnych ľudí okolo seba. Adios amigos!

PS: A nezabudnite vymiesť sopku. Aj tú vyhasnutú, lebo človek nikdy nevie...