FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 2. série
B – kategória (mladší)
22. ročník
zimný semester
školský rok 2006/2007

www. **.sk**

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@gmail.com
info@fks.sk

B–2.1 Myslením proti chladu (opravoval Robo K.)

Počas jednej studenej noci hlboko v horách som nemohol spať, tak som aspoň rozmýšľal, prečo mi je taká kosa. Keď som zmeral teploty vonkajšieho povrchu môjho a kamarátovho spacáku (ako sa mi podarilo merať bez toho aby som zo spacáka vyliezol teraz nebudeme rozoberať), zistil som, že jeho spacák má chladnejší povrch ako môj. Koho spacák "viac hreje"?

Čaute chronickí spacákoví spachtoši. Verím, že tento príklad fyzikálneho druhu „obkec light“ aspoň na chvíľu premohol vašu jesennú únavu:-) Hmm .. že prečo light a prečo obkec? Lebo nebolo potrebné nič počítať, stačila len chvíľka uvažovania a riešenie bolo na svete. Aby som tento príklad predal na FKS-áckom trhu, vymyslel som nasledovný reklamný slogan: štyri body za päť riadkov riešenia! Že to vyzerá neskutočne super?! Pokúsim sa vás o tom v nasledovnom odseku presvedčiť.

Začnime „od nás“. Myslím tým od našej maličkosti vylihujúcej v teple spacáka. Ako sa to teplo v spacáku vzalo? Vyprodukoval ho zdroj tepla, a tým nie je nik iný ako my sami, resp. naše telo, správajúce sa ako malá piecka[1]. Hm, a na čo je tam potom ten spacák? Ten to naše ťažko vyprodukované teplo stráži a snaží sa ho čo najmenej prepustiť von. Čím kvalitnejší spacák, tým menej tepla prepustí na povrch, tým menej ho musíme vyprodukovať a tým pohodlnejšie sa cítime. (Za predpokladu, že tepla nie je priveľa; čítajúc zadanie taký pocit nemám.) Pozrime sa teraz na chudák vonkajší povrch spacáka. Ten je už nemilosrdne vystavený vonkajšej kose a jediné, čo ho ohrieva, je teplo prepustené spacákom. Čím menej tepla spacák prepustil, tým menej je chudák povrch ohrievaný a tým bližšiu teplotu bude mať ku okolitému prostrediu. Inými slovami, teplejší povrch stráca viac tepla do okolia a preto ho my musíme produkovať viac. Suma sumárum, „viac hreje“ kamarátov spacák, lebo má chladnejší povrch. Toť vsio. Celé predvedené riešenie má len malú chybičku krásy. Namiesto sľubovaných piatich obsahuje riadkov dvojnásobne viac. Reklamní agenti sú jednoducho nepoučiteľní ...

B–2.2 Myslením proti chladu (vzorák Tomáš, opravovala Bea)

René sa chystá na náučno-eskimácko-poznávací výlet za polárny kruh. Problém je, že na miestach, kam sa chystá, býva hrozná zima, občas aj -30°C. Jeho filozofia je nasledovná: Raz bol na celodennej túre na Slovensku, kde teplota počas celého dňa aj noci bola +10°C. Cez deň mu zima nebola, a keď si večer ľahol do svojho nie príliš kvalitného spacáka, oblečený v tom istom ako cez deň, tiež sa zahrial. Renému sa podarilo zohnať sponzora, ktorý mu zaplatí super termooblek, v ktorom mu je fajn počas -30°C dňa, pokiaľ sa aspoň trochu pohybuje. Čo však so spacákom? Môže René po skúsenostiach zo Slovenska očakávať, že keď si počas –30°C noci zalezie do svojho nie príliš kvalitného spacáka, avšak oblečený v sponzorskom termooblečení, v pohode sa vyspí? Potrebné údaje nejako pozháňajte, v prípade, že budete presne vedieť, čo potrebujete, potrebné údaje však nie a nie zohnať a od psychológa si zoženiete potvrdenie, že máte googlefóbiu, môžete mi napísať na ehmehm@pobox.sk a údaje dodám.

---

[1] oprášiac biologické vedomosti: teplo v organizmu produkuje hlavne pečeň

Hliník se odstěhoval do.. nie.. iné som chcel… Nepotěšili jste mne, ani já vás nepotěším. A pritom to bol taký ľahký príklad. Pozrite:

V prvom momente človeka musí napadnúť priama a pre riešenie nevyhnutná otázka: Kedy zažívam chvíle tepelnej pohody? Jediná plus-mínus správna odpoveď na túto otázku je: Vtedy, keď je moje telo vyhriate na správnu teplotu. Aby však pohoda trvala dlhšie ako pár sekúnd, je potrebné, aby sa prirodzenými prostriedkami (pohyb, metabolizmus, nie drkotanie) vyprodukovalo akurát toľko tepla, koľko sa stihne odovzdať do prostredia. Logicky, prvá vec, čo potrebujem, je zistiť, koľko tepla človek za sekundu vyprodukuje. A tu presne prichádza čas, kedy bolo treba zháňať, googliť alebo sa spýtať svojho (doteraz celkom) obľúbeného vedúceho - mňa. Boli by ste sa dozvedeli, že telo vyprodukuje zhruba 40 J tepla na sekundu na m^2 povrchu počas spánku a asi 115-150 J počas chôdze. Pre nás je dôležité, že druhé číslo je zhruba 3-krát väčšie ako prvé. Pre prechod tepla cez tepelný izolant platí nasledujúci vzorec: Ak napríklad spacák oddeľuje od seba dve prostredia s rozdielom teplôt ΔT, plocha spacáku je S, tepelný výkon, ktorý spacákom prejde, je

$$P = \frac{\Delta T . S}{R} ,$$

kde R má funkciu tepelného odporu spacáku (čím lepší spacák, tým väčšie R). Je intuitívne a dá sa aj ľahko odvodiť, že ak na seba natiahneme napríklad dva spacáky s odpormi R_1 a R_2 výsledná sústava bude mať tepelný odpor $R_1 + R_2$.

Zrekapitulujme si to teda. Po zaspatí klesá tepelný výkon tela na tretinu, pre pocit telesnej pohody teda potrebujeme, aby nočná izolačná vrstva mala 3-krát väčší tepelný odpor ako izolačná vrstva ktorú používame cez deň. Tento výsledok nezávisí od toho, či sme u nás alebo u Eskimákov. Spacák, ktorý používam na Slovensku by mal teda mať 2-krát (predpokladáme, že spíme oblečení) väčšie izolačné schopnosti ako izolačná schopnosť oblečenia ktoré nosím počas dňa (plus koža a malá vrstva podkožného tuku, ktorá sa môže podchladiť a teda tiež funguje ako izolácia). Spacák vhodný do eskimáckych podmienok bude teda musieť nahradiť ďalšie dva hyper super mega tutti frutti termoobleky a teda tiež nebude len taký hociaký. V slovenskom spacáku by René pravdepodobne nezamrzol, ale telo by muselo produkovať skoro toľko tepla ako počas dňa a drkotanie, ktoré by na to bolo potebné, ťažko nazývať tepelnou pohodu. **End of the story.**

Pár myšlienok na záver:

Častou chybou, za ktorú ste mohli stratiť zhruba jeden bod bolo, že ste sa uspokojili s konštatovaním, že počas eskimáckej noci musí Reného telo vyprodukovať viacej tepla ako na nočnom Slovensku. Ak nezistíte (aspoň zhruba) o koľko viac tepla potrebuje (alebo čo ešte by na seba musel natiahnuť, aby mu bolo fajn), neviete povedať, či rozdiel bude dosť veľký na to, aby si ho vôbec všimol.

Pozdravujem všetkých, ktorí boli zaryto presvedčení, že na vyriešenie potrebujú tepelný odpor spacáku, termooblečenia, farbu spacáku, meno Reného prababičky a 99. číslicu v desatinnom rozvoji π. Tým, že sme povedali, za akých podmienok je Renému v spacáku fajn, sme jeho izolačné vlastnosti úplne určili a nebolo treba nič z uvedeného.

Tak isto, teploty u nás a u Eskimákov neboli potrebné a v zadaní sa vyskytovali iba preto, aby bolo jasné, že pod termooblekom nemáme na mysli tričko od Číňana s nápisom “termooblek”.

Teplota pokožky nie je pre pocit tepelnej pohody rozhodujúca. Predstavte si, že z pocitu čistej nudy si idete v zime zašportovať. Obujete tenisky aj s reťazami a hajde behať do -10 °C. Pri behu vyprodukujete 500-600[2] tepla, skúste si však prejsť rukou po tele, pokožka je studená ako päť dní po smrti.

[2] Strašne, ohavne veľa

V príklade sa vyskytlo viacero zanedbaní. Napríklad, okrem oblečenia kladie teplu pri prestupe odpor aj koža a istá vrstva podkožného tuku, chlpy a vzduch medzi nimi a tiež tenká vrstvička vzduchu obklopujúca oblek zvonku, ktorá sa trošku vyhreje. Našťasie, pri termoobleku (alebo aj spacáku) pár chlpov a pár (ehm) molekúl vzduchu nehrá podstatnú rolu.

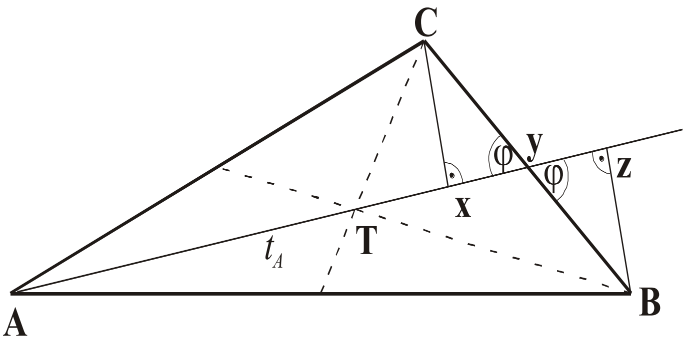
Vzorec $P = \Delta T.S / R$ je pomerne intuitívny, tak isto ako skladacia vlastnosť R. Na fyzike sa to však učí pomerne neskoro a tak pokiaľ ste si vzorec vypýtali, napísal som vám aj ten.

B–2.3 Déjà Vu (opravoval Škrek)

Možno si ešte pamätáte na posledný príklad z prvej série. Tak tento je iný. Stále v sebe zahŕňa trojuholníkovú dosku, ktorú nesú traja robotníci, pričom každý ju podopiera v jednom vrchole. Stále platí, že doska je držaná vodorovne, že je z homogénneho materiálu (všade rovnaká hustota, aj rovnaká hrúbka), dokonca platí aj to, že medzi robotníkmi nájdeme Reného, ako si to spokojne šinie rýchlosťou w. Tentoraz však trojuholník nemusí byť rovnostranný. A tentoraz od vás chceme, aby ste dokázali, že každý z robotníkov bude dosku podopierať rovnako veľkou silou. Platí toto tvrdenie, aj pokiaľ by sme namiesto dosky mali iba tri hmotné paličky v tvare trojuholníka? Pozor na nekorektné a fušerské zdôvodnenia!

Začiatky bývajú ťažké. Začiatky konca. A konce bývajú najťažšie. Napríklad také konce trojuholníka. René by Vám vedel rozprávať...

Na začiatku bola veta momentová. Celkom sama, v znení fádnom, že ak trojuholník neotáča sa, súčet všetkých momentov vzhľadom na nejaký bod alebo priamku je rovný nule. Vhodné poznamenať, že vzhľadom na nie hocijaký bod/priamku ale priam vzhľadom na ľubovolný/ú. Pojmime sa nakresliť si obrázok. Nakreslili sme si obrázok. A spýtajme sa seba sa. Otáča sa trojuholník okolo priamky vedenej skrz ťažnicu t_A? Nie! A teda súčet momentov vzhľadom na túto priamku je nulový. Super. Keď si predstavíme tých robošov ako nesú ten trojuholník, tak každý pôsobí na svojom konci nejakou silou a teda vytvára nejaký moment. Plus ešte v ťažisku pôsobí trojuholník svojou váhou a vytvára tiež nejaký moment. No ale vzhľadom na tú, už vyššie spomenutú priamku, má nenulový moment iba roboš ***B*** a roboš ***C***. Ťažisko a roboš ***A*** ležia na tej priamke a teda ich moment vzhľadom na tú priamku je nulový, lebo



$$M = \pm F.r \sin\alpha$$

(M – moment, F – sila, ktorou pôsobíme, r – dĺžka ramena ktorým pôsobíme, α – uhol, ktorý sila a rameno zvierajú. Pre náš príklad je $\alpha = \pi / 2$ a teda sin $\alpha = 1$, lebo trojuholník je vodorovný a podopieraný zospodu). No a oba body majú $r = 0$. Čo sa týka znamienka, treba si zvoliť kladný smer otáčania, a potom momenty ktoré roztáčajú v smere kladnom sú kladné a v smere zápornom zase záporné. Pre zvyšné dva body potom dostávame rovnicu

$$F_B d = F_C d'.$$

Zo zhodnosti trojuholníkov ***XYC*** a ***YZB*** dostaneme $d = d'$, a teda $F_B = F_C$. Analogicky by sme dostali pre ťažnicu t_B

$$F_A = F_C,$$

takže $F_A = F_B = F_C$! Všetci traja teda trojuholník podopierajú rovnakou silou.

Keby sme namiesto homogénneho trojuholníka mali niesť iba hmotný rám (tri hmotné strany inak nehmotného trojuholníka), situácia sa dramaticky mení. Nienie, všetky vety momentové stále platia, len mrcha ťažisko už nie je, kde bývalo. Predstavme si napríklad drasticky neférový trojuholník s jednou stranou veľmi krátkou, priam až tak krátkou, že jej hmotnosť je zanedbateľná oproti druhým dvom. Náš milý trojuholník už nie je trojuholníkom, vlastne len dvoma dlhými spojenými paličkami (s pidítkom na jednom konci), ktoré na jednom konci podopierajú dvaja robotníci a na druhom len chudák René. Dá sa ľahko ukázať že pri nosení paličkového trojuholníka všetci makajú rovnako, jedine keď je trojuholník rovnostranný. Hurá, koniec dobrý, šecko dobré. Športu zdar ☺.

B–2.4 Sféry Matúša M. (opravoval Marián)

Vezmeme dve nerovnaké loptičky, jednu umiestnime nad druhú (stredy sú nad sebou) tak, aby sa dotýkali. Z tejto konfigurácie ich necháme padnúť na zem. Po odraze sa môže stať, že vrchná lopta vyskočí vyššie, než výška, z ktorej bola pustená. Občas to môže byť až niekoľkonásobok tejto výšky. Aká maximálna môže táto výška byť, a za akých podmienok sa dá dosiahnuť?

Hola. V celom texte pod loptičkou 1 rozumieme spodnú loptičku a všetko, čo jej prislúcha indexujeme jednotkou. Horná loptička sa kamaráti s dvojkou.

Po tom, ako loptičky pustíme, budú spoločne padať voľným pádom. V momente, keď sa loptička 1 dotkne zeme, budú mať obe rovnakú rýchlosť v. Vtedy sa začne loptička 1 odrážať od zeme. Loptička sa začne deformovať a aby toho nebolo málo, zvrchu na ňu bude nemilosrdne dorážať druhá loptička. Máme dočinenia s dvomi zrážkami, loptička 1 sa zráža so zemou a s loptičkou 2. Avšak tieto procesy sú veľmi zložité a nejako rozumne to popísať je takmer nemožné. Nakoniec to ale celé nejak dopadne a keď bude po všetkom, loptičky budú mať rýchlosti v_1 a v_2. Budú v zvislom smere, ale viac o nich povedať neviem.

Odpovedzme teda na prvú otázku. Ako je možné, že loptička vyletí vyššie? Pri zrážke lôpt sa môže stať, že loptička 2 pri odraze od loptičky 1 nielen že otočí svoju hybnosť ale ešte od nej aj nejakú hybnosť získa. To sa stáva, keď ľahšie teleso narazí na ťažšie teleso, ktoré sa pohybuje proti nemu. Však uvidíme.

Povedali sme, že nie je v našich silách presne popísať odraz reálnych lôpt. Našťastie to ani nebolo našou úlohou. Stačí, keď zistíme, ako najvyššie môže loptička 2 vyskočiť. Preto považujme všetky zrážky za dokonale pružné. Ak chceme maximalizovať výšku, nemôžeme si dovoliť strácať energiu. Tiež budeme predpokladať, že zrážky trvajú zanedbateľne krátky čas. Všetko čo sa teda deje, sú priame stredové zrážky dvoch gulí. Tie sa najpohodlnejšie popisujú v ťažiskovej sústave. To najmä preto, že v tejto sústave sa pri zrážke gulí zmení hybnosť každej z nich na opačnú. Neveríte, tak kukajte.

Tááákže. Majme dve gule hmotnosti m_1 a m_2, ktoré sa pohybujú po jednej priamke rýchlosťami v_1 a v_2. Rýchlosť ich ťažiska je $\dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$. V sústave s ním spojenej je výsledná hybnosť nulová, pretože tá je rovná hybnosti ťažiska. Podľa zákona zachovania hybnosti aj nulová naveky zostane. Môžeme teda smelo napísať

$$m_1 w_1 + m_2 w_2 = 0 \quad \rightarrow \quad w_1 = -w_2 . m_2 / m_1 \qquad (1)$$

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = 0 \quad \rightarrow \quad u_1 = -u_2 . m_2 / m_1 \qquad (2)$$

kde sme označili rýchlosti gúľ v novej vzťažnej sústave pred zrážkou w a po zrážke u. Nakoľko máme dočinenia s pružnými zrážkami, energia sa zachováva a teda

$$m_1 w_1^2 + m_2 w_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 \qquad (3)$$

Z týchto rovníc dospejeme k výsledku

$$m_1 w_1^2 + m_2 w_2^2 = [z(1)] = m_1 \left(-\frac{w_2 m_2}{m_1} \right)^2 + m_2 w_2^2 = \left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2 \right) w_2^2$$

$$m_1u_1^2 + m_2u_2^2 = [z(2)] = m_1\left(-\frac{u_2m_2}{m_1}\right)^2 + m_2u_2^2 = \left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2\right)u_2^2$$

A teda za základe (3) platí $u_2 = \pm w_2$. Podobne by sme dostali $u_1 = \pm w_1$. Vzťah s plusom opisuje proces, pri ktorom sa gule od seba neodrazia, ale cez seba bez povšimnutia prejdú. V našej situácii nastáva druhá možnosť, pružný odraz gúľ. (Netreba zabudnúť na to, že sa na konci treba vrátiť do pôvodnej vzťažnej sústavy.)

Čo to znamená pre nás? Loptička 1 sa pružne zrazí so zemou. Jej hmotnosť je ale veľmi malá v porovnaní s hmotnosťou zeme, a teda podľa vzorca pre rýchlosť ťažiskovej sústavy dostaneme, že to je sústava spojená so zemou. To nás vôbec neprekvapuje. Vždy, keď je čosi oveľa ťažšie, ako ostané veci naokolo, ich pohyb polohu ťažiska takmer neovplyvňuje a poloha ťažiska je daná polohou veľmi ťažkého objektu. Po odraze od zeme bude mať teda lopta 1 rýchlosť v nahor, lebo sa jej hybnosť zmení na opačnú. Zdá sa to triviálne a čudujeme sa, načo ťažisková sústava. Bez nej by sme sa ale teraz už nezaobišli.

Loptička 1 má rýchlosť v nahor a rýchlosťou $-v$ (mínus lebo smerom nadol) sa na ňu rúti loptička 2. Rýchlosť ťažiskovej sústavy je potom

$$\frac{m_1v - m_2v}{m_1 + m_2} = Av, \qquad \text{kde } A \text{ je len skratka pre } \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.$$

V tejto sústave budú mať loptičky rýchlosti

$$w_1 = v - vA, \qquad w_2 = -v - vA.$$

Pri odraze zmenia znamienko svojej hybnosti, a teda ich rýchlosť bude

$$u_1 = -v(1 - A), \qquad u_2 = v(1 + A).$$

V sústave spojenej so zemou budú rýchlosti loptičiek

$$v_1 = v(2A - 1), \qquad v_2 = v(2A + 1).$$

Výška, do ktorej vystúpi loptička 2 po odraze je teda

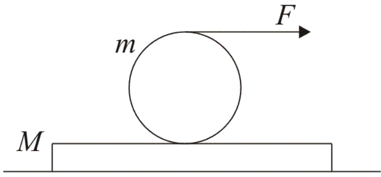
$$H = \frac{v_2^2}{2g} = h(2A + 1)^2,$$

kde h je výška, z ktorej bola spustená. Táto výška bude najväčšia, keď bude najväčší parameter A. Skúsené oko vidí, menej skúsené ľahko vypočíta, že to sa stane ak bude m_1 oveľa väčšie ako m_2. Vtedy sa bude hodnota A blížiť ku jednej a H ku $9h$.

Ešte poznamenajme, prečo sme predpokladali zanedbateľné trvanie zrážok. Ako vidíme, je dôležité, aby pri vzájomnom odraze oboch lôpt mala loptička 1 čo najväčšiu rýchlosť proti loptičke 2. Ak nevidíme, premyslíme. Vtedy táto získa najväčšiu hybnosť od loptičky 1. Ak by netrval odraz loptičky 1 od zeme veľmi krátko, loptička 2 by na ňu narazila ešte v momente, keď by nemala maximálnu rýchlosť, a teda rýchlosť v_2 by po odraze nebola maximálna. Avšak vzájomná zrážka loptičiek už taká krátka byť nemusí.

Len pre rekapituláciu, loptička 2 vyletí najvyššie, ak budú zrážky dokonale pružné, odraz spodnej loptičky bude trvať zanedbateľne dlhý čas a bude oveľa ťažšia ako vrchná loptička. Vtedy vyletí až do deväťnásobku pôvodnej výšky. Hmm ... kto by to bol povedal ...

B-2.5 Názov príkladu (vzorák Jakub, opravoval Marek K.)



Na doske je položený valec (hmotnosti M a m), na ktorý začneme pôsobiť silou veľkosti F (obr.) a to tak, že po celý čas ťaháme momentálne najvyšší bod valca smerom doprava. Celá sústava je položená na dokonale hladkej podložke. Medzi valcom a doskou je nekonečne veľké statické trenie (t.j. valec sa môže kotúľať ale nesmie prešmykovať). Napriek tomu, že doska sa po podložke môže pohybovať bez trenia, bude stáť. Čo z toho môžeme usúdiť o valci?

Na začiatok musím povedať, že väčšina ľudí mala tento príklad zle a ja som ich odkázal na vzorák, pretože keby som musel každému písať všetky veci zvlášť, asi by som zošalel. Ako ste si iste všimli (alebo všimnete), tento príklad bol dosť náročný. Možno by vám pomohlo, keby ste si k nemu niečo prečítali (konkrétne niečo o rotačnom pohybe telies). Tak a teraz ten sľúbený vzorák.

Najprv si premyslime, ako nám zamieša karty tiaž. Na dosku bude pôsobiť reakčná sila od podložky práve takej veľkosti, aby kompenzovala tiažovú silu pôsobiacu na ňu (to preto, lebo vedci dlho pozorovali, a nikdy im doska len tak sama od seba nezačala skákať po stole). To isté môžeme konštatovať aj o valci. Keďže koeficienty trenia sú také, aké sú, tak trecie sily nie sú vôbec obmedzované normálovými silami. Teda y-ové zložky síl pôsobiacich na telesá sme vybavili a ostali nám úplne nezávislé x-ové zložky. Vieme, že spodná doska sa nehýbe. Zrejme preto výslednica síl pôsobiacich na ňu je nulová. Uvedomme si, že podložka na ňu pôsobiť nemôže (bo koeficient trenia medzi podložkou a doskou je nulový) a teda na ňu môže pôsobiť len trecia sila medzi valcom a doskou. Takže sme práve ukázali, že trecia sila F_t je tiež nulová. Teraz zapíšeme pohybové rovnice pre valec, ak sa naň pozeráme zo sústavy spojenej s podložkou (keďže doska sa nehýbe, tak je to súčasne aj sústava spojená s doskou).

$$F = ma$$

$$M = FR = J\varepsilon$$

Prvá rovnica popisuje posuvný pohyb ťažiska (pričom sme už využili $F_t = 0$), kde a je zrýchlenie valca vzhľadom na podložku. Druhá rovnica hovorí o rotačnom pohybe valca: M je celkový moment síl pôsobiacich (sily pôsobiacej:) na teleso, J je moment zotrvačnosti valca (to je charakteristika telies, ktorá vyjadruje ako je v telese rozmiestnená hmota vzhľadom na os otáčania), ε je uhlové zrýchlenie (vyjadruje ako sa mení uhlová rýchlosť s časom). Ďalej vieme, že teleso neprešmykuje. Preto stykový bod je v pokoji. Teda jeho rýchlosť aj zrýchlenie je nulové. Platí

$$0 = a - R\varepsilon \Rightarrow a = R\varepsilon$$

Toto si treba premyslieť lepšie. Totiž, toto platí pre a, čo je zrýchlenie valca vzhľadom na dosku. V našom prípade je to ale presne to isté zrýchlenie a, ktoré má valec vzhľadom na podložku.

Z týchto troch rovníc dostaneme po maličkej námahe rovnosť

$$J = mR^2$$

Čo s tým? Cesta ľahšieho odporu je pohrabať sa v nejakých tabuľkách a vysnoriť, akému typu telesa zodpovedá takéto J. Dopátrali by ste sa k dutému valcu (o polomere R a hmotnosti m). Ťažšie (ale o to oslňujúcejšie) to pôjde tak, že si pozrieme definíciu

$$J = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Môžeme si to predstaviť nasledovne: rozkúskujem si teleso (valec) na véľa-véľa (n) maličkých hmotných bodov. Pre každý bod spočítam súčin $m_i r_i^2$, kde m_i je hmotnosť toho bodu a r_i je jeho vzdialenosť od osi otáčania. Spodná suma vyjadruje celkovú hmotnosť telesa. Pre náš valec, ktorý sa otáča okolo svojho stredu je každé r_i najviac R. Preto J je najviac mR^2 a to práve v prípade, že všetka hmota je práve vo vzdialenosti R od osi otáčania.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 2. série
A – kategória (starší)
22. ročník
zimný semester
školský rok 2006/2007

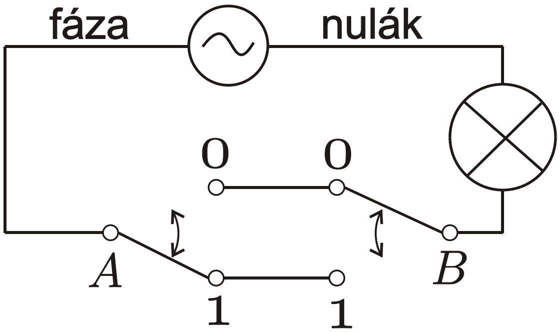
www. **.sk**

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@gmail.com
info@fks.sk

A–2.1 Logický ROXOR (opravoval Jakub)

Bežná, každodenná situácia. Dva vypínače a jedna lampa. Lampa je v strede schodiska, ktoré vedie z vínnej pivnice do kuchyne. Vypínače by sme radi umiestnili na vrch a spodok schodiska tak, aby si človek idúci po schodoch v ľubovoľnom smere mohol pri nástupe na schodisko zažať svetlo a na konci ho zhasnúť (ľudia kráčajúci zhora nadol zvyknú chodiť rýchlo, v opačnom smere zase nie veľmi presne, takže svetlo sa hodí). Pritom musí platiť, že hocikedy stlačím hocijaký vypínač, lampa zmení svoj stav, t.j. zasvietená zhasne, zhasnutá sa rozsvieti. Ako navrhnúť zapojenie, ktoré bude mať tieto vlastnosti? K dispozícii máte klasické elektrotechnické súčiastky, t.j. najmä rôzne spínače, prepínače, vypínače, zapínače (nie zipsy) atď.

Táto úloha, to bolo také ľahké hrajkanie sa s elektrickými schémami, taký oddychový príklad. Ako keby ani nebol pre vašu kategóriu... Nuž ale aj takýto vzorák písať treba. Po chvíľke hrania sa s vodičmi, spínačmi, prepínačmi a inou háveďou človek (možno aj iné zvieratko) (snáď) príde na zapojenie podobné tejto schéme



Ľahko overíme, či funguje. Najtriviálnejšie sa to urobí tak, že si označím možné stavy prvého (A), resp. druhého (B) prepínača 0 a 1 a vyplním si tabuľku, či žiarovka svieti alebo nie.

A	B	svietim?	A ⊗ B
1	1	áno	0
1	0	nie	1
0	1	nie	1
0	0	áno	0

A čo mi má vlastne vyjsť? No predsa to, že každým jedným prepnutím sa zmení stav žiarovky. A (aj názov úlohy to naznačoval) to presne vyjadruje logická operácia XOR (značí sa ⊗ - náhoda chcela, že presne ako žiarovka). Takže mi stačí pozrieť na výslednú tabuľku žiarovky a nášho XORu a ak sa dá napasovať „áno“ na nuly alebo jednotky pri XORe a „nie“ na to druhé, tak som už vyhral. Pre 2 žiarovky to nie je obzvlášť výhodné, ale pre také 3, 4 pri komplikovanejších zapojeniach (a keď si nie ste istí → poisti) to už pomôcť môže.

Ešte jeden technický detail. Keď je spotrebič (žiarovka) vypnutý, tak by mal sladko odpočívať ako taký svištík v nore. Preto ho treba zapojiť na nulák (to je zvyčajne taký ten modrý káblik – POZOR, VÝSTRAHA: toto nebyť návod na hranie sa s káblikmi v domácnosti!!!). Fáza (čierny/hnedý) bude potom pri vypnutom spotrebiči navoľno pustená len do vodičov v prepínacom systéme. Keby bol totiž spotrebič zapojený na fázu, tak by nás to mohlo CELKOM HUTNE KOPNÚŤ pri jeho oprave (hoci by sme si mysleli, že je vypnutý, on by bol na fáze). Ďalšia vec je, že by ním stále prechádzal taký síce malý, ale neprestajný prúd (lebo tam pracuje 50 hercov ☺, ktorí nie a nie dať pokoj) – to vyplýva z toho, že každý vodič/cievka/hocičo má nejakú kapacitu a teda sa pri zmene potenciálu nabíja a vybíja. A niektoré spotrebiče to nemajú radi. Napr. také úsporné žiarivky. A snáď iné osvetlovacie teleso ste použiť nechceli? (Mimochodom, dnes začínajú prichádzať na trh prvé LED-žiarovky s klasickými závitmi E27.)

K bodovaniu: Ak ste zabudli označiť nulák a fázu, tak som vás poctil -0.3 bodmi. Za chýbajúci dôkaz (alebo aspoň náznak) -0.2b, za zapojenie na fázu -0.2b. A podobne.

Na záver ešte pozdravujem Tomáša Bzdušeka, ktorý sa pochlapil a spravil to rovno pre N prepínačov, pričom mu na to stačili len 2 vodiče a N prepínačov. Adieau

---

A–2.2 Myslením proti chladu (vzorák Tomáš, opravovala Bea)

René sa chystá na náučno-eskimácko-poznávací výlet za polárny kruh. Problém je, že na miestach, kam sa chystá, býva hrozná zima, občas aj -30°C. Jeho filozofia je nasledovná: Raz bol na celodennej túre na Slovensku, kde teplota počas celého dňa aj noci bola +10°C. Cez deň mu zima nebola, a keď si večer ľahol do svojho nie príliš kvalitného spacáka, oblečený v tom istom ako cez deň, tiež sa zahrial. Renému sa podarilo zohnať sponzora, ktorý mu zaplatí super termooblek, v ktorom mu je fajn počas -30°C dňa, pokiaľ sa aspoň trochu pohybuje. Čo však so spacákom? Môže René po skúsenostiach zo Slovenska očakávať, že keď si počas – 30°C noci zalezie do svojho nie príliš kvalitného spacáka, avšak oblečený v sponzorskom termooblečení, v pohode sa vyspí? Potrebné údaje nejako pozháňajte, v prípade, že budete presne vedieť, čo potrebujete, potrebné údaje však nie a nie zohnať a od psychológa si zoženiete potvrdenie, že máte googlefóbiu, môžete mi napísať na ehmehm@pobox.sk a údaje dodám.

Hliník se odstěhoval do.. nie.. iné som chcel… Nepotěšili jste mne, ani já vás nepotěším. A pritom to bol taký ľahký príklad. Pozrite:

V prvom momente človeka musí napadnúť priama a pre riešenie nevyhnutná otázka: Kedy zažívam chvíle tepelnej pohody? Jediná plus-mínus správna odpoveď na túto otázku je: Vtedy, keď je moje telo vyhriate na správnu teplotu. Aby však pohoda trvala dlhšie ako pár sekúnd, je potrebné, aby sa <u>prirodzenými prostriedkami</u> (pohyb, metabolizmus, nie drkotanie) <u>vyprodukovalo akurát toľko tepla, koľko sa stihne odovzdať do prostredia.</u> Logicky, prvá vec, čo potrebujem, je zistiť, koľko tepla človek za sekundu vyprodukuje. A tu presne prichádza čas, kedy bolo treba zháňať, googliť alebo sa spýtať svojho (doteraz celkom) obľúbeného vedúceho - mňa. Boli by ste sa dozvedeli, že telo vyprodukuje zhruba 40 J tepla na sekundu na m^2 povrchu počas spánku a asi 115-150 J počas chôdze. Pre nás je dôležité, že druhé číslo je zhruba 3-krát väčšie ako prvé. Pre prechod tepla cez tepelný izolant platí nasledujúci vzorec: Ak napríklad spacák oddeľuje od seba dve prostredia s rozdielom teplôt ΔT, plocha spacáku je S, tepelný výkon, ktorý spacákom prejde, je

$$P = \frac{\Delta T . S}{R},$$

kde R má funkciu tepelného odporu spacáku (čím lepší spacák, tým väčšie R). Je intuitívne a dá sa aj ľahko odvodiť, že ak na seba natiahneme napríklad dva spacáky s odpormi R_1 a R_2 výsledná sústava bude mať tepelný odpor $R_1 + R_2$.

Zrekapitulujme si to teda. Po zaspatí klesá tepelný výkon tela na tretinu, pre pocit telesnej pohody teda potrebujeme, aby nočná izolačná vrstva mala 3-krát väčší tepelný odpor ako izolačná vrstva ktorú používame cez deň. Tento výsledok nezávisí od toho, či sme u nás alebo u Eskimákov. Spacák, ktorý používam na Slovensku by mal teda mať 2-krát (predpokladáme, že spíme oblečení) väčšie izolačné schopnosti ako izolačná schopnosť oblečenia ktoré nosím počas dňa (plus koža a malá vrstva podkožného tuku, ktorá sa môže podchladiť a teda tiež funguje ako izolácia). Spacák vhodný do eskimáckych podmienok bude teda musieť nahradiť ďalšie dva hyper super mega tutti frutti termoobleky a teda tiež nebude len taký hociaký. V slovenskom spacáku by René pravdepodobne nezamrzol, ale telo by muselo produkovať skoro toľko tepla ako počas dňa a drkotanie, ktoré by na to bolo potebné, ťažko nazývať tepelnou pohodu. **End of the story.**

Pár myšlienok na záver:

Častou chybou, za ktorú ste mohli stratiť zhruba jeden bod bolo, že ste sa uspokojili s konštatovaním, že počas eskimáckej noci musí Reného telo vyprodukovať viacej tepla ako na nočnom Slovensku. Ak nezistíte (aspoň zhruba) o koľko viac tepla potrebuje (alebo čo ešte by na seba musel natiahnuť, aby mu bolo fajn), neviete povedať, či rozdiel bude dosť veľký na to, aby si ho vôbec všimol.

Pozdravujem všetkých, ktorí boli zaryto presvedčení, že na vyriešenie potrebujú tepelný odpor spacáku, termooblečenia, farbu spacáku, meno Reného prababičky a 99. číslicu v desatinnom rozvoji π. Tým, že sme povedali, za akých podmienok je Renému v spacáku fajn, sme jeho izolačné vlastnosti úplne určili a nebolo treba nič z uvedeného.

Tak isto, teploty u nás a u Eskimákov neboli potrebné a v zadaní sa vyskytovali iba preto, aby bolo jasné, že pod termooblekom nemáme na mysli tričko od Číňana s nápisom "termooblek".

Teplota pokožky nie je pre pocit tepelnej pohody rozhodujúca. Predstavte si, že z pocitu čistej nudy si idete v zime zašportovať. Obujete tenisky aj s reťazami a hajde behať do -10 °C. Pri behu vyprodukujete 500-600[1] tepla, skúste si však prejsť rukou po tele, pokožka je studená ako päť dní po smrti.

V príklade sa vyskytlo viacero zanedbaní. Napríklad, okrem oblečenia kladie teplu pri prestupe odpor aj koža a istá vrstva podkožného tuku, chlpy a vzduch medzi nimi a tiež tenká vrstvička vzduchu obklopujúca oblek zvonku, ktorá sa trošku vyhreje. Našťasie, pri termoobleku (alebo aj spacáku) pár chlpov a pár (ehm) molekúl vzduchu nehrá podstatnú rolu.

Vzorec $P = \Delta T . S / R$ je pomerne intuitívny, tak isto ako skladacia vlastnosť R. Na fyzike sa to však učí pomerne neskoro a tak pokiaľ ste si vzorec vypýtali, napísal som vám aj ten.

A–2.3 Matúšove sféry (vzorák Peťo M. a Tomáš, opravovali Marcel a Peťo Z.)

Majme tri rovnaké kovové gule A, B, C. Umiestnime ich do priestoru tak, aby ich stredy ležali na priamke a aby vzdialenosti |AB| = |BC| = |AC| / 2. Všetky gule nabijeme nábojom Q. A teraz to príde. Vezmeme tenký dlhý vodič a všetky gule vodivo spojíme. Ako sa prerozdelí náboj na guliach? Koľko tepla sa pri tomto cirkuse uvoľní? Môžete predpokladať, že polomer gulí r je zanedbateľne malý voči ich vzájomným vzdialenostiam.

Ahojte. V celom tomto riešení budeme mať potenciál rovný nule v nekonečnej vzdialenosti, čo okrem iného znamená, že potenciál vo vzdialenosti r od bodového náboja q sa počíta ako

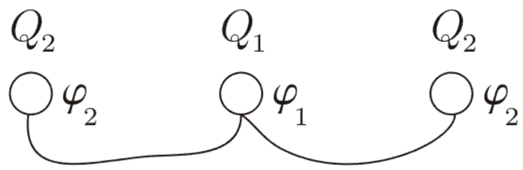
$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Teraz skúsime zodpovedať na nasledujúcu otázku: aký je potenciál nenabitej gule s polomerom r, ktorá je umiestnená vo vzdialenosti a od inej gule s polomerom r a nábojom Q? Označme tento potenciál φ a poďme rozmýšľať ďalej. Prečo odpoveď na túto otázku nie je triviálna? Nie je predsa problém zistiť, aký príspevok k potenciálu spraví nabitá guľa. Problémom je, že vzniknuté elektrické pole spôsobí na nenabitej guli vznik indukovaného náboja (jeho celkový súčet musí byť samozrejme 0). Náboj sa naindukuje akurát v takej miere, aby vnútri gule bolo nulové pole (inak by pôsobilo na voľné elektróny v kove a nejednalo by sa o elektrostatickú situáciu). Indukovaný náboj vo všeobecnosti ovplyvňuje potenciál. Ako? Hneď zistíme.

[1] Strašne, ohavne veľa

Pridajme do systému ešte jednu guľu s nábojom Q tak, aby naša nenabitá guľa bola v strede medzi nabitými guľami. Pole od jednotlivých guli sa v blízkom okolí stredu skoro presne (vďaka malosti pomeru r/a) vyruší a na strednej guli sa tentoraz nič nenaindukuje. To znamená, že do potenciálu gule zarátame **iba** príspevky od obidvoch nabitých gulí (a žiadny indukovaný náboj). Celú túto situáciu môžeme "navariť" nasledovne: Vezmime dve sústavy dvoch gulí, ako boli opisované v predchádzajúcom odstavci a vhodne ich preložme cez seba (tj. jednu sme zrkadlovo otočili) (preložiť znamená, že v každom bode sčítame potenciály aj hustoty náboja od obidvoch sústav). Z princípu superpozície však vieme, že guľa bude mať potenciál 2φ ($= \varphi + \varphi$). Tento potenciál vznikol z dvoch príspevkov nabitých gulí a teda príspevok jednej gule je presne φ, čo je ale **celkový** potenciál gule v prípade z minulého odstavca. V prípade z minulého odstavca teda príspevok od indukovaného náboja musí byť **nulový**.

Tento výsledok nám umožňuje pri počítaní potenciálov zanedbávať prerozdelenie náboja na guliach v dôsledku indukovaného náboja (guľa má nejaký vlastný náboj, ktorý sa v každom mieste sčíta s indukovaným a výsledok vyzerá tak, ako keby sa pôvodný náboj trochu preskupil). Uvedomte si však, že tento výsledok sme museli pracne vypotiť a je vrcholne ohyzdné tváriť sa, ako keby šlo o samozrejmosť.



Zvyšok príkladu sú viac menej mechanické rátačky: Označme výsledné náboje a potenciály na prostrednej guli ako Q_1 a φ_1, na krajných guliach ako Q_2 a φ_2. Pre potenciály môžeme napísať rovnice:

$$\varphi_1 \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_1}{r} + 2\frac{Q_2}{a}\right],\ \varphi_2 \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_2}{r} + \frac{Q_1}{a} + \frac{Q_2}{2a}\right]$$

Približnosť týchto rovníc spočíva v tom, že nevieme presne povedať, ktoré číslo z intervalu $\langle a-r, a+r\rangle$ máme považovať za vzdialenosť susedných gulí pri výpočte potenciálu. To nás ale trápiť nemusí pokiaľ $r<<a$. Riešením sústavy rovníc $\varphi_1 = \varphi_2$ (gule sú predsa vodivo spojené) a $Q_1 + 2Q_2 = 3Q$ dostaneme

$$Q_1 = Q - \frac{2r}{6a-7r}Q,\ Q_2 = Q + \frac{r}{6a-7r}Q$$

Na každú krajnú guľu teda pritečie z prostrednej gule náboj približne $\frac{r}{6a}Q$. Ak chceme ešte zistiť, koľko tepla sa pri tomto preskupovaní náboja uvoľní, musíme spočítať energie gulí. Pre energiu gule s nábojom Q a potenciálom φ platí $E = -Q.\varphi/2$. Keďže už máme vzorce pre potenciály φ_1, φ_2 a vieme tiež, koľko náboja sa spojením preskupí, je už iba otázkou mechanického rátania, dostať sa k približnému výsledku

$$\frac{Q^2}{48\pi\varepsilon_0 a}\frac{r}{a},$$

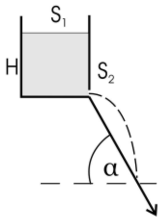
ktorého približnosť spočíva v tom, že sme zanedbali členy vyšších rádov. A to je už všetko, čo bolo treba spočítať.

Niekoľko slov k vašim riešeniam. Veľa z Vás zanedbalo všetky členy typu r/a, ktoré Vám prišli pod ruku, a tak ste zistili, že náboj sa vôbec nepreskupí. V zadaní sme síce napísali, že r je zanedbateľne malé voči a, ale ak zanedbáte všetky r, dostanete triviálne riešenie, za ktoré nemôžete mať plný počet bodov. Z tejto úlohy si zoberte nasledujúce ponaučenie. Ak sa niekde spomína malosť veličiny r voči veličine a (obe musia byť v rovnakých jednotkách!!!), znamená to, že vo výpočtoch beriete do úvahy len najnižšie mocniny podielu r/a. Názorná ukážka:

$$48 + 2\frac{r}{a} - 15\frac{r^2}{a^2} \ldots \approx 48 + 2\frac{r}{a}$$

Na záver dodávam, že to bol príklad ťažký a netreba sa ním nechať zdeptať. Pôvodne sme vám chceli dať z elektrostatiky rátať niečo máličko jednoduchšie. Nepodarilo sa a hneď po odhalení vinníkov budem potrestaný.

A–2.4 Vodný výron (opravoval Robo A.)



Nádoba tvaru kvádra s obsahom podstavy S_1 je naplnená vodou do výšky H. Na spodku nádoby je zboku otvor s obsahom S_2 ($S_2 << S_1$), ktorým môže z nádoby vytekať voda vodorovným smerom. Pri otvore je umiestnená nekonečná naklonená rovina, ktorá zviera s vodorovným smerom uhol α (pozri obrázok). Za aký čas T dopadne posledná kvapka vody z nádoby na túto naklonenú rovinu?

Ahojte. Predpokladám, že ste už kvôli vodnému výronu vyronili mnoho sĺz, a preto sa radšej rýchlo pustíme do riešenia. Z dna nádoby, ktorá je naplnená vodou do výšky h, vyteká voda podľa Torricelliho vzťahu rýchlosťou $v_2 = \sqrt{2gh}$ (ľahko to môžeme dostať z Bernoulliho rovnice $\varsigma gh = \varsigma v_2^2 / 2$). Hladina vody v nádobe potom podľa rovnice kontinuity klesá rýchlosťou

$$v_1 = v_2 S_2 / S_1 = S_2 \sqrt{2gh} / S_1,$$

z čoho pre h dostaneme $$h = S_1^2 v_1^2 / 2g S_2^2.$$

(keď to porovnáme s rovnicou pre rovnomerne zrýchlený pohyb $h = at^2/2 = v^2/2a$, ihneď si všimneme[2] jednoznačnú podobnosť a vidíme, že rovnice sú totožné pre $a = gS_2^2 / S_1^2$). Môžeme teda povedať , že vodná hladina v nádobe klesá rovnomerne spomalene, so spomalením a. Potom všetka voda vytečie z nádoby za čas

$$t_H = \sqrt{\frac{2H}{a}} = \frac{S_1}{S_2}\sqrt{\frac{2H}{g}}\ .$$

Teraz potrebujeme vyjadriť závisosť času od začiatku vytekania od rýchlosti, ktorou voda práve vyteká. Keďže závislosť rýchlosti od aktuálnej výšky hladiny máme, stačí nám vyjadriť čas od začiatku ako rozdiel času, za ktorý vytečie z nádoby všetka voda a času, za ktorý by vytiekla voda, ktorá je v nádobe aktuálne:

$$t_1 = \frac{S_1}{S_2}\sqrt{\frac{2H}{g}} - \frac{S_1}{S_2}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{S_1}{S_2}\left(\sqrt{\frac{2H}{g}} - \frac{v_2}{g}\right).$$

Teda už máme skoro všetku robotu za sebou. Keď zvolíme počiatok súradnicovej sústavy do bodu, z ktorého voda vyteká, je rovnica priamky (teda vlastne roviny), na ktorú voda dopadá[3]

$$y = -\,x\,tg\ \alpha.$$

Poloha kvapky, ktorá vyletela z nádoby rýchlosťou v_2 je v čase t_2 od vyletenia popísaná v týchto súradniciach rovnicami:

---

[2] Je to už tak, svet je bohatý na javy a chudobný na závislosti (hlavne, pokiaľ dosť zanedbávame a zjednodušujeme), ktoré ich popisujú. Preto je bežné, že podobne ako tu, medzi dvoma javmi nájdete analógiu ktorá vám celú plejádu výsledkov dá úplne „zadarmo“. Zaujímavé sú napríklad analógie medzi mechanickými a elektrickými oscilátormi (RLC).

[3] Iným (pre niektoré príklady veľmi vhodným) spôsobom opisu je zvoliť si súradnicovú sústavu tak, aby naklonená rovina splývala s osou x. Vtedy istá zložka g urýchľuje kvapku v smere osi x, čo však spôsobí len minimálne komplikácie.

$$x = v_2 t_2; \qquad y = -gt_2^2 / 2.$$

Keď sa trajektória kvapky pretne s naklonenou rovinou, musia sa logicky súradnice kvapky a roviny zhodovať, teda

$$-gt_2^2/2 = -v_2 t_2 \, tg\, \alpha, \text{ čiže } v_2 = gt_2 / 2tg\, \alpha.$$

Dosadením tohto poznatku do rovnice pre cas t_1 dostaneme:

$$t_1 = \frac{S_1}{S_2}\left(\sqrt{\frac{2H}{g}} - \frac{t_2}{2tg\alpha}\right).$$

Odtiaľ vyjadríme t_2, dosadíme ho do rovnice pre celkový čas, teda súčet času, ktorý kvapka strávila v nádobe a času, ktorý letela vzduchom (pre výpočet vákuuom) a dostaneme:

$$T = t_1 + t_2 = \left(1 - 2\frac{S_2}{S_1} tg\alpha\right) t_1 + \sqrt{\frac{2H}{g}} 2tg\alpha .$$

Druhý sčítanec je vlastne konštanta zhodná pre všetky kvapky, takže výsledok neovplyvní. Dôležitý je teda výraz v zátvorke. Ak je kladný, teda $tg\alpha \leq S_1 / 2S_2$, podnikne najzdĺhavejšiu púť kvapka, ktorá má najväčšie t_1, teda kvapka, ktorá vyletela z nádoby ako posledná. Táto kvapka sa ale vlastne ihneď dotkne naklonenej roviny. Teda posledná kvapka sa dotkne naklonenej roviny presne za čas, za ktorý vytečie všetka voda z nádoby: $T = t_H = \frac{S_1}{S_2}\sqrt{\frac{2H}{g}}$.

Ak je výraz v zátvorke záporný, teda $tg\alpha \geq S_1 / 2S_2$, bude trvať cesta najdlhšie kvapke, ktorá bude mať najmenšie možné t_1, čo je t_1=0. Potom sa posledná kvapka dotkne naklonenej roviny za čas rovný len druhému sčítancu: $T = \sqrt{\frac{2H}{g}} 2tg\alpha$.

Posledná kvapka vody dopadne na naklonenú rovinu za čas určený jedným z týhto dvoch vzťahov. Ktorý to je, určuje vzťah medzi zadanými veličinami α, S_1, S_2. A ešte jeden bonus. Je zrejmé, že ak je výraz v zátvorke rovný nule, dopadnú všetky kvapky na naklonenú rovinu naraz, čo je zaujímavý výsledok. Dúfam, že sa z neho tešíte rovnako ako ja☺