FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 1. série
B – kategória (mladší)
22. ročník
zimný semester
školský rok 2006/2007

www. **.sk**

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@gmail.com
info@fks.sk

B-1.1 Squash (opravoval Robo A.)

Juro má strašne rád squash. Tak, že ho pretlačil aj do FKS. Podľa oficiálnych pravidiel medzinárodnej squashovej federácie WSF sa má loptička po spustení z výšky jeden meter odraziť do výšky 28 cm. Vtedy sa hráčom hrá najlepšie. Aký je pomer rýchlostí loptičky tesne pred dopadom a tesne po odraze?

Pozdravujem všetkých prvákov, ktorí sa rozhodli riešiť výborný korešpondenčný seminár. Oddychu bolo však už v lete dosť, a preto sa pusťme do príkladu.

Keď pustíme squashovú loptičku, bude padať k zemi rovnomerne zrýchleným pohybom so zrýchlením g. Za čas t prejde loptička vzdialenosť $h_1 = gt^2/2$ a získa rýchlosť $v_1 = gt$. Vylúčením času z týchto rovníc dostaneme $h_1 = v_1^2/2g$, kde v_1 je rýchlosť loptičky tesne pred dopadom. Nech má loptička tesne po odraze rýchlosť v_2, pričom sa začne pohybovať nahor so zrýchlením opačného smeru veľkosti g. Loptička vyletí do výšky h_2, v ktorej má nulovú rýchlosť, teda $0 = v_2 - gt$, z čoho $v_2 = gt$. Pre výšku h_2 potom platí

$$h_2 = v_2 t - gt^2/2 = v_2^2/g - v_2^2/2g = v_2^2/2g.$$

Vidíme teda, že loptička potrebuje na to, aby vyletela do výšky h_2 rovnako veľkú počiatočnú rýchlosť, akú by nadobudla pádom z výšky h_2. Použitím tohto poznatku dostaneme pre pomer rýchlostí:

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{2gh_1}{2gh_2}} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} = \sqrt{\frac{25}{7}} \approx 1{,}89$$

Príklad sa dal riešiť aj cez energie. Počas celého tohto deja totiž loptička stráca mechanickú energiu iba pri odraze. Vieme, že sa odrazí len do 0,28násobku svojej pôvodnej výšky, takže po odraze nadobudne len 0,28násobok pôvodnej potenciálnej energie. Pri odraze teda mala len 0,28násobok kinetickej energie pred odrazom. (Pri odraze sa stráca len kinetická energia, potenciálna je v mieste odrazu stále tá istá!) A tak dostávame finálnu rovnicu skoro zadarmo:

$$E_{k2}/E_{k1} = (½mv_2^2)/(½mv_1^2) = v_2^2/v_1^2 = 0{,}28$$

$$v_1/v_2 = \sqrt{1/0{,}28} = \sqrt{25/7}$$

A tým sme vyriešili squashový problém.

B-1.2 Infantilné zábavky (opravoval Robo K.)

Keď sa s kolegom Reném chceme odreagovať, vymýšľame občas dobré huncútstva. Medzi naše najobľúbenejšie ezoterické pokusy patrí odbublinkovávanie minerálky. Robí sa to takto: Vezmete Budiš – perlivú 1,5 litrovú minerálku, máličko z nej odchlipnete a pridáte 3 kocky klasického kockového cukru. Vašou úlohou je čo najpresnejšie zmerať množstvo plynu, ktorý sa pri tom z fľaše uvoľní.

Čaute fšetci „infantilní" experimentátori, osobitne pozdravujem tých, čo trpia syndrómom ORL[1] a spôsobili menšiu záplavu v kuchyni tak, ako ja. Napriek

tomu verím, že vo vás ostanú len príjemné zážitky a na podobné „technické detaily" sa s časom exponenciálne zabudne.;-)

Apropo, keď už spomínam technickosť, práve v nej popri estetickej stránke spočívalo čaro úlohy. A síce šlo o to nájsť najvhodnejší spôsob, ako unikajúci oxid uhličitý, ktorý rozpúšťajúci sa cukor z budišky vytláčal, odmerať (či už jeho hmotnosť, alebo objem). Väčšina z vás využila jeden z dvoch rozličných prístupov, ktoré si na nasledujúcich pár riadkoch podrobnejšie popíšeme.

Taakže ... najjednoduchšou a zároveň najpresnejšou metódou je metóda (pracovne nazvaná) „otvor a odváž". Odvážim si fľašu „v panenskom stave" pred jej otvorením, odkrútim uzáver, vhodím kocky

---

1obe ruky ľavé

cukru, počkám, kým prebehne šumivá reakcia a fľašu opäť odvážim. Vzniknutý hmotnostný rozdiel, po zohľadnení hmotnosti vhodeného cukru, prehlásim za hmotnosť uniknutého CO_2. Limitom tejto metódy je možnosť zaobstarať si elektronické laboratórne váhy vážiace v rozsahu gramov až miligramov.

Najčastejšie využívanou metódou bolo preto zachytávať unikajúci plyn do všakovakých nádob, odmerných valcov, balónikov, sáčkov, prezervatívov, plastových tašiek nemenovaných obchodných reťazcov a pod.; či už priamo alebo prostredníctvom sofistikovaného systému trubičiek. Vaše namerané hodnoty boli rozptýlené v dosť veľkom intervale od 50 po 1 500 ml. Určite sa pýtate, prečo je tomu tak ... Je to spôsobené tým, že na naše meranie vplýva množstvo rôznorodých vplyvov: teplota minerálky (vplýva na rozpustnosť CO_2 a cukru; čím vyššia teplota, tým nižšia rozpustnosť oxidu uhličitého), tlak (pod akým tlakom bola fľaša dosycovaná oxidom uhličitým), „vek“ minerálky (PET fľaša Budišky nie je „vzduchotesná“, ale má póry, cez ktoré CO_2 difunduje), použitý zachytávací materiál (balón má iné mechanické vlastnosti ako prezervatív) a mnoho ďalších. To sú faktory, ktoré sú nezávislé od našej technickej zručnosti. Tento celý odsek sa v hantírke experimentátora nazýva „diskusia“, t.j. slovné pojednanie o javoch, ktoré vplývajú, prípadne môžu vplývať na nameranú (alebo z experimentálnych dát vypočítanú) hodnotu veličiny.

Už sme sa teda dozvedeli, že sú okolnosti pri meraní, ktoré vieme ovplyvniť len minimálne. Čo však ovplyvniť vieme, sú odchýlky spôsobené tzv. chybami merania. Môže ísť napríklad o nepresnosť odčítania na stupnici meradla, únik plynu z nedokonalej meracej aparatúry, „jedinečnosť“ experimentálneho materiálu[2] a všakovaké iné javy. Pri experimentálnych úlohách platí, že presnosť získaného výsledku sa zvyšuje s počtom urobených meraní a výsledok udávam ako priemernú hodnotu z jednotlivých meraní ± odchýlka (vypočítaná, alebo rozumne odhadnutá a zdôvodnená).

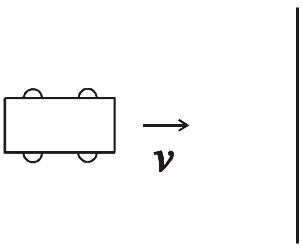
Čo nás ešte môže interesovať, je hmotnosť uniknutého oxidu uhličitého. Použitím stavovej rovnice v tvare $pV = (m / M)RT$ pri objeme zachyteného plynu V = 1000 ml vychádza jeho hmotnosť na približne dva gramy. Môžeme teda s kľudným svedomím rezignovať na meranie dvadsaťročnými kuchynskými váhami ☺.

Stručne pár slov k bodovaniu. Veľa z vás si vo výsledkovej listine nenájde „plný zásah“. Je to preto, že buď vám chýbala diskusia (-0,5 b) alebo ste meranie neopakovali bez patričného zdôvodnenia!!, čo v prípade experimentálnych úloh nie je prípustné bez následku bodovej zrážky (-0,5 b). Zdôvodnenie vlastne predstavuje odpoveď na otázku, prečo sa principiálne viacnásobným meraním množstva uniknutého CO_2 nedopracujem k presnejšiemu výsledku. Stručne povedané preto, lebo pri meraní nedokážem zabezpečiť stálosť podmienok, za akých meranie uskutočňujem (pozri ešte raz tretí odstavec).

Na záver malý reklamný slogan: Budiš FKS riešiti, budiš dlougo žiti. S chuťou do ďalšej série! ☺
Vzorák obohatila svojimi fotozábermi Katka Tureková, ktorej touto formou medializácie vyjadrujem osobitné poďakovanie za priložené CD ☺.

B-1.3 Dohára mi knôtik! (opravoval Peťo a Robo A.)

Nikdy nejazdite nevyspaní! Inak sa vám môže stať to, čo kolegovi Renému. Spí svojím typicky hlbokým spánkom a zrazu sa zobudí v aute idúcom rýchlosťou v, ktoré sa kolmo rúti na širokú rovnú stenu. Reného ľavá časť mozgu dostane spásonosný nápad.. šliapnuť na brzdu! Auto sa začne šúchať po vozovke s koeficientom trenia f a snáď sa mu podarí pred prekážkou ubrzdiť. Druhá polovica Reného hlavy prišla s alternatívnym nápadom: Čo tak prudko strhnúť volant? Auto by sa tým začalo pohybovať po kružnici s polomerom R a snáď sa stene vyhne. Polomer R môže byť pri tom tak malý ako sa len dá, akurát, že auto nesmie z danej kružnice „vyletieť“. Pri pohybe po kružnici auto nebrzdí, stále má rýchlosť v. Predpokladajte, že cesta je dostatočne široká, aby z nej nevyletel.



[2] každá fľaša budišky je v určitom zmysle originálom

Zistite, aké sú minimálne vzdialenosti steny a auta potrebné na vyhnutie sa prekážke v obidvoch prípadoch.

Ahojte. Rozoberme najprv nápad ľavej časti Reného mozgu. Ak sa auto šmýka po ceste s koeficientom trenia f a jeho hmotnosť je napríklad m, znamená to, že naň pôsobí brzdiaca sila veľkosti mgf (kde g je tiažové zrýchlenie). Nás zaujíma brzdná dráha auta, takže by sme radi vedieť zrýchlenie a (je záporné, lebo auto spomaľuje). Pohybová rovnica vyzerá

$$ma = -mgf\ .$$

Matematicky zručný čitateľ vzoráku si ako cvičenie môže z tejto rovnice odvodiť, že auto spomaľuje so spomalením $|a| = gf$:-) Ak sa v okamihu zobudenia Reného auto pohybuje rýchlosťou v, s takýmto spomalením bude mať brzdnú dráhu

$$s = \frac{v^2}{2|a|} = \frac{v^2}{2gf}\ .$$

Tento výsledok si zapamätajme a uvažujme o pravej polovici mozgu. Z prváckych hodín fyziky vieme, že aby sa teleso s hmotnosťou m pohybovalo rýchlosťou v po kružnici s polomerom R, treba na to dostredivú silu s veľkosťou mv^2/R. Akú silu máme my? Jediná rozumná sila v príklade je trecia F_t s veľkosťou mgf. Rozdiel oproti prvému prípadu bude ten, že jej zložka v smere pohybu auta bude nulová (veľkosť rýchlosti sa nemení). Táto trecia sila bude spomínanou dostredivou silou, pôjde však o statické trenie a bude platiť

$$\frac{mv^2}{R} = F_t \le mgf\ .$$

Rovnosť nastane v hraničnom prípade, kedy auto ide už-už vyletieť z kružnicovej trajektórie. Z tohto vzťahu vidíme, že najmenšie možné R je rovné $\frac{v^2}{gf}$. Ale toto R je predsa najmenšia možná vzdialenosť, ktorú môže mať auto, aby nenarazilo do steny. Pri obyčajnom šliapnutí na brzdu je brzdná dráha a teda aj bezpečná vzdialenosť steny dvakrát menšia, takže Renému môžeme poradiť, aby nevymýšľal a poslúchol ľavú časť svojej hlavy.

B-1.4 Dve gule (opravovali Bea a Škrek)

Predstavte si dve skoro úplne rovnaké gule. Obidve majú rovnaký polomer, hmotnosť, povrchovú štruktúru, röntgenové snímky, zvuk ktorý vydávajú pri klopkaní.. jediný rozdiel je, že jedna guľa má v strede malú guľovú dutinku (je teda zhotovená z materiálu s trochu väčšou hustotou). Navrhnite spôsob, ako sa takéto dve gule dajú od seba odlíšiť, bez toho, aby sme ich rozrezali.

Ahojte, deťušiky. Pár vecí k tomu, čo ste robiť nemali. V prvom rade nebolo povolené žiadne pitvanie (leda ak by niekto vyrezával z guliek snehovú vločku ☺), ani ich roztavovanie. Ak ďalej nezanedbáme efekt menenia objemu materiálu, nemôžeme použiť ani mernú tepelnú kapacitu. A ešte dosť častá vec – ani strkať ich do vody vám nepomôže, lebo majú rovnaký objem aj hmotnosť.

Čo ale viem využiť, je rozloženie materiálu v guľkách. Túto vlastnosť popisuje fyzikálna veličina moment zotrvačnosti:

$$J = \sum_i m_i r_i^2\ .$$

Zoberiem si dve gule a z rovnakej výšky ich skotúľam. Pôvodne majú rovnakú potenciálnu energiu E_p, ktorá sa postupne mení na kinetickú posuvnú E_{kp} a rotačnú E_{kr}:

$$E_{kp} = ½\, mv^2 \qquad \text{a} \qquad E_{kr} = ½\, J\omega^2 = ½\, J\,(v / r)^2$$

Guľa s dutinkou má však hmotu sústredenú ďalej od stredu, preto má väčší moment zotrvačnosti a teda „spotrebuje" viac energie na rotáciu ako na posun. Dôsledkom bude, že sa guľa s dutinkou rozkotúľa pomalšie ako jej „seriózna kolegyňa". Inými slovami,

$$E_k = ½\, mv^2 + ½\, J\omega^2 = ½\, (m + J/r^2)\, v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m + J/r^2}}$$

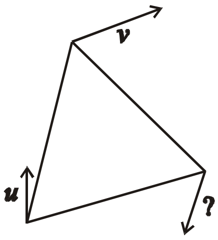
a keďže obe gule majú v rovnakej výške rovnaké E_k, m aj r, iba dutá má väčšie J, bude mať potom menšiu rýchlosť v.

Alebo na to môžeme ísť opačne. Rozrotujeme obe gule rovnakou uhlovou rýchlosťou. Pustíme ich friško gúľať sa po rovine a keď si porovnáme kinetické energie oboch gúľ, guli s dutinkou sme jej udelili viac, teda jej viac aj môže spotrebovať. Z toho vyplýva, že sa pogúľa ďalej.

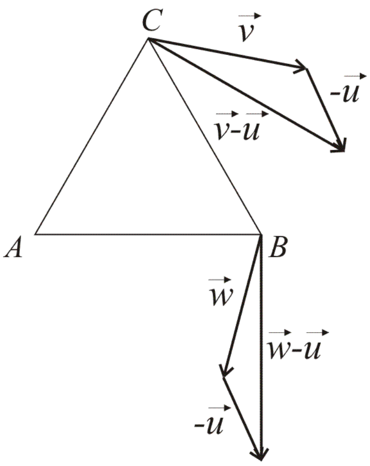
Poznámka: Zisťovať mernú tepelnú kapacitu je výhodné zisťovať len v prípade, že chcete zistiť, či sú gule rozdielne. A teda zistíte, že rôzne sú. No a čo potom, no nič. Leda tak zobrať si tabuľky, ale my ako viac menej škodoradostní vedúci by sme vám podstrčili gule z neznámych materiálov. Hihiň:-D

B-1.5 René (opravovali Peťo a Maťo)

Dlhé nudné dni dovolenky si René kráti tým, že chodieva pomáhať kamarátovi na stavbu jeho domu. Minule spolu s ďalšími dvoma robotníkmi niesli dosku v tvare rovnostranného trojuholníka. Každý ju pevne chytil v jednom rohu a šlo sa. Robotníci sa pohli rýchlosťami u,v, tak, ako na obrázku. Ako sa má pohybovať René, aby dosku stále držal za svoj roh? Doska je dokonale pevná, teda neroztiahnuteľná a počas celého cirkusu je držaná vodorovne. Úlohu riešte pre všeobecne vektory u,v.



Ahojte. Tak na začiatok: päťnohý slon nie je trojnohý krtko <=> rýchlosti nie sú sily. Väčšina z Vás len skladala vektory a malá skupinka bola blízko od správneho riešenia, ale ich riešenie zahŕňalo aj nekorektný vstup, ktorý im potom dal zlý výsledok. Všeobecné riešenie tohoto príkladu spočívalo v použití známeho „prechodu do inej vzťažnej sústavy". Pozrime sa na dosku očami robotníka idúceho rýchlosťou $\vec{u}$. Vrchol, pri ktorom stojí tento robotník označíme A, ostatné proti smeru hodinových ručičiek B,C (René je v B). Podľa robotníka v A (v jeho vzťažnej sústave) jeden roh trojuholníka stojí a zvyšné dva sa pohybujú rýchlosťami $\vec{v} - \vec{u}$ a $\vec{w} - \vec{u}$, kde $\vec{w}$ je hľadaná rýchlosť Reného. Trojuholník sa nedá netiahnuť ani roztrhnúť, preto nová rýchlosť $\vec{v} - \vec{u}$ vrcholu C, ktorý sa v stojacej vzťažnej sústave pohyboval rýchlosťou $\vec{v}$, musí byť teraz kolmá na jednu zo strán trojuholníka, spojnicu AC. Ak by nebola, bol by to nekorektný vstup a neexistovalo by riešenie. Podobne Reného rýchlosť je kolmá na AB. Celá situácia je znázornená na obrázku. V tejto vzťažnej sústave ide len o obyčajné otáčanie, preto veľkosti rýchlostí $\vec{v} - \vec{u}$ a $\vec{w} - \vec{u}$ musia byť rovnaké a ich smery zvierajú uhol 60°. Recept na výrobu Reného rýchlosti by mohol vyzerať asi takto:



1. K rýchlosti $\vec{v}$ vektorovo pripočítaj $-\vec{u}$.
2. Otoč to o 60° v smere hodinových ručičiek.
3. Pripočítaj $\vec{u}$ - návrat do stojacej vzťažnej sústavy.

Toto je riešenie, ktoré ste schopní urobiť pomocou rysovacích potrieb, ak vám niekto nakreslí obrázok s rýchlosťami $\vec{u}$, $\vec{v}$. Keby ste mali zadané aj zložky týchto vektorov (u_x,u_y),(v_x,v_y), výpočtom by ste dostali

[illegible]

[illegible]

Ale toto si už spočítajte sami:-), na riešenie tejto úlohy to nebolo treba.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

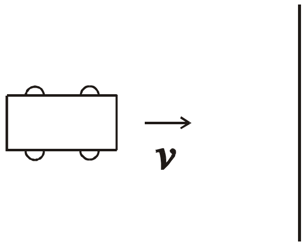
vzorové riešenia 1. série
A – kategória (starší)
22. ročník
zimný semester
školský rok 2006/2007

www. **.sk**

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@gmail.com
info@fks.sk

A-1.1 Dohára mi knôtik! (opravoval Marek)

Nikdy nejazdite nevyspaní! Inak sa vám môže stať to, čo kolegovi Renému. Spí svojím typicky hlbokým spánkom a zrazu sa zobudí v aute idúcom rýchlosťou v, ktoré sa kolmo rúti na širokú rovnú stenu. Reného ľavá časť mozgu dostane spásonosný nápad.. šliapnuť na brzdu! Auto sa začne šúchať po vozovke s koeficientom trenia f a snáď sa mu podarí pred prekážkou ubrzdiť. Druhá polovica Reného hlavy prišla s alternatívnym nápadom: Čo tak prudko strhnúť volant? Auto by sa tým začalo pohybovať po kružnici s polomerom R a snáď sa stene vyhne. Polomer R môže byť pri tom tak malý ako sa len dá, akurát, že auto nesmie z danej kružnice „vyletieť“. Pri pohybe po kružnici auto nebrzdí, stále má rýchlosť v. Predpokladajte, že cesta je dostatočne široká, aby z nej nevyletel.



Zistite, aké sú minimálne vzdialenosti steny a auta potrebné na vyhnutie sa prekážke v obidvoch prípadoch.

Ahojte. Rozoberme najprv nápad ľavej časti Reného mozgu. Ak sa auto šmýka po ceste s koeficientom trenia f a jeho hmotnosť je napríklad m, znamená to, že naň pôsobí brzdiaca sila veľkosti mgf (kde g je tiažové zrýchlenie). Nás zaujíma brzdná dráha auta, takže by sme radi vedieť zrýchlenie a (je záporné, lebo auto spomaľuje). Pohybová rovnica vyzerá

$$ma = -mgf\ .$$

Matematicky zručný čitateľ vzoráku si ako cvičenie môže z tejto rovnice odvodiť, že auto spomaľuje so spomalením $|a| = gf$:-) Ak sa v okamihu zobudenia Reného auto pohybuje rýchlosťou v, s takýmto spomalením bude mať brzdnú dráhu

$$s = \frac{v^2}{2|a|} = \frac{v^2}{2gf}\,.$$

Tento výsledok si zapamätajme a uvažujme o pravej polovici mozgu. Z prváckych hodín fyziky vieme, že aby sa teleso s hmotnosťou m pohybovalo rýchlosťou v po kružnici s polomerom R, treba na to dostredivú silu s veľkosťou mv^2/R. Akú silu máme my? Jediná rozumná sila v príklade je trecia F_t s veľkosťou mgf. Rozdiel oproti prvému prípadu bude ten, že jej zložka v smere pohybu auta bude nulová (veľkosť rýchlosti sa nemení). Táto trecia sila bude rovná spomínanej dostredivej sile, pôjde však o statické trenie a bude platiť

$$\frac{mv^2}{R} \le F_t = mgf\ .$$

Rovnosť nastane v hraničnom prípade, kedy auto ide už-už vyletieť z kružnicovej trajektórie. Z tohto vzťahu vidíme, že najmenšie možné R je rovné $\frac{v^2}{gf}$. Ale toto R je predsa najmenšia možná vzdialenosť, ktorú môže mať auto, aby nenarazilo do steny. Pri obyčajnom šliapnutí na brzdu je brzdná dráha a teda aj bezpečná vzdialenosť steny dvakrát menšia, takže Reném môžeme poradiť, aby nevymýšľal a poslúchol ľavú časť svojej hlavy.

A-1.2 Infantilné zábavky (opravoval Robo K.)

Keď sa s kolegom Reném chceme odreagovať, vymýšľame občas dobré huncútstva. Medzi naše najobľúbenejšie ezoterické pokusy patrí odbublinkovávanie minerálky. Robí sa to takto: Vezmete Budiš – perlivú 1,5 litrovú minerálku, máličko z nej odchlipnete a pridáte 3 kocky klasického kockového cukru. Vašou úlohou je čo najpresnejšie zmerať množstvo plynu, ktorý sa pri tom z fľaše uvoľní.

Čaute fšetci „infantilní“ experimentátori, osobitne pozdravujem tých, čo trpia syndrómom ORL[1] a spôsobili menšiu záplavu v kuchyni tak, ako ja. Napriek tomu verím, že vo vás ostanú len príjemné zážitky a na podobné „technické detaily“ sa s časom exponenciálne zabudne.;-)

Apropo, keď už spomínam technickosť, práve v nej popri estetickej stránke spočívalo čaro úlohy. A síce šlo o to nájsť najvhodnejší spôsob, ako unikajúci oxid uhličitý, ktorý rozpúšťajúci sa cukor z budišky vytláčal, odmerať (či už jeho hmotnosť, alebo objem). Väčšina z vás využila jeden z dvoch rozličných prístupov, ktoré si na nasledujúcich pár riadkoch podrobnejšie popíšeme.

Taakže ... najjednoduchšou a zároveň najpresnejšou metódou je metóda (pracovne nazvaná) „otvor a odváž“. Odvážim si fľašu „v panenskom stave“ pred jej otvorením, odkrútim uzáver, vhodím kocky cukru, počkám, kým prebehne šumivá reakcia a fľašu opäť odvážim. Vzniknutý hmotnostný rozdiel, po zohľadnení hmotnosti vhodeného cukru, prehlásim za hmotnosť uniknutého CO_2. Limitom tejto metódy je možnosť zaobstarať si elektronické laboratórne váhy vážiace v rozsahu gramov až miligramov.

Najčastejšie využívanou metódou bolo preto zachytávať unikajúci plyn do všakovakých nádob, odmerných valcov, balónikov, sáčkov, prezervatívov, plastových tašiek nemenovaných obchodných reťazcov a pod.; či už priamo alebo prostredníctvom sofistikovaného systému trubičiek. Vaše namerané hodnoty boli rozptýlené v dosť veľkom intervale od 50 po 1 500 ml. Určite sa pýtate, prečo je tomu tak ... Je to spôsobené tým, že na naše meranie vplýva množstvo rôznorodých vplyvov: teplota minerálky (vplýva na rozpustnosť CO_2 a cukru; čím vyššia teplota, tým nižšia rozpustnosť oxidu uhličitého), tlak (pod akým tlakom bola fľaša dosycovaná oxidom uhličitým), „vek“ minerálky (PET fľaša Budišky nie je „vzduchotesná“, ale má póry, cez ktoré CO_2 difunduje), použitý zachytávací materiál (balón má iné mechanické vlastnosti ako prezervatív) a mnoho ďalších. To sú faktory, ktoré sú nezávislé od našej technickej zručnosti. Tento celý odsek sa v hantírke experimentátora nazýva „diskusia“, t.j. slovné pojednanie o javoch, ktoré vplývajú, prípadne môžu vplývať na nameranú (alebo z experimentálnych dát vypočítanú) hodnotu veličiny.

Už sme sa teda dozvedeli, že sú okolnosti pri meraní, ktoré vieme ovplyvniť len minimálne. Čo však ovplyvniť vieme, sú odchýlky spôsobené tzv. chybami merania. Môže ísť napríklad o nepresnosť odčítania na stupnici meradla, únik plynu z nedokonalej meracej aparatúry, „jedinečnosť“ experimentálneho materiálu[2] a všakovaké iné javy. Pri experimentálnych úlohách platí, že presnosť získaného výsledku sa zvyšuje s počtom urobených meraní a výsledok udávam ako priemernú hodnotu z jednotlivých meraní ± odchýlka (vypočítaná, alebo rozumne odhadnutá a zdôvodnená).

Čo nás ešte môže interesovať, je hmotnosť uniknutého oxidu uhličitého. Použitím stavovej rovnice v tvare $pV = (m / M)RT$ pri objeme zachyteného plynu V = 1000 ml vychádza jeho hmotnosť na približne dva gramy. Môžeme teda s kľudným svedomím rezignovať na meranie dvadsaťročnými kuchynskými váhami ☺.

Stručne pár slov k bodovaniu. Veľa z vás si vo výsledkovej listine nenájde „plný zásah“. Je to preto, že buď vám chýbala diskusia (-0,5 b) alebo ste meranie neopakovali bez patričného zdôvodnenia!!, čo v prípade experimentálnych úloh nie je prípustné bez následku bodovej zrážky (-1 b). Zdôvodnenie vlastne predstavuje odpoveď na otázku, prečo sa principiálne viacnásobným meraním množstva uniknutého CO_2 nedopracujem k presnejšiemu výsledku.

1obe ruky ľavé

[2] každá fľaša budišky je v určitom zmysle originálom

Stručne povedané preto, lebo pri meraní nedokážem zabezpečiť stálosť podmienok, za akých meranie uskutočňujem (pozri ešte raz tretí odstavec).

Na záver malý reklamný slogan: Budiš FKS riešiti, budiš dlougo žiti. S chuťou do ďalšej série! ☺

Vzorák obohatila svojimi fotozábermi Katka Tureková, ktorej touto formou medializácie vyjadrujem osobitné poďakovanie za priložené CD ☺.

A-1.3 Výťah (opravoval Martin)

*René, ako povaha od prírody investigatívna a skúmavá, narazil vo svojom živote na netriviálny problém. Do práce sa vozí výťahom, ktorý ide pekelne rýchlo. To René ľahko cíti pri rozbiehaní, pretože cíti poriadny tlak na nohy. Tiež to vníma pri brzdení, keď sa raňajky pýtajú von. Zaujímala by ho však presná rýchlosť výťahu. Navrhnite experiment, ktorým sa rýchlosť podarí zistiť čisto z údajov namerateľných **vo vnútri** výťahu počas jednej cesty nahor. Výťah je od vonkajšieho prostredia úplne odizolovaný, zvukovo, svetelne, hermeticky..*

Taaaaaak….poďme sa pozrieť na to….V prvom rade, aj keď táto úloha nie je experimentálna (teda, stačilo ju zrealizovať iba v hlave ☺), vašou úlohou bolo navrhnúť experiment, ktorý by bol ako-tak uskutočniteľný. V ideálnom prípade aby daný experiment bol realizovateľný s čo najjednoduchšími prístrojmi (teda aby sme nemuseli premiestniť najšpičkovejšie laboratórium NASA do výťahu.

Prvá vec, ktorú si treba uvedomiť je, že ak sa nachádzame v izolovanom výťahu, ktorý sa pohybuje rovnomerne vzhľadom na Zem, tak nemáme šancu zistiť, že ako rýchlo ideme, pokiaľ sa nepozrieme von z výťahu . Toto je v podstate to, čo tak honosne nazývame princíp relativity. Ako teda budeme merať rýchlosť, keď princíp relativity hovorí, že je to nemožné??? No, treba si uvedomiť, že keď zrýchľujeme vo výťahu, tak cítime zrýchlenie a to je jediná merateľná veličina, cez ktorú môžeme zistiť našu výslednú rýchlosť výťahu voči Zemi.

Samozrejme existuje veľa metód, ako merať zrýchlenie a ako zistiť z toho rýchlosť. Prvou možnosťou, ktorá ma napadla, bolo, že sa René postaví na váhu (a to na super váhu, ktorá bude merať okamžité zrýchlenie a hneď ho bude kresliť na graf ako funkciu času). A keďže my vieme, že rýchlosť je plošný obsah pod touto krivkou grafu, tak nám stačí iba zistiť nejako tento plošný obsah a máme výslednú rýchlosť. Tento postup má ale dve veľké nevýhody:

1. Potrebujeme takú super váhu, čo asi nie je normálna výstroj úbohého Reného (Napr. naša váha doma sa ani zďaleka neponáša na takúto super váhu, pretože keď sa na ňu postavím, tak musím počkať cca 5 sekúnd, kým sa ručička na váhe upokojí a ukáže mi koľko vážim)
2. …stačí iba zistiť „nejako“ tento plošný obsah… V skutočnosti zistiť tento plošný obsah nie je také jednoduché a so stredoškolskou matematikou si vieme poradiť iba v prípade, ak by bolo zrýchlenie konštantné. Lenže také zrýchlenie výťahu to môže byť aj veľmi „divoká“ a nepravidelná krivka, s čím si je už možné poradiť iba na počítači.

A práve preto táto metóda nie je až taká dobrá a treba nájsť nejakú inú metódu, ktorá by nám okrem merania zrýchlenia poskytla grátis aj plošný obsah pod grafom (teda po slovensky: dala by nám rovno rýchlosť výťahu).

Tak dajme do ruky Renému iba naklonenú rovinu, guľôčku a stopky. René nastaví rovinu do takého uhla aby sa gulička gúľala dolu ňou počas celej doby zrýchľovania. Samozrejme ako to už vo fyzike chodí, Renému sme dali guličku, ktorá je schopná sa gúľať po naklonenej rovine bez trenia. Takáto gulička sa pohybuje po naklonenej rovine so zrýchlením

$$a = \frac{5}{7}\sin\alpha(a_v + g),$$

kde a_v je zrýchlenie výťahu, sin α je tam kvôli naklonenosti roviny a koeficient 5/7 je taká vec na ktorú väčšina ľudí zabúda. Je spôsobený tým, že guľôčka rotuje a preto časť kinetickej energie sa premieňa na kinetickú energiu rotačného pohybu, čo sa vo výslednom efekte prejaví ako koeficient 5/7.

A keď zistíme plošný obsah pod touto krivkou, tak nám vyjde výsledná rýchlosť guličky

$$v = \frac{5}{7}\sin\alpha(v_v + gt), \tag{1}$$

kde vidíme, že výsledná rýchlosť guľôčky je súčet rýchlosti výťahu a rýchlosti, ktorú by získala guľôčka aj v stojacom výťahu. Prečo je tomu tak? Oficiálnym dôvodom je to, že „zistíme plošný obsah“ a proste to vyjde tak (v čom je podstate schované integrovanie, ale psssst....dá sa to aj „obísť“ a pochopiť bez podobných výdobytkov matematiky. Napr. tak že predstavme si, že výťah zrýchlime v okamžiku a hneď získa výslednú rýchlosť v_v, lenže guľôčka nevie, že sme urýchlili výťah a snaží sa nehýbať...A ujo ktorý by sa pozeral cez sklenenú stenu výťahu by videl, že guľôčka sa skutočne vzhľadom na neho nehýbe, iba výťah ide rýchlosťou v_v. Lenže Renému sa zdá, že on a výťah sa nehýbu a práve, že guľôčka sa hýbe rýchlosťou v_v k podlahe výťahu.)

Rýchlosť guľôčky už ľahko odmeriame (môžme nejakými sofistikovanými metódami (radarom, rôznymi laserovými metódami)), ale napr. jednoduchou metódou je to že guličku necháme z roviny(vo výške h) padnúť na podlahu výťahu a odmeriame ako ďaleko padla. Ide o vodorovný vrh kde platí

$$s = v\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

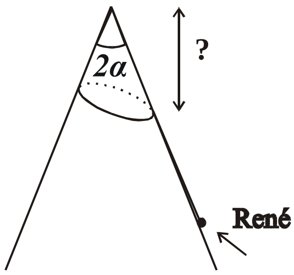
Odtiaľ už ľahko určíme rýchlosť guličky (V tejto rovnici už vážne vystupuje iba g, pretože guličku sme nechali spadnúť z roviny až potom, čo výťah „dozrýchľoval“ a už išiel rovnomerne).

Jediné čo ešte René musí mať, sú stopky, ktorými bude merať čas od začiatku zrýchľovania (vtedy pustil guličku) až pokiaľ gulička nedocestuje na koniec roviny. A potom už stačí iba dosadiť do (1) a vyjadríme si výslednú rýchlosť výťahu v_v.

P.S.: Problémom pri tejto metóde je to, že musíme od našej super guľôčky požadovať, aby sa na začiatku, keď jej udelíme zrýchlenie, neprešmykla. Tu si treba uvedomiť, že na guľôčku pôsobia dva druhy trenia: šmykové trenie (t.j. trenie, ktoré by sme cítili, ak by sme guličku chceli ťahať po podložke bez toho, aby rotovala) a valivé trenie (teda trenie, ktoré pôsobí, keď sa už guľôčka valí po podložke). Na to, aby guľôčka neprešmykla, je podstatné aby šmykové trenie bolo dostatočne veľké a valivé trenie bolo nulové (čo sme požadovali už na začiatku keď sme hovorili, že guľôčka sa valí bez trenia, čím sme mysleli že sa valí bez valivého trenia). Prečo potrebujeme dostatočne veľké šmykové trenie? Predstavme si, že máme guľôčku na podložke a podtrhneme spod nej podložku. Guľôčka sa rozkotúľa a podstatný moment je práve keď podtrhneme podložku, pretože to ju roztočí. Keby bolo šmykové trenie veľmi malé, tak by ju podložka neroztočila dostatočne (čo je v podstate to, že by guľôčka prešmykla). Dostatočne veľké šmykové trenie by spôsobí to, že pohyb podložky sa efektívne premení na rotačný pohyb guľôčky. Takže René potrebuje takúto guľôčku alebo dostatočne nízke zrýchlenie (alebo obe súčasne) na to, aby nič neprešmykovalo a mohol by použiť vyššie opísanú metódu...

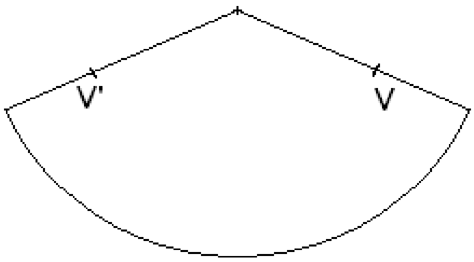
A-1.4 Up up and away (opravoval Marián, vzorák Marcelka)

Kolega René je známy svojou láskou k vysokým horám. Minule sa vybral na horu, ktorá bola celá z ľadu a teda dokonale klzká. Má tvar kužeľa s vrcholovým uhlom 2α, jedná sa teda o jednu z najťažšie zdolateľných hôr vôbec. Aby sa tam vôbec vyškriabal, zobral si na pomoc lano, na konci ktorého je slučka s pevnou dĺžkou l (teda niečo ako laso s nepohyblivou slučkou). Hodil lano na kužeľ a začal šplhať. V akej výške pod vrcholom sa nachádza uzol (spájajúci slučku so zvyškom lana), keď sa lano zaťaží? Výšku Reného zanedbajte. Prémia: Čo sa stane, keď lano nebude mať pevnú slučku, ale slučka sa bude bez trenia sťahovať (ako laso)?



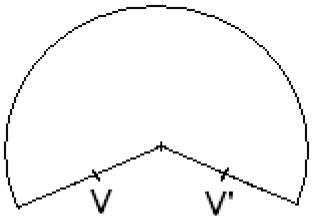
Ahojte. Tento príklad je pekný v tom, že po svojom riešiteľovi nechce veľa rátačiek, ale stačí sa poriadne zamyslieť. Preto si tu ukážeme dva spôsoby zamýšľania sa, ktoré vedú k správnemu riešeniu.

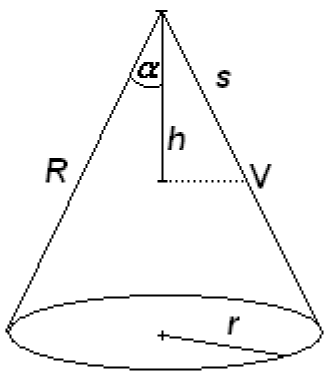
Najprv využijeme skutočnosť, že sústava sa snaží zaujať polohu s čo najmenšou potenciálnou energiou. Keďže v našom prípade temer celú hmotnosť našej sústavy predstavuje René, budeme uvažovať, že René je čo najnižšie. To znamená, že i „výhybka“ na lane (miesto, kde sa spája slučka so zvyškom lana) je čo najnižšie. Pozrime sa na plášť kužeľa „rozbalený“ do roviny. Toto môžeme spraviť bez toho, aby sa pomenili vzdialenosti na kuželi, takže dĺžka lana bude v rovine taká istá. (Zdôvodniť si to môžete tak, že plášť kužeľa vieme spraviť z listu papiera bez toho, aby sme ho krčili. Takže úsečka nakreslená na papieri bude taká dlhá ako „úsečka“ na kuželi, ktorý spravíme z papiera. Napríklad s guľou by nám toto nefungovalo, pretože povrch gule sa takto rozprestrieť do roviny nedá.)
Plášť kužeľa „rozrežeme“ tak, aby rez prechádzal cez výhybku a rozprestrieme. Dostaneme napríklad nasledovný obrázok:

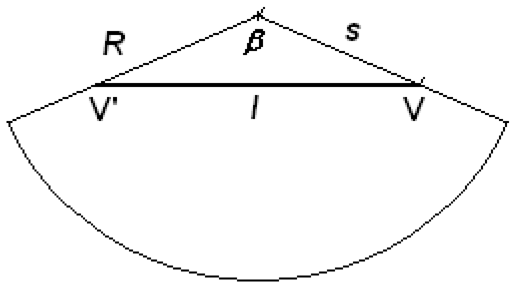


Keďže v bodoch V a V’ je výhybka, lano nimi určite prechádza. Pretože výhybka je čo najnižšie (teda bod V (a V’) je čo najďalej od stredu kruhového výseku), lano bude napnuté medzi bodmi V a V’. (Keby nebolo, mohli by sme výhybku posunúť nižšie tak, že lano napneme.)

Treba si ešte všimnúť, že v prípade kužeľa, ktorý po rozbalení do roviny dáva nekonvexný kruhový výsek, úsečka VV’ leží mimo plášťa – takže neexistuje riešenie s minimálnou potenciálnou energiou. V takom prípade sa slučka zošuchne z kužeľa.







Teraz príde už iba stará známa matika.
Obvod podstavy je $2\pi r$, čo je rovné dĺžke kružnicového oblúka βR.
Ďalej platí: $r = R \sin \alpha$. Po úprave pre uhol β dostávame: $\beta = 2\pi \sin \alpha$.

Pre vzdialenosť bodu V (výhybky) od stredu kruhového výseku platí:

$\sin(\beta / 2) = l / 2s,$ takže $s = l / (2 \sin(\beta / 2)) = l / (2 \sin(\pi \sin \alpha))$

Nakoniec, vzťah medzi výškou výhybky a s-kom:

$$h = s \cos \alpha = l \cos \alpha / (2 \sin(\pi \sin \alpha))$$

Podmienka: $\beta < \pi$, čiže $2\pi \sin \alpha < \pi$, $\sin \alpha < 1 / 2$, takže $\alpha < 30^{\circ}$.

Častou chybou bolo predpokladanie, že slučka na kúželi bude ležať celá v jednej rovine a teda to bude nejaká elipsa, alebo kružnica. Vyskúšajte si nakresliť si na papier rozbalený kúžeľ a slučku ako rovnú čiaru (ako na obrázku), vystrihnite si to a zvinte ten kúžeľ. Uvidíte, že slučka ozaj celá neleží v jednej rovine.

Prémia:

V prémiovej otázke opäť použijeme, že sústava chce mať minimálnu možnú potenciálnu energiu. Takže pohyblivá slučka sa bude sa rozťahovať alebo sťahovať podľa toho, čo dá nižšiu potenciálnu energiu. Už sme zistili, že keď použijeme lano dĺžky l na slučku, podarí sa nám klesnúť o $l \cos \alpha / (2 \sin(\pi \sin \alpha))$. Lano takej istej dĺžky „pod" výhybkou (medzi výhybkou a Reném) robí $l \cos \alpha$. Takže o tom, či sa oplatí slučku rozťahovať alebo sťahovať, rozhoduje faktor $1/2 \sin(\pi \sin \alpha)$. Ak je väčší ako 1, celé lano sa použije na slučku. Ak je menší ako 1, výhybka sa úplne stiahne a René spadne z kužeľa. Keď $1/ (2 \sin(\pi \sin \alpha)) = 1$ ($\alpha = 1/6 \approx 9{,}5^{\circ}$), potenciálna energia nezávisí od veľkosti slučky, takže sa nebude ani rozťahovať, ani sťahovať. Tak a je tu koniec vzoráku a ja sa s vami lúčim s ponaučením: nikdy nechoďťe liezť na ľadovú horu tvaru kužeľa s lanom s voľnou slučkou :)