FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 1. série
B – kategória (mladší)
21. ročník
letný semester
školský rok 2005/2006

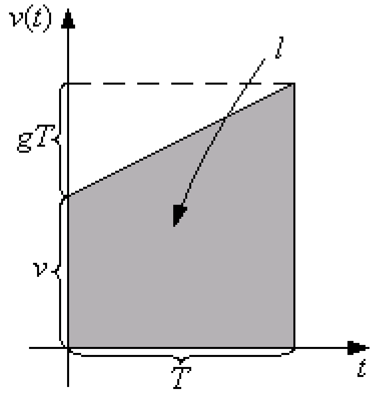
www. **.sk**

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@pobox.sk
riesenia@gmail.com
info@fks.sk

B-2.1 Hádzanie do vzduchu (vzorák Peťo, opravovala Evka)

Sedím si v novom byte a kukám z okna, ktoré má výšku l. Tu zrazu vidím, ako mi pred očami preletel kameň. Šuter letel kolmo hore a úplne tesne popri okne. Na čas t som šuter nevidel a zrazu sa zjaví zase - tentoraz sa vracia smerom nadol. Ako dlho potrvá, kým ho budem vidieť (kým je niekde na úrovni okna)? Odpor vzduchu zanedbajte.

Ahojte. Pozrime sa spolu, ako to s tým kameňom vlastne je. Z prvých stredoškolských hodín fyziky viete, že každé teleso ignorujúce odpor vzduchu sa v homogénnom tiažovom poli pohybuje rovnomerne zrýchlene (alebo spomalene) a to so zrýchlením $g \approx 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$. Keď som kameň videl naposledy, mal nejakú rýchlosť v a letel smerom hore. Ide zrejme o rovnomerne spomalený pohyb, takže kameň zastane po čase v/g. Bolo by zvláštne, keby ostal visieť vo vzduchu, takže hneď začne padať, tentoraz rovnomerne zrýchleným pohybom a za rovnaký čas ako trvala cesta hore dosiahne rýchlosť v a objaví sa na vrchu môjho okna. Polovica času t sa využije na zastavenie kameňa nad oknom, druhá polovica na jeho zrýchlenie na rýchlosť v. Platí teda $t = 2v/g \Rightarrow v = gt/2$. Máme zistiť, ako dlho potrvá kameňu letiacemu z horného konca okna s počiatočnou rýchlosťou v, kým prejde výšku l. Označme tento čas T. Jedným so spôsobov ako ho zistiť je použitie známeho vzorca a riešiť kvadratickú rovnicu:



$$l = vT + \frac{1}{2}gT^2 = \frac{1}{2}gT(t+T) \Rightarrow \frac{1}{2}gT^2 + \frac{1}{2}gtT - l = 0$$

$$T = \frac{-gt/2 + \sqrt{(gt/2)^2 + 2gl}}{g} = \frac{-t + \sqrt{t^2 + 8l/g}}{2}$$

Ak sa vám zdá takéto riešenie nenázorné, skúste si nakresliť graf závislosti rýchlosti kameňa od času, počas jeho pohybu naprieč oknom. Sami si môžete overiť, že správny vzťah medzi T a l dostanete aj tak, že plochu ohraničenú časovou osou a grafom $v(t)$ položíte rovnú prejdenej vzdialenosti l.

B-2.2 Zaručene neinfikovaná labuť (opravoval Robo A.)

Vo veľkom valcovitom sude s prierezom S_1 je voda a v nej pláva čiastočne ponorená doska s plochou S_2. Na doske pristane labuť s hmotnosťou m (predpokladáme, že doska sa s ňou nepotopí úplne). O koľko klesne doska (vzhľadom na zem)?

Čaute. Pozrime sa, čo sa stane s labuťou, ktorá sa nešťastne rozhodla pristáť na tvrdej doske. Chuderka si zlomila nohu a čuduje sa, prečo s ňou doska klesá. No nebuť z toho labuť! Aspoň nám však týmto odvážnym činom umožnila čosi vypočítať.

Nech doska klesne o x a voda stúpne o y. Celkovo sa teda doska do vody ponorí o $x + y$. Toto ponorenie musí vykompenzovať tiaž labute, teda:

$$x + y = \frac{m}{\rho_V S_2}$$

Voda sa však nestráca, takže to, čo sa vytlačí spod dosky ($x.S_2$) sa musí vytlačiť do priestoru medzi doskou a vodou (plocha S_1 - S_2), teda:

$$xS_2 = y(S_1 - S_2),$$

riešením sústavy rovníc máme:

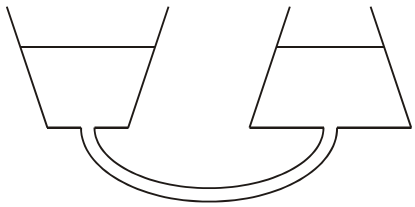
$$x = \frac{m(S_1 - S_2)}{\rho_V S_1 S_2}.$$

Doska teda klesne o hodnotu x, ktorá nezávisí od jej hrúbky a hustoty, čo sa dalo očakávať. Na záver dodám len toľko, že to bol ľahký príklad. Čosi sme si teda vypočítali… len mi stále nie je jasné, čo z toho má tá labuť.

B-2.3 Kontajnery (opravoval Juro)

(UPOZORNENIE: Táto úloha nie je originálna a jej zadanie sme prekladali z angličtiny. Za možné chyby sa ospravedlňujeme, cudzie jazyky nám príliš nejdú, museli sme teda použiť automatický prekladač)

Majme seba mať dva kontajnery s vodou spojené tubou, ako v maľbe. Výšky vodových stĺpca v oboch kontajneroch je rovnaký, takže nič sa deje. Práve budeme zahrejeme vodu v ľavom kontajneri. Bude voda cez tubu plávať a ak áno v ktorom direkcii? Čo keď zahrievaný kontajner bude pravý? Domnievajte, že kontajnere sa teplom nerozťahujú, voda áno.



V prvom rade nemusí uškodiť zamyslieť sa nad situáciou ešte pred tým, ako budeme niečo zahrievať. Podľa zadania by sa v tejto situácii nemalo diať nič. Miasť môže, že v ľavom kontajneri je viac vody ako v pravom a na veľmi pochabý prvý pohľad by sme si teda mohli myslieť, že voda bude pretekať (aj bez zahrievania) zľava doprava. Vieme však, že tlak vody je úmerný iba výške vodného stĺpca (ρgh) a nie celkovému objemu, pričom výška vody je v oboch kontajneroch rovnaká.

Predstavme si teraz, že namiesto ľavého kontajnera by sme mali kontajner tvaru valca (nerozširoval by sa ako v zadaní), pričom objem vody (V) a výška vodného stĺpca by boli rovnaké ako v zadaní. Keď sa voda vo valci sa roztiahne, tým pádom sa zväčší výška vodného stĺpca a na prvý a možno aj pochabý druhý pohľad by sa mohlo zdať, že tým pádom sa zväčší aj tlak. Avšak pozor, s roztiahnutím vody sa zmení aj jej hustota, a to akurát tak, že výsledný tlak na dno sa nezmení. Že ako to viem? Pretože tlak na dno prenásobený plochou je akurát tiaž celej vodnej masy a táto sa s teplotou nemení. Zahrievanie valcovej nádoby by teda nezmenilo tlak na dno a teda zaseraz by sa nedialo nič.

A teraz (konečne) po dlhej (a nie málo) teoretickej (fúúj) príprave, ideme riešiť (najvyšší čas) úlohu zo zadania (to trvalo). Vieme už, že pre valcovitý kontajner popísaný vyššie by sa nič nezmenilo. Ako sa od tohto prípadu bude líšiť náš, rozširujúci sa kontajner? Označme S_1 plochu dna rozširujúceho sa kontajneru, S_2 plochu vodnej hladiny v tomto kontajneri a S plochu dna vo valcovitom kontajneri. Ako už bolo povedané, pri objeme V chceme mať v kontajneroch rovnakú výšku vody a teda $S_1 < S < S_2$. Keďže v kontajneroch je rovnaké množstvo vody, zahriatím (o rovnakú teplotu) sa tento objem zväčší o rovnakú hodnotu ΔV. Toto zväčšenie objemu spôsobí stúpnutie hladiny o $\Delta V / S$ vo valcovej nádobe a o menej ako (pre malé zmeny objemu relatívne presne o) $\Delta V / S_2$ v rozširujúcej sa. V rozširujúcej sa nádobe teda stúpne výška vodného stĺpca o menej, a keďže pre valcový kontajner by sa tlak na dno nezmenil, v rozširujúcom kontajneri musí klesnúť. Voda bude prúdiť z ľavého kontajnera do pravého. Ak zahrejeme pravý kontajner, dostávame veľmi podobnou úvahou ten istý výsledok, voda stále preteká sprava doľava.

B-2.4 Pásikový opar (opravoval Škrek, vzorák Tomáš, z toho prvá veta Katka)

Predstavte si tri rovnaké, úzke (cca 1cm), nízke (cca 1mm), l = 10cm dlhé pásiky kovu. Dva sú cínové a jeden medený. Chytíme UPS (Univerzálny Pásikový Spájač, môžte ho nahradiť fakt, ale fakt silným lepidlom) a pásiky pevne spojíme v štruktúre obložený chlieb, t.j. cínový pásik, medený pásik, cínový pásik (najväčšou stenou k sebe). Následne hodíme pásiky do ohňa v dôsledku čoho sa ohrejú o T = 100K. O koľko sa predĺži výsledný trojpásik? Koeficient dĺžkovej tepelnej rozťažnosti medi a zinku je: $\alpha_M = 17.10^{-6}K^{-1}$ $\alpha_C = 27.10^{-6}K^{-1}$, modul pružnosti $E_M = 13.10^{10}$ Pa, $E_C = 5.10^{10}$ Pa.

Uvazujme najprv o pasikoch kovu, keby samostatne, nezlepene. Nie som si istý ako to mám chápať, ale asi tak, že nebyť krutého zváračského zásahu UPS, medený pásik by sa natiahol o $\Delta l_M = lT\alpha_M$ a cínové o $\Delta l_C = lT\alpha_C$. (Nie som si istý, či ste sa vzorce pre tepelnú rozťažnosť učili v škole, v každom prípade dajú sa nájsť v tabuľkách a navyše sa ústnym spôsobom tradujú už niekoľko štvrťstoročí). Nakoľko tieto hodnoty sú rôzne, medzi pásikmi dôjde k búrlivej výmene názorov. Výmena názorov v praxi vyzerá tak, že krajné cínové pásiky (rozťahujú sa viacej) začnú ťahať každý silou F stredný medený pásik, ktorý sa rozťahuje menej. Sila F spôsobí, že krajné pásiky sa roztiahnu menej než by radi a stredný o čosi viac - nazýva sa to kompromis.

Zamyslime sa ešte nad jedným problémom. Pokiaľ by sme predpokladali, že pásiky sú zvarené po celej dĺžke, asi by sa ťažko definovalo, čo to sila F vlastne je. My si však situáciu uľahčíme tým, že budeme predpokladať, že pásiky sú zvarené iba na koncoch. Toto nijako neovplyvní výsledok, bude sa nám však oveľa plynulejšie vyjadrovať.

Prejdime teda ku konkrétnym vzorcom. Označme Δl celkové predĺženie trojpásiku. Toto kompromisné predĺženie bude kdesi medzi Δl_M a Δl_C. Krajné cínové pásiky sú sťahované silou F, tak, že namiesto dĺžky Δl_C sa roztiahnu iba o Δl. Naopak, stredný pásik je ťahaný silou $2F$ dôsledkom čoho sa namiesto Δl_M roztiahne až o Δl. Tieto úvahy teraz vyjadríme rovnicami (ako inak), pričom S bude označovať plochu prierezu pásika. Použijeme pri tom Hookov zákon, podľa ktorého je relatívne predĺženie priamo úmerné tlaku, ktorým sa materiál proti tomuto predĺženiu bráni (relatívne predĺženie 0.01 znamená, že pásik sa natiahol o 1% dĺžky, -0.01 znamená skrátenie, tiež o 1%, relatívne predĺženie teda ľahko vyrátame ako podiel predĺženia a pôvodnej dĺžky).

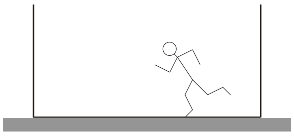
$$2F = \frac{\Delta l - \Delta l_M}{l}.E_M S \qquad F = \frac{\Delta l_C - \Delta l}{l}.E_C S$$

V tomto okamihu máme dve rovnice o dvoch neznámych a dorátanie sa stáva technickou záležitosťou. Vytiahol som zošit matematiky z 8. triedy ZŠ a hneď vidím, že:

$$\Delta l = \frac{\Delta l_M .E_M + \Delta l_C .2E_C}{E_M + 2E_C} = l.T.\frac{\alpha_M .E_M + \alpha_C .2E_C}{E_M + 2E_C}$$

Tento výsledok je veľmi poučný (keď sa človek veľmi snaží, poučenie si zoberie prakticky zo všetkého, minule som napríklad zistil, že na slnku sa rýchlo kazí saláma..). Vidíme, že výsledné predĺženie je tzv. váhovaným aritmetickým priemerom z predĺžení jednotlivých pásikov, pričom váhy jednotlivých členov sú úmerné ich modulom pružnosti (cínové pásiky sú dva, preto je modul vynásobený ešte dvoma). Teším sa na ďalšiu spoluprácu, stretneme sa v prvomájovom sprievode a jedzte veľa zeleniny, paa.

B-2.5 Čukča inabox (vzorák Tomáš, opravoval Peťo)



Hladní ruskí geológovia chytili Čukču. Aby im nezdrhol, hodili ho do veľkej drevenej škatule, ktorá je položená na zamrznutej hladine mora. Škatuľa má dĺžku l = 10 m a hmotnosť M = 500 kg. Čukča zvaný aj MacJuraj (m = 100 kg) si vymyslel nasledujúci spôsob, ako sa aj s krabicou dostať do zemľanky, kde mu žena vynadá a pomôže von. Postaví sa k zadnej stene krabice a rozbehne sa smerom dopredu s konštantným zrýchlením $a = 1ms^{-2}$ (vzhľadom na krabicu) V duchu hesla "hlavou drevenú krabicu neprerazíš" nepružne nabúra do prednej steny. Po tom ako sa preberie z bezvedomia, sa rovnomerným pohybom rýchlosťou v (zase vzhľadom na krabicu) vráti naspäť k zadnej stene, kde zastaví. Keďže počas bezvedomia zabudol, ako taký náraz bolí, celú situáciu ihneď neohrozene zopakuje, znovu a znovu a... Odhadnite, aká má byť hodnota v, aby vzdialenosť 1 km prešiel čo najrýchlejšie? Koľko mu to za týchto okolností potrvá? Trenie medzi škatuľou a ľadom je μ = 0,1. Čas, ktorý náš hrdina trávi v bezvedomí, ako aj čas, ktorý mu zaberie rozbiehanie a brzdenie na/z v považujte za veľmi malé

V prvom rade by som vás chcel pozdraviť od Peťa a Kubusa, ktorí tu sedia a zvedavo pozerajú, ako idem načať tento kontroverzný príklad. Už som sa dopočul, že ste na Čukču v krabici poriadne nadávali. V súvislosti s týmto vám Peťo odkazuje, že tento príklad rozhodne nevymýšľal on.

Riešenie začneme niekoľkými triviálnymi úvahami, ktoré môžu byť ostrieľanými povahami preskočené (goto 20). Pozrime sa na sústavu krabica plus Čukča ako celok. Tento celok má svoje ťažisko, ktoré sa celý čas nachádza niekde v krabici. V príklade nie je celkom presne povedané, čo má prejsť 1 km (krabica? Čukča?), vzhľadom k tomu, že l je oveľa menej ako 1 km, sú tieto nepresnosti nepodstatné a my budeme analyzovať práve pohyb ťažiska sústavy. Pohyb ťažiska ovplyvňujú **IBA** vonkajšie sily, ktoré na sústavu pôsobia. Nárazy Čukču do stien, jeho rozbiehanie, prípadne hocijaký iný telocvik vždy menia hybnosti krabice a Čukču o presne opačné hodnoty, a teda celkovú hybnosť sústavy nemenia vôbec. Jediná sila, ktorá teda môže hýbať ťažiskom sústavy je trecia sila. Ľahko si rozoberieme niekoľko málo možností, ktoré v príklade nastávajú:

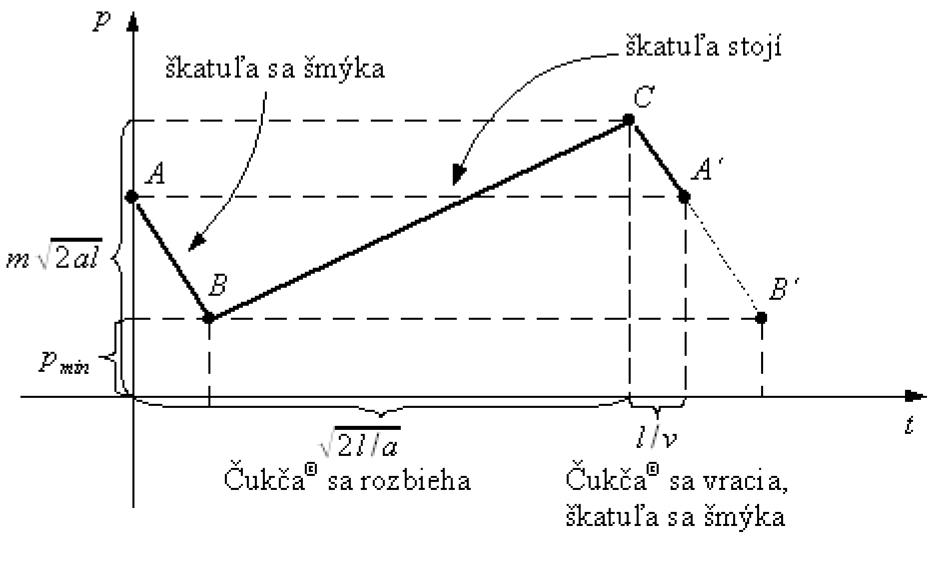
- Ak sa krabica pohybuje dopredu, ťažisko sústavy zrýchľuje dozadu so zrýchlením a_1.
- Ak sa krabica pohybuje dozadu, ťažisko zrýchľuje smerom dopredu so zrýchlením a_1.
- Pokiaľ sa Čukča (v prvej fáze pohybu) rozbieha (zrýchlením a) a krabica stojí, je trecia sila príliš veľká na to, aby Čukča krabicou pohol, to znamená, že ťažisko sa rozbieha dopredu so zrýchlením $a_2 = a.m/(m+M)$.
- Pokiaľ sa Čukča pohybuje rovnomerným priamočiarym pohybom a škatuľa stojí, ťažisko nezrýchľuje.

Na prvý pohľad možno paradoxné, ale ťažisko sústavy zrýchľuje práve vtedy, keď sa krabica pohybuje dozadu alebo stojí (a Čukča zrýchľuje).

20: Teraz vám prezradím niečo, čo sa stane základným stavebným kameňom pre naše riešenie. Tesne pred nárazom Čukču, zrýchľujúceho smerom dopredu do krabice, bude krabica stáť. Dokázať tento poznatok nie je zložité, preto si to spravte sami, ja len stručne: krabica sa nemôže pohybovať dopredu, pretože by to znamenalo, že ťažisko sústavy by celý čas brzdilo. Tak isto doba rozbiehania je príliš dlhá na to, aby zbrzdila hocijaký pohyb v smere dozadu. Takže tesne pred nárazom krabica stojí a za celú hybnosť sústavy krabica + Čukča je zodpovedný Čukča. Jeho rýchlosť tesne pred nárazom je však pevne daná zrýchlením a a dĺžkou l, takže výsledná hybnosť tesne pred nárazom je vlastne pevne daná a my ju označíme $p = m\sqrt{2al}$.

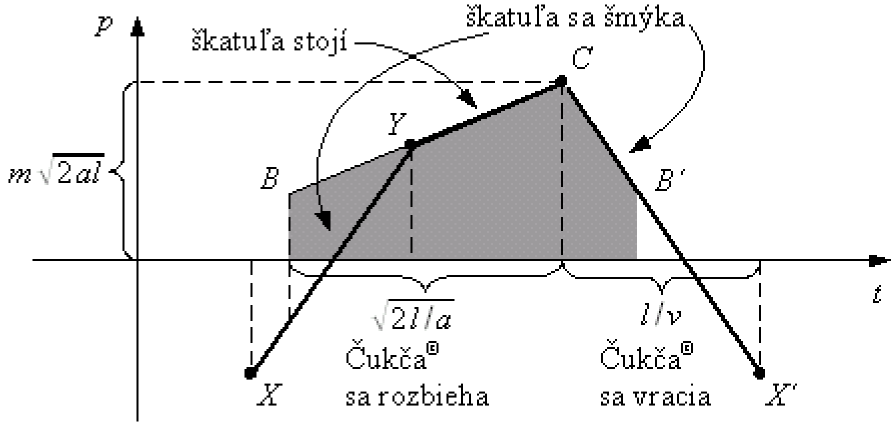
1 km je dosť veľká vzdialenosť na to, aby sme mohli predpokladať, že nech už si Čukča vyberie hocijakú rýchlosť návratu v, po pár cykloch sa jeho pohyb zhruba ustáli, to znamená, že každý cyklus bude vyzerať rovnako, ako ten pred ním. Keď sa pozrieme na začiatok takéhoto opakujúceho sa cyklu, ľahko zbadáme, že máme principiálne tri odlišné možnosti. Totiž: aký je smer rýchlosti krabice na začiatku cyklu?

► Krabica sa pohybuje dopredu: Poďme si kresliť graf závislosti celkovej hybnosti celej sústavy od času. Situácia bude vyzerať ako na obrázku.



Na začiatku (*AB*) sústava brzdí (lebo krabica sa hýbe dopredu) a to presne zrýchlením - a_1 (toto zrýchlenie má súvis so sklonom priamky) V bode *B* krabica zastaví (už sme spomenuli, že sa to niekedy musí stať). Počas *BC* krabica stojí a rozbiehajúci sa Čukča zvyšuje hybnosť sústavy, ktorej ťažisko zrýchľuje a_2. V *C* Čukča narazí a krabica sa začne pohybovať dopredu a počas *CA'* je sústava trecou silou brzdená a to zase zrýchlením - a_1. Od *A'* začína ďalší cyklus a z podmienky ustálenosti teda plynie, že hybnosť v *A* a *A'* musí byť rovnaká. Priemerná rýchlosť (hybnosť) sústavy počas jedného cyklu je rovná ploche pod grafom (to je vlastne prejdená dráha) predelenej časom, za ktorý sme túto dráhu prešli. Ak si pomôžeme bodom *B'*, ktorý je ekvivalentom *B* v ďalšom cykle, môžeme cyklus "posunúť" (namiesto AB bude *A'B'*), priemernú rýchlosť nezmeníme a neskôr sa nám bude lepšie rátať.

► Krabica sa pohybuje dozadu: Opäť kuk na obrázok.



Na *XY* ide krabica dozadu, takže sústava zrýchľuje s a_1, V *Y* sa krabica zastaví a po bod *C* zrýchľuje s a_2, nastáva náraz a brzdenie krabice až do *X'*. Do obrázku sme zakreslili (pre porovnanie) aj jeden cyklus z predchádzajúceho odstavca (*AB* sme presunuli na *A'B'*). Na úsekoch *YC, CB* sú oba prípady rovnaké, avšak na *YX* má tento prípad nižšiu priemernú rýchlosť ako predchádzajúci prípad na *YB* a úsek *B' X'* má tiež zjavne menšiu rýchlosť ako je priemerná rýchlosť predchádzajúceho cyklu. Celkovo môžeme teda povedať, že tento spôsob pohybu je menej výhodný ako prvý.

►Krabica stojí: Podobnou úvahou, ako minulý odstavec, sa dá ľahko zdôvodniť, že ani tento spôsob pohybu sa neoplatí.

Celkovo nám vyšiel teda prvý spôsob ako najefektívnejší a neostáva, než ho dorátať. Ak označíme hybnosť v bode *B* ako p_B tak pre priemernú rýchlosť máme: $v_p\,(m + M) = (p + p_B)\,/2$. Nakoľko *p* je fixné, musíme sa snažiť maximalizovať p_B. Toto docielime tak, že základňu *BB'* trojuholníka *BCB'* sa budeme snažiť skrátiť na minimum. Toto môžeme docieliť jediným spôsobom: pošleme *v* do nekonečna. Teda, čím rýchlejšie sa Čukča bude vracať, tým väčšiu p_B a následne aj v_p docielime. Na záver poďme porátať priemernú rýchlosť. Najprv porátame zrýchlenia a_1, a_2:

$$a_1 = \mu g, \quad a_2 = \frac{ma}{m+M}.$$

Pre hybnosť *p*, máme (ako sme už spomínali) $p = m\sqrt{2al}$, ak označíme t_{BC}, $t_{CB'}$ časy medzi *BC* a *CB´*, môžeme písať:

$$t_{BC} + t_{CB'} = \sqrt{\frac{2l}{a}},$$

člen *l / v* môžeme považovať za nulový, nakoľko rátame s nekonečným *v*. Z grafu ďalej

$$a_1.t_{CB'} = a_2.t_{BC} = \frac{p - p_B}{M + m}.$$

Po vyriešení sústavy rovníc dostávame priemernú rýchlosť Čukču v krabici rovnú približne 0,43 ms^{-1}, čo odpovedá času 39 minút.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina B – kategórie po 2. sérii zimného semestra 20. ročníka

	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	①	B-2.1	B-2.2	B-2.3	B-2.4	B-2.5	☠	Σ
1.	Herencsár	Albert	kv.	G Galanta	18,4	5,0	5,0	5,0	5,0	-		38,38
2.	Boža	Vladimír	2 C	G Poprad Tatarku	18,0	-	5,0	5,0	5,0	5,0		38,00
3.	Bendová	Lenka	kv.	G ĽŠ Trenčín	18,4	2,5	5,0	5,0	5,0	-		36,75
4.	Vendel	Dávid	1 A	G KE Poštová	18,4	5,0	3,5	3,5	5,0	-		36,40
5.	Tureková	Katarína	2 F	G BB Tajovského	17,5	-	5,0	5,0	5,0	3,5		36,00
6.	Batmendijnová	Kristína	kv.	G T. Vansovej	16,9	5,0	3,5	4,0	5,0	-		35,27
	Kuzma	Tomáš	kv. A	G KE Alejová	18,4	5,0	5,0	5,0	-	0,5		35,27
8.	Jursa	Jakub	kv. A	G KE Alejová	18,7	5,0	5,0	5,0	-	-		35,22
9.	Kubina	Filip	sx.	G POH D. Kubín	17,5	-	5,0	5,0	4,5	3,0		35,00
10.	Hrdá	Nikola	kv.	G M. Galandu	18,7	5,0	3,5	5,0	1,0	-		34,82
11.	Hapák	Samuel	sx.	G BA Grösslingova	15,5	-	5,0	5,0	5,0	2,5		33,00
12.	Bogár	Ján	9 D	9. ZŠ L.Novomeského	18,4	3,5	2,0	2,0	5,0	-		32,75
13.	Boško	Lukáš	1 B	G Považská Bystrica	16,1	5,0	2,5	2,0	5,0	-		32,19
14.	Schoberová	Lucia	1 B	ecanjelické G Tisovec	12,0	5,0	5,0	5,0	5,0	-		32,00
15.	Polačko	Martin	kv.	G KE Alejová	18,0	1,5	5,0	5,0	-	-		31,48
16.	Fecko	Miroslav	kv. A	G Pankúchova	18,7	5,0	5,0	-	5,0	-	-4	31,22
17.	Opavský	Ján	1 A	G Želiezovce	18,0	5,0	5,0	-	-	0,0		30,02
18.	Bakula	Andrej	1 A	G Želiezovce	17,7	5,0	5,0	-	-	0,0		29,66
19.	Kovačinová	Stanislava	1 B	G Považská Bystrica	16,1	4,0	3,0	2,5	-	-		27,59
20.	Petrucha	Michal	1 A	G BA Metodova	11,9	4,0	-	5,0	5,0	-		27,58
21.	Konečný	Lukáš	sx.	G Piešťany	13,5	-	5,0	2,0	4,0	2,5		27,00
22.	Kuklišová	Nina	1 AF	G BA Metodova	12,8	5,0	3,0	0,5	3,0	-		26,24
23.	Hudák	Jozef	2 B	G LS Bardejov	12,5	-	3,5	5,0	3,0	1,5		25,50
24.	Hojčka	Michal	kv. D	G Partizánske	15,7	4,5	2,0	1,0	-	-		25,06
25.	Demčáková	Ivona	1 A	G Želiezovce	13,5	5,0	2,0	0,5	-	0,5		23,38
26.	Matejovičová	Lenka	sx.	G BA Grösslingova	9,5		2,0	5,0	5,0	1,5		23,00
27.	Marhefka	Eduard	1	G Spišská Stará Ves	11,0	-	3,5		5,0	1,5		22,98
28.	Roháľ	Branislav	2 B	G Považská Bystrica	10,5	-	5,0	2,5	2,0	2,0		22,00
	Rybák	Matúš	sx.	OG Kukučínova	13,5	-	3,0	1,0	3,0	1,5		22,00
30.	Kory	Jakub	2 B	G Prešov J A Raymana	7,5	-	5,0	5,0	5,0	-	-2	20,50
	Nagy	Jakub	2 C	G KE STA	6,0	-	5,0	4,5	5,0	-		20,50
32.	Baxová	Katarína	1 E	G ĽŠ Trenčín	11,0	1,5	5,0	-	2,0	0,0	-1	20,46
33.	Branický	Juraj	sx.	G sv. Františka	19,0	-	-	-	-	-		19,00
34.	Hajdin	Michal	1 B	G BA J. Hronca	6,1	5,0	1,5	0,5	-	-		14,92
35.	Harhajová	Xénia	1	G VPT Martin	7,1	3,0	1,0	0,5	1,0	-		14,19
36.	Suchá	Nina	1 F	G VPT Martin	8,8	0,5	0,5	2,0	1,5	-	-1	13,72
37.	Rolniková	Zlatka	2	G Skalica	7,5	-	2,0	0,5	2,0	1,0		13,00
	Szabadošová	Emília	sx.	ŠpMNDaG	13,0	-	-	-	-	-		13,00
39.	Ondáč	Peter	2 C	G Humenné	12,0	-	-	-	-	-		12,00
40.	Šimlovič	Matej	1 B	G BA Grösslingova	11,5	-	-	-	-	-		11,50
41.	Trnovec	Matúš	2 B	G BA J.Hronca	0,0	-	3,5	5,0	5,0	1,0	-4	10,50
42.	Simanová	Lucia	sx.	G BA Grösslingova	5,0	-	2,0	0,5	2,0	0,0		9,50
43.	Kotrlová	Katarína	3 F	G VPT Martin	9,4	-	-	-	-	-		9,38
44.	Pažický	Martin	1 C	G BA J. Hronca	4,0	2,0	1,5	-	-	0,0		8,68
45.	Kotrlová	Jana	2	G VPT Martin	8,0	-	-	-	-	-		8,00
46.	Koreňová	Nikola	2 E	G PH Michalovce	4,5	-	2,0	-	-	1,0		7,50
47.	Vanya	Peter	kv.	G ĽŠ Trenčín	5,9	-	-	2,0	-	0,5	-2	7,27
48.	Formánek	Michal	kv. A	ŠpMNDaG	7,1	-	-	-	-	-		7,10

§ E = mc² (5.časť)

Ráno, po budíčku (ešte za tmy), keď opäť prišiel na návštevu Jedna Skala, sa Pravoslav Prestrelil podelil s ostatnými o svoj nápad. Jedna Skala len mávol rukou:
„Na to ja myslieť ako prvé, keď sem prísť. Nebyť zlá nápad, ale mať s tým len jeden problém: Ako ty chcieť urobiť *tu* červiu dieru?“
„No ale nejako sme sa sem museli dostať. Podľa mňa nás sem priviedli práve cez takú dieru, tak prečo by sme sa cez ňu nemohli dostať aj von?“
„Nerada sa vám do toho miešam, ale vy si vážne myslíte, že ONI nechajú niekde len tak nejakú nestráženú červiu dieru?“
„A nemôžeme si nejakú vyrobiť?“
„Červia diera sa nedať vyrobiť. Ona buď byť, alebo my mať smolu. A my asi mať smolu...“
„A ako potom vzniká taká červia diera? Podľa mňa ich ONI nejakým spôsobom vyrábajú a kontrolujú. Ako by ma potom mohli preniesť z mojej klietky rovno sem?“
„Hm...“
„Hm...“
„Hm...“
A tak ďalších niekoľko hodín strávili v zamyslenom tichu alias „mozgovej búrke“, ale na nič zmysluplné už neprišli. Podvečer sa opäť ozvali kroky s efektnou ozvenou a o chvíľu sa Pravoslav zamyslene prehraboval v ďalšej porcii dokonale väzenskej stravy. Zdalo sa mu, že jeden červík naňho zažmurkal.
„To snáď nie... Alebo áno?“
„Áno!“
„Čo sa deje?“
„Izabela, zavolaj Jednu Skalu! Na niečo sme prišli!“
„*Som* prišiel. Pokiaľ viem, tak momentálne nespím...“
Chvíľu trvalo, kým sa Jedna Skala ukázal a netváril sa veľmi nadšene:
„Prečo ma rušiť, keď ja jesť svoje červy? Ja povedať, že ty ma nemať rušiť, keď ja sa zaoberať svojimi červami...“
„Počujte, čakali by ste červy vo väzenskom jedle?“
„Nóóóó, mne to neprekáža....“
„Mne skôr prekážať väzenské jedlo v mojich červoch.“
„Nie, počkajte. Všetko je tu presne také, ako by ste to očakávali. Proste dokonale väzenské. Ale očakávali by ste červy v jedle? Ja by som čakal suchý chlieb, neidentifikovateľnú polievku a tak, ale červy by ma asi nenapadli...“
„Keď to hovoríš... Ja sa vo väzeniach veľmi nevyznám. Teda aspoň v tých, ktoré nemajú koleso na behanie...“
„Nie, ale viete, čo by som čakal v takom väzení? Že sa z neho dá ujsť! Inak by nebolo dokonalé!“
„Mne už niečo dochádzať... Biely muž pokračovať!“
„Takže ak je toto dokonalé väzenie, musí existovať spôsob, ako odtiaľto ujsť.“

(Ako sa to celé skončí, uvidíte nabudúce...)

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 2. série
A – kategória (starší)
21. ročník
letný semester
školský rok 2005/2006

www. **.sk**

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@pobox.sk
riesenia@gmail.com
info@fks.sk

A-2.1 Veľký čaj (vzorák Tomáš, opravoval Škrek)

Predstavte si uzavretú valcovú nádobu s výškou H, ktorá ja naplnená iba čajom. Do jej dna spravíme malú dierku, cez ktorú by voda mohla vytiecť, ale... . Koľko čaju z nádoby vytečie? Teplota pri ktorej všetko prebieha je 20°C a pri takejto teplote je tlak nasýtených pár čaju rovný 2200 Pa.

Každý, kto pochopil, čo znamená slovíčko čaj v názve úlohy, si ľahko mohol domyslieť, že táto úloha nebude ťažká. Stačí sa pozrieť do KSŠS (Krátky Slovník Šudentského Slangu), a hneď zistíme, že okrem nápoja čaj označuje aj úplne čajovú skúšku, príklad, štátnicu, diplomovku, verejné vystúpenie, športový zápas, špeciálne hokejový zápas, koncert, skrátka hocičo múčne. (Múka je synonymom čaju.)

Predstavme si ustálenú situáciu, keď čaj z nádoby vytekať prestane. V tomto okamihu sa v oblasti dierky museli vyrovnať tlaky pôsobiace na rozhranie čaj - vzduch. Vzduch tlačí atmosférickým tlakom ($p_a \approx 101$ kPa). Zhora tlačí kvapalina hydrostatickým tlakom o veľkosti ρgh, kde h je výška vodného stĺpca, ktorý v nádobe ostal. Navyše, čaj sa odparuje a v priestore nad hladinou čaju (môžeme predpokladať, že medzi čajom a vrchnou stenou nádoby je vždy nejaký malý priestor) sa nachádzajú jeho nasýtené pary, ktoré, ako vieme, majú tlak $p_c = 2200$ Pa. Tento tlak prispieva k hydrostatickému tlaku v boji za slobodu tekutiny, ktorá sa derie von, stabilnú situáciu teda popisuje rovnica:

$$\rho gh + p_c = p_a \Rightarrow h = \frac{p_a - p_c}{\rho g} \approx 10\,\mathrm{m}$$

Pokiaľ by h bolo väčšie ako H znamená to, že tlak čaju je príliš malý na to, aby z nádoby čokoľvek vytieklo. Vzduch sa snaží natlačiť čaj do stropu, ten sa však "zaprie", čím získa ďalší tlak, ktorý sa pripočíta k ľavej strane rovnice, ktorá tak bude platiť aj pre menšie h. Správna odpoveď teda je, že pre $H < h$ z nádoby nevytečie nič a inak $S\,(H - h)$ (S je plocha prierezu nádoby). Môžete si všimnúť, že tlak nasýtených pár čaju je príliš malý na to, aby výsledok výrazne ovplyvnil. Oveľa zaujímavejšia je však situácia, keď je čaj zohriaty na $100^{o}C$, vtedy sa tlak jeho nasýtených pár vyrovná s atmosférickým a z nádoby teda vytečie všetok čaj. Sranda, však?

A-2.2 Riadna kosa (opravoval Paľo)

Čukča vojde do zemľanky a je v nej kosa, čosi okolo -20 °C. Sadne si do kožou potiahnutého kresla a diaľkovým ovládačom zapne klimatizáciu. Po hodine vyhrievania teplota stúpne o 10 °C. Ako sa zmenila vnútorná energia plynu v miestnosti? Všetky potrebné údaje odhadnite podľa rozmerov vašej obývačky.

Takže ako to vlastne vyzerá s vnútornou energiou plynu v miestnosti (v zemľanke)?
Najprv zopár slov o teplote:

Teplota je miera kinetickej energie častíc v plyne. Pre energiu jednej častice plynu pri teplote T platí vzťah $E_k = skT/2$, kde s je konštanta závisiaca od druhu molekúl plynu. Dôležité je uvedomiť si, že kinetická energia častíc je úmerná teplote plynu.

A teraz k veci. Zemľanka je krycie meno pre miestnosť s objemom V_0. Ak je v nej pri teplote T_0 tlak p_0, tak to znamená že v miestnosti je N_0 častíc, keďže platí stavová rovnica $pV = NkT$ (v našom prípade $p_0V_0 = N_0kT_0$).

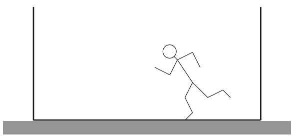
Ak by zemľanka bola dokonale odizolovaná od prostredia a počet častíc N by bolo konštantné ($= N_0$), t.j. žiadna molekula vzduchu by sa nemohla dostať ani do ani von zo zemľanky, tak pri zohrievaní vzduchu (čo je vlastne dodávanie energie molekulám plynu) by sa zvyšovala kinetická energia molekúl, čiže vnútorná energia plynu a úmerne aj jeho teplota. V tomto prípade zo stavovej rovnice vieme, že by sa zvyšoval tlak v miestnosti. Je to jednoduchý izochorický dej.

Ale čo sa stane, ak na jednej stene sa objaví dierka? Samozrejme, plyn z miestnosti začne prúdiť von, kde je pôvodný tlak p_0. V skutočnosti tá diera, reprezentujúca nedokonalú izoláciu miestnosti od prostredia je tam od začiatku, takže si nemusíme lámať hlavu, ako je to vlastne s tým prúdením, ona len zabezpečuje vyrovnanie tlaku. Tlaky sa nám vyrovnajú, ale za cenu, že sa zmenší počet častíc v miestnosti. Aj keď kinetická energia jednotlivých častíc v miestnosti sa nezmení, z dôsledku zmeny ich počtu v miestnosti sa celková energia plynu v miestnosti zmenší. V miestnosti ostane $N = p_0V_0 / kT$ molekúl, ktoré majú energiu $E_k = skT/2$. To znamená, že celková vnútorná energia plynu v neodizolovanej miestnosti je $U = N.E_k = p_0V_0\,s/2$.

Tento výsledok nezávisí od teploty T, to znamená, že pred ohriatím (čo je vlastne ohriatie o nulu) aj po ohriatí má plyn rovnakú celkovú vnútornú energiu.

Samozrejme, v celom riešení sme predpokladali, že sa jedná o ideálny plyn.

A-2.3 Čukča inabox (vzorák Tomáš, opravoval Peťo)



Hladní ruskí geológovia chytili Čukču. Aby im nezdrhol, hodili ho do veľkej drevenej škatule, ktorá je položená na zamrznutej hladine mora. Škatuľa má dĺžku $l = 10$ m a hmotnosť $M = 500$ kg. Čukča zvaný aj MacJuraj ($m = 100$ kg) si vymyslel nasledujúci spôsob, ako sa aj s krabicou dostať do zemľanky, kde mu žena vynadá a pomôže von. Postaví sa k zadnej stene krabice a rozbehne sa smerom dopredu s konštantným zrýchlením $a = 1\,\mathrm{ms}^{-2}$ (vzhľadom na krabicu) V duchu hesla "hlavou drevenú krabicu neprerazíš" nepružne nabúra do prednej steny. Po tom ako sa preberie z bezvedomia, sa rovnomerným pohybom rýchlosťou v (zase vzhľadom na krabicu) vráti naspäť k zadnej stene, kde zastaví. Keďže počas bezvedomia zabudol, ako taký náraz bolí, celú situáciu ihneď neohrozene zopakuje, znovu a znovu a... Odhadnite, aká má byť hodnota v, aby vzdialenosť 1 km prešiel čo najrýchlejšie? Koľko mu to za týchto okolností potrvá? Trenie medzi škatuľou a ľadom je $\mu = 0{,}1$. Čas, ktorý náš hrdina trávi v bezvedomí, ako aj čas, ktorý mu zaberie rozbiehanie a brzdenie na/z v považujte za veľmi malé

V prvom rade by som vás chcel pozdraviť od Peťa a Kubusa, ktorí tu sedia a zvedavo pozerajú, ako idem načať tento kontroverzný príklad. Už som sa dopočul, že ste na Čukču v krabici poriadne nadávali. V súvislosti s týmto vám Peťo odkazuje, že tento príklad rozhodne nevymýšľal on.

Aké by to bolo zadanie, keby sa doň nedostalo pár preklepov. V zadaniach A-kategórie ste si mohli všimnúť úplne zbytočný číselný údaj 0,3 ako aj nedostatok akejkoľvek zmienky o hmotnosti Čukču. Preto samozrejme akceptujeme riešenia s hocijakou čo len trochu rozumnou Čukčovou hmotnosťou. Vinníkov tentoraz nepopravíme, máme málo vedúcich.

Riešenie začneme niekoľkými triviálnymi úvahami, ktoré môžu byť ostrieľanými povahami preskočené (goto 20). Pozrime sa na sústavu krabica plus Čukča ako celok. Tento celok má svoje ťažisko, ktoré sa celý čas nachádza niekde v krabici. V príklade nie je celkom presne povedané, čo má prejsť 1 km (krabica? Čukča?), vzhľadom k tomu, že l je oveľa menej ako 1 km, sú tieto nepresnosti nepodstatné a my budeme analyzovať práve pohyb ťažiska sústavy. Pohyb ťažiska ovplyvňujú **IBA** vonkajšie sily, ktoré na sústavu pôsobia. Nárazy Čukču do stien, jeho rozbiehanie, prípadne hocijaký iný telocvik vždy menia hybnosti krabice a Čukču o presne opačné hodnoty, a teda celkovú hybnosť sústavy nemenia vôbec. Jediná sila, ktorá teda môže hýbať ťažiskom sústavy je trecia sila. Ľahko si rozoberieme niekoľko málo možností, ktoré v príklade nastávajú:

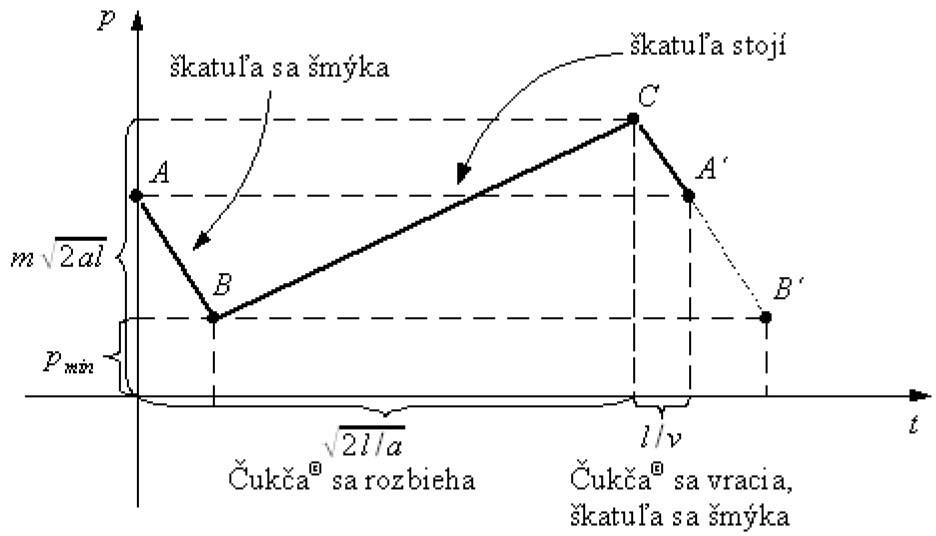
- Ak sa krabica pohybuje dopredu, ťažisko sústavy zrýchľuje dozadu so zrýchlením a_1.
- Ak sa krabica pohybuje dozadu, ťažisko zrýchľuje smerom dopredu so zrýchlením a_1.
- Pokiaľ sa Čukča (v prvej fáze pohybu) rozbieha (zrýchlením a) a krabica stojí, je trecia sila príliš veľká na to, aby Čukča krabicou pohol, to znamená, že ťažisko sa rozbieha dopredu so zrýchlením $a_2 = a.m/(m+M)$.
- Pokiaľ sa Čukča pohybuje rovnomerným priamočiarym pohybom a škatuľa stojí, ťažisko nezrýchľuje.

Na prvý pohľad možno paradoxné, ale ťažisko sústavy zrýchľuje práve vtedy, keď sa krabica pohybuje dozadu alebo stojí (a Čukča zrýchľuje).

20: Teraz vám prezradím niečo, čo sa stane základným stavebným kameňom pre naše riešenie. Tesne pred nárazom Čukču, zrýchľujúceho smerom dopredu do krabice, bude krabica stáť. Dokázať tento poznatok nie je zložité, preto si to spravte sami, ja len stručne: krabica sa nemôže pohybovať dopredu, pretože by to znamenalo, že ťažisko sústavy by celý čas brzdilo. Tak isto doba rozbiehania je príliš dlhá na to, aby zbrzdila hocijaký pohyb v smere dozadu. Takže tesne pred nárazom krabica stojí a za celú hybnosť sústavy krabica + Čukča je zodpovedný Čukča. Jeho rýchlosť tesne pred nárazom je však pevne daná zrýchlením a a dĺžkou l, takže výsledná hybnosť tesne pred nárazom je vlastne pevne daná a my ju označíme $p = m\sqrt{2al}$.

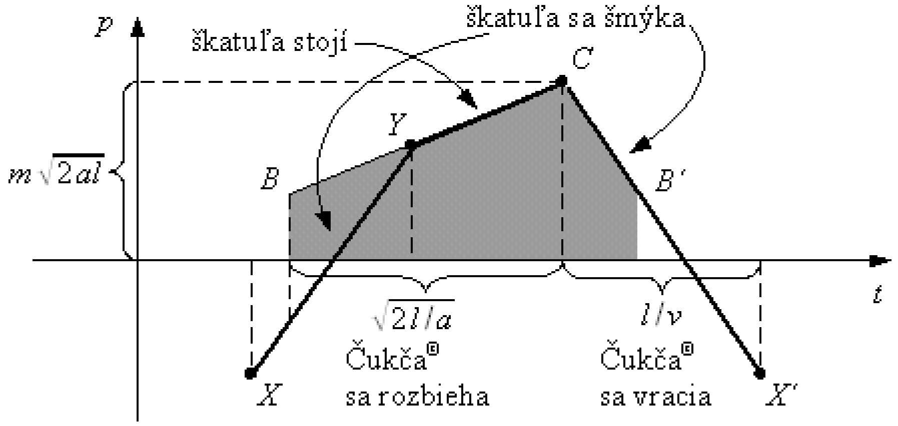
1 km je dosť veľká vzdialenosť na to, aby sme mohli predpokladať, že nech už si Čukča vyberie hocijakú rýchlosť návratu v, po pár cykloch sa jeho pohyb zhruba ustáli, to znamená, že každý cyklus bude vyzerať rovnako, ako ten pred ním. Keď sa pozrieme na začiatok takéhoto opakujúceho sa cyklu, ľahko zbadáme, že máme principiálne tri odlišné možnosti. Totiž: aký je smer rýchlosti krabice na začiatku cyklu?

► Krabica sa pohybuje dopredu: Poďme si kresliť graf závislosti celkovej hybnosti celej sústavy od času. Situácia bude vyzerať ako na obrázku.



Na začiatku (AB) sústava brzdí (lebo krabica sa hýbe dopredu) a to presne zrýchlením - a_1 (toto zrýchlenie má súvis so sklonom priamky) V bode B krabica zastaví (už sme spomenuli, že sa to niekedy musí stať). Počas BC krabica stojí a rozbiehajúci sa Čukča zvyšuje hybnosť sústavy, ktorej ťažisko zrýchľuje a_2. V C Čukča narazí a krabica sa začne pohybovať dopredu a počas CA' je sústava trecou silou brzdená a to zase zrýchlením - a_1. Od A' začína ďalší cyklus a z podmienky ustálenosti teda plynie, že hybnosť v A a A' musí byť rovnaká. Priemerná rýchlosť (hybnosť) sústavy počas jedného cyklu je rovná ploche pod grafom (to je vlastne prejdená dráha) predelenej časom, za ktorý sme túto dráhu prešli. Ak si pomôžeme bodom B', ktorý je ekvivalentom B v ďalšom cykle, môžeme cyklus "posunúť" (namiesto AB bude $A'B'$), priemernú rýchlosť nezmeníme a neskôr sa nám bude lepšie rátať.

► Krabica sa pohybuje dozadu: Opäť kuk na obrázok.



Na XY ide krabica dozadu, takže sústava zrýchľuje s a_1, V Y sa krabica zastaví a po bod C zrýchľuje s a_2, nastáva náraz a brzdenie krabice až do X'. Do obrázku sme zakreslili (pre porovnanie) aj jeden cyklus z predchádzajúceho odstavca (AB sme presunuli na $A'B'$). Na úsekoch YC, CB sú oba prípady rovnaké, avšak na YX má tento prípad nižšiu priemernú rýchlosť ako predchádzajúci prípad na YB a úsek B' X' má tiež zjavne menšiu rýchlosť ako je priemerná rýchlosť predchádzajúceho cyklu. Celkovo môžeme teda povedať, že tento spôsob pohybu je menej výhodný ako prvý.

►Krabica stojí: Podobnou úvahou ako minulý odstavec sa dá ľahko zdôvodniť, že ani tento spôsob pohybu sa neoplatí.

Celkovo nám vyšiel teda prvý spôsob ako najefektívnejší a neostáva, než ho dorátať. Ak označíme hybnosť v bode B ako p_B tak pre priemernú rýchlosť máme: $v_p\,(m + M) = (p + p_B)\,/2$. Nakoľko p je fixné, musíme sa snažiť maximalizovať p_B. Toto docielime tak, že základňu BB' trojuholníka BCB' sa budeme snažiť skrátiť na minimum. Toto môžeme docieliť jediným spôsobom: pošleme v do nekonečna. Teda, čím rýchlejšie sa Čukča bude vracať, tým väčšiu p_B a následne aj v_p docielime. Na záver poďme porátať priemernú rýchlosť. Najprv porátame zrýchlenia a_1, a_2:

$$a_1 = \mu g, \quad a_2 = \frac{ma}{m+M}.$$

Pre hybnosť p, máme (ako sme už spomínali) $p = m\sqrt{2al}$, ak označíme t_{BC}, $t_{CB'}$ časy medzi BC a CB', môžeme písať:

$$t_{BC} + t_{CB'} = \sqrt{\frac{2l}{a}},$$

člen $l\,/\,v$ môžeme považovať za nulový, nakoľko rátame s nekonečným v. Z grafu ďalej

$$a_1.t_{CB'} = a_2.t_{BC} = \frac{p - p_B}{M + m}.$$

Po vyriešení sústavy rovníc dostávame priemernú rýchlosť Čukču v krabici rovnú približne 0,43 ms^{-1}, čo odpovedá času 39 minút.

A-2.4 Tyčka (opravoval Kubus)

Predstavte si tyčku homogénne nabitú elektrickým nábojom. Koncové body tyčky označme ako A,B. V bode C, mimo tyčky, stojí pozorovateľ. Dokážte, že vektor elektrickej intenzity v tomto bode je rovnobežný s osou uhla ACB.

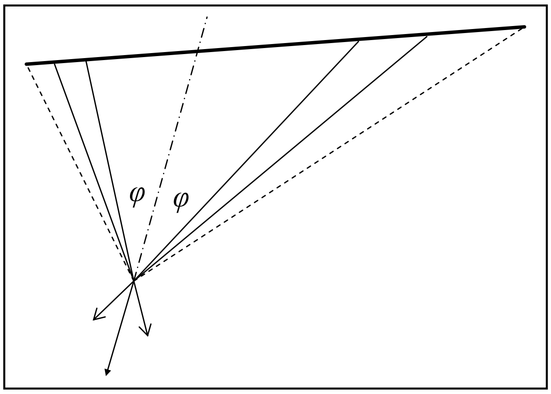
Pri riešení tohto príkladu sa v prvom rade musíme poďakovať vedúcim, pretože v zadaní príkladu urobili polovicu roboty za nás. Keď nám prezradili, že intenzita elektrického poľa bude v smere osi uhla $\angle ACB$, hneď máme jasný smer, ktorým sa pri riešení vydať – treba sa nejakým spôsobom pozrieť na to, ako k celkovej intenzite prispievajú rôzne kúsky tyče, ktoré vidíme pod rôznym uhlom.

Označme si veľkosť výšky z bodu C na priamku AB ako h a jej pätu P. Teraz si všimnime veľmi malý kúsok tyče vo vzdialenosti r od bodu C, ktorý vidíme pod uhlom $d\varphi$. Aká je jeho skutočná dĺžka dx? S troškou intuície a pekným obrázkom zistíme, že $dx = r^2 d\varphi / h$. (Skúste si to najprv sami, podrobné vysvetlenie je na konci vzoráku.) Z Coulombovho zákona bude mať príspevok elektrického poľa od tohto malého kúska veľkosť

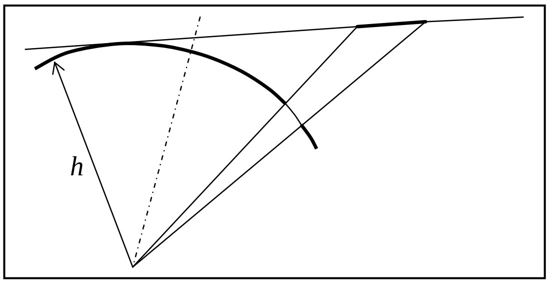
$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dx}{r^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 h} d\varphi$$

a bude smerovať smerom preč od tohto kúsku (pre kladné λ). Hľa, vidíme, že veľkosť príspevku elektrického poľa od malého kúsku tyče je priamo úmerná uhlovej veľkosti tohto kúsku. (Pozor, stále iba pre malé $d\varphi$!) Teraz už stačí vhodnou argumentáciou dokopať našu úvahu do cieľa.

Napríklad: „Ku každému maličkému kúsku tyčky vieme nájsť uhlovo rovnako veľký kúsok na druhej strane od osi uhla $\angle ACB$ tak, že ich príspevky s ňou zvierajú rovnaký uhol. Tieto príspevky majú rovnakú veľkosť, preto ich súčet bude ukazovať v smere tejto osi. Takto vieme popárovať všetky malé kúsočky tyče, preto celková intenzita bude tiež ukazovať v smere osi $\angle ACB$."



Alebo: „Každý z malých kúskov tyče s uhlovou veľkosťou $d\varphi$ prispieva k elektrickému poľu rovnako (akurát z iného smeru). Keď teda vezmeme kúsok tyče obsahujúci bod P a ‚nakopírujeme' ho do všetkých smerov (namiesto každého z ostatných kúskov), dostaneme výsek kružnice s polomerom CP vnútri uhlu $\angle ACB$. Zo symetrie je zrejmé, že elektrické pole bude v tejto situácii smerovať v smere osi uhla $\angle ACB$."

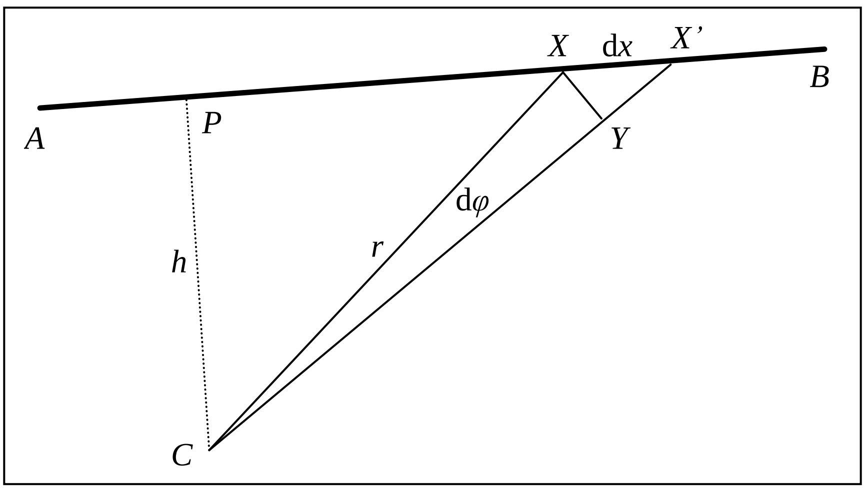


V tomto príklade bolo dôležité uvedomiť si, čo si pri práci s (infinitezimálne) malými kúsočkami môžeme dovoliť a čo nie. Netreba sa ich báť, ale musíme vidieť, čo sa stane, ak niektorú veličinu pošleme do nuly – potom si vystačíme i s takýmito úvahami (i keď nie sú dokonale formalizované) a nemusíme nič integrovať. Ak sa medzi „d-čkami" cítite dostatočne pohodlne, skúste si spočítať aj veľkosť elektrického poľa v bode C, pre tých ostatných je tu sľubované geometrické intermezzo.

Všimnime si, že trojuholníky CPX' a XYX' sú si podobné, pretože majú spoločný uhol pri X' a oba sú pravouhlé. Preto $|CX'| / h = dx / |XY|$. Veľkosť XY si môžeme vyjadriť aj ako $|XY| = r \tan\varphi \approx r\varphi$, keďže φ je veľmi malé. Z toho dostávame

$$dx = \frac{|CX'|}{h}|XY| = \frac{|CX'|}{h} r\varphi = \frac{r^2\varphi}{h}$$

(Posledný krok odôvodňujeme tým, že $|CX| \approx |CX'| \approx r$.)



FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina A – kategórie po 2. sérii zimného semestra 20. ročníka

	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	①	A-2.1	A-2.2	A-2.3	A-2.4	☠	Σ
1.	Bzdušek	Tomáš	sp A	G Piešťany	20,0	5,0	3,0	5,0	5,0		38,72
2.	Pšeno	Pavol	sp.	G Ružomberok	19,1	5,0	1,5	4,0	5,0		36,02
3.	Imriška	Jakub	4 A	G BA J. Hronca	18,0	5,0	3,5	3,5	5,0		35,00
4.	Fačkovec	Boris	se. A	G Piešťany	19,3	5,0	5,0	3,0	0,5		34,57
5.	Štuplikova	Alica	4	G VBN Prievidza	19,5	5,0	5,0	0,0	5,0	-1	33,50
6.	Perešíni	Peter	4 F	G BB Tajovského	18,0	5,0	1,5	2,0	5,0		31,50
7.	Szabadoš	Michal	sp	ŠpMNDaG	19,7	2,5	3,5	2,0	-		29,62
8.	Zámečník	Peter	4 D	G MRŠ NMV	15,0	2,5	5,0	0,5	5,0		28,00
9.	Takács	Michal	4 F	G BB Tajovského	18,8	5,0	1,5	1,5	1,0		27,80
10.	Vancakova	Judita	3 C	G KE Poštová	17,7	5,0	1,0	0,5	-		25,91
11.	Triska	Martin		G Piešťany	16,5	5,0	1,5	1,0	-		25,88
12.	Hrdá	Marcela	4 IB	G BA J. Hronca	16,0	5,0	5,0	-	0,0	-1	25,00
	Kucharík	Marcel	4 D	G MRŠ NMV	17,0	5,0	1,5	0,5	1,0		25,00
14.	Bogár	Ondrej	3 E	G ĽŠ Trenčín	15,7	5,0	1,0	0,0	0,5		23,94
15.	Danko	Juraj	3	G Piešťany	16,1	5,0	1,0	-	0,0		23,78
16.	Mikuláš	Ján	ok.	G BST Lučenec	16,5	5,0	1,0	1,5	-	-1	23,00
17.	Fecko	Stanislav	se. A	G Pankúchova	14,4	5,0	1,5	-	-		22,63
18.	Bachratá	Alena	4 B	G VO Žilina	14,8	5,0	1,0	0,5	0,5		21,80
19.	Rajský	Tomáš	sp.	G Ružomberok	13,5	5,0	1,0	-	0,5		21,76
20.	Hergelová	Beáta	4 B	G BST Lučenec	14,5	5,0	1,5	0,5	1,0	-1	21,50
	Pôbišová	Zuzana	4 F	G BB Tajovského	14,0	5,0	1,0	1,0	0,5		21,50
22.	Masárová	Zuzana	4 IB	G BA J. Hronca	13,0	5,0	1,0	1,0	1,0		21,00
	Godány	Martin	sp	ŠpMNDaG	11,5	5,0	2,0	-	-		20,32
24.	Blazej	Kamil	sp. A	G JL Martin	19,7	-	-	-	-		19,70
	Kováč	Michal	ok.	G BA Grösslingova	14,0	2,5	1,0	0,5	0,5		18,50
26.	Kubina	Filip	sx.	G POH Dolný Kubín	18,4	-	-	-	-		18,38
27.	Poelman	Nathaniel L.	3	QSI Ba	18,0	-	-	-	-		18,02
28.	Čevorová	Kristína	sp	ŠpMNDaG	15,3	0,5	0,5	0,0	1,0		17,98
29.	Švihorík	Róbert	sp	G Nitra Párovská	14,4	3,5	0,5	-	-	-2	17,66
30.	Schlosarikova	Lucia	3 A	G Piešťany	16,1	-	-	-	-		16,10
31.	Repiar	Jakub	3	GJH Ba	15,7	-	1,0	0,0	-	-1	16,06
32.	Hreha	Ján	3		14,8	-	-	-	-		14,82
33.	Salaj	Michal	3 A	G Snina	14,4	-	-	-	-		14,38
	Škrovinová	Eva	sp	G Nitra Párovská	14,4	-	-	-	-		14,38
35.	Škrovinová	Katarína	ok.	G Nitra Párovská	14,0	-	-	-	-		14,00
36.	Herman	Peter	3 B	G BA J. Hronca	13,9	-	-	-	-		13,92
37.	Záhoranová	Anna	sp A	G BA Metodova	13,5	-	1,0	-	-	-1	13,84
38.	Kaniansky	Miroslav	ok. A	G Piaristické Nitra	13,0	-	-	-	-		13,00
	Kravec	Martin	4 A	G PH Michalovce	13,0	-	-	-	-		13,00
40.	Juhásová	Jana	sp	G Nitra Párovská	13,0	-	-	-	-		12,98
	Šimlovič	Matej	1 B	G BA Grösslingova	13,0	-	-	-	-		12,98
42.	Sudolský	Michal	3 F	G BB Tajovského	11,5	1,0	0,0	-	-		12,88
43.	Galica	Tomáš			11,5	-	-	-	-		11,50
44.	Janíková	Karolína	sp B	OG ZA Varšavská cesta	9,9	0,5	0,5	0,0	-		11,30
45.	Hojčková	Martina	3 IB	G BA J. Hronca	11,0	-	-	-	-		10,98
46.	Petruchová	Zuzana	4	G BA Grösslingova	8,5	-	-	-	-		8,50
47.	Piterka	Tomáš	ok. A	G Piaristické Nitra	5,0	-	-	-	-		5,00
48.	Štolcová	Jana	4	G Nitra Párovská	4,5	-	-	-	-		4,50

§ **E = mc^2** (5.časť)

Ráno, po budíčku (ešte za tmy), keď opäť prišiel na návštevu Jedna Skala, sa Pravoslav Prestrelil podelil s ostatnými o svoj nápad. Jedna Skala len mávol rukou:
„Na to ja myslieť ako prvé, keď sem prísť. Nebyť zlá nápad, ale mať s tým len jeden problém: Ako ty chcieť urobiť *tu* červiu dieru?“
„No ale nejako sme sa sem museli dostať. Podľa mňa nás sem priviedli práve cez takú dieru, tak prečo by sme sa cez ňu nemohli dostať aj von?“
„Nerada sa vám do toho miešam, ale vy si vážne myslíte, že ONI nechajú niekde len tak nejakú nestráženú červiu dieru?“
„A nemôžeme si nejakú vyrobiť?“
„Červia diera sa nedať vyrobiť. Ona buď byť, alebo my mať smolu. A my asi mať smolu...“
„A ako potom vzniká taká červia diera? Podľa mňa ich ONI nejakým spôsobom vyrábajú a kontrolujú. Ako by ma potom mohli preniesť z mojej klietky rovno sem?“
„Hm...“
„Hm...“
„Hm...“
A tak ďalších niekoľko hodín strávili v zamyslenom tichu alias „mozgovej búrke“, ale na nič zmysluplné už neprišli. Podvečer sa opäť ozvali kroky s efektnou ozvenou a o chvíľu sa Pravoslav zamyslene prehraboval v ďalšej porcii dokonale väzenskej stravy. Zdalo sa mu, že jeden červík naňho zažmurkal.
„To snáď nie... Alebo áno?“
„Áno!“
„Čo sa deje?“
„Izabela, zavolaj Jednu Skalu! Na niečo sme prišli!“
„*Som* prišiel. Pokiaľ viem, tak momentálne nespím...“
Chvíľu trvalo, kým sa Jedna Skala ukázal a netváril sa veľmi nadšene:
„Prečo ma rušiť, keď ja jesť svoje červy? Ja povedať, že ty ma nemať rušiť, keď ja sa zaoberať svojimi červami...“
„Počujte, čakali by ste červy vo väzenskom jedle?“
„Nóóóó, mne to neprekáža....“
„Mne skôr prekážať väzenské jedlo v mojich červoch.“
„Nie, počkajte. Všetko je tu presne také, ako by ste to očakávali. Proste dokonale väzenské. Ale očakávali by ste červy v jedle? Ja by som čakal suchý chlieb, neidentifikovateľnú polievku a tak, ale červy by ma asi nenapadli...“
„Keď to hovoríš... Ja sa vo väzeniach veľmi nevyznám. Teda aspoň v tých, ktoré nemajú koleso na behanie...“
„Nie, ale viete, čo by som čakal v takom väzení? Že sa z neho dá ujsť! Inak by nebolo dokonalé!“
„Mne už niečo dochádzať... Biely muž pokračovať!“
„Takže ak je toto dokonalé väzenie, musí existovať spôsob, ako odtiaľto ujsť.“

(Ako sa to celé skončí, uvidíte nabudúce...)