FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 3. série
B – kategória (mladší)
21. ročník
zimný semester
školský rok 2005/2006

www.fks.sk

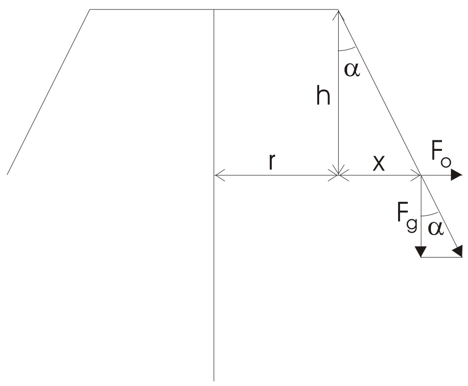
FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

B–3.1 Kolotoč (opravoval Džony)

Do nášho mesta prišli kolotoče. Najviac ma zaujal veľký, retiazkový kolotoč. Po obvode kružnice s polomerom r boli povešané sedačky. S kamarátmi sme si posadali do sedačiek, zaistili sa a zábava sa mohla začať. Po tom, ako sa kolotoč roztočil, som prešiel dookola raz za T sekúnd. Sedačka bola o h nižšie ako bod, v ktorom bol upevnený druhý koniec jej retiazky. Ako ďaleko som bol od môjho kamaráta, ktorý sedel na presne opačnej strane kolotoča?

Po roztočení sa sedačky ustália tak, že výslednica odstredivej a gravitačnej sily bude v smere retiazky. Táto výsledná sila je práve vykompenzovaná prichytením o kolotoč, takže sedačka sa bude s chlapcom len otáčať dokola, ale iný pohyb nebude vykonávať (výsledná sila je nulová). To podľa obrázka znamená (čiže z podobnosti trojuholníkov):

$$x/h = F_o/F_g,$$



kde je zrejmé, že x označuje vodorovnú vzdialenosť medzi miestom, kde je sedačka, keď sa kolotoč nekrúti a miestom, keď sa krúti. Keďže sedačka obieha vo vzdialenosti $r + x$, môžeme vyjadriť odstredivú silu ako:

$$F_o = m\omega^2(r + x),$$

kde ω je uhlová rýchlosť kolotoča, t.j. $\omega = 2\pi/T$. Keď toto dosadíme do prvej rovnice, dostaneme jednoduchú rovnicu, z ktorej:

$$x = r\omega^2 h\,/(g - \omega^2 h).$$

Môjho kamaráta na druhom konci 'vynáša' rovnako ako mňa, preto naša vzájomná vzdialenosť je $d = 2r + 2x$. Po dosadení za x a za ω dostaneme, že kamarát je vzdialený:

$$d = 2rgT^2\,/(gT^2 - 4\pi^2 h).$$

B–3.2 Ťažká práca čašníka (opravoval Paľo)

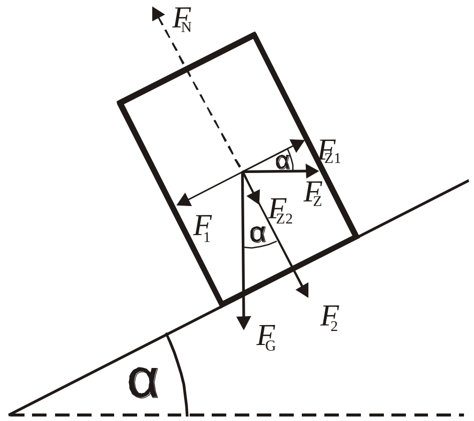
Čašník Fero má tú smolu, že jeho tácka je absolútne šmykľavá. Preto keď sa chce pohnúť smerom k zákazníkovi a nechce aby sa mu z nej všetko skĺzlo, musí ju vhodne nakloniť. Aký sklon tácky je potrebný pri zrýchlení a = 1 m.s^{-2}? Po nejakom čase dostane Fero za odmenu lepšiu tácku s koeficientom trenia f = 0,1. Aký rozsah uhlov naklonenia zabráni šmýkaniu premetov po tácke teraz, ak sa Fero rozbieha k zákazníkom stále s tým istým zrýchlením?

Čaute.

Tak našťastie naša úloha je oveľa jednoduchšia, ako úloha chudáka Fera čašníka, ktorý musí šibrinkovať medzi nedočkavými hosťami s takou diabolskou táckou bez trenia.
Zrátať tento príklad je skutočne celkom jednoduché, ak sa nám podarí nakresliť si správny obrázok. Pre jednoduchosť si predstavíme všetky veci, ktoré nesie na tácke, ako jeden peknučký kváder (ktorý sa správa ako hmotný bod).

Keby Fero počas pohybu s konštantným zrýchlením tácku nenaklonil (držal by ju vodorovne), pohár na tácke by jednoducho ostal na svojom mieste, keďže z pohľadu vonkajšieho pozorovateľa naň v horizontálnom smere nepôsobí žiadna sila, a v momente, keby pod ním už tácka nebola, spadol by na zem.

Čašník, ktorý sa pohybuje spolu s táckou, by to vnímal tak, že na kváder pôsobí záhadná sila, ktorá ho tlačí dozadu. Táto sila je už nám dobre známa zotrvačná sila $F_Z = -ma$.
Našťastie to už náš šikovný čašník dobre vie a v snahe vykompenzovať účinky tejto sily pohotovo nakloní tácku o uhol α. A teraz obrázok!



Na telesá na tácke v pohybe pôsobia tri sily. Konkrétne tiažová sila F_G, zotrvačná sila F_Z, ktoré pre jednoduchý výpočet rozložíme na ich dve zložky:

$F_G = F_1 + F_2$, kde pre veľkosti zložiek platí: $F_1 = mg \sin\alpha$, $F_2 = mg \cos\alpha$

$F_Z = F_{Z1} + F_{Z2}$, kde pre veľkosti zložiek platí: $F_{Z1} = ma \cos\alpha$, $F_{Z2} = ma \sin\alpha$,

a reakčná sila tácky, ktorá zabraňuje tomu, aby sa telesá prepadli cez ňu. Jej veľkosť je presne rovná $F_N = F_2 + F_{Z2}$, lenže má opačný smer.

Aby telesá na tácke boli v pokoji vzhľadom na tácku, musí byť výslednica síl pôsobiacich na ne rovná v nule. O túto podmienku v smere kolmom na tácku sa nám postará predchádzajúca podmienka.

$$F_N + F_2 + F_{Z2} = 0$$

Pre sily rovnobežné s táckou musí platiť tiež podmienka $F_1 + F_{Z1} = 0$, teda:

$$mg \sin\alpha = ma \cos\alpha \rightarrow tg\alpha = \frac{a}{g} \Rightarrow \alpha = arctg\frac{a}{g}$$

A čo sa zmení, ak čašník dostane novú tácku s nenulovým koeficientom trenia f ? Nič iné, len sa medzi sily pôsobiace rovnobežne s táckou primieša aj trecia sila, ktorá má veľkosť $F_T = fF_N$ a pôsobí proti smeru pohybu.

Ak uhol α je veľmi malý, telesá majú tendenciu posúvať sa hore po tácke, a teda trecia sila pôsobí v smere sily F_1 a pre rovnováhu musí platiť podmienka $F_{Z1} - F_1 - F_T = 0$,

$$ma \cos\alpha_{\min} - mg \sin\alpha_{\min} - f\left(mg \cos\alpha_{\min} + ma \sin\alpha_{\min}\right) = 0$$

$$\rightarrow tg\alpha_{\min} = \frac{a - fg}{g + fa} \Rightarrow \alpha_{\min} = arctg\frac{a - fg}{g + fa}$$

Ak uhol α je väčší, telesá majú tendenciu posúvať sa dole po tácke, a teda trecia sila pôsobí v smere sily F_{Z1} a pre rovnováhu musí platiť podmienka $F_1 - F_{Z1} - F_T = 0$,

$$mg \sin\alpha_{\max} - ma \cos\alpha_{\max} - f\left(mg \cos\alpha_{\min} + ma \sin\alpha_{\min}\right) = 0$$

$$\rightarrow tg\alpha_{\min} = \frac{a + fg}{g - fa} \Rightarrow \alpha_{\min} = arctg\frac{a + fg}{g - fa}$$

Pre zadané hodnoty sa veci z tácky bez trenia nezošmyknú, ak čašník drží tácku pod uhlom približne 5,8° a v prípade že koeficient trenia tácky je 0,1, čašník môže držať tácku pod uhlom medzi 0,11° až 11,5° bez toho, aby zbytočne prišiel o prácu.

B–3.3 Teplomer (opravoval Peťo)

Odmerajte priemer sklenej trubičky v klasickom lekárskom teplomeri, avšak bez toho, aby ste teplomer poškodili.

Ahojte. Pozrime sa spolu, ako by mohlo vyzerať riešenie tohto príkladu. Označme koeficient objemovej tepelnej rozťažnosti ortuti ako β, objem nádobky s ortuťou ako V a hľadaný vnútorný priemer kapiláry v teplomeri ako d. Vieme, že pri zmene teploty z t na $t + \Delta t$ dôjde k zväčšeniu objemu ortuti o $V\beta(t)\Delta t$. Ak prírastku teploty o 1°C zodpovedá na stupnici teplomera približne x = 1cm, potom tento prírastok objemu môžeme napísať ako $\frac{\pi d^2}{4}x$ (podľa vzťahu pre objem valca $\pi d^2/4$ je obsah podstavy, x výška). Máme teda rovnicu

$$V\beta(t)\Delta t = \frac{\pi d^2}{4}x \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4V\beta(t)\Delta t}{\pi x}}$$

Ku šťastiu nám ešte chýba zistiť hodnoty $\beta(t)$ a V. Prvú z nich nájdeme pre t = 20°C v MFChT pre stredné školy, kde píšu β (20°C) = 18.10^{-5} K^{-1}. Stupnica teplomera je lineárna, tj. vzdialenosť medzi 36°C a 37°C je rovnaká ako medzi 41°C a 42°C. Z toho môžeme usúdiť že pre tieto teploty koeficient β od t závisí len málo, takže aj pre naše výpočty môžeme použiť hodnotu z tabuliek. Výška H valcovej nádobky s ortuťou bola na mojom teplomeri rovná približne 12 mm a jej vonkajší priemer približne 4,5 mm. Ako zistím vnútorný priemer tejto nádobky? Bez jej nevratného rozobratia v našich podmienkach asi dosť ťažko, takže najmúdrejšie bude použiť intuíciu a zdravý rozum, s ktorých pomocou by sme mali dospieť vnútornému priemeru D nádobky rovnému približne 3,5 mm. Objem ortuti V potom môžem vyjadriť ako $\frac{\pi D^2}{4}H$, kde D = 3,5 mm a H = 12 mm. Po dosadení do vzťahu pre d, ktorý sme získali na začiatku dostaneme

$$d = D\sqrt{\frac{H\beta\Delta t}{x}} \approx 0{,}05\,\text{mm}\,.$$

Aj napriek niekoľkým zanedbaniam je výsledok pomerne presný. Najhrubší odhad sa týka určenia D, ale ani tu relatívna chyba pravdepodobne nepresiahla 20%. Podľa výsledku $d \sim D$, preto zhruba tá istá relatívna odchýlka sa týka aj určenia d.

Nakoniec ešte zopár slov k vašim výtvorom. Veľa z vás riešilo tento príklad tak, že ste sa snažili pozerať lupou na ortuťovú čiarku v teplomeri, alebo ste teplomer premietali,... . Dostali ste tak rádovo desať krát väčšie d ako z merania pomocou tepelnej rozťažnosti. Chyba bola v tom, že vonkajší povrch kapilárky v teplomeri nieje kruhový, ale prierezom sa podobá na zaoblený trojuholník. Tento fakt je z časti pozorovateľný voľným okom. Stačí si všimnúť, že šírka ortuťového pásika závisí od uhla, pod ktorým naň pozeráme.

B–3.4 Krabice (opravoval Juro)

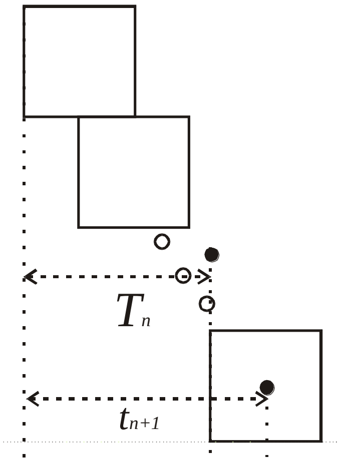
Predstavte si, že máte veľa, skutočne veľa, (tak veľa, že to až kazí charakter) pevných homogénnych kociek s hranou dĺžky a. Začnete tie kocky klásť na seba. (Prvá kocka ide na zem, druhá na prvú, tretia na druhú, atď...) Dokážte, že pri vhodnom usporiadaní kociek je možné docieliť, aby vodorovná vzdialenosť medzi najvyššou a najnižšou kockou bola ľubovoľne veľká.

Ahojte. Tak sa popasujme s krabicami. Zlomyselník Djony sa nám smeje, a povedal, že sme lamy a o viac ako o dva metre to predsa nikdy nepresiahneme. A my samozrejme lamy nie sme, tak hor sa do vymýšľania, ako to Djonymu dokázať.

Dôležité je si uvedomiť, ako to bude fungovať, za akých podmienok nám kocky nepopadajú na zem. Na to, aby kocka nespadla, musí byť jej ťažisko nad pevným bodom. Takáto kocka sa potom sama stáva pevnou a môžne niesť iné kocky. Tak isto ľubovoľna skupinka susediacich kociek musí mať ťažisko nad pevným bodom. To znamená, že žiadna z kociek nesmie presahovať nad tú pod ňou o viac ako *a/2*. Spoločné ťažisko všetkých kociek okrem tej najspodnejšej musí byťnad touto kockou. Ťažisko všetkých kociek okrem dvoch ... Takto dostanem, že spoločné ťažisko všetkých kociek okrem n najspodnejších musí byť nad touto n-tou kockou.

S touto prípravou sa môžme vrhnúť k samotnému riešeniu. Položme na zem prvú kocku. Teraz tam umiestnime ďalšiu kocku. Sme maximalisti a chceme mať čo najväčší presah, preto novú kocku položme tak, aby jej ťažisko bolo práve na okraji prvej kocky. Teraz máme ďalšiu kocku. Hmm, čo s ňou … Urobme to tak, že tie dve kocky podvihmeme a podložíme pod ne tretiu kocku tak, aby ťažisko tých dvoch bolo práve nad okrajom tretej kocky.

A takto postupujme ďalej. Vždy to, čo momentálne máme na seba naukladané, podvihneme a podložíme pod toto čudo ďalšiu kocku tak, aby bolo ťažisko čuda priamo nad okrajom podloženej kocky. Poďme to celé nejako rozumne matematicky zapísať.



Položme prvú kocku na zem. Kocky budeme klásť napravo od nej a vzdialenosti merať od jej ľavej zvislej steny (pozri obrázok). Ozančme polohu ťažiska celej sústavy n kociek T_n. Polohu ťažiska n-tej kocky označme t_n. T_n bude potom podľa vzorca pre ťažisko sústavy (hmotnosť kocky sme označili m)

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} mt_i \,/ \sum_{i=1}^{n} m$$

Nezľaknite sa toho divného zvieratka. Symnol $\sum$ značí súčet a ide len o skrátený zápis a znamená to asi toľkoto:

$$\sum_{i=1}^{n} mt_i = mt_1 + mt_2 + mt_3 + \ldots + mt_n$$

Podľa uvedeného postupu dáme $n+1$–vú krabicu tak, že poloha jej ťažiska bude $t_{n+1} = T_n + a/2$. Podľa predchádazúceho vzťahu bude pre T_{n+1} platiť

$$T_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} mt_i \,/ \sum_{i=1}^{n+1} m = \frac{\sum_{i=1}^{n} mt_i + mt_{n+1}}{(n+1)m}$$

Tu si spomeňme na to, čomu sa rovná Tn a môžeme počítať

$$T_{n+1} = \frac{T_n mn + m\frac{a}{2} + mT_n}{(n+1)m} = T_n + \frac{a}{2}\frac{1}{n+1}$$

Pre Tn platí podobný vzťah, takže

$$T_{n+1} = T_{n-1} + \frac{a}{2}\frac{1}{n-1+1} + \frac{a}{2}\frac{1}{n+1} = T_{n-1} + \frac{a}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

Toto zopakujeme spolu $n-1$ krát a dostaneme

$$T_{n+1} = T_1 + \frac{a}{2}\left(\frac{1}{2} + \ldots. + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots. + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

nakoľko sme si súradnice zvolili tak, že T_1 je $a/2$.

Vodorovná vzdialenosť medzi najvyššou a najnižšou kockou je t_{n+1} - $a/2 = T_n$. Vidíme, že podľa hintu rastie súčet v zátvorke do nekonečna. A teda aj spomínaná vodorovná vzdialenosť môže byť 2 metre, 5 metrov, jedným slovom akákoľvek veľká.

Čo to znamená? Nech nám Djony povie akýkoľvek veľkým požadovaný presah, vždy pri dostatočnom počte kociek takýmto postupom docielime, aby sme dostali ešte väčší. Hurá. A tak sa to ozaj dá až do nekonečna. Dúfam, že ste si to skúsili aj sami. Keď som bol v lete v Amerike, tak som to skúšal s krabicami od topánok a podarilo sa mi to naskladať tak, že posledná krabica úplne presahovala cez okraj tej spodnej. Problém bol v tom, že v sklade sme nemali dosť vysoký strop a viac sa mi už nedalo.

Vaše riešenia ma príjemne prekvapili. Až na niektoré drobnosti ste obstáli veľmi dobre. Často ste si však nedávali pozor na formuláciu záveru a smelo ste prehlásili, že tá celá vzdialenosť bude nekonečná. Ale nič také ako nekonečná vzdialenosť neexistuje. Ukázali sme len, že vzdialenosť bude ľubovoľne veľká. Ak si všimnete, aj v zadaní a v hinte sme sa pojmu nekonečna elegantne vyhli.

A to by už snáď mohlo byť aj dosť. Teším sa na sústredko, prajem krásne sviatky, pekné prázdniny a veľa zadru, šťastíčka a pohody do nového roka 2006 (ako ten čas letí, však ešte len včera bolo sústredko v KŽ). Bohu dušu a nám všetky tie oné … krabice.

B–3.5 Šrapnel (opravoval Kubus)

Predstavte si hviezdu. V jej blízkosti sa nachádza (nehybný) granát, ktorý vydáva zvuky 5, 4, 3, 2, 1, BAM. Po výbuchu sa granát rozletí do všetkých možných smerov, pričom jeho kúsky odlietajú z miesta výbuchu rovnako veľkými rýchlosťami v. Dokážte, že všetky črepiny obiehajú po eliptických trajektóriách s rovnako veľkou hlavnou poloosou.

Prvý Keplerov zákon nám hneď hovorí, že všetky úlomky sa budú pohybovať po elipsách. Ako niektorí z vás správne poznamenali, môže sa vyskytnúť zopár problémov – niekedy počas svojho obehu môže úlomok naraziť na hviezdu, jeho dráha bude teda iba časťou elipsy (túto možnosť však odsunieme, keďže zadanie nám káže zanedbať rozmery hviezdy). Elipsa sa tiež môže degenerovať na úsečku (veľmi plochú elipsu) pre úlomky, ktoré vyštartujú smerom ku hviezde (alebo od hviezdy), alebo, ak je rýchlosť v priveľká (väčšia než úniková), úlomky ujdú donekonečna. Tu však nemôžeme skončiť svoje riešenie suchým konštatovaním, že „tvrdenie zo zadania neplatí vždy“. FKS nie je súťaž v hľadaní dier v zadaniach, ale súťaž vo fyzike. Poďme sa teda pozrieť na to, ako sa budú správať úlomky, ak v bude menšia než úniková rýchlosť.

Na elipse existujú dva body, konce veľkej polosi, v ktorých je rýchlosť úlomku kolmá na spojnicu úlomok - hviezda. (Volajú sa vrcholy elipsy a sú to mimochodom práve tie body, kde je úlomok najbližšie resp. najďalej od hviezdy – pericentrum a apocentrum.) Tieto ich vlastnosti sú veľmi užitočné. Ak si totiž označíme ich vzdialenosti od hviezdy R_1 a R_2, máme

$$2a = R_1 + R_2.$$

Nech R je vzdialenosť úlomku od hviezdy v momente, keď je jeho rýchlosť kolmá na sprievodič. Vtedy nám zmizne sin α v 2. Keplerovom zákone (viď hinty k úlohám), keďže je v týchto bodoch rovné 1. Ak si teda označíme w rýchlosť úlomku v momente, keď je kolmá na sprievodič, R_0 vzdialenosť granátu od hviezdy a α_0 počiatočný uhol, ktorý zvierala rýchlosť daného úlomku so spojnicou granát - hviezda, dostávame rovnicu (z 2. Keplerovho zákona):

$$Rw = R_0 v.\sin \alpha_0 = L$$

Pre krátkosť sme si označili $R_0 v.\sin \alpha_0 = L$ (Tí, čo sa už stretli s momentom hybnosti, vedia, prečo práve L). Na zistenie R potrebujeme ešte jednu rovnicu. Touto rovnicou bude zákon zachovania energie (Odvážni môžu použiť aj 3. Keplerov zákon, ale neodporúčam):

$$E_k + E_p = \tfrac{1}{2} mv^2 - GmM/r = \text{konšt.}$$

Pričom potenciálna energia nie je iba *mgh*, pretože nepracujeme v homogénnom gravitačnom poli. (Veľké *G* je gravitačná konštanta.) Takže dostávame

$$\tfrac{1}{2} mw^2 - GmM/R = \tfrac{1}{2} mv^2 - GmM/R_0 = E$$

(Znova sme si pre krátkosť označili počiatočnú energiu úlomku $\tfrac{1}{2} mv^2 - GmM/R_0$ ako E.) Teraz už sme pripravení na všetko. Máme dva rovnice o dvoch neznámych (R a w), stačí nimi už len silno triasť a vypadne z nich všetko, čo treba:

$$w = L/R$$

Dosadíme do druhej rovnice:

$$ML^2/2R^2 - GmM/R = E$$
$$ML^2/2 - GmMR = ER^2$$
$$ER^2 + GmMR - ML^2/2 = 0$$

Riešime kvadratickú rovnicu pre R a dostávame

$$R_{1,2} = (-\,GmM \pm \sqrt{D})\,/2E$$

Kde D je nejaký diskriminant, dlhý výraz, ktorý nás, ako o chvíľu uvidíme, vôbec nezaujíma. Všimnime si, že nám vyšli dve možné hodnoty pre R, presne ako sme predpokladali. Bude to práve vzdialenosť apocentra a pericentra od hviezdy. Ak si teda vyjadríme dĺžku hlavnej polosi a, dostávame

$$a = (R_1 + R_2)\,/2$$
$$a = [(-\,GmM + \sqrt{D})\,/2E + (-\,GmM -- \sqrt{D})/2E]\,/2$$
$$a = -\,GmM\,/2E$$

A je to. Veľkosť a nezávisí od uhla, pod ktorým úlomok opúšťa granát, iba od jeho rýchlosti a vzdialenosti granátu od hviezdy (obe tieto veličiny sú skryté v počiatočnej energii E).

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina B – kategórie po 3. sérii zimného semestra 19. ročníka

	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	②	B-3.1	B-3.2	B-3.3	B-3.4	B-3.5	☠	Σ
1.	Boža	Vladimír	2 C	G Poprad Tatarku	38,5	-	5,0	3,3	2,5	5,0		54,30
2.	Branický	Juraj			37,7	-	5,0	4,0	5,0	0,0		53,34
3.	Vendel	Dávid	1 A	G KE Poštová	35,3	3,0	5,0	2,3	5,0	-		52,01
4.	Tureková	Katarína	2 F	G BB Tajovského	36,0	-	5,0	5,0	5,0	-	-1	50,00
5.	Fecko	Miroslav	kv. A	G Pankúchova	34,8	2,5	5,0	5,0	-	-		49,20
6.	Bogár	Ján	9 D	9. ZŠ L.Novomeského	34,2	4,5	5,0	-	2,5	2,5		48,12
7.	Kubina	Filip	sx.	G POH	32,0	-	4,5	5,0	5,0	1,5		48,00
8.	Ondáč	Peter	2 C	G Humenné	26,5	-	5,0	4,8	1,0	5,0		42,30
9.	Rybák	Matúš	sx.	OG Kukučínova	29,5	-	1,0	5,0	5,0	1,5	-1	41,00
10.	Bakula	Andrej	1 A	G Želiezovce	31,8	2,5	4,8	-	-	-		40,91
11.	Kuzma	Tomáš	kv. A	G KE Alejová	28,1	2,5	2,5	5,0	-	-		40,10
12.	Hudák	Jozef	2 B	G LS Bardejov	27,5	-	3,5	4,0	-	5,0		40,00
13.	Konečný	Lukáš	sx.	G Piešťany	27,5	-	5,0	3,0	0,5	3,5		39,50
14.	Demčáková	Ivona	1 A	G Želiezovce	28,2	2,5	4,8	-	1,0	-		38,48
15.	Roháľ	Branislav	2 B	G Považská Bystrica	27,5	-	3,5	3,5	1,0	1,0	-1	35,50
16.	Hojčka	Michal	kv. D	G Partizánske	26,2	2,5	1,5	3,2	-	-		35,27
17.	Jursa	Jakub	kv. A	G KE Alejová	28,2	2,5	2,0	-	-	-		34,13
18.	Boško	Lukáš	1 B	G Považská Bystrica	26,9	1,5	-	3,0	1,0	-		34,01
19.	Batmendijnová	Kristína	kv.	G T. Vansovej	33,0							32,98
20.	Zatkalík	Michal	sx.	G sv. Františka	27,0	-	5,0	-	2,0	0,5	-2	32,50
21.	Opavský	Ján	1 A	G Želiezovce	24,5	2,0	2,0	-	-	-		29,78
22.	Petrucha	Michal	2 A	G BA Metodova	17,5	5,0	5,0	5,0	-	-		27,50

23.	Vano	Jakub	1 D	G Prešov J A Raymana	27,2	-	-	-	-	-		27,18
24.	Baxová	Katarína	1 E	G ĽŠ Trenčín	20,9	0,5	0,5	3,2	0,0	0,5		27,04
25.	Keruľ	Lukáš	sx. A	OG BA Tilgnerova	14,8	-	5,0	3,2	0,5	-		23,50
26.	Marhefka	Eduard		G Spišská Stará Ves	13,8	5,0	0,8	-	1,5	-	-2	20,97
27.	Labant	Tomáš	2 Ag	Gym. Kráľovnej pokoja	14,5	-	0,8	2,0	1,0	1,0		19,30
28.	Koreňová	Nikola	2 E	G PH Michalovce	14,0	-	0,5	3,0	-	0,5		18,00
29.	Kobza	Vladimír	2 F	G BB Tajovského	8,0	-	3,5	4,8	1,0	-		17,30
30.	Vanya	Peter	kv.	G ĽŠ Trenčín	11,2	0,5	0,8	1,2	0,5	0,0		15,20
31.	Suchá	Nina	1 F	G VPT Martin	14,2							14,18
32.	Pažický	Martin	1 C	G BA J. Hronca	13,8	0,5		0,2	0,5	0,0	-2	13,43
33.	Matejovičová	Lenka	sx.	G BA Grösslingova	13,0		2,2				-2	13,20
34.	Točená	Rozália			12,5							12,50
35.	Šafárik	Marek	2 A	G Revúca	11,5							11,50
	Černeková	Alžbeta	1 E	G Považská Bystrica	11,5							11,50
37.	Tóth	Štefan	2 A	G Revúca	9,0							9,00
38.	Baxová	Jana	9 C	ZŠ Dlhé Hory, Trenčín	8,3							8,26
39.	Nagy	Jakub	2 C	G KE STA	4,0							4,00
40.	Nemčeková	Ivana			3,0							3,02
41.	Purgatová	Hana	2 B	G Skalica	1,0							1,00
42.	Kunová	Miroslava			0,7							0,70

Milý riešiteľ/ka. Pripravili sme pre vás prekvapenie. Pre viac informácií pozri
www.fks.sk/FX

§ **E = mc^2** (3.časť)

„No počkaj, takže ja som porušil nejaký zákon, hej? To je blbosť, veď som ani nevedel, čo robím! Prečo tu nie je ten fyzik? To on ma k tomu prinútil!“

„Jasné, prinútil! Sľúbil ti, že bude sranda. Pekné prinútenie! Ale aj ten tu bol, mal proces pred tebou, ale porušil Zákon po prvýkrát, takže mu iba vymazali pamäť. Ale ty už si s nimi nejaké opletačky mal, pamätáš? Aha, nepamätáš. No, ale pamätáš si aspoň, ako si sa vtedy snažil schudnúť kvôli Lucii?“

„No jasné, Lucia... Našla si potom nejakého hokejistu...“

„A pamätáš si na ten zázračný prostriedok na chudnutie? Zatkli ťa za porušenie Zákona zachovania energie. Tuto Pufino je tu tiež odvtedy.“

„No jasné, evolučné Zákony a blablabla, tarbíky nemôžu byť inteligentnejšie, ako ich majitelia, pekná blbosť... Dali mu tam za mňa plyšáka a ten idiot to ani nepoznal! Hej! Si tam? Haló? Hej, Pravo, nemôžeš ho zresetovať, či čo? Vyzerá, akoby nebol doma.“

„Nechaj ho, spracováva informácie. O chvíľu sa naštartuje a bude si myslieť, že to hneď pochopil.“

„Už to chápem!“

„No nehovoril som?“

„Ale... Ale to znamená, že všetci sa mýlia! Fyzikálne zákony si len tak niekto vymyslel?!“

„Pochopil... Inak, vieš že práve prebieha novelizácia gravitačného zákona?“

„Čo?!“

„No. To robia v kuse. Najprv im stačil starý dobrý Newtonov, ale ľudia doňho začali príliš šprtať a tak ho museli novelizovať. Fakt, teória relativity prešla len o pár hlasov. A teraz im to zase prestáva stačiť.“

„Éééééééé....“ znela inteligentná Pravoslavova odpoveď.

„Už zase? Odkiaľ to vlastne vieš? Pokiaľ si pamätám, ONI sa stavom svojej legislatívy veľmi nechvália...“

„To tvrdil ten chlapík odvedľa. Občas sem zaskočí na kus reči.

Vtedy začuli nejaké škrabavé zvuky pod podlahou. Pravoslav sa obzrel, ale tarbík, pardón tarbíčka, bola stále vo svojej klietke. Vtedy sa mu odniekiaľ spod nôh ozvalo:

„Uff! Ťažký muž nech zísť z toho kameňa!“

Mierne zaskočene, ale poslušne odstúpil zo zmienenej podlahovej krytiny. Kameň sa pomaly odvalil a na jeho mieste sa ukázalo niečo, čo pripomínalo príliš staré veľkonočné vajce. Presnejšie, také, čo sa vyliahlo a vyrástlo ešte pred maľovaním. Potom sa z diery vynorila usmievavá tvár nasledovaná koženým oblečením so strapcami. Vysvitlo, že tá veľkonočná sliepka je v skutočnosti čelenka.

„No prosím, to je on. Jedna Skala, toto je Pravoslav Prestrelil, no a opačne sú vaše mená tiež rovnaké, takže nechápem, prečo sa to hovorí, ale dobre, Pravoslav Prestrelil, toto je Jedna Skala, zoznámte sa, inak tiež nechápem, prečo sa to hovorí, lebo ste sa práve zoznámili.“ Chvíľu pozerali na tarbíčku, kým im došlo, čo vlastne chcela povedať.

„Teší ma.“

„Aj mňa tešiť. A kto byť ten ťažký s nechápavým výrazom?“

„Prepáčte, *ja* som Pravoslav Prestrelil. Hento je moje podvedomie Pravo.“

„...slav Prestrelil. Čo myslíš, že keď si hmotný, máš na to meno väčšie právo?“

„Len sa tu teraz nehádajte o nejaké meno. *Ty budeš Pravo* a ty „ťažký s nechápavým výrazom“ budeš Pravoslav a je po probléme. A keď už hovoríme o menách, volajte ma Izabela. Pufino vôbec nevyjadruje moju pravú podstatu....“

„A ja byť stále Jedna Skala.“

„Ozaj, a prečo si tu ty?“

„No, ja ani nechcieť byť tu, ja chcieť byť von. Ja kopať tunel smerom von, ale zrazu bum! a byť vo vedľajšej cele. Keby ja viac rozmýšľať, potom nemusieť kopať. My byť vo zvinutom rozmere takže keby ja kopať ešte ďalej, potom prísť naspäť do svojej cely.“

„To fakt? Ale prečo si tu, ako v tomto väzení? Za čo ťa odsúdili?“

„Ja ani nevedieť. V jednom okamihu ja byť vo svojom vigvame a počítať kvantovo-gravitačnú teóriu a v druhom už byť tu.“

(pokračovanie nabudúce, čiže ak chcete vedieť, ako to skončí, oplatí sa riešiť aj v lete:-)

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

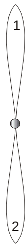
vzorové riešenia 3. série
A – kategória (staršia)
21. ročník
zimný semester
školský rok 2005/2006

www. **.sk**

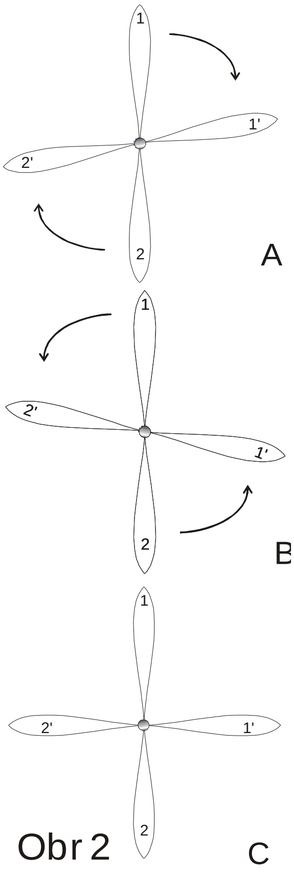
FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

A–3.1 Vrtuľa dozadu? (Opravoval Škrek)

Určite ste už v televízore videli, ako sa v starom filme z druhej svetovej vojny vrtuľa stíhačky pomaly roztáča. V určitom okamihu sa začalo zdať, že sa vrtuľa začala točiť opačným smerom. Ak sa rovnomerne roztáča s uhlovým zrýchlením ε, po akom čase sa bude v televízore zdať, že sa otáča opačne? Film bol natočený rýchlosťou 24 obrázkov za sekundu.



Obr 1



Obr 2

Majme lietadlo. Máme? Máme! Má lietadlo vrtuľu? Ak nie, začni čítať vzorák odznova (pre istotu skús aj zadanie), ak áno, pokračuj ďalej. Koľko má vrtuľa tých chobotín (rozumej lopatiek)? Zákerná to otázka, preto odpovieme že *n*, akože *n*evieme. Dobre, postavíme si lietadlo pred seba a začneme mu roztáčať vrtuľu. Čo vidíme? No a už sme sa skoro jali chytiť pod pazúr reakčnú dobu nášho oka, keď tu zrazu si všimneme že to všetko natáčame na film s 24 obrázkami za sekundu. Dobré nie? Čo tým chcel autor povedať je, že toto je vlastne teraz naša reakčná doba nášho oka. Daný jav by sme pozorovali aj naživo aj na filme s inou frekvenciou. Samozrejme naše oko je obmedzené zhora, tj. existuje maximum obrázkov za sekundu ktoré ešte dokáže rozlíšiť, ale tých 24 ešte zvláda (ak si dobre pamatám, tak to maximum je 28 obrázkov.s^{-1}). Výborne, ešte ostáva poznamenať, že vidíme aj tak dajaké šmuhy, lebo naša kamera sníma na jeden obrázok nejaký časový úsek, ale polohu lopatky určí naše oko intuitívne ako najhustejšiu šmuhu (tak nejako si predstavujem kvantovú mechaniku).

Označme si τ ako čas medzi dvoma obrázkami

$$\tau = \frac{1}{24} s ,$$

ďalej si označme φ ako uhol medzi dvoma susednými lopatkami

$$\varphi = \frac{2\pi}{n} .$$

Náš mozog vždy vyhodnocuje dva po sebe nasledujúce obrázky. Treba zodpovedať otázku, že kedy sa mu zdá že sa vrtuľa hýbe dopredu, a kedy dozadu. No nakreslíme si obrázky hneď dva. Prvý obrázok je obrázok ktorý vidíme prvý a k nemu vzťahujeme význam druhého obrázku. Pre jednoduchosť si vezmeme vrtuľku s dvoma lopatkami. Ak ako druhý obrázok vidíme obrázok 2a, potom sa nám zdá že vrtuľa sa točí dopredu, lebo náš mozog má tendenciu spájať si do pohybu kratšie vzdialenostné úseky. Inak povedané lopatka 1' je bližšie k pôvodnej pozícií lopatky 1 ako lopatka 2' a teda mozog si spojí do pohybu lopatky 1 a 1'. Na obrázku 2b, je situácia opačná a mozog si dá do súvislosti ako pohyb lopatky 1 a 2'. No ale teraz vidíme, že môže nastať aj situácia ako na obrázku 2c, kedy sa mozog nevie rozhodnúť.

Táto situácia nastane vtedy ak sa vrtuľa otočí za čas τ o uhol $\varphi/2$, tj. keď jej uhlová rýchlosť ω bude

$$\omega = \omega' = \frac{\varphi}{2\tau}.$$

Dôležitá poznámka: Horeuvedený vzorec je iba aproximácia, kde uvažujeme že sa medzi jednotlivými zábermi vrtuľa neurýchľuje, a urýchľuje sa nárazovo vždy tak, aby to na kamere vyzeralo, že rovnomerne zrýchľuje, resp. každé τ zväčší naraz svoju rýchlosť o $\varepsilon\tau$. Pre dostatočne malé ε to je v poriadku (bežné ε vrtúľ na Zemi to spĺňajú).

Ak ω bude o trošku väčšia, tak nastane situácia akú opisuje obrázok 2b (tj vrtuľa sa bude zdanlivo točiť dozadu) a ak menšia, tak nastane situácia ako pri obrázku 2a (vrtuľa sa točí zdanlivo dopredu). No a za aký čas nastane situácia, že sa vrtuľa začne otáčať uhlovou rýchlosťou $\omega = \omega'$? Z rovnomerne zrýchleného pohybu vieme, že

$$\omega = \varepsilon t \Rightarrow t = \frac{\omega'}{\varepsilon} = \frac{\varphi}{2\tau\varepsilon} = \frac{2\pi}{2n\tau\varepsilon} = \frac{\pi}{n\tau\varepsilon} = \frac{24\pi}{n\varepsilon} s.$$

Čiže po tomto čase sa nám začne zdať, že sa vrtuľa točí spiatky. Treba ale poznamenať, že ak vrtuľa bude aj naďalej zrýchlovať, tak po neakom čase sa začne zdanlivo opäť otáčať správnym smerom, a po nejakom čase o5 nesprávnym, a tak ďalej. Na domácu úlohu si spočítajte že zmena pohybu sa vždy udeje po celočíselnom násobku nami vypočítaného času t, respektíve že každých t sekúnd sa zmení smer otáčania.

Poznámka k našej aproximácii. Kebyže ju neurobíme, tak náš výpočet vyzerá takto nejak:

$$\frac{\varphi}{2} = \omega\tau + \varepsilon\tau^2 = \varepsilon t\tau + \frac{1}{2}\varepsilon\tau^2 \Rightarrow t = \frac{\varphi}{2\varepsilon\tau} - \frac{1}{2}\tau = \frac{\pi}{n\varepsilon\tau} - \frac{1}{2}\tau \Rightarrow t_k = \frac{k\pi}{n\varepsilon\tau} - \frac{1}{2}\tau$$

Vidíme že nám vyšiel ten istý výsledok až na korekciu o $\tau/2$. Teraz sa nad tým zamyslíme. Aká je naša presnosť merania? No ± jeden obrázok, takže v čase to bude ± τ. S čím nami vypočítaná hodnota krásne súhlasí z danou presnosťou. Toto je prosím vážení čaro fyziky (ha to kukáte čo), že absolútne zlým postupom (z matematického hľadiska), dostávame uspokojujúci výsledok (z fyzikálneho náhľadu).

Malá poznámka k presnému výsledku. Pre veľké ε by sa mohlo zdať, že to nefičí, a naozaj pre prvé zmeny smeru pohybu (pre malé k) to nejde, ale po dostatočnom čase sa to upraví a pre

$$k \geq \frac{\tau^2\varepsilon}{2\pi} n$$

nám to už robí to, čo chceme.

Poznámka k Vašim riešeniam, všetci až na jednu osobu (ktorú tu nespomeniem, aby Boris nebol namyslený), ste bohorovne rátali s aproximáciou a vôbec ste sa neobťažovali to nejako povedať, prípadne dajak inak na to upozorniť. Príklad to bol ľahký a teda každé pochybenie budem kruto trestať ☺.

A–3.2 Teplomer (Opravoval Peťo)

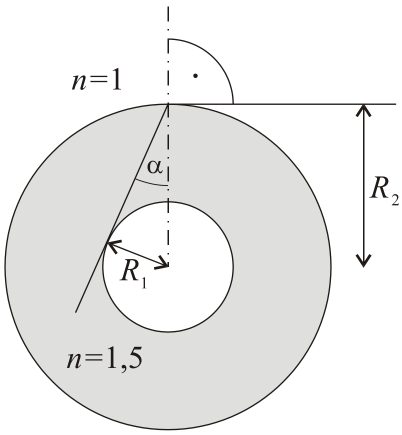
Odmerajte priemer sklenej trubičky v klasickom lekárskom teplomeri, avšak bez toho, aby ste teplomer poškodili.

Ahojte. Pozrime sa spolu, ako by mohlo vyzerať riešenie tohto príkladu. Označme koeficient objemovej tepelnej rozťažnosti ortuti ako β, objem nádobky s ortuťou ako V a hľadaný vnútorný priemer kapiláry v teplomery ako d. Vieme, že pri zmene teploty z t na $t+\Delta t$ dôjde k zväčšeniu objemu ortuti o $V\beta(t)\Delta t$. Ak prírastku teploty o 1°C zodpovedá na stupnici teplomeru približne x = 1 cm, potom tento prírastok objemu môžeme napísať ako

$$\frac{\pi d^2}{4}x$$

podľa vzťahu pre objem valca $\pi d^2/4$ je obsah podstavy, x výška). Máme teda rovnicu

$$V\beta(t)\Delta t = \frac{\pi d^2}{4}x \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4V\beta(t)\Delta t}{\pi x}}$$



Ku šťastiu nám ešte chýba zistiť hodnoty $\beta(t)$ a V. Prvú z nich nájdeme pre t = 20 °C v MFChT pre stredné školy, kde píšu β(20 °C) = 18.10^{-5} K^{-1}. Stupnica teplomera je lineárna, tj. vzdialenosť medzi 36 °C a 37 °C je rovnaká ako medzi 41 °C a 42 °C. Z toho môžeme usúdiť že pre tieto teploty koeficient β od t závisí len málo, takže aj pre naše výpočty môžeme použiť hodnotu z tabuliek. Výška valcovej nádobky s ortuťou H bola na mojom teplomeri rovná približne 12 mm a jej vonkajší priemer D približne 4,5 mm. Ako zistím vnútorný priemer tejto nádobky? Bez jej nevratného rozobratia v našich podmienkach asi dosť ťažko, ale predsa sa o to môžem pokúsiť. Nech som sa na nádobku svojho teplomeru pozeral akokoľvek intenzívne, stále sa mi zdalo, že je celá strieborná (ortuťová), nie a nie odhadnúť hrúbku skla.

Vypočítajme, aký je minimálny vnútorný priemer tejto nádobky, aby k tomuto „zdaniu“ došlo. Využijeme na to skutočnosť, že index lomu skla je približne n. Situáciu popisuje obrázok. Ak máme sklenenú rúrku s vnútorným a vonkajším polomerom R_1 a R_2, potom môže dôjsť k premietnutiu vnútra rúrky na celý jej povrch. Stane sa to, ak sa lúč dopadajúci na rúrku pod uhlom dopadu takmer 90° láme tak, že pretína jej vnútorný povrch.

Podľa zákona lomu platí $\sin 90° = n \sin\alpha$. Z geometrie vieme, že v hraničnom prípade $\sin\alpha = R_1/R_2$ a $\sin 90°$ = 1, preto $R_1 = R_2/n$. To isté platí aj pre nádobku teplomeru – jej najmenší možný priemer je $1/n$ krát menší ako jej vonkajší priemer D. Keby bol tento vnútorný priemer väčší, bola by sklenená stena nádobky príliš tenká a mohla by sa rozbiť, preto môžeme uvažovať hodnotu D/n = 3 mm. Objem ortuti V potom môžem vyjadriť ako

$$\frac{\pi D^2}{4n^2}H,$$

kde D = 4,5 mm, H = 12 mm a n = 1,5. Po dosadení do vzťahu pre d, ktorý sme získali na začiatku dostaneme

$$d = \frac{D}{n}\sqrt{\frac{H\beta\Delta t}{x}} \approx 0{,}03\,\text{mm}.$$

Aj napriek niekoľkým zanedbaniam je výsledok pomerne presný. Najhrubší odhad sa týka určenia D, ale ani tu relatívna chyba pravdepodobne nepresiahla 20%. Podľa výsledku $d \sim D$, preto zhruba tá istá relatívna chyba sa týka aj určenia d.

Nakoniec ešte zopár slov k vašim výtvorom. Veľa z Vás riešilo tento príklad tak, že ste sa snažili pozerať lupou na ortuťovú čiarku v teplomery, alebo ste teplomer premietali,... .

Dostali ste tak rádovo desaťkrát väčšie d ako z merania pomocou tepelnej rozťažnosti. Chyba bola v tom, že vonkajší povrch kapilárky v teplomeri nie je kruhový, ale prierezom sa podobá na zaoblený trojuholník (vyskúmal to Peťo Perešíni). Tento fakt je z časti pozorovateľný voľným okom. Stačí si všimnúť, že šírka ortuťového pásika závisí od uhla, pod ktorým naň pozeráme.

(Pozn. Prekl.: Skúste sa na nádobku teplomeru pozrieť pod vodou a uvidíte divy.)

A–3.3 Šrapnel (Opravoval Kubus)

Predstavte si hviezdu. V jej blízkosti sa nachádza (nehybný) granát, ktorý vydáva zvuky 5 4 3 2 1 bam. Po výbuchu sa granát rozletí do všetkých možných smerov, pričom jeho kúsky odlietajú z miesta výbuchu rovnako veľkými rýchlosťami v. Dokážte nasledujúce tvrdenia:

a) *všetky črepiny obiehajú po eliptických trajektóriách s rovnako veľkou hlavnou poloosou.*

b) *množina všetkých bodov, do ktorých sa nejaký úlomok niekedy dostane, tvorí plnú elipsu (resp. elipsoid v 3 rozmeroch)*

Rozmery hviezdy zanedbajte.

a) Prvý Keplerov zákon nám hneď hovorí, že všetky úlomky sa budú pohybovať po elipsách. Ako niektorí z vás správne poznamenali, môže sa vyskytnúť zopár problémov – niekedy počas svojho obehu môže úlomok naraziť na hviezdu, jeho dráha bude potom iba časťou elipsy. (Túto možnosť však odsunieme, keďže zadanie nám káže zanedbať rozmery hviezdy.) Elipsa sa tiež môže degenerovať na úsečku (veľmi plochú elipsu) pre úlomky, ktoré vyštartujú smerom ku hviezde (alebo od hviezdy), alebo, ak je rýchlosť v priveľká (väčšia než úniková), všetky úlomky ujdú donekonečna. Tu však nemôžeme skončiť svoje riešenie suchým konštatovaním, že „tvrdenie zo zadania neplatí vždy". FKS nie je súťaž v hľadaní dier v zadaniach, ale súťaž vo fyzike. Poďme sa teda pozrieť na to, ako sa budú správať úlomky, ak v bude menšia než úniková rýchlosť.

Na elipse existujú dva body – konce veľkej polosi, v ktorých je rýchlosť úlomku kolmá na spojnicu úlomok-hviezda. (Volajú sa vrcholy elipsy a sú to mimochodom práve tie body, kde je úlomok najbližšie resp. najďalej od hviezdy – pericentrum a apocentrum.) Tieto ich vlastnosti sú veľmi užitočné. Ak si totiž označíme ich vzdialenosti od hviezdy R_1 a R_2, máme

$$2a = R_1 + R_2.$$

Nech R je vzdialenosť úlomku od hviezdy v momente, keď je jeho rýchlosť kolmá na sprievodič. Vtedy nám zmizne „sin α" v 2. Keplerovom zákone (viď hinty k úlohám), keďže je v týchto bodoch rovné 1. Ak si teda označíme w rýchlosť úlomku v momente, keď je kolmá na sprievodič, R_0 vzdialenosť granátu od hviezdy a α_0 počiatočný uhol, ktorý zvierala rýchlosť daného úlomku so spojnicou granát-hviezda, dostávame rovnicu (z 2. Keplerovho zákona):

$$Rw = R_0 v.\sin \alpha_0 = L$$

Pre krátkosť sme si označili $R_0 v.\sin \alpha_0 = L$ (Tí, čo sa už stretli s momentom hybnosti, vedia, prečo práve L). Na zistenie R potrebujeme ešte jednu rovnicu. Touto rovnicou bude zákon zachovania energie (Odvážni môžu použiť aj 3. Keplerov zákon, ale neodporúčam):

$$E_k + E_p = ½\, mv^2 – GmM/r = \text{konšt.}$$

Pričom potenciálna energia nie je iba mgh, pretože nepracujeme v homogénnom gravitačnom poli. (Veľké G je gravitačná konštanta.) Takže dostávame

$$½\, mw^2 – GmM/R = ½\, mv^2 – GmM/R_0 = E$$

(Znova sme si pre krátkosť označili počiatočnú energiu úlomku $½\, mv^2 – GmM/R_0$ ako E.) Teraz už sme pripravení na všetko. Máme dva rovnice o dvoch neznámych (R a w), stačí nimi už len silno triasť a vypadne z nich všetko, čo treba:

$$w = L/R$$

Dosadíme do druhej rovnice:

$$ML^2/2R^2 – GmM/R = E$$

$$ML^2/2 – GmMR = ER^2$$

$$ER^2 + GmMR – ML^2/2 = 0$$

Riešime kvadratickú rovnicu pre R a dostávame

$$R_{1,2} = (- GmM \pm \sqrt{D})\,/2E$$

Kde D je nejaký diskriminant, dlhý výraz, ktorý nás, ako o chvíľu uvidíme, vôbec nezaujíma. Všimnime si, že nám vyšli dve možné hodnoty pre R, presne ako sme predpokladali. Bude to práve vzdialenosť apocentra a pericentra od hviezdy. Ak si teda vyjadríme dĺžku hlavnej polosi a, dostávame

$$a = (R_1 + R_2)\,/2$$

$$a = [(- GmM + \sqrt{D}) /2E + (- GmM -- \sqrt{D})/2E] /2$$
$$a = - GmM /2E$$

A je to. Veľkosť a nezávisí od uhla, pod ktorým úlomok opúšťa granát, iba od jeho rýchlosti a vzdialenosti granátu od hviezdy (obe tieto veličiny sú skryté v počiatočnej energii E).

b) Táto úloha sa dá vyriešiť niekoľkými geometrickými úvahami. Pozrime sa najprv, kde sa môže nachádzať druhé ohnisko F trajektórie nejakého úlomku. (G nech je poloha granátu a H poloha hviezdy.) Vieme, že G leží na elipse s ohniskami F a H a veľkou polosou dĺžky a, preto

$$|FG| + |HG| = 2a$$
$$|FG| = 2a – |HG| = 2a – x = r$$

(Označili sme si vzdialenosť hviezda-granát ako x.) Vzdialenosť FG je vždy rovná konštante $r = 2a – x$, preto sa každé ohnisko F bude nachádzať na kružnici so stredom v G a polomerom r. (Dôkaz, že každý bod na tejto kružnici je ohniskom nejakej dráhy prenechávame čitateľovi.)

Vezmime si teraz ľubovoľný bod X na ľubovoľnej z trajektórii úlomkov (s ohniskom F). Využime to, že zadanie nám vlastne prezradilo výsledok úlohy (že obálka všetkých trajektórii bude elipsa), a pozrime sa len tak z roztopaše na súčet vzdialeností |HX| + |GX|. Z trojuholníkovej nerovnosti vieme, že |GX| ≤ |GF| + |FX|, teda

$$|HX| + |GX| \leq |HX| + |GF| + |FX|$$

Avšak |GF| = r, a keďže X leží na eliptickej trajektórii s ohniskami H a F, |HX| + |FX| = 2a. Preto

$$|HX| + |GX| \leq 2a + r = 4a – x$$

Inými slovami, bod X leží vnútri elipsy (alebo na nej) s ohniskami G a H a dĺžkou hlavnej polosi $(4a – x) /2$. (Dôkaz, že KAŽDÝ bod vnútri tejto elipsy leží na nejakej trajektórii znova prenechávame ako rozcvičku pre čitateľa.) Ak predošlé úvahy vzkriesime z plochého papiera do priestoru, vidíme, že množinou všetkých bodov, kam sa nejaký úlomok môže dostať, je plný rotačný elipsoid (podľa osi GH).
P.S.: Ak si sami nakreslíte obrázok, bude to zrazu jednoduché ako facka.

A–3.4 Krabice (Opravoval Juro)

Predstavte si, že máte veľa, skutočne veľa, (tak veľa, že to až kazí charakter) pevných homogénnych kociek s hranou dĺžky a. Začnete tie kocky klásť na seba. (prvá kocka ide na zem, druhá na prvú, tretia na druhú, atď..) Dokážte, že pri vhodnom usporiadaní kociek je možné docieliť, aby vodorovná vzdialenosť medzi najvyššou a najnižšou kockou bola ľubovoľne veľká.

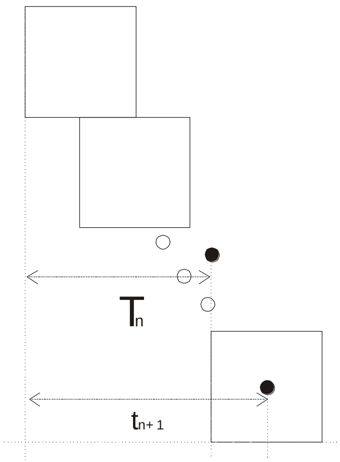
Ahojte. Tak sa popasujme s krabicami. Zlomyselník Djony sa nám smeje, a povedal, že sme lamy a o viac ako o dva metre to predsa nikdy nepresiahneme. A my samozrejme lamy nie sme, tak hor sa do vymýšlania, ako to Djonymu dokázať.

Dôležité je si uvedomiť, ako to bude fungovať, za akých podmienok nám kocky nepopadajú na zem. Na to, aby kocka nespadla, musí byť jej ťažisko nad pevným bodom. Takáto kocka sa otom sama stáva pevnou a môžne niesť iné kocky. Tak isto ľubovoľný skupinka susediacich kociek musí mať ťažisko nad pevným bodom. To znamená, že žiadna z kociek nesmie presahovať nad tú pod ňou o viac ako a/2. Spoločné ťažisko všetkých kociek okrem tej najspodnejšej musí byťnad touto kockou. Ťažisko všetkých kociek okrem dvoch ... Takto dostanem, že spoločné ťažisko všetkých kociek okrem n najspodnejších musí byť nad touto n-tou kockou.

S touto prípravou sa môžme vrhnúť k samotnému riešeniu. Položme na zem prvú kocku. Teraz tam umiestnime ďalšiu kocku. Sme maximalisti a chceme mať čo najväčší presah, preto novú kocku položme tak, aby jej ťažisko bolo práve na okraji prvej kocky. Teraz máme ďalšiu kocku. Hmm, čo s ňou … Urobme to tak, že tie dve kocky podvihmeme a podložíme pod ne tretiu kocku tak, aby ťažisko tých dvoch bolo práve nad okrajom tretej kocky.

A takto postupujme ďalej. Vždy to, čo momentálne máme na seba naukladané, podvihneme a podložíme pod toto čudo ďalšiu kocku tak, aby bolo ťažisko čuda priamo nad okrajom podloženej kocky. Poďme to celé nejak rozune matematicky zapísať.

Položme prvú kocku na zem. Kocky budeme klásť napravo od nej a vzdialenosti merať od jej ľavej zvyslej steny (pozri obrázok). Ozančme polohu ťažiska celej sústavy n kociek T_n. Polohu ťažiska n-tej kocky označme t_n. T_n bude potom podľa vzorca pre ťažisko sústavy (hmotnosť kocky sme označili m)



$$T_n = \sum_{i=1}^{n} mt_i \,/ \sum_{i=1}^{n} m$$

Podľa uvedeného postupu dáme $n+1$–vú krabicu tak, že je poloha jej ťažiska bude $t_{n+1} = T_n + a/2$. Podľa predchádazúceho vzťahu bude pre T_{n+1} platiť

$$T_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} mt_i \,/ \sum_{i=1}^{n+1} m = \frac{\sum_{i=1}^{n} mt_i + mt_{n+1}}{(n+1)m}$$

Tu si spomeňme na to, čomu sa rovná T_n a môžme počítať

$$T_{n+1} = \frac{T_n mn + m\frac{a}{2} + mT_n}{(n+1)m} = T_n + \frac{a}{2}\frac{1}{n+1}$$

Pre T_n platí podobný vzťah, takže

$$T_{n+1} = T_{n-1} + \frac{a}{2}\frac{1}{n-1+1} + \frac{a}{2}\frac{1}{n+1} = T_{n-1} + \frac{a}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

Toto zopakujeme spolu n-1 krát a dostaneme

$$T_{n+1} = T_1 + \frac{a}{2}\left(\frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

nakoľko sme si súradnice zvolili tak, že T_1 je $a/2$.

Vodorovná vzdialenosť medzi najvyššou a najnižšou kockou je $t_{n+1} - a/2 = T_n$. Vidíme, že Podľa hintu rastie súčet v zátvorke do nekonečna. A teda aj spomínaná vodorovná vzdialenosť môže byť 2 metre, 5 metrov, jedným slovom akákoľvek veľká.

Čo to znamená? Nech nám Djony povie akýkoľvek veľkým požadovaný presah, vždy pri dostatočnom počte kociek takýmto postupom docielime, aby sme dostali ešte väčší. Hurá. A tak sa to ozaj dá až do nekonečna. Dúfam, že ste si to skúsili aj sami. Keď som bol v lete v Amerike, tak som to skúšal s krabicami od topánok a podarilo sa mi to naskladať tak, že posledná krabica úplne presahovala cez okraj tej spodnej. Problém bol v tom, že v sklade sme nemali dosť vysoký strop a viac sa mi už nedalo.

Vaše riešenia ma príjemne prekvapili. Až na niektoré drobnosti ste obstáli veľmi dobre. Často ste si však nedávali pozor na formuláciu záveru a smelo ste prehlásili, že tá celá vzdialenosť bude nekonečná. Ale nič také ako nekonečná vzdialenosť neexistuje. Ukázali sme len, že vzdialenosť bude ľubovoľne veľká. Ak si všimnete, aj v zadaní a v hinte sme sa pojmu nekonečna elegantne vyhli.

A to by už snáď mohlo byť aj dosť. Teším sa na sústredko, prajem krásne sviatky, pekné prázdniny a veľa zadru, šťastíčka a pohody do nového roka 2006 (ako ten čas letí, však ešte len včera bolo sústredko v KŽ). Bohu dušu a nám všetky tie oné … krabice.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina A – kategórie po 3. sérii zimného semestra 20. ročníka

	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	②	A-3.1	A-3.2	A-3.3	A-3.4	☠	Σ
1.	Hrdá	Marcela	4 IB	G BA J. Hronca	40,0	5,0	5,0	5,0	2,5		57,50
2.	Imriška	Jakub	4 A	G BA J. Hronca	39,5	4,5	5,0	3,2	5,0		57,20
3.	Bzdušek	Tomáš	sp A	G Piešťany	38,0	4,5	4,0	5,0	5,0		57,08
4.	Fačkovec	Boris	se. A	G Piešťany	37,7	5,0	3,0	3,0	5,0		55,00
5.	Perešíni	Peter	4 F	G BB Tajovského	35,0	4,5	5,0	5,0	5,0		54,50
6.	Kucharík	Marcel	4 D	G MRŠ NMV	36,0	4,5	4,3	4,5	4,5		53,80
7.	Kajtár	Gergely	ok.	G Hansa Selyeho VJM	36,5	4,5	5,0	2,5	4,5		53,00
8.	Fecko	Stanislav	se. A	G Pankúchova	34,1	4,5	4,7	-	4,0		49,11
9.	Bogár	Ondrej	3 E	G ĽŠ Trenčín	33,7	4,5	3,5	0,5	5,0		48,96
10.	Zámečník	Peter	4 D	G MRŠ NMV	31,0	5,0	4,5	3,0	4,0		47,50
11.	Takács	Michal	4 F	G BB Tajovského	33,0	4,5	5,0	-	5,0	-1	46,50
12.	Škrovinová	Eva	sp	G Nitra Párovská	30,1	1,5	4,8	0,0	5,0		43,32
13.	Danko	Juraj	3	G BA J. Hronca	29,6	4,5	1,5	0,0	5,0		42,61
14.	Pôbišová	Zuzana	4 F	G BB Tajovského	26,5	4,5	5,0	-	5,0		41,00
15.	Szabadoš	Michal	sp	ŠpMNDaG	26,8	2,0	4,7	-	5,0		40,46
16.	Kaniansky	Miroslav	ok. A	G Piaristické Nitra	28,0	3,0	3,0	1,0	5,0		40,00
17.	Kravec	Martin	4 A	G PH Michalovce	27,5	2,0	5,0	-	5,0		39,50
18.	Genzor	Jozef	3 A	G sv. Františka	26,0	2,0	5,0	1,5	0,5		36,94
19.	Hreha	Ján	3	G Liptovský Hrádok	25,9	4,5	3,0	0,5	1,0		36,85
20.	Štolcová	Jana	4	G Piaristické Nitra	23,0	2,5	4,7	-	2,5		32,70
21.	Sudolský	Michal	3 F	G BB Tajovského	26,3		3,5	0,8	0,5		32,57
22.	Piterka	Tomáš	ok. A	G Piaristické Nitra	23,0	2,5	1,7	1,0	3,0		31,20
23.	Hergelová	Beáta	4 B	G BST Lučenec	20,5	4,8	3,8	1,0	3,0	-2	31,10
24.	Rehák	Matúš	sp	G Skalica	19,0	4,5	5,0	-	-	-1	29,46
	Galica	Tomáš			18,0	4,5	4,0	0,0	-		26,50
26.	Švihorík	Róbert	sp	G Nitra Párovská	17,6	1,5	-	-	5,0		25,86
27.	Berta	Peter	3 A	G Veľké Kapušany	25,6	-	-	-	-		25,59
28.	Mikuláš	Ján	ok.	G BST Lučenec	25,5	-	-	-	-		25,50
29.	Magyarová	Katarína	se.	G BST Lučenec	17,9	-	0,5	1,0	1,0		21,27
30.	Pozník	Michal	3 B	G BA A. Einsteina	20,5	-	-	-	-		20,48
31.	Korch	Jakub	ok. A	G Piaristické Nitra	17,5	-	-	-	-		17,50
32.	Salaj	Michal	3 A	G Snina	16,8	-	-	-	-		16,80
33.	Basista	Peter	4 A	G PH Michalovce	16,0	-	-	-	-		16,00
34.	Herman	Peter	3 B	G BA J. Hronca	6,5	4,5	2,0	-	-		14,76
35.	Foltin	Miroslav	4 C	G Jána Hollého	13,5	-	-	-	-		13,50
36.	Stritesky	Lukáš			0,0	4,5	-	-	5,0		11,50
37.	Miňo	Lukáš	4 E	G PH Michalovce	6,3	1,0	2,0	0,5	0,5		10,30
38.	Pavlíček	Tomáš			9,5	-	-	-	-		9,50
39.	Pálenkár	Michal	3 A	G BA A. Einsteina	7,4	-	-	-	-		7,45
40.	Šinko	Martin	3 C	G BA A. Einsteina	2,1	-	-	-	-		2,10
41.	Kocun	Miroslav	3 A	G BA A. Einsteina	0,7	-	-	-	-		0,65
42.	Ľuptáková	Paula	4 F	G BB Tajovského	0,3	-	-	-	-		0,30

§ **E = mc²** (3.časť)

„No počkaj, takže ja som porušil nejaký zákon, hej? To je blbosť, veď som ani nevedel, čo robím! Prečo tu nie je ten fyzik? To on ma k tomu prinútil!“
„Jasné, prinútil! Sľúbil ti, že bude sranda. Pekné prinútenie! Ale aj ten tu bol, mal proces pred tebou, ale porušil Zákon po prvýkrát, takže mu iba vymazali pamäť. Ale ty už si s nimi nejaké opletačky mal, pamätáš? Aha, nepamätáš. No, ale pamätáš si aspoň, ako si sa vtedy snažil schudnúť kvôli Lucii?“
„No jasné, Lucia... Našla si potom nejakého hokejistu...“
„A pamätáš si na ten zázračný prostriedok na chudnutie? Zatkli ťa za porušenie Zákona zachovania energie. Tuto Pufino je tu tiež odvtedy.“
„No jasné, evolučné Zákony a blablabla, tarbíky nemôžu byť inteligentnejšie, ako ich majitelia, pekná blbosť... Dali mu tam za mňa plyšáka a ten idiot to ani nepoznal! Hej! Si tam? Haló? Hej, Pravo, nemôžeš ho zresetovať, či čo? Vyzerá, akoby nebol doma.“
„Nechaj ho, spracováva informácie. O chvíľu sa naštartuje a bude si myslieť, že to hneď pochopil.“
„Už to chápem!“
„No nehovoril som?“
„Ale... Ale to znamená, že všetci sa mýlia! Fyzikálne zákony si len tak niekto vymyslel?!“
„Pochopil... Inak, vieš že práve prebieha novelizácia gravitačného zákona?“
„Čo?!“
„No. To robia v kuse. Najprv im stačil starý dobrý Newtonov, ale ľudia doňho začali príliš šprtať a tak ho museli novelizovať. Fakt, teória relativity prešla len o pár hlasov. A teraz im to zase prestáva stačiť.“
„Éééééééé....“ znela inteligentná Pravoslavova odpoveď.
„Už zase? Odkiaľ to vlastne vieš? Pokiaľ si pamätám, ONI sa stavom svojej legislatívy veľmi nechvália...“
„To tvrdil ten chlapík odvedľa. Občas sem zaskočí na kus reči.
Vtedy začuli nejaké škrabavé zvuky pod podlahou. Pravoslav sa obzrel, ale tarbík, pardón tarbíčka, bola stále vo svojej klietke. Vtedy sa mu odniekiaľ spod nôh ozvalo:
„Uff! Ťažký muž nech zísť z toho kameňa!“
Mierne zaskočene, ale poslušne odstúpil zo zmienenej podlahovej krytiny. Kameň sa pomaly odvalil a na jeho mieste sa ukázalo niečo, čo pripomínalo príliš staré veľkonočné vajce. Presnejšie, také, čo sa vyliahlo a vyrástlo ešte pred maľovaním. Potom sa z diery vynorila usmievavá tvár nasledovaná koženým oblečením so strapcami. Vysvitlo, že tá veľkonočná sliepka je v skutočnosti čelenka.
„No prosím, to je on. Jedna Skala, toto je Pravoslav Prestrelil, no a opačne sú vaše mená tiež rovnaké, takže nechápem, prečo sa to hovorí, ale dobre, Pravoslav Prestrelil, toto je Jedna Skala, zoznámte sa, inak tiež nechápem, prečo sa to hovorí, lebo ste sa práve zoznámili.“ Chvíľu pozerali na tarbíčku, kým im došlo, čo vlastne chcela povedať.
„Teší ma.“
„Aj mňa tešiť. A kto byť ten ťažký s nechápavým výrazom?“
„Prepáčte, *ja* som Pravoslav Prestrelil. Hento je moje podvedomie Pravo.“
„...slav Prestrelil. Čo myslíš, že keď si hmotný, máš na to meno väčšie právo?“
„Len sa tu teraz nehádajte o nejaké meno. *Ty budeš Pravo* a ty „ťažký s nechápavým výrazom“ budeš Pravoslav a je po probléme. A keď už hovoríme o menách, volajte ma Izabela. Pufino vôbec nevyjadruje moju pravú podstatu....“
„A ja byť stále Jedna Skala.“
„Ozaj, a prečo si tu ty?“
„No, ja ani nechcieť byť tu, ja chcieť byť von. Ja kopať tunel smerom von, ale zrazu bum! a byť vo vedľajšej cele. Keby ja viac rozmýšľať, potom nemusieť kopať. My byť vo zvinutom rozmere takže keby ja kopať ešte ďalej, potom prísť naspäť do svojej cely.“
„To fakt? Ale prečo si tu, ako v tomto väzení? Za čo ťa odsúdili?“
„Ja ani nevedieť. V jednom okamihu ja byť vo svojom vigvame a počítať kvantovo-gravitačnú teóriu a v druhom už byť tu.“

(pokračovanie nabudúce, čiže ak chcete vedieť, ako to skončí, oplatí sa riešiť aj v lete:-)