FYZIKÁLNY KOREŠPONDENCNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 3. série
B – kategória (mladší)
20. rocník
letný semester
školský rok 2004/2005

www. **.sk**

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

B–3.1 Sauna (opravoval Škrek)

Ked chceš pomôct svojmu zdraviu, oddaj telo saunovaniu. Ako je teda možné, že v saune je bežná teplota okolo 65°C a clovek sa aj tak neuvarí (je známe, že štruktúra niektorých bielkovín sa porušuje už pri teplote 60°C). Tiež ste si mohli všimnút, že ked sa snažíte ochladit ovievaním, vylejete na výhrevné teleso trocha vody, prípadne sa chytíte nejakého predmetu, zažijete pocit intenzívnej horúcosti. Preco?

Sauna je totálne fínsky výmysel. Kedysi, ked sa taký Fín niekde usadil, tak najprv postavil saunu, tam s celou rodinou spal, prijímal návštevy, riešil FKS a tak. Potom postavil chlievik a ohradu (ale napriek tomu aj tak ostal spat v saune, co sa mi zdá zvrátené) a až navela, navela postavil dom, aby mu tie krámy nezavadzali v saune. K vzniku sauny sa vraj viaže tot za história. Jedna Fínka (pozor nie fenka, to je nieco iné) podpálila pri výrobe svojich gastronomických dobrodružstiev kuchynu a jej muž ju zacal bit cecinou. Tej Fínke sa to bohovsky pácilo, a tak vznikla sauna. Tí Fíni sa pri tom fakt šlahajú cecinou, že je to fantastická zábava, totálne sadomaso, nuž proti gustu aj motyka vystrelí. Na každú saunu pripadajú 3 Fíni, co tvorí dokopy asi 2 milióny sáun, a všetci obyvatelia Fínska by sa do nich naraz zmestili. Ja sa už ani necudujem, že ked k nám prídu na Slovensko Fíni, tak sú stále pod parou, to len pre to, aby nevyšli z cviku.

Je empiricky odpozorovaný fakt, že úmrtnost uvarením je vo Fínsku asi na rovnakej úrovni ako v iných krajinách a týka sa takmer výlucne kriminalistických aktov. Ako to teda, že Fíni nie sú národom uvarených?

Prvá reakcia tela na hic je potenie, potením clovek kondenzuje vodu zo seba na povrchu pokožky, cím spotrebováva energiu, ktorú mu dodáva okolie vo forme tepla a teda neohrieva sa. Toto samozrejme nie je trvalo udržatelný stav, inak by nás za tú hodinu úplne vyplavilo. Tým, že potom (potom ako potom, nie potom ako potom) sa ochladzuje telo, ochladzuje sa aj tenká vrstva vzduchu okolo tela, ktorý tvorí izoláciu od toho horúceho. Táto tenká vrstva vzduchu velmi pomaly „steká“ dole, a stíha sa doplnat dalšia ochladzovaním a potením.

Teda sme už odizolovaní od horúceho vzduchu a je nám iba neskutocné teplo, ktoré ale nepáli. Preto sa neuvaríme hned (aj ked casom by sme sa uvarili ak by sme tam ostali, ale skôr by nás vysušilo a potom upieklo na horúcom vzduchu pekne pomaly).

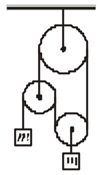
S touto izolacnou vrstvou súvisí aj ovievanie. Ovievaním práve zrušíme túto vrstvu ktorá nás chráni a pocitujeme intenzívnu horúcavu.

Ked vylejeme na výhrevné teleso vodu, tak primárne sa zvýši obsah horúcej vodnej pary vo vzduchu. Voda má pri stálom tlaku (predpokladáme, že sauna nie je tlakový hrniec a klimatizuje sa) tepelnú kapacitu asi 4 krát vyššiu ako vzduch pri takých istých podmienkach. To znamená že pri styku z vodou dochádza k výmene asi 4 krát väcšieho tepla ako pri styku zo vzduchom. Navyše vodná para dokáže preniknút našou izolacnou vrstvou vzduchu, lebo ciastocky vody (nie sú to jednotlivé molekuly, ale malé kvapôcky obsahujúce vysoké množstvo molekúl vody naviazaných cez vodíkové mostíky) sú nepomerne tažšie ako molekuly vzduchu (ktoré sa k sebe neviažu). Dalším Vaším správnym postrehom bolo, že clovek sa už aj menej potí vo vlhkejšom prostredí, lebo okolitá vlhkost je velká.

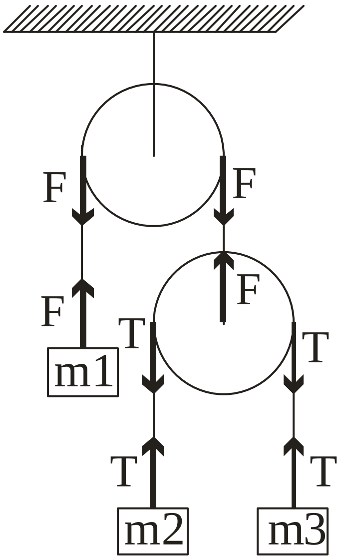
V prípade obchytkávania další́ch predmetov (ktoré primárne nemajú izolacnú vzdušnú vrstvu a sú teda na rovnakej teplote ako okolie, {druhá vec je, že ak by tú vrstvu mali, aj tak môžu príst horúce chvíle, ktoré vás môžu vela stát, od slobody až po život, závisí od predmetu…}) dochádza k priamemu kontaktu, kde vás nechráni žiadna vzduchová vrstva. Treba podotknút že potom intenzita pálenia závisí od tepelnej kapacity predmetu. Napríklad drevo nebude ovela horúcejšie, lebo má malú kapacitu, ale taký kov Vás poriadne rozpáli.

Dúfam že som Vás poriadne rozpálil, a saunovaniu zdar. Nazdar.

B–3.2 Kladky (opravoval Robo, vzorák Tomáš)



Na obrázku je sústava kladiek, ktoré sa môžu otácat bez trenia a pri výpocte ich môžeme považovat za nehmotné. Aké bude zrýchlenie závaží s hmotnostami m, ak ich necháme volne sa pohybovat?



Milé deti. Nie je dolezite vediet, ale naucit sa ;-)™ Sledujte debatu FKS! Tento príklad vám dal riadne zabrat. A pritom nebolo treba robit nic iné, než to, co sa robí pri BPK (bežný problém s kladkami). Problém bol v tom, že ludský um sa obcas zdráha pripustit (správne) riešenie, ktoré nám vyjde zo správnych rovníc.

Najprv zrátame jeden zBPK, ktorý je na obrázku. To preto, aby sme si vlastne ujasnili, ako sa taký BPK ráta, a potom plynulo nabehneme na tú mordu, co ste mali rátat vy. Takže obrázok. Zrátat chceme, ako inak, zrýchlenia troch telies, ktoré znedostatku fantázie oznacíme a_1, a_2 a a_3, pricom ich orientácia je súhlasná s gravitacným zrýchlením g. (pre menej chápavých: nadol). Teraz sa pozrime na laná. Ako vravel môj kamarát, lano, to je také ohybné oné. Lano dokáže držat, napríklad debnicku pomarancov. To preto, lebo v lane vznikne istá sila tahu.

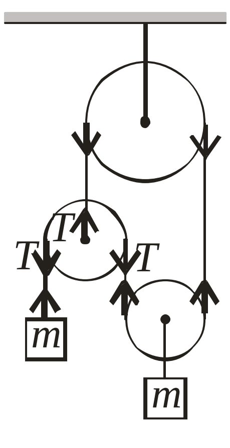
Teraz trochu odbocíme, aby sme si povedali jednu vec: **Na nehmotné teleso nemôže pôsobit sila.** Totiž, podla uja Newtona $F = ma$, co sa pre $m = 0$ redukuje na $F = 0$. Samozrejme, môžete sa *snažit* nan pôsobit silou. Telesu tým však udelíte *nekonecne velké* zrýchlenie a kým sa spamätáte, bude už za horami.

Naspät k lanu a tahu v nom. Ponevac hmotnost lana aj kladiek zanedbávame, v celom lane musí byt tah konštantný. Na každý (nehmotný) element (nehmotného) lana musí celkovo pôsobit nulová sila, t.j. rovnaký tah z oboch strán. Tento tah môžeme pre naše laná oznacit ako F, T. (pozri obr.) Tieto sily budú na závažia a kladky pôsobit tak, ako je to znázornené na obr. Teraz zapíšeme pohybové rovnice pre naše tri závažia:

$$m_1 a_1 = m_1 g - F \qquad (1)$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - T \qquad (2)$$

$$m_3 a_3 = m_3 g - T \qquad (3)$$

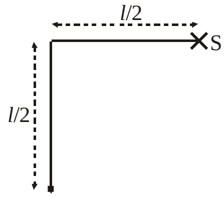


Samozrejme, oko pozrie, oko vidí: $a_2 - (-a_1) = -(a_3 - (-a_1))$. (4) Preco? Výrazy na lavej resp. pravej strane predstavujú zrýchlenia 2. a 3. závažia vzhladom na spodnú kladku. Tieto zrýchlenia musia byt opacných velkostí. (lano sa neroztahuje) Na záver zapíšeme $F = 2T$. (5) Pocujem nesúhlasné výkriky? Aj spodná nehmotná kladka je len nehmotná kladka, a preto výslednica síl, co na nu pôsobia, je nulová. Tým sme zapísali všetky dôležité rovnice. Je ich pät – presne tolko, kolko je neznámych (uff, sadlo to) Dorátanie je už len technickou záležitostou.

A teraz vám predvediem trojriadkové riešenie zadaného príkladu. Oznacme silu pnutia v špagáte T. Z rovnosti síl pre lavú (najlavejšiu) kladku vidíme, že $T = 2T$. Z toho vyplýva, že $T = 0$. Obe telesá teda padajú volným pádom. Vsio.

Vyhovuje takéto riešenie zdravému rozumu? Uznávam, že na prvý pohlad to zvádza rezolútne povedat: „možno!“. Ked trochu zarátame, zistíme, že lavá kladka sa pohybuje nadol, a to zrýchlením $3g$. Lahko overíte, že celková dlžka lana sa vtedy nemení. Dobrým pozorovaním je aj to, že lavé teleso môže byt v hocijakej výške (až kým sa niektorej casti sústavy „neminie“ špagát) nezávisle na pravom telese. Pohyb jedného telesa teda nemá na to druhé vplyv, a kedže sú to jediné hmotné objekty, budú sa pohybovat ako dva nezávislé volné pády (toto podrobne rozoberieme na sústredku), co vynikajúco sedí s vedomostou $T = 0$.

B–3.3 Kmit sem, kmit tam... (opravoval Palo)



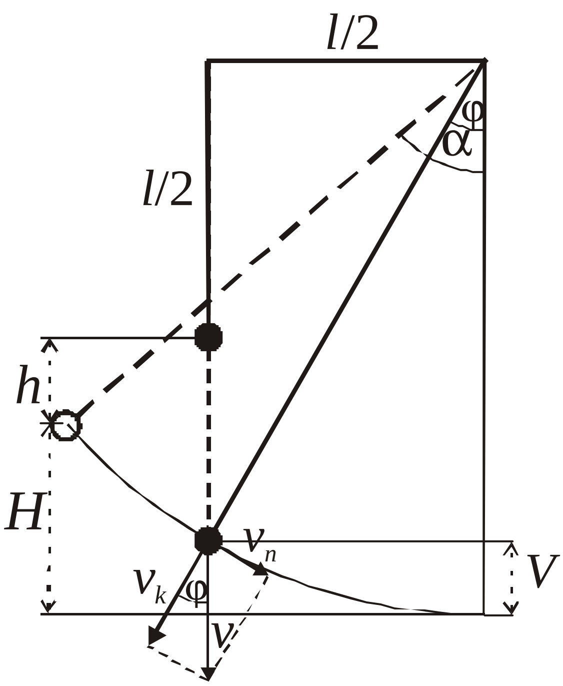
Na nehmotnom, dokonale nepružnom, ale pevnom vlákne s jedným koncom upevneným v bode S visí hmotný bod. Stred vlákna chytíme a zdvihneme na úroven bodu S, tak aby bolo napnuté a aby bol volne visiaci hmotný bod v pokoji. Potom vlákno pustíme a necháme všetko na pokoji. Po krátkom case bude sústava kmitat ako obycajné matematické kyvadlo. Nájdite maximálnu uhlovú výchylku týchto kmitov.

Tak sa na to pozrime! (Asi najdôležitejšie je nakreslit si poriadny obrázok, kedže ho budeme dost používat.) Hmotný bod po pustení padá z pôvodnej výšky padá volným pádom (túto dráhu oznacme h), až kým sa vlákno nenapne. Dráha h sa dá lahko vyjadrit z Pytagorovej vety (vid. obr.):

$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2} + h\right)^2 \Rightarrow h = \frac{l}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

Pocas tohto volného pádu náš hmotný bod nadobudne rýchlost (zo zákona zachovania energie):

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)gl}$$



Táto rýchlost smeruje, samozrejme, zvislo nadol, co sa však po napnutí lana musí zmenit. Kedže nepružné napnuté vlákno umožnuje pohyb hmotného bodu len v smere, ktorý je kolmý na toto vlákno (pretože pri pohybe hmotného bodu v iných smeroch by došlo k predlženiu vlákna, co sa, samozrejme, dokonale nepružnému vláknu nemôže stat), tak v momente napnutia lana našemu hmotnému bodu neostáva nic iné, ako sa pohybovat dalej už len v smere kolmom na napnuté vlákno.

Tým chcem len povedat, že z celkovej rýchlosti $\vec{v}$ mu po napnutí vlákna „ostane“ už len jej zložka kolmá na vlákno $\vec{v}_k$ $\left(\vec{v} = \vec{v}_k + \vec{v}_n\right)$ a príslušnú cast kinetickej energie pohltí vlákno. Tu ste to casto krát poorali – rátali ste so zákonom zachovania energie, ale úplne ste zabudli, že vo vlákne vzniká trhom nejaké teplo. (to je dôvod, preco nám je ZZE ZNN (zatial na nic)) Velkost zložky kolmej na vlákno je $v_k = v\sin j$, kde $\sin j$ sa dá jednoducho vyjadrit (vid. obr.)

$$\sin j = l/2l = 0{,}5.$$

Tak už vieme, že hmotný bod v tomto momente bude mat nenulovú výšku

$$V = l - 0{,}5l - h = 0{,}5l - h,$$

ale aj rýchlost (celková energia hmotného bodu je $E = 0{,}5mv_k^2 + mgV$), t.j. s urcitostou vieme povedat, že v tomto bode naše matematické kyvadlo nedosahuje svoju maximálnu výchylku.

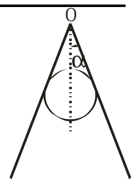
Pri maximálnej výchylke celková energia hmotného bodu sa má rovnat jej potenciálnej energii, teda:

$$mgH = \frac{mv_k^2}{2} + mgV = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)gml}{8} + \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)gml}{2} = \frac{7-3\sqrt{3}}{8}gml \Rightarrow H = \frac{7-3\sqrt{3}}{8}l$$

Tak, teraz už poznáme maximálnu výšku, do ktorej sa hmotný bod pocas kmitov dostane. Jediné, co nám ostáva, je vyjadrit uhol, ktorý zodpovedá tejto maximálnej výchylke.

$$\cos a = \frac{l-H}{l} = \frac{1+3\sqrt{3}}{8} \Rightarrow a = \arccos\frac{1+3\sqrt{3}}{8}$$

Po vycíslení je velkost uhla približne 39°. Tak to by bolo všetko, príjemné prázdniny...



B–3.4 Gula pod tlakom (opravoval Juro)

Majme dve palicky, ktoré sú klbovo spojené s bodom O. Strcíme medzi ne gulu tak, aby situácia bola symetrická a každá palicka sa odklonila od zvislice o uhol a. *Aký musí byt koeficient trenia, aby gulicka ostala pevne zaseknutá?*

Ahojte.

Zoberte si každý zrkadlo a chodte si dole do stánku kúpit dnešné vydanie Pravdy. Ja pockám ... no už máte? Ešte nie, dobre, máme cas ... Už? No super. Teraz namalujte na prednú stranu dve velké oci. Pozrite sa na seba do zrkadla. Dobre sa obzrite. Potom sa pozrite Pravde priamo do ocí a položte si otázku: ROZUMIEM TRENIU? Potom sa pozrite zas na svoj obraz v zrkadle a opät si vstúpte do svedomia. Rozumiem treniu? Budte cestní a nezabúdajte, že Pravda vás vidí. Ako znie odpoved? A tu sa skúška nekoncí. Zopakujte to celé ešte raz a položte si inú, rovnako nepríjemnú otázku ... ROZUMIEM MOMENTOM, STATIKE, PÁKAM ... ?

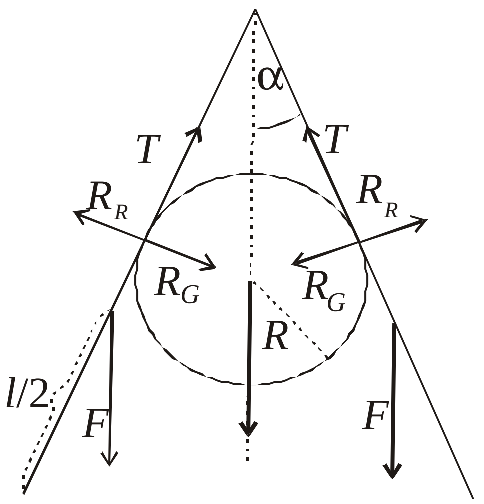
Asi ste pochopili, že príklad nedopadol dáko extra super. A máte pravdu. Pravdepodobne nie každému z vás je úplne jasné, co za zvieratko je to tá trecia sila. Podobne momenty, co kedy a kde s nimi. Tak si o tom všetkom povedzme nieco viac. Môžete nasledujúce odstavce preskocit, ale neodporúcam. Aj ked si myslíte, že viete o všetkom všetko, nezaškodí si to zopakovat.

Kto to vlastne trenie je? Isto je asi všetkým známy vzorec $F_T = F_N f$. Len zopakujem, že F_T je trecia sila, F_N je kolmá sila od podložky, po ktorej sa teleso trie, na toto teleso, a f je koeficient trenia. Už asi menej z vás vie, že tento vzorec nie je úplne správny. Problém je v interpretácii trecej sily. Ona sa neriadi vždy podla toho vzorca, ale bude to trochu zložitejšie. Ked naše teleso necháme len tak, nepôsobí na neho okrem gravitácie a reakcie podložky žiadna sila, nakolko je teleso evidentne v pokoji. Takže $F_T = 0$. Ak na teleso pôsobíme nejakou silou, ktorá je ale menšia ako $F_N f$, potom trecia sila nebude až taká velká, ale bude akurát taká, aká je pôsobiaca sila, a teleso zostane v pokoji. Až ked je vonkajšia sila väcšia ako maximum trecej sily, teleso sa zacne pohybovat, ale stále bude musiet prekonat treciu silu velkosti $F_N f$. Až tu zacína platit zmienený vztah pre treciu silu.

Jednoducho povedané, trecia sila je magická víla, ktorá udržuje teleso v pokoji. Ak na teleso pôsobí sila slabšia ako víla, víla pôsobí presne opacnou silou aby bolo teleso nehybné. Ak je vonkajšia sila väcšia, víla nevládze, ale aj tak sa snaží svojou maximálnou možnou silou vonkajšie úcinky aspon zmiernit.

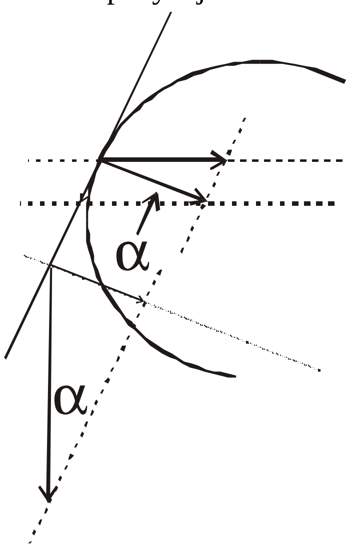
A momenty? Bez tých si v statike velmi nepomôžeme. Totiž, ak aj sily pôsobiace na teleso sú v rovnováhe, ešte stále môžu mat otácavý úcinok. Aby teleso ozaj stálo, musí byt nulová nielen výslednica síl, ale aj momentov síl.

Hor sa na gulicku pod tlakom. Mnohí ste si všimli, že v zadaní cosi nesedí. Konkrétne tam nieco chýba. Nic nám ale nebráni si to nejako dorobit a pri troche štastia sa nám to vykráti a potom sme to ani nepotrebovali. Ak nie, potom zadávatelia ozaj na nieco možno úmyselne, možno nie, zabudli. Nech má teda gulicka hmotnost m a polomer r a rameno hmotnost M



a dlžku *l*. Na zaciatok sa pozrime, aké sily pôsobia v našom prípade. Okrem všadeprítomnej tiaže pôsobia tieto dve telesá na seba navzájom. Každé rameno tlací na gulu a tá na oplátku vracia rovnako velkú, ale opacne orientovanú silu ramenám. To vymyslel nejaký Niutn ci kto. Pozrime sa na obrázok. R_R oznacuje reakciu gule na rameno, R_G oznacuje reakciu ramena na gulu. Okrem toho ale chce pôsobit aj trecia sila, co vysvetluje záhadnú silu T na obrázku.

Co nám prezrádza inak na slovo skúpe zadanie, je užitocná informácia, že gulicka sa nepohybuje. Ešte raz pripomenme, že na gulu pôsobia sily $2T$, $2R_G$ a G. To, že sa gula nehýbe, znamená, že ak si sily, ktoré na nu pôsobia, rozložíme do lubovolných dvoch rôznobežných smerov, výsledné sily v týchto dvoch smeroch budú nulové. Toto si všetci radšej premyslite, lebo je to dôležité nie len pre náš príklad, ale všeobecne sa to zíde. Ak ste sa s tým zmierili, môžeme si zvolit naše dva smery, do ktorých budeme rozkladat. Toto je casto velmi kritické, a vhodná volba smerov nám môže velmi pomôct. Ak volíme smery vodorovne a zvislo, nic nepokazíme, ale niekedy je lepšie urobit to inak. V našom prípade použijeme smer vodorovný a rovnobežný so smerom ramena. Dvakrát nám tu pomôže symetria úlohy. Na zaciatok, vodorovné sily sa vybúšia, lebo pravá a lavá strana v tomto smere pôsobia rovno proti sebe rovnako velkými silami. V druhom rade sa môžeme hrat iba so silami jednej polovice. Na opacnej strane to bude vyzerat úplne rovnako. Pricom každej strane bude prislúchat tiažová sila gulicky $G/2$.



Rozložme teda sily $G/2$, T a R_G do smeru ramena. Sila T sa nezmení a zložky zvyšných dvoch síl sú

$$R_{GZ} = \frac{R_G \sin a}{\cos a} \quad \text{a} \quad G_Z = \frac{G}{\cos a}.$$

Ak nie je jasné, konzultujte obrázok. A teraz príde do hry rozprávanie o trecej sile. Kedže sa gula nehýbe, sily sú aj v tomto smere vykompenzované. To znamená, že po víle trecej sile sa neocakáva mnoho, a sila proti ktorej musí pôsobit je menšia alebo nanajvýš rovná jej maximálnej možnej sile, inak povedané

$$G_Z + R_{GZ} \leq T \Rightarrow \frac{G}{\cos a} + \frac{R_G \sin a}{\cos a} \leq R_G f \Rightarrow f \geq \frac{G}{R_G \cos a} + tga$$

Jediný problém bude teda urcit reakciu, ktorou na gulu pôsobí rameno. To ale nebude vôbec tažké. Nie len gulicka, ale aj samotné rameno je v pokoji. Kedže rameno je vec, ktorá sa chce otácat, ale neotáca sa, momenty síl, ktoré nan pôsobia sa navzájom vykompenzujú. Na rameno pôsobia sily F, R_R a T, avšak tá posledná má nulový moment. Z obrázku vidíme, že momenty prvých dvoch majú opacnú orientáciu, stací aby sa rovnali velkostou. Inými slovami

$$\frac{l}{2} F \sin a = \frac{r}{tga} R_R \Rightarrow R_R = \frac{lFtga \sin a}{2r}$$

Platí, že $R_R = R_G$. Takže môžeme veselo napísat

$$f \geq \frac{G}{\frac{lFtga \sin a}{2r} \cos a} + tga \Rightarrow f \geq \frac{2rm}{lM \sin^2 a} + tga$$

A to je aj definitívny výsledok našej úlohy. Hurá hurá hurá. A ani to nebolelo.

Vy ste casto spravili chybu v tom, že ste si neuvedomili, že R_G nie je priamo prislúchajúca zložka sily F, ale že treba použit momentovú vetu. Okrem toho ste takmer všetci zabudli na znamienko nerovnosti a veselo ste uvádzali rovnost, co je samozrejme nesprávne. A klasika „chybicka se vloudí“, niekolko chýb z nepozornosti, ale to nie je až také katastrofálne.

Máme za sebou jubilejný rocník FKS. Teda nie ešte celkom, iba jeho korešpondencnú cast. Štastnejším z vás už prišla, niektorým možno príde neskôr pozvánka na letné sústredenie zaciatkom júna v Oravskej Lesnej. Velmi sa tam na vás všetkých tešíme. Do vtedy sa majte krásne a užívajte si prvých jarných slnecných lúcov.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENCNÝ SEMINÁR

výsledková listina B – kategórie po 3. sérii letného semestra 20. rocníka

	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	②	B-3.1	B-3.2	B-3.3	B-3.4	☠	S
1.	Bzdušek	Tomáš	sx. A	G Pieštany	39,9	2,0	3,0	1,5	4,0		50,40
2.	Berta	Peter	2 A	G Velké Kapušany	32,0	3,0	3,0	5,0	5,0		48,00
3.	Danko	Juraj	2 A	G Pieštany	33,5	3,0	2,0	3,2	4,0		45,70
	Bogár	Ondrej	2 E	G LŠ Trencín	30,5	4,0	2,5	5,0	2,5		44,50
5.	Boža	Vladimír	1 C	G Poprad Tatarku	29,6	4,0	1,5	1,5	3,0		41,10
6.	Rybák	Matúš	kv.	OG Kukucínova	27,2	4,0	2,5	1,5	1,5		38,19
7.	Galica	Tomáš	sx.	G Spišská Stará Ves	25,5	2,5	–	1,5	3,5		33,00
	Sudolský	Michal	2 F	G BB Tajovského	33,0	–	–	–	–		33,00
9.	Fecko	Stanislav	sx. A	G Pankúchova	28,5	–	–	1,5	–		30,00
	Hreha	Ján	2	G Liptovský Hrádok	21,5	4,0	2,0	1,5	1,0		30,00
11.	Pavlícek	Tomáš	2 C	SPŠE Pieštany	19,0	2,0	2,0	1,5	3,5		28,00
12.	Salaj	Michal	2 A	G Snina	20,5	2,0	–	1,5	1,5		25,50
13.	Nagy	Jakub	1 C	G sv. Tomáša Akvinského	19,4	1,5	–	–	1,0		22,56
14.	Kerul	Lukáš	kv. A	OG BA Tilgnerova	13,5	0,5	2,0	3,5	1,5		22,40
15.	Korenová	Nikola	1 E	G PH Michalovce	12,3	1,0	5,0	1,5	1,0		22,25
16.	Celko	Pavol	sx.	G Považská Bystrica	6,0	–	2,0	5,0	4,0		17,00
17.	Rolníková	Zlatka	kv.	G Skalica	9,8	2,0	–	2,0	1,0		15,93
18.	Malik	Tomáš	kv.	1SG BA Bajkalská	15,7	–	–	–	–		15,70
19.	Švihorík	Róbert	sx.	G Nitra Párovská	12,8	–	–	–	–		12,80
20.	Alankina	Júlia	kv.	G Dunajská Streda	7,8	0,5	1,0	0,8	-		10,68
21.	Baxová	Katarína	9 C	ZŠ Dlhé Hory, Trencín	5,1	4,0	–	–	–		10,03
22.	Šnajderová	Lucia	sx. A	OG Varšavská 1, Žilina	4,0	–	–	–	–		4,00

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENCNÝ SEMINÁR

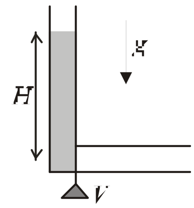
vzorové riešenia 3. série
A – kategória (starší)
20. rocník
letný semester
školský rok 2004/2005

www. **.sk**

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

A–3.1 Trubka (opravoval Martin)

Zvislá trubica je naplnená vodou do výšky H, v spodnej casti je uzavretá ventilom V a ústi do dlhej vodorovnej trubice (táto je na zaciatku prázdna). V case t = 0 ventil otvoríme. Ako závisí rýchlost klesajúcej hladiny od výšky vody ostávajúcej v zvislej trubici h? Ako sa mení zrýchlenie klesajúcej hladiny s casom t? Pri riešení môžete pokladat polomery trubíc za malé v porovnaní so zaciatocnou výškou vody H.



Caute !

V tomto príklade bolo úlohou zistit rýchlost klesajúcej vody ako funkciu výšky hladiny vody h a taktiež zrýchlenie hladiny vody ako funkciu casu. Tak sa priamo vrhnime na 1. cast tohto príkladu:

Tu mnohí z vás povedali, že rýchlost bude taká ako nám hovorí Toricelliho vztah, t.j. $v = \sqrt{2hg}$. Tento vztah nemôžeme použit z dvoch dôvodov: jednak voda po opustení trubice nemôže volne vytekat, hlavným argumentom ale je, že pri výtoku sa hýbe celá masa vody. Toricelliho vztah platí iba vtedy, ked rýchlost nevytekajúcej vody môžeme zanedbat. Takže použijeme zákon zachovania energie. Predpokladajme, že voda poklesla z pôvodnej výšky H na výšku h. Rozdiel potenciálnych energií potom je:

$$\Delta E_p = \frac{H}{2} HSrg - \frac{h}{2} hSrg = (H^2 - h^2)\frac{1}{2} Srg ,$$

Uvedomte si, že $H/2$ a $h/2$, sú výšky tažiska vody v zvislom stlpci. Táto zmena potenciálnej energie sa musí prejavit ako kinetická energia vody (ktorá bola na zaciatku nulová):

$$\Delta E_p = \Delta E_k = \frac{1}{2} HSrv^2 ,$$

odkial rýchlost ako funkcia výšky h je:

$$v = \sqrt{\frac{(H^2 - h^2)g}{H}} .$$

Ak chceme zistit zrýchlenie ako funkciu casu, stací si vyjadrit silu, ktorá bude pôsobit na vodu vo zvislom stlpci:

$$F = pS = Srg.h ,$$

co, ako vidíme, je sila, ktorá lineárne závisí od výchylky (t.j. sila tvaru $F = k\,|x|$), pricom urýchlovat musí stále všetku vodu v trubici. Preto hned vieme povedat, že ide o harmonický oscilátor s uhlovou frekvenciou

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{Srg}{SHr}} = \sqrt{\frac{g}{H}} .$$

Takže vieme, že výsledná výchylka bude tvaru $A \sin(?t + f)$, kde f je fázová konštanta ktorá musí byt p/2 pretože vieme, že voda bude mat na zaciatku zrýchlenie maximálne a bude postupne klesat. Amplitúdu A môžeme urcit tak, že si uvedomíme aké zrýchlenie bude pôsobit tesne po otvorení ventilu: Bude to „iba“ g. Takže výsledné zrýchlenie ako funkcia casu bude

$$a = g\sin(wt + p\ /2) = g\cos\left(\sqrt{\frac{g}{H}}t\right),$$

smerom dolu (t.j. v smere gravitacného zrýchlenia). Samozrejme, že táto hladina nebude skutocne kmitat, ale spraví len 1/2 kyvu a dalej už bude pokracovat spokojne vodorovnou trubkou rýchlostou v, bez dalšieho urýchlovania.

A–3.2 Doska levitation (opravovala Zuzka)

Majme sklenenú dosku s hmotnostou m*, na ktorú zacneme kolmo svietit laserom. Koeficient odrazu pri dopade svetla na rozhranie vákuum-sklo, sklo-vákuum je v oboch prípadoch rovný* a*. Aký je výkon lasera* P*, aby sa doska v Zemskom gravitacnom poli nehýbala? Doska je vodorovná a svietime rovno do jej tažiska.*

Pozrime sa bližšie na to, co sa deje, ked fotóny vyžiarené laserom prechádzajú cez inkriminovanú sklenenú dosku. Nech za cas Δt vyšle laser N fotónov. Nejaká cast fotónov prejde cez dosku bez zmeny svojho pohybového stavu, ale istá cast, oznacme ju A, sa odrazí spät. Zmena hybnosti odrazenej casti fotónov je cas $\Delta p = 2pA/N$, kde p je hybnost N fotónov. (Kedže fotóny sa odrazia spät, ich hybnost sa zmení z p na $-p$, preto zmena hybnosti je $2p$)

Ako vieme z 2. Newtonovho zákona, zmena hybnosti fotónov za cas je vlastne sila, ktorou pôsobí lúc lasera na dosku proti gravitacnej sile (teda laser svieti na dosku zdola). Aby doska nehybne levitovala vo vzduchu, tieto sily sa musia rovnat:

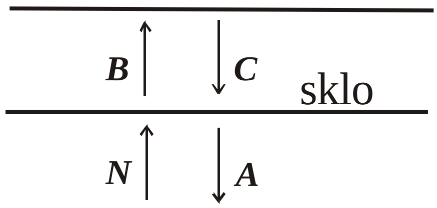
$$F_g = mg = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2pA}{\Delta t N}. \qquad (1)$$

Ako vyjadríme hybnost svetla? Kedže svetlo sa pohybuje rýchlostou svetla (aké prekvapivé:), pri opise jeho pohybu musíme brat do úvahy aj relativistické javy. Vztahy z klasickej mechaniky (mechaniky telies pohybujúcich sa dostatocne pomaly) nám teraz príliš nepomôžu. Asi každý zvás už videl magický vzorec $E = mc^2$. To znamená, že aj ked si tažko prestavujeme, že svetlo má nejakú hmotnost, v skutocnosti je jeho hmotnost daná vztahom $m = E/c^2$ a hybnost svetla $p = mc = E/c$

V našom prípade je energia svetla vyžiarená laserom daná vztahom $E = Pt$, kde P je výkon lasera. Hybnost svetla vyžiareného laserom za cas Δt je teda $p = P\Delta t/c$. Po dosadení do (1) dostávame:

$$mg = \frac{2P\Delta t}{c\Delta t}\frac{A}{N}, \qquad P = \frac{mgcN}{2A}. \qquad (2)$$

Ostáva nám dopocítat, aká cast svetla sa pri prechode sklenenou doskou odrazí spät. Pri prechode prvým rozhraním sa od dosky smerom dole odrazí aN fotónov a do sklenenej dosky sa dostane $(1 - a)N$ fotónov, zdosky ich smerom nahor vyletí $(1 - a)^2N$, naspät do dosky sa odrazí $(1 - a)aN$ a takto môžeme pokracovat donekonecna. Celkový pocet fotónov, ktoré sa odrazia od dosky spät môžeme zistit cez súcet nekonecného geometrického radu, alebo použit metódu „chladnokrvného pozorovatela“:



K doske sa zákerne blíži N fotónov, odhodlaných prekonat túto sklenenú prekážku. Niektoré nezvládnu už prvý odrazový koeficient a smutné sa obracajú na ústup. Nejaká cast však bojuje urputne dalej a niektoré fotóny, kým vyletia z dosky jedným alebo druhým smerom, splašene pobehujú medzi oboma rozhraniami. My si však nevšímame ich pobehovanie a len chladnokrvne spocítame všetky fotóny, ktoré sa kedy pohybovali v doske smerom nahor a ich pocet oznacíme B (v tomto císle sa 1 fotón môže zapocítavat viackrát, ak sa viackrát pohyboval smerom hore) . Podobne pocet fotónov, ktoré sa kedy pohybovali vdoske smerom dole, oznacíme C a všetky fotóny, ktoré nezvládli prekážku a vyleteli alebo sa odrazili od dosky smerom dole, oznacme A. Nakoniec si vytvoríme popisujúce rovnice:

$$B = (1 - a)N + aC,$$
$$C = aB,$$
$$A = (1 - a)C + aN.$$

Z nich lahko vyjadríme

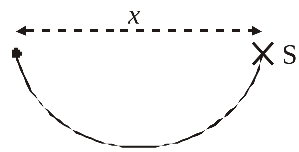
$$A = \frac{2a}{(1+a)} N .$$

Dosadením do vztahu (2) dostávame

$$P = \frac{mgc(1+a)}{4a} .$$

To je vše, prátelé!:)

A–3.3 Jednoduchá perióda (opravoval Peto)



Na nehmotnom, dokonale pružnom, ale nekonecne tuhom vlákne s dlžkou l*, visí hmotný bod, zatial co druhý koniec vlákna je upevnený v bode* S*. Hmotný bod zdvihneme do tej istej výšky, v akej sa nachádza bod* S *a necháme ho volne padat z vodorovnej vzdialenosti* x *od* S*. Nájdite také* x *rôzne od* l*, pre ktoré bude náš hmotný bod konat co najjednoduchší periodický pohyb a vypocítajte jeho periódu.*

Ahojte.
Najnovšie výskumy ukazujú, že ani tá najjednoduchšia perióda nie je až taká jednoduchá. Podme sa teda pozriet, ako by mohlo vyzerat riešenie tohto príkladu.

Nehmotný, dokonale pružný, ale nekonecne tuhý špagát znamená, že jedna z jeho vlastností, ktorú treba uvažovat, je schopnost udržat hmotný bod vo vzdialenosti menšej alebo rovnej l od bodu závesu S. Ak sa však špagát napne, vdaka jeho pružnosti sa žiadna energia nestratí, hmotný bod sa akoby pružne odrazí a až do dalšieho napnutia si špagát vôbec nevšíma. Pohyb hmotného bodu na závese si teda môžeme predstavit ako pohyb volného hmotného bodu nad jamou polgulovitého tvaru, pricom odraz od povrchu je dokonale pružný. Väcšina z vás prišla na to, aký najjednoduchší pohyb sa v takejto sústave môže odohrávat – stací hmotný bod spustit z bodu S a on sa už bude do nekonecna odrážat pricom padat bude stále s konštantným zrýchlením velkosti g približne 9,8 m.s^{-2}. Toto riešenie je dost triviálne a je mi lúto, že v zadaní som zabudol tento prípad vylúcit (podobnou podmienkou ako pre x rôzne od l). Ak ste sa však venovali iba tomuto druhu pohybu, nedostali ste plný pocet bodov. Bolo treba ešte spomenút, aké iné periodické pohyby môže hmotný bod konat, a teda ci ide naozaj o najjednoduchší pohyb spomedzi nich. Pokial nás zaujíma perióda pohybu bodu padajúceho z S, je to pomerne jednoduchý výpocet s rovnomerne zrýchleným a spomaleným pohybom, z coho použitím známych vzorcov alebo ich samostatného odvodenia dostaneme výsledok

$$T = 2\sqrt{\frac{2l}{g}} .$$

Teraz sa pozrime, ako by mohli vyzerat iné periodické pohyby. Ak spustíme náš hmotný bod z miesta vzdialeného o x od S, prvé co urobí, bude volný pád, pokial sa špagát nenapne. Pomocou Pytagorovej vety zistíme, že takto spadne o $\sqrt{l^2 - x^2}$, co mu potrvá cas

$$t_1 = \sqrt{2\sqrt{l^2 - x^2} / g} .$$

Oznacme uhol zovretý špagátom a zvislicou v okamihu jeho napnutia ako a. Zrejme $\sin a = x / l$. Rozložme rýchlost hmotného bodu na dve zložky – kolmú a rovnobežnú so špagátom. Sila, ktorou v okamihu odrazu pôsobí špagát na hmotný bod, musí byt so špagátom rovnobežná, takže kolmá zložka rýchlosti sa nezmení, zatial co vdaka dokonalej pružnosti špagátu bude rovnobežná zložka rýchlosti po odraze opacná ako pred odrazom. Pocas odrazu sa nezmení velkost rýchlosti

$$v = \sqrt{2g\sqrt{l^2 - x^2}}\ ,$$

(vypocítali sme ju zo zákona zachovania energie – hmotný bod klesol o $\sqrt{l^2 - x^2}$), ale iba jej smer. Po napnutí špagátu a následnom odraze hmotného bodu sa tento bod zacne pohybovat ako pri šikmom vrhu, pricom s vodorovným smerom zviera jeho rýchlost uhol $b = 90° - 2a$. V danom okamihu majú jeho vodorovná a zvislá zložka rýchlosti v_x, v_y velkosti $v_x = v\cos b$, $v_y = v\sin b$. Zo školy vieme, že trajektóriou bodu pri šikmom vrhu je parabola, ktorá je súmerná okolo osi prechádzajúcej jej maximom. Môžeme teda navrhnút nasledujúci pohyb. Ak zvolíme také x, pre ktoré bude maximum tejto paraboly práve pod bodom S, potom po prejdení týmto maximom sa bude hmotný bod pohybovat presne zrkadlovo voci predchádzajúcemu pohybu pred prechodom týmto najvyšším bodom – opät napne špagát, odrazí sa rovno hore, vystúpi na úroven S do vzdialenosti x od neho (z opacnej strany ako na zaciatku) a podobne sa vráti do pociatocnej polohy. Ak oznacíme cas medzi prvým napnutím špagátu a prechodom hmotného bodu maximom parabolickej trajektórie ako t_2, celá perióda tohto pohybu bude rovná $T = 4(t_1 + t_2)$. Keby sme poznali uhol ß, mohli by sme tento cas vyjadrit ako

$$\mathrm{x}t_2 = \frac{v\sin b}{g}\ ,$$

co je cas, za ktorý sa hmotný bod zastaví vo zvislom smere (dosiahne maximum paraboly). Lenže uhol ß ani vzdialenost x nepoznáme. Podme teda vypocítat jednu z týchto vecí, napríklad x, ktoré musí byt práve také aby došlo k nášmu vytúženému periodickému pohybu. Za cas t_2 sa musí hmotný bod dostat práve pod S, takže

$$t_2 v\cos b = x = \frac{v^2}{g}\sin b\cos b = 2\sqrt{l^2 - x^2}\sin b\cos b\ .$$

Použitím goniometrických vzorcov pre súcty a dvojnásobky uhlov po úprave dostaneme po dosadení za ß $=90° - 2a$ (vieme zistit $\sin a$, $\cos a$) vztahy

$$\sin b = 1 - \frac{2x^2}{l^2},\ \cos b = \frac{2x}{l}\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}\ .$$

Dosadením a úpravou pôvodnej rovnice získame kvadratickú rovnicu pre x^2: $8x^4 - 12x^2l^2 + 3l^2$. Táto má dve kladné riešenia, ale jedného z nich sa zbavíme uvedomením si, že x je menšie ako l. Pre x teda platí

$$x^2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4}l^2 \Rightarrow \sin b = \frac{\sqrt{3}-1}{2},\ t_2 = \frac{v\sin ß}{g} \Rightarrow\ t_2 = \sqrt{\frac{2\sqrt{l^2 - x^2}}{g}}\frac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{\frac{l}{g}\sqrt{1+\sqrt{3}}}\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

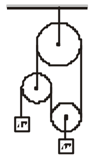
$$t_1 = \sqrt{\frac{2\sqrt{l^2 - x^2}}{g}} = \sqrt{\frac{l}{g}\sqrt{1+\sqrt{3}}}\ \Rightarrow\ T = 4(t_1 + t_2) = 2\left(1+\sqrt{3}\right)\sqrt{\frac{l}{g}\sqrt{1+\sqrt{3}}}\ ,$$

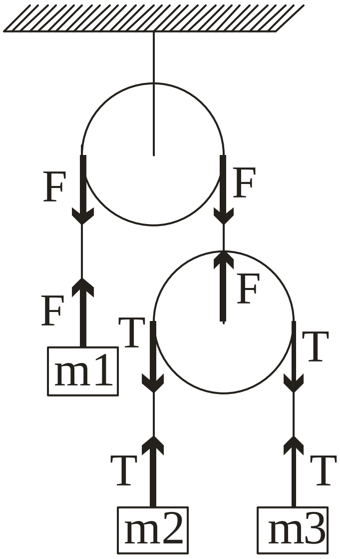
vypocítali sme teda periódu pohybu pozostávajúceho z volného pádu a šikmého vrhu medzi dvoma napnutiami špagátu. Podobne by sa dali spocítat aj dalšie pohyby so tromi, štyrmi,... napnutiami špagátu, to by však bolo príliš komplikované (má tomu zabránit požiadavka na jednoduchost periódy). Takto sú však vybavené len také pohyby, ktorých trajektórie sú súmerné okolo zvislej priamky prechádzajúcej bodom S. Sú aj iné možnosti, ako dosiahnut periodický pohyb. Napríklad by sme mohli uvažovat, že po prvom odraze (napnutí špagátu) sa hmotný bod opät pohybuje po parabole, ale potom sa neodrazí hore, ale na plochu myslenej gulovej jamy dopadne kolmo a po tej istej parabole sa vráti spät až po rovnomerne spomalenom pohybe skoncí znova na zaciatku. Pocítat však periódu niecoho takéhoto je o dost nárocnejšie.

Tento príklad nemá zrejme jednoznacné riešenie a pri jeho opravovaní som to ani nevyžadoval. Potrebné bolo najmä uvedomit si, aké periodické pohyby môže hmotný bod vykonávat, co sa nakoniec väcšine z vás aj podarilo.

A–3.4 Kladky (opravoval Robo, vzorák Tomáš)

Na obrázku je sústava kladiek, ktoré sa môžu otácat bez trenia a pri výpocte ich môžeme považovat za nehmotné. Aké bude zrýchlenie závaží s hmotnostami m, ak ich necháme volne sa pohybovat?





Milé deti. Nie je dolezite vediet, ale naucit sa ;-)™ Sledujte debatu FKS! Tento príklad vám dal riadne zabrat. A pritom nebolo treba robit nic iné, než to, co sa robí pri BPK (bežný problém s kladkami). Problém bol v tom, že ludský um sa obcas zdráha pripustit (správne) riešenie, ktoré nám vyjde zo správnych rovníc.

Najprv zrátame jeden zBPK, ktorý je na obrázku. To preto, aby sme si vlastne ujasnili, ako sa taký BPK ráta, a potom plynule nabehneme na tú mordu, co ste mali rátat vy. Takže obrázok. Zrátat chceme, ako inak, zrýchlenia troch telies, ktoré znedostatku fantázie oznacíme a_1, a_2 a a_3, pricom ich orientácia je súhlasná s gravitacným zrýchlením g. (pre menej chápavých: nadol). Teraz sa pozrime na laná. Ako vravel môj kamarát, lano, to je také ohybné oné. Lano dokáže držat, napríklad debnicku pomarancov. To preto, lebo v lane vznikne istá sila tahu.

Teraz trochu odbocíme, aby sme si povedali jednu vec: **Na nehmotné teleso nemôže pôsobit sila.** Totiž, podla uja Newtona $F = ma$, co sa pre $m = 0$ redukuje na $F = 0$. Samozrejme, môžete sa *snažit* nan pôsobit silou. Telesu tým však udelíte *nekonecne velké* zrýchlenie a kým sa spamätáte, bude už za horami.

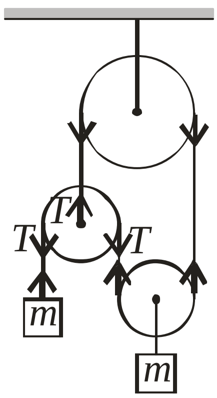
Naspät k lanu a tahu v nom. Ponevac hmotnost lana aj kladiek zanedbávame, v celom lane musí byt tah konštantný. Na každý (nehmotný) element (nehmotného) lana musí celkovo pôsobit nulová sila, t.j. rovnaký tah z oboch strán. Tento tah môžeme pre naše laná oznacit ako F, T. (pozri obr.) Tieto sily budú na závažia a kladky pôsobit tak, ako je to znázornené na obr. Teraz zapíšeme pohybové rovnice pre naše tri závažia:

$$m_1a_1 = m_1g - F \tag{1}$$

$$m_2a_2 = m_2g - T \tag{2}$$

$$m_3a_3 = m_3g - T \tag{3}$$

Samozrejme, oko pozrie, oko vidí: $a_2 - (-a_1) = -(a_3 - (-a_1))$. (4) Preco? Výrazy na lavej resp. pravej strane predstavujú zrýchlenia 2. a 3. závažia vzhladom na spodnú kladku. Tieto zrýchlenia musia byt opacných velkostí. (lano sa neroztahuje) Na záver zapíšeme $F = 2T$. (5) Pocujem nesúhlasné výkriky? Aj spodná nehmotná kladka je len nehmotná kladka, a preto výslednica síl, co na nu pôsobia, je nulová. Tým sme zapísali všetky dôležité rovnice. Je ich pät – presne tolko, kolko je neznámych (uff, sadlo to) Dorátanie je už len technickou záležitostou.



A teraz vám predvediem trojriadkové riešenie zadaného príkladu. Oznacme silu pnutia v špagáte T. Z rovnosti síl pre lavú (najlavejšiu) kladku vidíme, že $T = 2T$. Z toho vyplýva, že $T = 0$. Obe telesá teda padajú volným pádom. Vsio.

Vyhovuje takéto riešenie zdravému rozumu? Uznávam, že na prvý pohlad to zvádza rezolútne povedat: „možno!“. Ked trochu zarátame, zistíme, že lavá kladka sa pohybuje nadol, a to zrýchlením $3g$. Lahko overíte, že celková dlžka lana sa vtedy nemení. Dobrým pozorovaním je aj to, že lavé teleso môže byt v hocijakej výške (až kým sa niektorej casti sústavy „neminie“ špagát) nezávisle na pravom telese. Pohyb jedného telesa teda nemá na to druhé vplyv, a keďže sú to jediné hmotné objekty, budú sa pohybovat ako dva nezávislé volné pády (toto podrobne rozoberieme na sústredku), co vynikajúco sedí s vedomostou $T = 0$.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENCNÝ SEMINÁR

výsledková listina A – kategórie po 3. sérii letného semestra 20. ročníka

	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	②	A-3.1	A-3.2	A-3.3	A-3.4	☠	S
1.	Závodný	Jakub	ok.	G BA Grösslingova	40,0	5,0	5,0	5,0	5,0		60,00
2.	Hrdá	Marcela	3 IB	G BA J. Hronca	39,5	4,8	5,0	5,0	2,8		57,74
3.	Bzdušek	Tomáš	sx. A	G Piešťany	39,6	2,5	5,0	4,4	2,0		54,82
4.	Imriška	Jakub	3 A	G BA J. Hronca	34,6	5,0	5,0	5,0	5,0		54,61
5.	Dzetkulic	Michal	4 A	G PH Michalovce	37,8	3,5	5,0	3,5	4,5		54,30
6.	Perešíni	Peter	3 F	G BB Tajovského	39,3	–	5,0	5,0	–		50,79
7.	Lalinský	Ján	4	G Varšavská	32,4	5,0	3,5	5,0	4,5		50,40
8.	Veselovská	Lenka	se.	G Lipt. Mikuláš	32,1	1,5	4,0	4,5	4,5		47,75
9.	Astaloš	Róbert	4 A	G Rimavská Sobota	28,5	5,0	5,0	4,8	3,0		46,30
10.	Zámecník	Peter	3 D	G MRŠ NMV	31,0	2,0	5,0	4,0	2,5		45,77
11.	Kucharík	Marcel	3 D	G MRŠ NMV	28,6	–	5,0	5,0	4,8		44,56
12.	Petrík	Peter	4 IB	G BA J. Hronca	33,1	1,5	3,0	3,8	3,0		44,40
13.	Pôbišová	Zuzana	3 F	G BB Tajovského	31,8	2,0	3,0	4,0	2,0		44,24
14.	Fackovec	Boris	se. A	G Piešťany	31,7	2,5	4,5	3,7	–		43,86
15.	Kravec	Martin	3 A	G PH Michalovce	31,4	1,5	4,0	3,5	1,5		43,38
16.	Mikuláš	Ján	se.	G BST Lucenec	31,8	3,0	3,5	3,5	–		43,28
17.	Komorovský	Marek	se.	G Dubnica nad Váhom	30,5	1,0	3,5	5,0	2,5	-2	39,94
18.	Kaniansky	Miroslav	se. A	G Piaristické Nitra	30,2	–	–	4,0	2,8		38,39
19.	Sasák	Róbert	4 D	SPŠE Piešťany	26,1	1,5	3,5	4,8	0,5		36,40
20.	Foltin	Miroslav	3 C	G Jána Hollého	25,9	2,5	–	3,5	1,5		34,77
21.	Korch	Jakub	7 A	G Piaristické Nitra	26,5	1,5	1,0	0,7	1,5		32,24
22.	Štolcová	Jana	se.	G Párovská	24,3	1,5	2,0	1,0	2,0		32,07
23.	Sudolský	Michal	2 F	G BB Tajovského	30,9	–	–	–	–		30,91
24.	Šibík	Juraj	4 D	G Považská Bystrica	30,5	–	–	–	–		30,50
25.	Simancík	František	ok.	G BA Grösslingova	19,5	5,0	5,0	–	–		29,50
26.	Hergelová	Beáta	3 B	G BST Lucenec	16,0	1,5	2,0	5,0	1,8		27,75
27.	Svítková	Lucia	3 B	G VBN Prievidza	20,6	1,5	1,5	2,0	0,8		27,64
28.	Rušin	Michal	ok.	G Spišská Stará Ves	20,0	1,5	4,0	0,3	1,5		27,30
29.	Piják	Peter	4 B	G VOZA	21,0	–	4,5	–	–		25,50
30.	Obžerová	Gabriela	3 B	G VBN Prievidza	20,6	1,5	1,0	1,5	1,5	-1	25,25
31.	Ladecky	Martin	4 B	G VOZA	20,5	–	–	–	–		20,50
32.	Bachratá	Alenka	3 B	G VOZA	18,8	–	–	–	–		18,77
33.	Vojtko	Andrej	ok. A	G Skalica	14,3	1,5	–	1,3	–		17,10
34.	Uchytilová	Vendula	3 A	G J.K.Tyla	11,0	1,0	–	2,0	0,8		15,72
35.	Petruchová	Zuzka	se.	G BA Grösslingova	13,9	–	–	–	–		13,91
36.	Berta	Peter	2 A	G Velké Kapušany	9,4	–	–	–	3,0		13,21
37.	Švihranová	Ivana	3 C	OA Hrobákova 11	3,5	–	–	–	–		3,52