FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

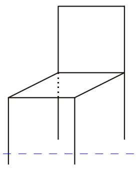
vzorové riešenia 2. série
B – kategória (mladší)
20. ročník
letný semester
školský rok 2004/2005

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

www. **.sk**

B–2.1 Stolička (opravoval Miro)

Justína sedí v škole na stoličke, ktorá je pozváraná z jedenástich rovnakých železných trubiek dĺžky L = *30 cm (pozri obrázok). Celková hmotnosť stoličky je* m = *5 kg (hmotnosť opierky a dosky, na ktorej sa sedí, je zanedbateľná). Justína si všimla, že zatiaľ čo prázdna stolička sa dá dozadu vychýliť o istý uhol* α *(tak, aby sa po pustení vrátila do pôvodnej polohy), keď sa na nej hojdá ona sama, môže sa vychýliť najviac o 11°. Zistite, aká je veľkosť uhla* α*. Koľko váži Justína? Pri výpočte predpokladajte, že pri sedení sa Justínino ťažisko nachádza presne nad ťažiskom stoličky vo vzdialenosti* h = *30 cm od neho. Pri nakláňaní sa poloha Justíny a stoličky vôbec nemení, t.j. „sedí ako pribitá“.*



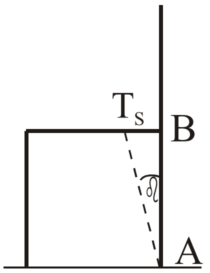
Komentár: vzdialenosti

Poďme najprv nájsť ťažisko prázdnej stoličky. Existuje na to viac spôsobov. Zvolíme ten najjednoduchší – keďže všetky trúbky, z ktorých je stolička, sú rovnaké, ťažisko sa nachádza v aritmetickom priemere stredov (ťažísk) všetkých trubiek. Špeciálne, pre výšku ťažiska h_T máme:

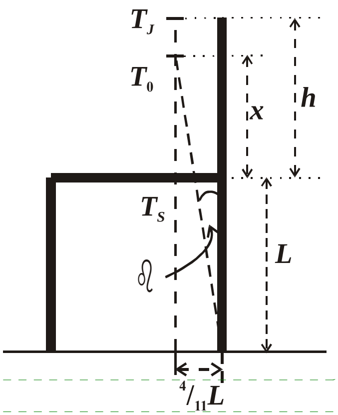
$h_T = L(1/2+1/2+1/2+1/2_{\text{ (nohy)}} + 1+1+1+1_{\text{ (sedačka)}} + 3/2+3/2_{\text{ (operadlo zvislé)}} + 2_{\text{ (horná tyč)}})\,/11 = L$,

pre vzdialenosť ťažiska od zadnej roviny stoličky (rovina zadných nôh a operadla) podobne máme:

$L.(0+0+0+0+0+0+1/2+1/2+1+1+1)\,/\,11 = 4L/11$.



Pozrime sa na pravouhlý ΔABT. Naklonená stolička je v labilnej rovnovážnej polohe ak je T na zvislici nad A (okolo A sa stolička otáča) keby sme ju naklonili viac, tak už spadne, ak menej, tak sa ešte vráti naspäť. Preto hľadaný uhol α je uhol TAB, ktorý má veľkosť $\arctan(4/11) \approx 19°59'$.



Justína sedí na stoličke a jej ťažisko T_J je $h = 30$ cm nad ťažiskom stoličky T_S. A teraz už len určiť kde je výsledné ťažisko Justíny a stoličky T_0. To sa musí nachádzať na úsečke T_ST_J, povedzme vo vzdialenosti x od T_S. Pretože T_0 je ťažiskom celej sústavy, musí byť moment sily v T_S rovný momentu sily v T_J (je to vlastne rovnováha na páke). Čiže platí:

Komentár: toto je dosť nahovno formulácia

Komentár: kokos tu by to chcelo nejaky pokec o tych momentoch

$$m_J g(h-x) = mgx\,,$$

kde m_J je hmotnosť Justíny. Justína sa môže nahnúť o uhol $\beta = 11°$ aby nepadla, potom

$$\tan\beta = \frac{4L}{11(L+x)}\,,$$

z čoho dostaneme $x \approx 26{,}12$ cm, po dosadení dostaneme hmotnosť Justíny $m_J \approx 33{,}68$ kg.

No a z toho môžeme usúdiť, že Justína má buď okolo 12 rokov, alebo je anorektička. Osobne sa prikláňam k možnosti 1, keďže jej stačí 60 centimetrová stolička… Keď si sa do(po)čítal(a) až sem, tak gratulujem.

B–2.2 Presýpacie hodiny (opravoval Čermo)

Asi všetci poznáte presýpacie hodiny, dva spojené duté kužele, piesok vnútri. Položme ich na váhy, pričom piesok je v hornej časti a je nejakým spôsobom zastavený, t.j. nesype sa. Popíšte, čo budú váhy ukazovať, ak piesok pustíme. Zaujíma nás všetko, čo sa s váhami bude diať od okamihu, keď piesok uvoľníme, až do okamihu, keď do dolnej časti hodín dopadne posledné zrnko piesku.

Aby sme sa vyhli zbytočným komplikáciám, uvažujme hodiny, v ktorých je len toľko piesku, že po presypaní bude výška kopy piesku na dne zanedbateľná oproti výške hodín. Ďalej predpokladajme, že hodiny sa sypú konštantne rýchlo, teda okrem začiatku a konca v hodinách v danom okamihu padá konštantné množstvo piesku.

Rozoberme si práve takýto ustálený režim. Ak sa pozrieme na hodiny, vidíme, že piesok v hornej polovici (pred „padaním“) alebo na dne (po „dopade“) pôsobí na hodiny celou svojou tiažou (či už priamo alebo prostredníctvom iného piesku).

Potom jediné, čo môže vplývať na hmotnosť meranú váhami je piesok, ktorý padá. Jeho pôsobenie bude dvojakého charakteru, počas voľného pádu a pri dopade. V prvom prípade, pretože piesok nie je v kontakte s hodinami, pozorujeme „úbytok“ z celkovej tiaže piesku o padajúci piesok. Presnejšie ak N je počet zrniek piesku, ktoré začnú padať za 1 s, T je doba pádu zrnka a m_z jeho hmotnosť, je úbytok rovný:

$$F_{-} = m_z NgT$$

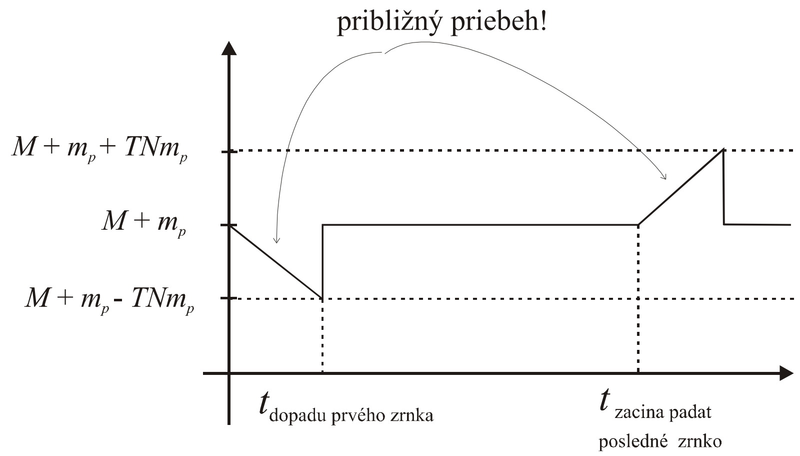
Pri dopade sa musí každé zrnko zastaviť o dno hodín. Tie teda musia naňho pôsobiť silou, ktorú by sme pozorovali ako „prírastok“ celkovej tiaže piesku. Podľa druhého Newtonovho pohybového zákona (*„Sila je rovná podielu zmeny hybnosti a času za ktorý táto zmena nastala.“)* môžeme napísať

$$F_{+} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m_z v(\Delta t N)}{\Delta t},$$

kde ($N\Delta t$) je počet zrniek piesku, ktoré dopadnú za čas Δt. v je ich rýchlosť, ktorú môžeme vypočítať z informácie, že zrnká padajú voľným pádom, $v = gT$. Následne:

$$F_{+} = m_z NgT ,$$

čo je presne rovnaký výsledok ako pri „úbytku“. Z toho vyplýva, že pri ustálenom stave na váhach nebudeme pozorovať žiadne výchylky.



Ohľadom začiatku a konca si stačí uvedomiť, že sily F_+, F_- v tomto prípade nebudú rovnaké (skúste si premyslieť kedy ako). Nakoniec môžeme nakresliť priebeh:

Pre fanúšikov fyzikálnych úvah ponúkame riešenie aj tohto typu (samozrejme s rovnakým koncom). Počas rovnomerného sypania sa ťažisko sústavy hodiny + piesok sa rovnomerne posúva nadol. Pretože ťažisko sa hýbe rovnomerne priamočiaro, je výsledná sila naňho pôsobiaca nulová $\rightarrow$ hmotnosť na váhach sa nezmení. Iba pri „začiatku“ a „konci“ ťažisko zrýchľuje a spomaľuje, pozorujeme pokles, respektíve nárast hmotnosti.

Cestu piesku v presýpacích hodinách môžeme podľa jeho polohy rozdeliť do štyroch etáp. Na začiatku sa piesok nachádza v hornej polovici hodín a pomaly sa zosúva ku otvoru, potom chvíľku padá voľným pádom, nasleduje okamih dopadu na dno a nakoniec sa povaľuje niekde na dne.

V každej etape pritom nejako (ne)pôsobí na hodiny a pre výslednú silu na váhe platí:

$$F_{výsl.} = F_{hodiny} + F_{piesku\ hore} + F_{padajúceho\ piesku} + F_{dopadajúceho\ piesku} + F_{piesku\ dole} \quad (1)$$

Pozrime sa podrobnejšie na každý stav. Väčšina z vás prišla na to, že ak je piesok v hornej polovici (pred „padaním“) alebo na dne (po „dopade“) pôsobí na hodiny celou svojou tiažou (či už priamo alebo prostredníctvom iného piesku),

$$F_{piesku\ hore} = gm_{piesku\ hore} \qquad \text{a} \qquad F_{piesku\ dole} = gm_{piesku\ dole}.$$

Padajúci piesok nám nerobí problémy, pretože nie je v kontakte s hodinami (uvažujeme vzduchoprázdne hodiny), takže $F_{padajúceho\ piesku} = 0$.

Ostala nám posledná časť, ktorá by sa podľa väčšiny z vás nemala nijako líšiť od prvej a štvrtej etapy, piesok by mal na hodiny pôsobiť len svojou hmotnosťou. No ale to nie je všetko! Treba si uvedomiť čo sa vlastne v momente dopadu deje. Ide vlastne o to, že sa piesok zabrzdí o dno hodín, čím zmení svoj pohybový stav. Na to aby takéto niečo nastalo je treba nejakej sily (presne tej, ktorá vám v riešeniach chýbala). Je jasné, že na piesok musia pôsobiť v protismere jeho pádu práve hodiny (o ne sa piesok „zastavuje“). Jej veľkosť určíme z druhého Newtonovho pohybového zákona, ktorý hovorí: *„Sila je rovná podielu zmeny hybnosti a času za ktorý táto zmena nastala.“*. Označíme v_h rýchlosť padajúceho piesku tesne nad dnom (po voľnom páde dĺžky h), potom:

$$F_{dopadajúceho\ piesku} = m_{dopadajúceho\ piesku} \cdot v_h / \Delta t. \quad (2)$$

Teraz si asi poviete, že ako chceme z toho niečo rozumné dostať, veď čas dopadu je veľmi malý (je to len okamih), a to by znamenalo hrozne veľkú silu a to je akési divné... Pointa je v tom, že hmotnosť dopadajúceho piesku je naopak veľmi malá, ako si hneď ukážeme, a pomer dvoch malých vecí môže dať „rozumný“ výsledok.

Za čas Δt dopadne na dno hodín všetok piesok, ktorý sa nachádza do vzdialenosti $\Delta t v_h$ od dna. Hustotu dopadajúceho piesku označíme ρ_d a plochu dopadu (~ ploche otvoru v strede hodín) S. Potom hmotnosť piesku dopadnutého za čas Δt bude:

$$m_{dopadajúceho\ piesku} = \rho_d S \Delta t v_h. \quad (3)$$

Po dosadení do rovnice (2) máme:

$$F_{dopadajúceho\ piesku} = S\rho_d v_h^2 \quad (4)$$

Ak teraz všetky získané informácie použijeme, rovnice (1) bude mať tvar:

$$F_{výsl.} = gm_{hodiny} + g(m_{piesku\ hore} + m_{piesku\ dole}) - S\rho_d v_h^2 \quad (5)$$

Aby sme vedeli obidva „pieskové“ príspevky porovnať je vhodné ich vyjadriť pomocou hmotnosti padajúceho piesku, pričom

$$m_{piesku} = m_{piesku\ dole} + m_{piesku\ hore} + m_{padajúceho\ piesku}$$

(tu môžem hmotnosť dopadajúceho piesku zanedbať) a

$$m_{padajúceho\ piesku} = Sh\rho_p$$

(ρ_p predstavuje priemernú hustotu padajúceho piesku).

Tu si treba dať pozor, pretože ρ_p sa nerovná ρ_d! Počas voľného pádu sa dĺžky „naťahujú“ a preto aj hustota zmenšuje. My použijeme taký zjednodušenú úvahu, že je to lineárna závislosť, takže potom vzťah medzi priemernou hustotou padajúceho piesku a hustotou pri dopade bude $\rho_p = 2\rho_d$. (To aby nám to pekne vyšlo☺).

Šupneme to do (5)-ky:

$$F_{výsl.} = g(m_{\,hodiny} + m_{piesku}) + 2\rho_d Shg - S\rho_d v_h^2 \qquad (6)$$

V prípade ak uvažujeme, že piesok padá stále rovnakú vzdialenosť (h) vieme si jeho rýchlosť vyjadriť: $v_h^2 = 2hg$ (voľný pád). Pozorné oko si určite všimne, že sa nám potom obidva posledné členy odčítajú a dostaneme výsledok:

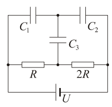
$$F_{výsl.} = g(m_{\,hodiny} + m_{piesku}) \qquad (7)$$

Teda váhy budú ukazovať stále rovnakú - celkovú hmotnosť. To bude platiť ale len vtedy ak bude v hodinách ustálený stav. Skúste si doma premyslieť ako to bude vyzerať na začiatku a konci sypania (ktoré členy rovnice (6) budú nulové?).

Približné správanie váh potom ukazuje obrázok. HOWGH

B–2.3 Kondíky (opravoval Škrek)

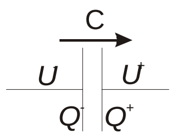
V schéme je zakreslený elektrický obvod, ktorým vďaka ideálnemu zdroju s napätím U preteká prúd. Aké veľké je pritom napätie na kondenzátore s kapacitou C_1?



Tvorivá kríza je hnusná vec. Predstavte si stvoriteľa, ten entuziazmus, tá vitalita, hen sem mrak, tu strom (há, krásne fraktály), frc sem slnko, trošku pokropiť nebo jasnými hviezdami a aby to nebolo nudné tak sa to bude meniť periodicky. No a potom bum prásk, stvoriteľ zdrvene sedí na dokonalom pníku, otázka v očiach, odpoveď nikde. Čo ďalej, kto to bude obdivovať? Predstavte si, za 5 dní stvoríte vesmír, zo všetkým čo k tomu patrí a potom strávite celý drahocenný deň vymýšľaním človeka! Aký nepomer! K večeru stvoriteľ vstane z pníka a povie si: Himlhergotkrucifixnakvadrát skopnem ho na svoj obraz a idem spať, sakramenský krám!

Tak a teraz vidíte, aké je to ťažké s úvodom ku vzoráku a teraz už kondíky. Na základe vašich riešení si najprv vysvetlíme nejaké pravdy o kondíkoch:

1. V ustálenom stave cez kondíky netečie prúd. Keďže náš zdroj napätia je jednosmerný a ustálená situácia sa dosahuje veľmi rýchlo, môžeme rátať, že cez kondíky netečie prúd.
2. na kondíkoch pod napätím sa indukuje náboj, ktorý sa snaží vyrovnať toto napätie, a teda na kondíkoch sa indukuje *indukované napätie* (má rovnakú veľkosť a opačnú orientáciu ako napätie, na ktoré sme kondík pripojili)
3. ak nad kondík nakreslíme šípku, ktorá bude znamenať smer napäťového spádu, označíme si potenciáli na oboch koncoch kondíka a indukované náboje (kde Q je ich absolútna veľkosť) ako na obr.1, potom platí že



obr. 1

$$Q = (U^+ - U^-)C. \qquad (0)$$

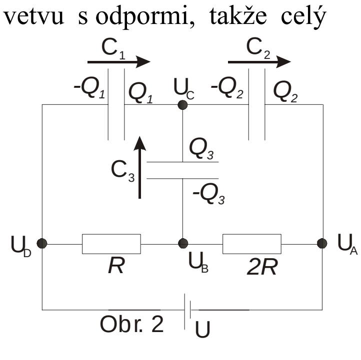
Tento výsledok je veľmi dôležitý kvôli znamienkam.

Takže čo sa deje s naším obvodom? No prúd ide iba cez vetvu s odpormi, takže celý napäťový spád U musí z U klesnúť na 0 iba skrz odpory R a $2R$, cez ktoré tečie prúd I. Z Kirchhoffových zákonov vieme:

$$U = U_1 + U_2,$$

$$U_1 = 2U_2 \text{ (lebo } U_1 = 2RI \text{ a } U_2 = IR),$$

kde U_1 je napäťový spád na odpore $2R$ a U_2 na odpore R. A čo na to kondíky? Označme si potenciály uzlov U_A, U_B, U_C a U_D (viď obr. 2 ktorý si o chvíľu nakreslíme). Napätie medzi dvoma uzlami je rovné rozdielu ich potenciálov. Vieme, že $U_A = U$ (potenciál pravej strany zdroja), $U_D = U - U_1 - U_2 = 0$



Obr. 2

(potenciál ľavej strany zdroja) a $U_B = U - U_1 = U/3$. (to vieme z vyššie napísaných rovníc). Ďalej si nakreslíme obr.2 a do neho náš obvod aj so šípočkami nad kondíkmi. Po obhliadke obr. č. 2 vieme, že na kondíkoch sa indukuje náboj ktorý zo spojeným z (0) dáva tieto rovnice:

$$\begin{aligned}(U_A - U_C)C_2 &= Q_2\\ (U_C - U_D)C_1 &= Q_1\\ (U_C - U_B)C_3 &= Q_3,\end{aligned} \qquad (1)$$

kde Q_i je náboj indukovaný na i-tom kondenzátore (C_i). Dá sa to predstaviť aj tak, že ak máme doskový kondenzátor, tak na jednej platni sa indukuje náboj Q a na opačnej strane náboj $-Q$ a bude medzi nimi rovnako veľké, ale opačné napätie, než akým boli vyvolané. Treba si uvedomiť že to neovplyvní pôvodné napätie, ktorým bol náboj vyvolaný. Je to ako alergická reakcia, kondík sa vyhádže nábojom, kašle, kýcha, opuchne ale elektrická jar ide ďalej...

Zatiaľ máme tri rovnice o štyroch neznámych. Keď sa pozrieme na oblasť (viď obr. 2) spojenú s uzlom U_C, všimneme si že je prakticky oddelená od ostatného obvodu. Ak bola pred zapojením obvodu elektricky neutrálna (a predpokladáme že bola) tak musí ostať aj po zapojení a teda

$$Q_1 + (-Q_2) + Q_3 = 0. \qquad (2)$$

Z (1) a (2) máme

$$U_C = Q_1/C_1, \qquad Q_1 = Q_2 - Q_3, \qquad Q_1 = (U_A - U_C)C_2 + (U_B - U_C)C_3.$$

Z toho dostávame

$$U_C = \frac{(U - U_C)C_2 + \left(\frac{U}{3} - U_C\right)C_3}{C_1},$$

dobúšime do tvaru

$$U_C = \frac{U}{3}\left(\frac{C_3 + 3C_2}{C_1 + C_2 + C_3}\right).$$

Napätie na C_1 je $U_C - U_D = U_C$. Kondičke zdar, nech vás obchádza veľkým oblúkom tvorivá kríza.

Krásne riešenie ešte uviedol Michal Sudolský, tu je:

Vyjadríme si energiu obvodu

$$E = \frac{1}{2}\left[C_1(U_C - U_D)^2 + C_2(U_A - U_C)^2 + C_3(U_C - U_B)^2\right],$$

aby bol obvod stabilný, tak jeho energia musí byť vzhľadom na U_C minimálna(lebo U_C je premenná). Upravíme výraz pre energiu roznásobením a dosadením za U_B, U_A a U_D ktoré už poznáme z predošlého riešenia:

$$E = U_C^2\frac{1}{2}(C_1 + C_2 + C_3) - U_C(3C_2 + C_3)U + \frac{1}{2}\left(C_3U^2 + \frac{U^2}{9}\right).$$

Minimum pre parabolu v tvare $Ax^2 + Bx + C$ je v bode

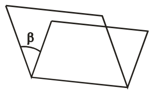
$$x = -B/A,$$

čo nám dá minimum pre energiu vzhľadom na U_C čuduj sa svete

$$U_C = \frac{U}{3}\left(\frac{C_3 + 3C_2}{C_1 + C_2 + C_3}\right),$$

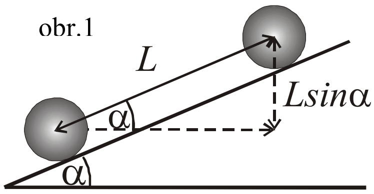
a vôbec sa nemusíme paprať zo znamienkami!!!

B–2.4 Žľab (opravoval Džony)



Ak vezmeme dva dlhé obdĺžniky a jednou stranou ich priložíme k sebe, dostaneme žľab, ako na obrázku. Predstavte si, že do takéhoto žľabu umiestnime plnú guličku (s hmotnosťou m *polomerom r a momentom zotrvačnosti I = 2/5mr*^{2}*). Žľab nahneme tak, aby úsečka, kde sa obdĺžniky spájajú, zvierala s vodorovnou rovinou uhol* α*. Pritom ho však držíme rovno, teda tak, aby obidva obdĺžniky zvierali so zvislicou rovnaký uhol. S akým zrýchlením sa bude pohybovať gulička? Predpokladajte, že nič neprešmykuje a gulička sa celá zmestí do žľabu.*

Ahoj,
Dosť ťažký príklad, však? Aj keď niektorí ho vyriešili bravúrne.



obr.1

Ochutnajme najprv jednoduchšiu situáciu, ako je zadaný žľab, a síce obyčajnú naklonenú rovinu, na ktorej sa gúľa guľa bez prešmykovania. Pozrime sa na obrázok 1: Keďže sa gulička na začiatku nepohybuje, potenciálna energia guličky sa mení na kinetickú. Celková kinetická energia je súčtom kinetickej energie posuvného a otáčavého pohybu. Teda:

$$mgL\sin\alpha = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad (1)$$

Uhlová rýchlosť guličky sa dá vyjadriť ako:

$$\omega = v/r. \qquad (2)$$

Pričom v je práve posuvná rýchlosť (pretože nič neprešmykuje) a r je polomer, po ktorom sa gulička valí. V prípade naklonenej roviny je to práve polomer guličky. Keď dosadíme (2) do (1) a vyjadríme v, dostaneme:

$$v = \sqrt{\frac{2mgL\sin\alpha}{m + I/r^2}} \qquad (3)$$

Keďže ide o rovnomerne zrýchlený pohyb s nulovou počiatočnou rýchlosťou, vieme v vyjadriť aj inak, pomocou dráhy, ktorú gulička prešla, a zrýchlenia a. Vieme, že $L = 1/2at^2$ a $v = at$. Ak si z druhej rovnice vyjadrím čas a dosadím do prvej, platí že:

$$v = \sqrt{2aL} \qquad (4).$$

Porovnaním (3) a (4) už môžeme vyjadriť zrýchlenie:

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{m + I/r^2} \qquad (5)$$

Keď teraz za I dosadíme $2/5mr^2$, dostávame:

$$a = 7/5g\sin\alpha.$$

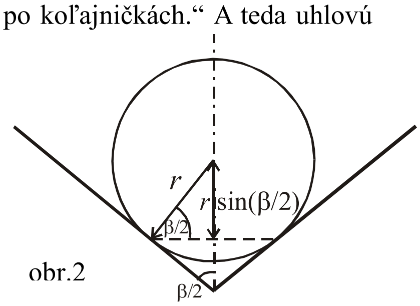
Pekný výsledok, len čo je pravda, ale ako to celé funguje v žľabe?

Pozrime sa na obrázok 2. Jediná zmena je to, že: citujem Stana Fecka: „Guľa sa nebude gúľať po celom svojom obvode, ale po menšom, ako keby po koľajničkách." A teda uhlovú rýchlosť (vzťah (2)) môžeme preformulovať ako:

$$\omega = v/(r\sin(\beta/2)) \qquad (6).$$

Zákon zachovania energie platí rovnako, či už je guľa v žľabe alebo na rovine. A teda keď dosadíme túto uhlovú rýchlosť do (1), dostaneme:

$$v = \sqrt{\frac{2mgL\sin\alpha}{m + I/(r\sin(\beta/2))^2}} \qquad (7)$$



obr.2

Samozrejme, vzťah (4) sa vôbec nezmení, pretože pre rovnomerne zrýchlený pohyb platia stále rovnaké rovnice, či už sa guľa valí po rovine alebo po žľabe. Ak teda porovnáme (4) a (7) dostaneme pre a:

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{m + I/(r\sin(\beta/2))^2} \tag{8}$$

Opäť dosadíme za $I = 2/5mr^2$, čím sa nám vykráti hmotnosť aj polomer guličky a dostávame finálny výsledok zrýchlenia pre žľab:

$$a = \frac{5g\sin\alpha\sin^2(\beta/2)}{2 + 5\sin^2(\beta/2)}.$$

A máme to. Ešte trošku porozmýšľame, či je to dobre: Ak bude $\alpha = 0$, potom aj $a = 0$. To je fajn, lebo predsa v žľabe, ktorý je horizontálny sa gulička nemá prečo urýchľovať. Ak je β veľmi malé, potom aj a je veľmi malé. Guľa sa síce šialene rozkrúti, ale po malej kružnici, takže vpred bude zrýchľovať málo. Ak by sme za β dosadili 180°, t.j. žľab by bola vlastne rovina, dostaneme: $a = 5/7g\sin\alpha$. To je presne vzťah, ktorý sme odvodili pre naklonenú rovinu. Dobrú chuť.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

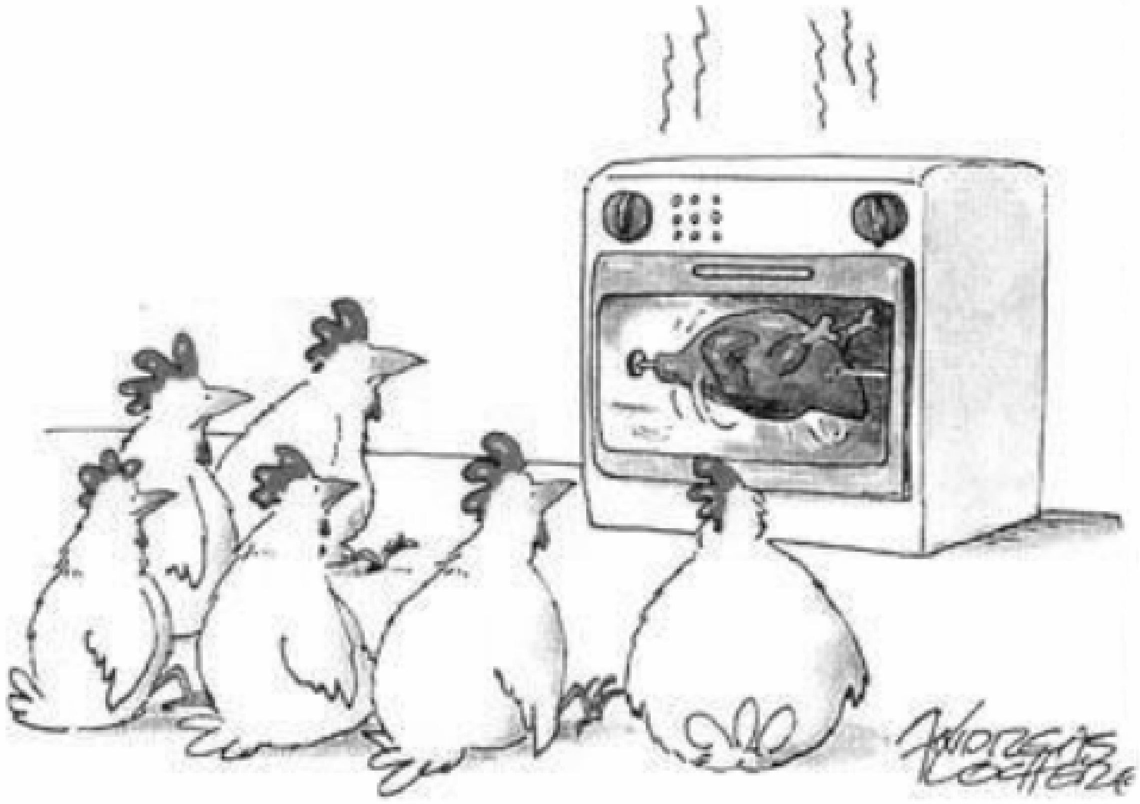
výsledková listina B – kategórie po 2. sérii letného semestra 20. ročníka

	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	①	B-2.1	B-2.2	B-2.3	B-2.4	☠	Σ
1.	Bzdušek	Tomáš	sx. A	G Piešťany	20,0	5,0	4,9	5,0	5,0		39,90
2.	Danko	Juraj	2 A	G Piešťany	16,0	5,0	2,5	5,0	5,0		33,50
3.	Berta	Peter	2 A	G Veľké Kapušany	16,5	5,0	2,5	3,0	5,0		32,00
4.	Bogár	Ondrej	2 E	G ĽŠ Trenčín	15,5	5,0	2,0	3,0	5,0		30,50
5.	Boža	Vladimír	1 C	G Poprad Tatarku	15,7	3,0	2,5	3,0	4,0		29,60
6.	Sudolský	Michal	2 F	G BB Tajovského	13,5	4,0	2,0	5,0	4,5		29,00
7.	Fecko	Stanislav	sx. A	G Pankúchova	18,5	5,0	–	–	5,0		28,50
8.	Rybák	Matúš	kv.	OG Kukučínova	15,7	3,0	3,0	1,5	2,5		27,20
9.	Galica	Tomáš	sx.	G Spišská Stará Ves	12,5	5,0	3,0	–	5,0		25,50
10.	Hreha	Ján	2	G Liptovský Hrádok	13,5	4,5	3,5	–	–		21,50
11.	Salaj	Michal	2 A	G Snina	12,5	3,5	–	2,0	2,5		20,50
12.	Nagy	Jakub	1 C	G sv. T. Akvinského	10,0	1,0	2,0	–	5,0		19,41
13.	Pavlíček	Tomáš	2 C	SPŠE Piešťany	11,5	4,0	0,5	1,5	1,5		19,00
14.	Malik	Tomáš	kv.	1SG BA Bajkalská	15,7	–	–	–	–		15,70
15.	Keruľ	Lukáš	kv. A	OG BA Tilgnerova	7,4	2,0	2,0	–	1,0		13,49
16.	Švihorík	Róbert	sx.	G Nitra Párovská	6,3	1,0	0,5	–	5,0		12,80
17.	Koreňová	Nikola	1 E	G PH Michalovce	11,0	–	0,5	–	0,5		12,28
18.	Rolníková	Zlatka	kv.	G Skalica	7,3	–	2,0	–	–		9,80
19.	Alankina	Júlia	kv.	G Dunajská Streda	5,0	1,5	0,5	1,0	–		8,73
20.	Čelko	Pavol	sx.	G Považská Bystrica	6,0	–	–	–	–		6,00
21.	Baxová	Katarína	9 C	ZŠ D. Hory, Trenčín	1,9	-	2,0	-	0,5		5,07
22.	Šnajderová	Lucia	sx. A	OG Varš. 1 Žilina	4,0	–	–	–	–		4,00

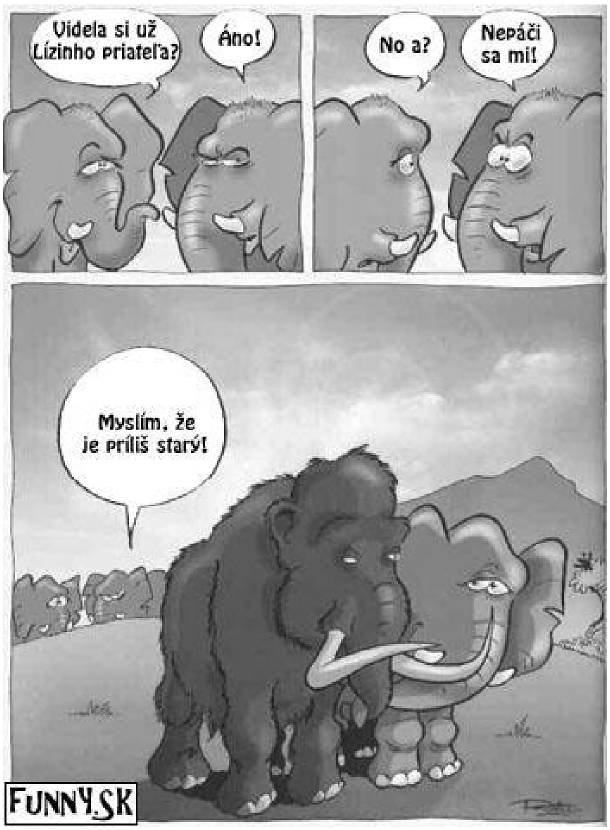
Milá mládež!

Je nám cťou vám oznámiť, že v polovici mája sa opäť uskutoční v Blave populárna Akadémia Trojstenu a Klub Trojstenu. Každý, kto má matematickofyzikálne srdce, bude obšťastnený množstvom zaujímavých prednášok s veľkým výberom tém. Preto neváhajte a prídite! Viac informácii sa objaví na stránkach www.kms.sk alebo www.fks.sk.

Vaše FKS



REALITY-TV



Videla si už Lízinho priateľa?
Áno!
No a?
Nepáči sa mi!
Myslím, že je príliš starý!
FUNNY.SK

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

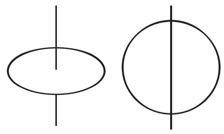
vzorové riešenia 2. série
A – kategória (staršia)
20. ročník
letný semester
školský rok 2004/2005

www. **.sk**

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

A–2.1 P(a)lacka (opravoval Martin)

Majme kruh vyrezaný z homogénneho materiálu s hmotnosťou m a polomerom r. Jeho moment zotrvačnosti vzhľadom na os, ktorá prechádza stredom a je kolmá na rovinu kruhu, je 1/2mr² (vľavo). Aký je moment zotrvačnosti vzhľadom na os, ktorá prechádza stredom a leží v rovine kruhu (vpravo)? Skúste úlohu vyriešiť bez použitia integrálov.



Musím uznať, že na prvý pohľad tento príklad vyzerá nie moc priateľsky, čo aj mnohí z vás napísali. Ale na druhej strane je jeho riešenie celkom jednoduché. Stačí si uvedomiť, čo je to moment zotrvačnosti:

Ak si dané teleso rozdelíme na veľmi malé časti (tak malé, že ich môžeme považovať za body), potom každá táto časť telesa prispieva k celkovému momentu zotrvačnosti príspevkom

$$I = m_i r_i^2 ,$$

kde m_i je hmotnosť tejto časti telesa a r_i je jeho vzdialenosť od osi. Celkový moment zotrvačnosti vzhľadom na danú os vyrátame tak, že sčítame tieto príspevky cez všetky časti telesa. (Keď počítame pomocou integrálov, tak robíme vlastne to isté, jediný rozdiel je to, že vtedy si dané teleso rozdelíme na nekonečne malé časti).

V našom prípade keď sa snažíme zrátať momenty zotrvačnosti kruhu, tak pre príspevky k momentom zotrvačnosti vzhľadom na jednotlivé osi bude platiť (používame označenie osí: os z je kolmá na disk a osi x, y prechádzajú kruhom a sú na seba kolmé)

$$I_x = m_i x_i^2 ,$$

$$I_y = m_i y_i^2 ,$$

$$I_z = m_i z_i^2 .$$

Keďže je tam nejaká tá symetria, tak je jasné, že momenty zotrvačnosti okolo osi x a y sú rovnaké $I_x = I_y$. Ďalej vieme, že vzdialenosť od osi z si môžeme vyjadriť pomocou súradníc na osiach x a y, čo je vlastne Pytagorova veta:

$$z^2 = x^2 + y^2 .$$

A odtiaľ už jasne vidieť, že pre I_z platí:

$$I_z = m_i (x_i^2 + y_i^2) = 2I_x .$$

Tento príklad bolo možné riešiť aj iným spôsobom, mnohí z vás využívali to, že vedeli moment zotrvačnosti tyče a poznali Steinerovu vetu. Pomocou nej si kruh rozdelili na úzke pásiky a našli ten istý výsledok (v prípade, ak postupovali dobre). Tento postup, aj keď už veľmi pripomínal integrovanie bol stále hodnotený ako dobrý.

Tu vysvetlím, čo som považoval za *nepoužívanie integrálov*: Ak niekto zobral vzorce pre moment zotrvačnosti v integrálnom tvare a integrovaním dostal nejaké hodnoty pre I_x, I_y a potom ich porovnal, tak to bolo zle. Všetko ostatné (aj keď sa to podobalo na integrovanie) som považoval za neintegrovanie a teda za správne (samozrejme, ak bol postup a výsledok dobrý).

A–2.2 Rádio jádia (opravoval Peťo)

Jadro rádia $^{226}_{88}\mathrm{Ra}$, *ktoré je v pokoji, sa rozpadá na jadro radónu* $^{222}_{86}\mathrm{Rn}$ *a časticu* $^{4}_{2}\alpha$ *(jadro* $^{4}_{2}\mathrm{He}$*). Vypočítajte akou rýchlosťou sa bude pohybovať častica* $^{4}_{2}\alpha$ *dostatočne dlho po zrážke, keď už môžeme zanedbať vzájomné pôsobenie s* $^{222}_{86}\mathrm{Rn}$. *Všetky rýchlosti sú malé v porovnaní s rýchlosťou svetla. Pokojové energie sú v tabuľke.*

Ahojte. Asi jediným rozumným spôsobom ako také čosi počítať, je použitie zákonov zachovania. Najprv rozoberme zákon zachovania energie. Iste ste už niekde videli vzťah $E = mc^2$, a keďže ste riešitelia FKS, mohli by ste tušiť, čo to znamená. Ak máme nejakú časticu s hmotnosťou m, môžeme pomocou tohto vzťahu vypočítať jej energiu. Ak sa častica pohybuje vo voľnom priestore, jej energia je väčšia ako keby stála, takže pohybujúca sa častica bude mať aj väčšiu hmotnosť. Dôležité je uvedomiť si, že ak máme nejakú sústavu s energiou E a dôjde v nej k nejakým zmenám, pričom táto energia sa nezmení, výsledný aj počiatočný súčet hmotností všetkého, čo sa v tejto sústave nachádza, je rovnaký. Ak sme na začiatku mali jadro s hmotnosťou m_{Ra} a teda pokojovou energiou $m_{Ra}c^2$, aj po zrážke musí byť celková energia rovnaká, a keďže súčet hmotností častice α a jadra radónu je menší ako hmotnosť pôvodného jadra (rozdiel hmotností je zapríčinený zmenou potenciálnej energie jadrových síl), zvyšná energia sa premení na kinetické energie oboch nových častíc, ktorých súčet označíme $T_\alpha + T_{Rn}$. Podľa zákona zachovania máme teda rovnicu

$$m_{Ra}c^2 = m_\alpha c^2 + m_{Rn}c^2 + T_\alpha + T_{Rn}.$$

Všetky rýchlosti považujeme za dostatočne malé v porovnaním s rýchlosťou svetla, môžeme preto vyjadriť kinetickú energiu častíc pomocou nerelativistického vzťahu a dať tak do súvisu kinetické energie a rýchlosti/hybnosti častíc. Hybnosti a rýchlosti častice α a jadra radónu označme ako p a v s príslušným indexom. Zrejme

$$p_\alpha = m_\alpha v_\alpha, T_\alpha = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} = \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha}.$$

Použime teraz zákon zachovania hybnosti. Na začiatku bolo jadro rádia v pokoji, takže jeho hybnosť bola nulová. Pokiaľ je sústava izolovaná (čo predpokladáme – inak by nemalo zmysel počítať tento príklad), musí byť aj po rozpade celková hybnosť nulová. Znamená to, že hybnosti produktov rozpadu sú rovnako veľké, ale majú opačný smer, takže ak ich vektorovo sčítam, dostanem vektor s nulovou dĺžkou. Máme teda sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych:

$$p_\alpha = -p_{Rn},$$

$$m_{Ra}c^2 = m_\alpha c^2 + m_{Rn}c^2 + \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{p_{Rn}^2}{2m_{Rn}}.$$

Jej riešením dostaneme

$$v_\alpha = \frac{p_\alpha}{m_\alpha} = c\sqrt{\frac{2m_{Rn}(m_{Ra} - m_{Rn} - m_\alpha)}{m_\alpha(m_{Rn} + m_\alpha)}} \approx 0{,}05\,c \approx 15123\,\mathrm{km/s}.$$

Ak nás náhodou zaujíma aj veľkosť rýchlosti jadra radónu, stačí hybnosť p_{Rn} (= $|p_\alpha|$) predelíme m_{Rn}, z čoho $v_{Rn} = 0{,}0009\,c = 272$ km/s. Obe rýchlosti sú dosť malé v porovnaní s rýchlosťou svetla c. Ak ste sa už niekedy stretli s relativistickými vzťahmi pre hmotnosť alebo hybnosť, od obyčajných sa líšili iba tým, že boli predelené výrazom $\sqrt{1 - v^2/c^2}$, ktorý v prípade častice α nadobúda hodnotu približne 0,9987, čo je skoro 1, takže použitie klasických vzťahov bolo oprávnené (mohli by ste síce namietať, že použitím iných vzťahov by sme dostali iné výsledky, no tie by sa od tých našich veľmi nelíšili).

Najčastejšou chybou vo vašich riešeniach bolo, že ste uvažovali len pohyb častice α a zanedbali energiu odnášanú jadrom Rn. Keďže jadro Rn je oveľa ťažšie, táto časť kinetickej energie je naozaj zanedbateľne malá, ale to bolo treba do riešenia napísať, lebo inak to vyzeralo, ako by ste vôbec netúžili po platnosti zákona zachovania hybnosti.

A–2.3 PolE na osi (opravoval Robo, vzorák Peťo)

Vypočítajte veľkosť intenzity E elektrického poľa na osi prstenca s polomerom r nabitého rovnomerne rozmiestneným nábojom Q vo vzdialenosti x od jeho stredu.

Ahojte. Asi všetci z vás vedia, že veľkosť intenzity elektrického poľa E vo vzdialenosti r bodového náboja Q je rovná

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

Táto intenzita je však vektor, takže treba vedieť aj jeho smer. Dohodou sa určilo, že $\vec{E}$ smeruje od náboja, ak je tento náboj kladný, a k náboju, ak je záporný. Elektrické pole má okrem tohto jednu užitočnú vlastnosť, a síce takzvaný princíp superpozície. Znamená to, že ak máme v priestore rozmiestnených viacero nábojov, výsledný vektor $\vec{E}$ v každom bode dostaneme tak, že urobíme vektorový súčet polí od všetkých nábojov (budeme k sebe prikladať šípky a výsledok dostaneme spojením začiatku a konca vzniknutého útvaru). A toto sú asi všetky dôležité fyzikálne poznatky potrebné na vyriešenie tohto príkladu.

V zadaní je napísané, že náboj je na celom prstenci rozmiestnený rovnomerne. Ako fyzici vieme, že existuje elementárny náboj veľkosti $e = 1{,}602.10^{-19}$ C a že aj náboj na prstenci je tvorený z takýchto elementárnych nábojov (v prstenci sú zrejme elementárne náboje oboch znamienok, ale niektorých je viac, lebo inak by bol neutrálny). Našou úlohou je teda sčítať príspevky od všetkých týchto nábojov. Ak vám začínajú po rozume chodiť temné myšlienky o integráloch, nie je na tom nič zlé, ale dá sa to vyriešiť aj bez nich (vo FKS už veľa rokov nebol príklad, v ktorom by bolo nutné čosi integrovať).

Pozrime sa teda, ako by sme počítali len pole od jedného malého náboja: mohli by sme ho ako vektor rozdeliť na dve zložky. Označme $\vec{E}_\perp$ zložku tohto poľa kolmú na os prstenca a $\vec{E}_{||}$ zložku s jeho osou rovnobežnú. Pre celkový príspevok jedného elementárneho náboja sediaceho na prstenci potom zrejme platí $\vec{E} = \vec{E}_\perp + \vec{E}_{||}$. Teraz už len zrátať polia od všetkých nábojov rozmiestnených rovnomerne na prstenci.

Uvedomme si však, že oproti každému malému náboju sa na prstenci nachádza rovnako veľký náboj rovnakého znamienka, ktorého pole bude mať zložku kolmú na os opačnú a zložku rovnobežnú s osou rovnakú, takže pri sčítavaní sa jednotlivé $\vec{E}_\perp$ navzájom vykompenzujú a všetky $\vec{E}_{||}$ sa sčítajú. Hľadané pole teda môžem dostať aj tak, že všetok náboj natlačím do jedného bodu prstenca, vypočítam intenzitu jeho elektrického poľa a zoberiem len jeho priemet na os prstenca. Ak skúmame pole v bode X na osi prstenca vzdialenom x od jeho stredu, vzdialenosť ľubovoľného bodu prstenca je podľa Pytagorovej vety rovná $\sqrt{r^2 + x^2}$, takže pre pole bodového náboja veľkosti Q dostaneme výraz

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2 + x^2}.$$

Nás však zaujíma len veľkosť tej zložky, ktorá je s osou rovnobežná. Ak α je uhol zovretý spojnicou QX a osou, potom

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

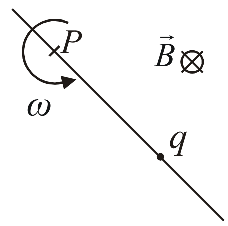
a pre hľadanú intenzitu dostaneme:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2 + x^2}\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2 + x^2}\frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}}.$$

A je tu šťastne záver. Pre väčšinu z vás bol tento príklad hračkou, tých zopár „menej šťastných“ pozabudlo na fakt, že intenzitu možno rozdeliť na rovnobežnú a kolmú zložku, že prstenec je 2D objekt, prípadne ste nepochopili, čo sa myslí ako os prstenca. Nezúfajte, netrhajte svoje riešenia, ale hor sa do novej série! Riešeniu zdar!!

A–2.4 Priame kmity (opravoval Juro)

V medzihviezdnom priestore sa nachádza priamka p ktorá sa otáča okolo svojho bodu P konštantnou uhlovou rýchlosťou veľkosti ω. Celé sa to nachádza v homogénnom magnetickom poli kolmom na rovinu pohybu priamky s indukciou B. Po priamke sa môže bez trenia pohybovať bodový náboj Q s hmotnosťou m. Vedci po dlhom skúmaní zistili, že za istých okolností koná tento náboj harmonické kmity po priamke p s rovnovážnou polohou v bode P. Čo musí spĺňať náboj Q, aby k tomuto javu došlo a aká je perióda týchto kmitov?



Ahojte.

Tak čo, vykmitaní? A nabití? Poďme sa strmhlav vrhnúť do riešenia našej vskutku zaujímavej úlohy. Ako nám napovedá zadanie, náboj bude pri svojej plavbe medzihviezdnym priestorom na priamke konať jeden veľmi zaujímavý druh pohybu. Ide o harmonické kmity a tie sú tak dôležité, že sa najskôr pozrieme, ako fungujú všeobecne.

Skúsme teda trochu porozmýšľať, ako funguje kmitavý pohyb. Ak chceme riešiť nejaký príklad v mechanike, väčšinou si napíšeme Newtonove rovnice pre sily a ich momenty. Teraz nás zaujímajú hlavne tie prvé, ktoré vyzerajú asi takto: $ma = F$, kde silu F vyjadríme vo všeobecnosti ako nejakú funkciu polohy, času, alebo rýchlosti. Táto rovnica nám vlastne dáva do súvisu polohu častice (prostredníctvom zrýchlenia a) a silu danú nejakým iným fyzikálnym zákonom. Sila môže byť konštanta – napríklad v homogénnom gravitačnom poli – kedy pre hmotné teleso dostaneme $ma = mg$. Môže to však byť aj trochu zložitejšie. Napríklad elektrická sila pôsobiaca na testovací bodový náboj v okolí iného bodového náboja závisí od polohy a magnetická sila okolo vodiča s prúdom dokonca aj od rýchlosti.

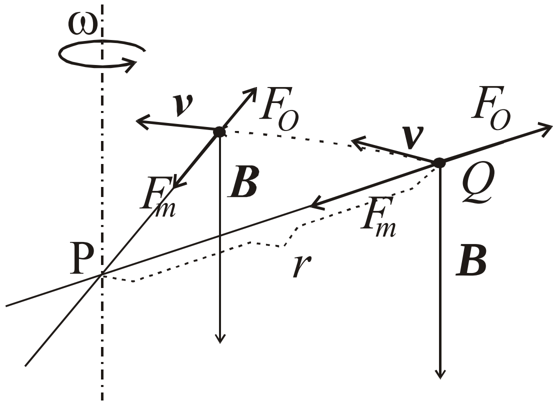
Ku kmitavému pohybu však dôjde len vtedy, keď sú splnené určité podmienky. Prvou z nich je, že existuje také usporiadanie sústavy, kedy sú všetky sily rovnováhe = rovnovážna poloha. V našom príklade je rovnovážna poloha náboja na priamke presne v bode P, lebo vtedy sa nepohybuje, takže naň nepôsobí ani magnetická, ani odstredivá sila. Ďalej musí platiť, že ak sa nami skúmané teleso z rovnovážnej polohy trochu vychýli, zvýši sa jeho potenciálna energia, tj. pôsobí naň taká sila, ktorá sa snaží vrátiť ho späť do rovnovážnej polohy, keďže všetky telesá sa chcú dostať do stavu s čo najmenšou energiou. Avšak nášmu telesu sa zvýšila energia, tak s tým bude chcieť niečo spraviť. Ak teleso chytíme a z rovnovážnej polohy vychýlime, bude sa teda do nej chcieť vrátiť, pričom jeho potenciálna energia sa bude premieňať na kinetickú, preletí rovnovážnou polohou a vychýli sa na opačnú stranu. Tento dej sa bude stále opakovať, pokiaľ nemáme nejaké trecie sily.

Na strednej škole sa stretnete s jedným špeciálnym druhom kmitavého pohybu, a síce s harmonickými kmitmi. Ich vlastnosťou je, že sila, ktorá na vychýlené teleso pôsobí, je priamo úmerná veľkosti jeho výchylky a pôsobí v smere jej poklesu. Toto platí napríklad pre závažie zavesené na pružine, a na prekvapenie mnohých je to splnené aj v našom príklade. Pre pružinu so závažím platí pohybová rovnica v tvare: $F = ma = -kx$, kde x je vzdialenosť závažia od rovnovážnej polohy a a je jeho zrýchlenie. Z učebnice fyziky vieme, že pre periódu takéhoto kmitavého pohybu platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

Ak sa nám teda podarí upraviť vyjadrenie sily pôsobiacej na náboj Q na priamu úmernosť, budeme môcť pomocou koeficientov zodpovedajúcich k, m v tejto rovnici, vypočítať periódu kmitov náboja okolo bodu P.

Napapaní teóriou, môžeme sa pozrieť, ako bude vyzerať náš konkrétny prípad. Podľa návodu si ideme vyjadrovať sily, ktoré pôsobia na naše teleso, na náboj. Keďže je pevne viazaný na rotujúcu priamku, bude naň pôsobiť odstredivá sila veľkosti $F_O = m\omega^2 r$. (Kde označujem podľa obrázku.) Táto sila pôsobí neustále po priamke a bude stále ťahať naše teleso preč od bodu P. Našťastie je tu ešte magnetická sila. Tá, ako všetci dobre vieme, pôsobí na náboje pohybujúce sa v magnetickom poli. Náš náboj sa pohybuje v zadanom medzihviezdnom magnetickom poli okamžitou rýchlosťou $v = \omega r$, ktorá je vždy a stále kolmá na fixujúcu priamku. Magnetická sila pôsobiaca na takéto teleso má veľkosť $F_m = QvB \sin\alpha$, kde α je uhol medzi smerom rýchlosti a smerom magnetickej indukcie. V našom prípade je vektor magnetickej indukcie kolmý na rovinu, v ktorej dochádza k pohybu náboja, takže $\sin\alpha = 1$. Smer takejto sily určuje už neviem koho pravidlo pravej ruky, ktoré hovorí o tom, že smer sily nám ukáže vysunutý palec pri pohybe ruky od vektora rýchlosti k vektoru magnetickej indukcie. Bystrejší v tom všetkom spozorovali vektorový súčin $F_m = Q(v \times B)$. Znamená to, že sila je stále kolmá na indukčne čiary magnetického poľa, teda je v rovine otáčania priamky a je stále kolmá na rýchlosť, ktorá je kolmá na priamku, takže jej nezostáva nič iné, ako byť rovnobežná s priamkou. Pozrite si obrázok. Pôsobí teda tým istým smerom, ako odstredivá sila, ale použitím všetkých pravidiel a obrázka zisťujeme, že má vždy orientáciu do bodu P, na rozdiel od odstredivej sily, ktorá má orientáciu od bodu P. Výslednica týchto dvoch síl bude teda mať opäť smer po priamke. Jej veľkosť bude



$$F = F_O - F_m$$

Pričom za kladný smer sme zvolili smer doprava (podľa obrázku). Vypočítaním výslednice dostaneme (všetko označujeme ako na obrázku)

$$F = F_O - F_m = m\omega^2 r - QvB = m\omega^2 r - Q\omega rB = (m\omega - QB)\omega r$$

Vidíme, že výsledná sila je úmerná výchylke. Môžeme teda povedať, že ak bude koeficient pre výchylkou v tomto výraze záporný, t.j. $F = -kr$, bude náboj konať harmonické kmity okolo bodu P s periódou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Na to, aby to celé harmonicky kmitalo, musí byť splnená podmienka

$$(m\omega - QB)\omega < 0 \Rightarrow m\omega - QB < 0,$$

$$m\omega < QB \Rightarrow Q > \frac{m\omega}{B}.$$

Pri takomto náboji, bude magnetická sila dosť veľká na to, aby prevýšila odstredivú a náboj mohol harmonicky kmitať. Všimnime si, že čím slabšie je magnetické pole, tým väčší musí byť náboj, tak isto ako čím rýchlejšie sa otáča priamka. Teraz už ľahko dorátame periódu tohto pohybu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{(m\omega - QB)\omega}}.$$

Tak to je vše přátelé. Majte sa krásne, užívajte si prvé jarné dni a nenechajte prírodu, aby s vami v tomto ozaj ťažkom období moc mávala a sústreďte sa na dôležité veci, ako napríklad FKS a podobne. Riešitelia, nebehajte za riešiteľkami a riešiteľky, nebehajte za riešiteľmi a radšej si to každý porátajte sami. Držte sa a tešte sa na sústredenie.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina A – kategórie po 2. sérii letného semestra 20. ročníka

Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	①	A-2.1	A-2.2	A-2.3	A-2.4	☠	Σ
1. Závodný	Jakub	ok.	G BA Grösslingova	20,0	5,0	5,0	5,0	5,0		40,00
2. Bzdušek	Tomáš	sx. A	G Piešťany	19,6	5,0	5,0	5,0	5,0		39,65
3. Hrdá	Marcela	3 IB	G BA J. Hronca	19,5	5,0	5,0	5,0	5,0		39,50
4. Perešíni	Peter	3 F	G BB Tajovského	19,3	5,0	5,0	5,0	5,0		39,29
5. Dzetkulič	Michal	4 A	G PH Michalovce	18,0	5,0	4,8	5,0	5,0		37,80
6. Imriška	Jakub	3 A	G BA J. Hronca	18,9	2,0	5,0	5,0	2,5		34,61
7. Petrík	Peter	4 IB	G BA J. Hronca	15,7	5,0	4,9	5,0	2,5		33,10
8. Veselovská	Lenka	se.	G Lipt. Mikuláš	14,4	5,0	4,9	5,0	2,0		32,05
9. Mikuláš	Ján	se.	G BST Lučenec	17,0	5,0	3,0	2,0	3,5		31,78
10. Pôbišová	Zuzana	3 F	G BB Tajovského	15,0	5,0	5,0	5,0	2,0	-1	31,76
11. Kravec	Martin	3 A	G PH Michalovce	15,3	1,0	5,0	5,0	4,0		31,39
12. Zámečník	Peter	3 D	G MRŠ NMV	15,3	1,0	5,0	5,0	3,5		30,96
13. Sudolský	Michal	2 F	G BB Tajovského	14,4	1,0	5,0	5,0	4,5		30,91
14. Komorovský	Marek	se.	G Dubnica n. Váhom	14,3	1,0	5,0	4,6	4,5		30,50
15. Šibík	Juraj	4 D	G Považská Bystrica	13,0	5,0	4,0	5,0	3,5		30,50
16. Kaniansky	Miroslav	se. A	G Piaristické Nitra	14,5	5,0	5,0	2,5	2,0		30,24
17. Kucharík	Marcel	3 D	G MRŠ NMV	12,5	1,0	5,0	5,0	4,0		28,61
18. Astaloš	Róbert	4 A	G Rimavská Sobota	15,5	1,5	5,0	2,0	4,5		28,50
19. Korch	Jakub	7 A	G Piaristické Nitra	10,6	4,0	5,0	3,2	2,5		26,46
20. Sasák	Róbert	4 D	SPŠE Pieštany	15,6	0,5	0,5	5,0	4,5		26,10
21. Foltin	Miroslav	3 C	G Jána Hollého	17,0	1,0	3,0	1,5	2,0		25,87
22. Piják	Peter	4 B	G VOZA	9,0		5,0	5,0	2,0		21,00
23. Svítková	Lucia	3 B	G VBN Prievidza	13,9	-	3,5	2,0	-		20,60
24. Obžerová	Gabriela	3 B	G VBN Prievidza	12,2	0,5	3,0	3,0	0,5		20,56
Ladecky	Martin	4 B	G VOZA	9,5	1,0	5,0	5,0	0,0		20,50
26. Rušin	Michal	ok.	G Spišská Stará Ves	11,0	2,0	5,0	2,0			20,00
27. Simančík	František	ok.	G BA Grösslingova		5,0	5,0	5,0	4,5		19,50
28. Bachratá	Alenka	3 B	G VOZA	9,4	-	4,9	3,0	-		18,77
29. Hergelová	Beáta	3 B	G BST Lučenec	16,0						15,95
30. Fačkovec	Boris	se. A	G Piešťany		2,0	5,0	5,0	3,5	-2	14,55
31. Vojtko	Andrej	ok. A	G Skalica	10,0	1,0	1,0	1,8	0,5		14,30
32. Petruchová	Zuzka	se.	G BA Grösslingova	8,4	1,0	3,0	-	0,5		13,91
33. Lalinský	Ján	4		12,4						12,40
34. Uchytilová	Vendula	3 A	G J.K.Tyla	11,0						11,00
35. Berta	Peter	2 A	G Veľké Kapušany	9,4						9,44
36. Švihranová	Ivana	3 C	OA Hrobákova 11	3,5						3,52

Milá mládež!

Je nám cťou vám oznámiť, že v polovici mája sa opäť uskutoční v Blave populárna Akadémia Trojstenu a Klub Trojstenu. Každý, kto má matematickofyzikálne srdce, bude obšťastnený množstvom zaujímavých prednášok s veľkým výberom tém. Preto neváhajte a prídite! Viac informácii sa objaví na stránkach www.kms.sk alebo www.fks.sk.

Vaše FKS