FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 3. série
B – kategória (mladší)
20. ročník
zimný semester
školský rok 2004/2005

www.fks.sk

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

B – 3.1 Kengura okolo sveta (za 80 skokov) (opravovala Baška Trubenová a Peťo Glaus)

Kengura Kátam je veľký športovec. Zo Zeme sa dokáže odraziť maximálnou rýchlosťou 15 ms^{-1}.
a) Koľko skokov bude potrebovať na obskákanie okolo Zeme po rovníku, ak skáče tak, aby doletela čo najďalej?
Koľko skokov potrebuje na obskákanie Mesiaca, ak:
b) Kátam sa odráža stále rýchlosťou 15 ms^{-1}, ako na Zemi.
c) Kátam sa odráža tak, že sa prikrčí koľko len zvládne a potom začne pôsobiť na podložku konštantnou silou F, až kým sa neodrazí.

Čaute čaute! No toto bol skutočne celkom jednoduchý príklad, a tak ste ho väčšinou zvládli. Aj tak sa ale spolu pozrime, ako to malo byť.

a) Vieme, že kengurka sa vie odraziť na Zemi rýchlosťou najviac 15 ms^{-1}. Je to ale kengura - fyzik, a preto z toho dokáže vyťažiť maximum. Vie, že pre vertikálnu zložku jej rýchlosti platí $v_v = v\sin\varphi$, kde φ je uhol jej odrazu od Zeme, a pre horizontálnu zložku $v_h = v\cos\varphi$. Jej skok si môžeme predstaviť ako šikmý vrh. Čas, aký bude skok trvať, je $t = 2v_v/g$, čiže stihne doskočiť do vzdialenosti

$$d = v_h t = 2v^2\sin\varphi\cos\varphi/g.$$

Ak trochu poznáte goniometrické vzorce, viete, že to je to isté ako $d = v^2\sin2\varphi/g$. Tiež by ste mali vedieť, že sínus môže nadobúdať hodnoty od -1 po 1, pre maximálne d musíme teda dosadiť uhol $\varphi = 45°$ ($\sin(2.45°) = 1$). Dĺžka jedného skoku našej kengurky je

$$d = v^2/g = 22{,}7 \text{ m}$$

(to je ale Superkengura, že?). A ak poznáme obvod Zeme $o = 2\pi r = 2.3.14.6378.10^3$ m, zistíme, že na svoju cestu potrebovala 1 757 028 skokov. Samozrejme, ak ste dosadili trochu iné g alebo polomer Zeme, no váš výsledok sa dostatočne podobal tomuto, bol prirodzene tiež správny.

b) V tomto prípade Kátam skáče po Mesiaci a jediné dve veci, čo sa menia, je gravitačné zrýchlenie a polomer mesiaca. Beda prebeda, ak ste na niečo z toho zabudli! Takže dĺžka skoku pre $g_m = 1{,}6$ ms^{-2} (približne) je 140 m a počet skokov pre $r = 1738000$ m je 77961. Tiež platí, že nám stačil približný výsledok. Ak ste si nezistili polomer Mesiaca alebo gravitačné zrýchlenie, smola, je to v každej lepšej encyklopédii, stačilo zájsť do knižnice.

c) Tak s týmto ste mali trochu problémy. Na zemi kengura skáče *maximálne* 15 ms^{-1}. Neexistuje nič ako obmedzená rýchlosť pre kengury v uzavretej obci, ona to proste rýchlejšie nezvláda. Na takom Mesiaci je ale slabšia gravitácia, nepodarilo by sa jej teda odraziť trochu rýchlejšie? Chceli sme teda vedieť, koľko skokov by kengurka potrebovala, keby sa aj na mesiaci odrazila ako len vie, teda tou istou odrazovou silou F, ako potrebuje na Zemi na získanie $v = 15$ ms^{-1}. Keď kengura pôsobí na podložku silou F, časť tejto sily sa spotrebuje na prekonanie gravitácie a zvyšok na samotné zrýchlenie. Ak predpokladáme dĺžku kengurích nôh 1 m, zistíme, že zrýchlenie, ktorým sa odráža na Zemi, má veľkosť $a_z = 112{,}5$ ms^{-2}. Pre odrazovú silu F teda platí $F = ma_z + mg$. Na Mesiaci máme iba šestinové g, platí tam teda:

$$F = ma_m + mg_m$$

(a_m je kengurino odrazové zrýchlenie na Mesiaci). Z toho

$$a_m = a_z + g - g_m = 120{,}7\ \mathrm{ms}^{-2}.$$

Na dráhe 1 m tým kengura získa rýchlosť približne 15,5 ms^{-1}. Touto rýchlosťou doskočí 150 m a počet potrebných skokov je len 72619.

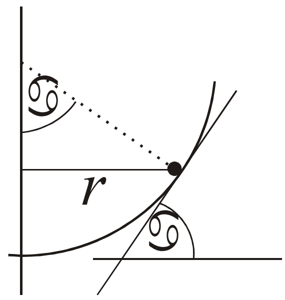
Za prvé dve úlohy ste mohli získať až štyri body, a ak ste prejavili aspoň náznak riešenia v úlohe c), tiež to nebolo úplne zbytočné. Takže poučenie do budúcnosti - snažte sa ako môžete, a ak niečo neviete, skúste si to niekde vyhľadať!

B – 3.2 Točiaca sa guľa (opravoval Juro)

Dutá guľa polomeru R sa otáča okolo zvislej osi uhlovou rýchlosťou w. Nachádza sa v nej malé teliesko, ktoré koná pohyb spolu s guľou (t.j. vzhľadom na guľu sa nepohybuje). Aký musí byť koeficient trenia f medzi guľou a telieskom, ak sa teliesko nachádza vo výške R/2.

Ahojte. Poďme strmhlav do riešenia na prvý pohľad dosť ľahkej úlohy. Keď sa však človek prizrel lepšie, zistil, že je ešte ľahšia ako sa zdalo. Ale nepredbiehajme.

Všetko dôležité bolo zakódované vo vete o nepohybovaní sa telieska vzhľadom na guľu. Na teliesko pôsobia tri sily: tiažová, odstredivá a trecia. Zaoberajme sa najskôr tiažovou a odstredivou silou, s trecou je to o čosi zložitejšie (zoberieme ju do úvahy neskôr). V našom hútaní a dumaní môžeme kľudne predpokladať, že teliesko sa nenachádza vo vnútri gule, ale na naklonenej rovine, ktorá sa tejto gule akurát dotýka v bode, kde sa teliesko nachádza. Ak by sa teliesko po guli pohybovalo, uhol tejto naklonenej roviny by sa v čase zložito menil. Ale to nie je náš problém. Z obrázku je zrejmé, že tento uhol je taký istý, ako medzi zvislicou a polomerom gule v mieste telieska.

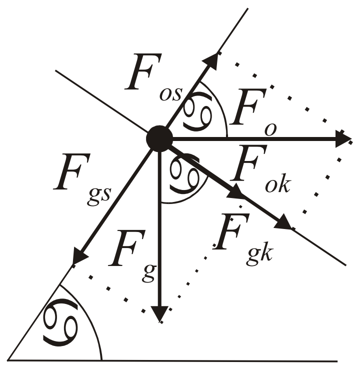


Rozložíme si tiažovú a odstredivú silu na zložky kolmé a rovnobežné s našou naklonenou rovinou. Podľa obrázka môžeme písať

$$F_{gk} = F_g\cos\alpha = mg\cos\alpha\ ,\ F_{ok} = F_o\sin\alpha = m\omega^2 r\sin\alpha = m\omega^2 R\sin\alpha\,\sin\alpha,$$

$$F_{gs} = -F_g\sin\alpha = mg\sin\alpha\ ,\ F_{os} = F_o\cos\alpha = m\omega^2 r\cos\alpha = m\omega^2 R\sin\alpha\,\cos\alpha.$$

Kladný smer osi v smere naklonenej roviny sme zvolili nahor, preto je znamienko mínus pri F_{gs}, ktorá smeruje nadol. Vidíme, že zložky síl v smere naklonenej roviny sa vo všeobecnosti navzájom nevykompenzujú. Označme si teda výslednicu síl v smere naklonenej roviny F_s a v smere kolmo na rovinu F_k. Keďže F_s nie je nulová, teliesko má tendenciu rozbehnúť sa v jej smere.



Našťastie tu máme treciu silu, ktorá ho umravní. Avšak trecia sila je to veľmi lenivá sila. Keď sa už teleso pohybuje, má hodnotu, o ktorej ste sa učili v škole, teda $F_t = fF_N$. Ak je však teleso v pokoji, nebude sa tak namáhať.

Čo sa vlastne od takej trecej sily očakáva? Že bude pôsobiť proti pohybu telesa. Keď teleso stojí, trecia sila si môže oddýchnuť, lebo nie je proti čomu spôsobiť. Ak na stojace teliesko začne pôsobiť nejaká sila, trecej sile sa to nepáči a snaží sa votrelkyňu svojim pôsobením odstrániť. Samozrejme trecia sila nie je všemocná a má hranice svojich schopností. Ak by od nej chcelo okolie priveľa, ak by narušiteľka bolo priveľká a trecia sila by nevládala, teliesko by sa začalo pohybovať. Trecia sila je síce lenivá, ale tvrdohlavá. Ak by aj vládala, stále by sa snažila zastaviť teliesko a robila by preto všetko čo dokáže, teda by mala už spomínanú veľkosť. Viac už nevládze.

Vráťme sa k nášmu príkladu. Podľa zadania je teliesko v pokoji (vzhľadom na guľu), teda na treciu silu nie sú kladené priveľké nároky a výsledná sila, pri ktorej musí pôsobiť, je menšia, ako maximálna hodnota trecej sily, inak povedané

$$\left|F_{os} + F_{gs}\right| \le fF_N .$$

V našom prípade je sila, ktorou je teleso tlačené do podložky $F_{ok} + F_{gk}$, takže hor sa do počítania

$$\left|\omega^2 R \sin\alpha \cos\alpha - g \sin\alpha\right| \le f\left(\omega^2 R \sin\alpha \sin\alpha + g \cos\alpha\right),$$

$$f \ge \frac{\left|\omega^2 R \sin\alpha \cos\alpha - g \sin\alpha\right|}{\omega^2 R \sin\alpha \sin\alpha + g \cos\alpha}.$$

Keďže výška, v ktorej sa nachádza teleso, je $R/2$, $\cos\alpha = 1/2$, $\sin\alpha = \sqrt{3}/2$, čím dostávame

$$f \ge \frac{\left|\omega^2 R\sqrt{3}/4 - g\sqrt{3}/2\right|}{3\omega^2 R/4 + g/2} \Rightarrow f \ge \sqrt{3}\,\frac{\left|\sqrt{3}\omega^2 R - 2g\right|}{3\omega^2 R + 2g}.$$

Koeficient trenia musí byť teda menší alebo rovný tejto hodnote. Vidíme, že pre vhodnú kombináciu parametrov by tu trecia sila ani nemusela byť. Zložky tiažovej a odstredivej sily v smere naklonenej roviny by sa navzájom vyrušili a teliesko by sa nepohybovalo tak či tak.

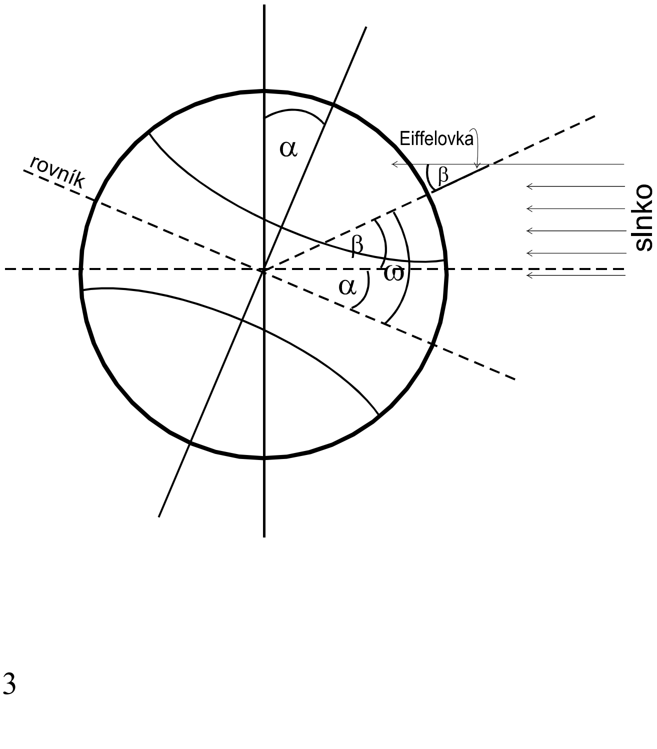
Treba ešte pripomenúť, že existuje niečo ako pokojový koeficient trenia a pohybový koeficient trenia. Ak je teleso v pokoji, maximálna sila, ktorou dokáže pôsobiť proti prípadným narušiteľom, je o čosi väčšia ako sila, ktorou sa zúfalo snaží zastaviť už rozpohybované teleso. Takže výsledok, ktorý nám vyšiel, je obmedzenie veľkosti pokojového koeficientu trenia, ktorý je väčší ako pohybový koeficient trenia.

Pár slov k vašim riešeniam. Málokto si uvedomil, že vo vzťahu má byť absolútna hodnota a že vzťah, ktorý má byť výsledkom, je v skutočnosti nerovnosť. Ale v celku ste riešenia mali celkom dobre. Však to aj mala byť záchranná úloha.

Takže posledná séria je úspešne za nami. Gratulujem víťazom, prajem krásne a veselé Vianoce, príjemné, hoci a čosi skrátené prázdniny a šťastný nový rok. A teším sa na vás na sústredení. Dovtedy sa majte krásne.

B – 3.3 Eiffelovka (opravoval Miro)

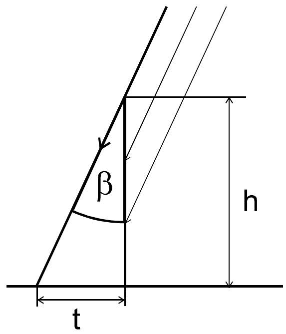
Aký najkratší tieň môže vrhať Eiffelova veža?



Ako veľa z vás zistilo, Paríž (čiže aj Eiffelova veža) sa nachádza na takom mieste, kde slnko nie je nikdy na zvislici, ktorá prechádza osou veže. Inak povedané, slnečné lúče v Paríži nikdy nedopadajú kolmo na zemský povrch. Prečo? Zo zemepisu by sme mali vedieť, že zemská os nie je kolmá na rovinu, v ktorej sa Zem pohybuje okolo Slnka (rovina ekliptiky). Uhol, ktorý zviera zemská os a ekliptika je konštantný, označíme ho α. V dôsledku tohto sklonu sa miesto, kde slnečné lúče dopadajú kolmo na Zem, stále mení. Toto miesto sa nachádza iba na časti povrchu Zeme. Medzi obratníkom Raka a obratníkom Kozorožca.

Preto Eifellovka bude vždy vrhať nejaký tieň. Našou úlohou je nájsť ten najmenší. Potrebujeme nájsť miesto, ktoré je od Eifellovky najmenej vzdialené a súčasne niekedy v roku tam slnečné lúče dopadajú kolmo. Z obrázku vidíme, že je to bod, ktorý leží na obratníku Raka a poludníku, ktorý prechádza cez Eiffelovku. Slnko svieti kolmo na tento bod jeden deň v roku a to na letný slnovrat (21. – 22. júna) na pravá poludnie. Potom môžeme náš problém opísať obrázkom.

A teraz fakty: Eifellovka sa nachádza na severnej pologuli na 48°52’ s.g.š., to bude uhol ω. Sklon zemskej osi je $\alpha = 23°27’$. Výška Eifellovky je $h = 320{,}75$ m (bez antény 300 m). Keďže výška Eifellovky je zanedbateľná oproti polomeru Zeme, môžeme predpokladať, že v okruhu zopár kilometrov okolo nej je Zem rovina. Potom môžeme posledný obrázok zjednodušiť:



Vidíme, že $\mathrm{tg}\beta = t/h$, kde t je hľadaná dĺžka tieňa. Po úprave dostaneme:

$$t = h\,\mathrm{tg}(\omega - \alpha).$$

Dosadíme spomínané hodnoty a dostaneme najkratšiu dĺžku tieňa Eifellovej veže : 152,44 m.

Tento príklad bol celkom ľahký, ako vidieť aj z bodového hodnotenia. Stačilo si uvedomiť, že najkratší tieň bude v letnom slnovrate, nájsť v atlase potrebné hodnoty a zistiť výšku Eifellovky. Preto som strhával pol bodu aj za nedosadenie hodnôt alebo numerické chyby. Dva body mal isté ten, kto napísal, že najkratší tieň bude v letnom slnovrate. Ahojte.

B – 3.4 Vlajka (opravovala Rebro)

Vlajka vo vetre nevyzerá ako rovný kus látky, ktorý sa naorientuje podľa smeruje jeho fúkania. Vznikajú na nej totiž vlny, „vlajka vlaje“. Prečo je to tak? Ako tieto vlny vznikajú?

Nuž, vlajka vlaje z viacerých dôvodov, ktoré spolu navzájom súvisia.... A to, že vlaje, znamená, že sa naorientuje v smere vetra, ale nie je pekná rovná, neustále sa vlní. Prsty v tom má Bernoulliho rovnica

$$p + \rho v^2/2 = \text{konštanta},$$

kde p je tlak v kvapaline (plyne), v jej rýchlosť tečenia a ρ jej hustota. Táto rovnica nám hovorí o tom, že ak sa zmení tlak v kvapaline, musí sa zmeniť jej rýchlosť alebo hustota.

Druhým faktom je, že taká vlajka vo vetre je nestabilný systém. Čo to znamená? Predstavte si misku v tvare polgule a malú guličku. Misku položíme na stôl tak, aby sme do nej mohli vložiť guličku. Gulička leží na dne misky. Keď teraz do guličky „šprgnete“, vychýli sa zo svojej polohy, ale po čase sa upokojí a zostane ležať na dne misky. Teraz misku položíme na stôl hore dnom. Pri troške trpezlivosti nájdeme bod, „vrchol“ misky. Naň umiestnime guličku, drží. Stačí však úplne maličký „ťuk“ a gulička už padá dole miskou a do svojej pôvodnej polohy sa už určite nevráti. V prvom prípade bola gulička v rovnovážnej polohe stálej (stabilnej), v druhom prípade v rovnovážnej polohe nestálej (labilnej).

Pozrime sa teraz na vlajku. Len tak si vlaje a zrazu urobíme „ťuk“. Čo na to naša vlajka? Ťuk spôsobil na vlajke malú vyhlúbeninu na jednu stranu. Okolo tejto strany prúdi vzduch rýchlejšie (musí obchádzať vyhlúbeninu), zatiaľ čo vo vnútri vyhlúbeniny ešte viacej spomalí. Tlak vo vyhlúbenine bude teda väčší ako na druhej strane a vyhlúbenina sa bude zväčšovať. Vietor bude zároveň narážať do prednej časti vyhlúbeniny, čím ju bude posúvať dozadu. Zväčšujúce a pohybujúce sa vyhlúbeniny – to je presne to, čo bežný ľud volá „viať vo vetre“.

Čo nám však spôsobí ten malý ťuk? Prakticky čokoľvek. Jednak vietor nie je homogénny, nemôžeme povedať, že je to masa vzduchu, ktorá má všade rovnaký tlak, hustotu a rýchlosť. Ďalej pri obtekaní rôznych vecí inými, môžu vznikať rôzne turbulentné víry, odtrhávanie sa vrstvičiek vzduchu. To všetko spôsobí, že tlak tu je iný, ako tlak tam, vznikne vyhlúbeniny...

Tak to by bolo asi všetko, teším sa na vás v letnej sérii. Dúfam, že v hojnejšom počte a užite si prázdniny.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina B – kategórie po 3. sérii zimného semestra 20. ročníka

	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	②	B-3.1	B-3.2	B-3.3	B-3.4	☠	Σ
1.	Bzdušek	Tomáš	sx. A	G Piešťany	37,5	4,0	5,0	5,0	3,5		57,50
2.	Boža	Vladimír	1 C	G Poprad Tatarku	34,5	5,0	5,0	5,0	2,0		51,27
3.	Bogár	Ondrej	2 E	G ĽŠ Trenčín	32,5	4,5	5,0	4,5	5,0		50,80
	Fecko	Stanislav	sx. A	G Pankúchova	33,5	4,0	4,5	5,0	–	-1	48,00
5.	Berta	Peter	2 A	G Veľké Kapušany	31,8	3,0	5,0	5,0	3,0	-2	47,80
6.	Galica	Tomáš	sx.	G Spišská Stará Ves	34,5	3,5	2,5	4,5	5,0		42,50
7.	Salaj	Michal	2 A	G Snina	29,0	4,5	3,0	0,5	4,0		40,80
8.	Rybák	Matúš	kv.	OG Kukučínova	32,5	3,8	1,0	5,0	3,0		39,50
9.	Malik	Tomáš	kv.	1SG BA Bajkalská	29,5	2,5	1,5	1,5	4,0	-5	36,50
	Kacmarik	Jozef	1 A	G Spišská Stará Ves	30,5	3,5	2,0	4,0	2,5	-4	35,51
11.	Nagy	Jakub	1 C	G sv. Tomáša Akvinského	27,5	4,5	0,5	4,5	2,0		31,45
12.	Keruľ	Lukáš	kv. A	OG BA Tilgnerova	25,5	4,0	1,0	5,0	3,0		30,96
13.	Rolníková	Zlatka	kv.	G Skalica	23,5	–	–	–	–		29,70
14.	Hreha	Ján	2	G Liptovský Hrádok	28,5	4,0	2,0	2,0	2,5		29,50
15.	Čelko	Pavol	sx.	G Považská Bystrica	23,5	3,0	2,5	4,5	-		27,50
16.	Roháľ	Branislav	1	G Považská Bystrica	25,0	3,5	3,0	4,5	2,5	-2	27,08
17.	Sudolský	Michal	2 F	G BB Tajovského	24,0	4,5	5,0	5,0	4,5		27,00
18.	Berta	Michal	1 B	G Trebišov	22,0	2,0	-	1,0	2,5		21,30
19.	Švihorík	Róbert	sx.	G Nitra Párovská	21,0	-	0,5	2,5	5,0		21,30
20.	Blahušiak	Pavol	2 B	G VPT Martin	22,0	1,0	0,5	2,0	4,0	-1	16,50
21.	Toman	Dominik	2 C	G Topoľčany	21,9	–	–	–	–		11,00
22.	Hlaváč	Boris	kv. A	G JL Martin	17,0	–	–	–	–		10,20
23.	Koreňová	Nikola	1 E	G PH Michalovce	14,3	1,0	0,5	0,5	1,5		8,67
24.	Bida	Ján	sx.	G Snina	19,2	–	–	–	–		0,50

Milá naša mlaď!

Tak ako každý rok, aj tento rok o takomto čase je už rozhodnuté! Niektorým ostanú len oči pre plač, ale najlepší z vás opäť dosiahnu vytúžený a tvrdo vybojovaný cieľ – sústredenie FKS v Kežmarských Žľaboch. Vedúci si už na vás brúsia zuby.

Dúfame, že ste celý rok poslúchali a pod vianočným stromčekom nájdete okrem cibule a uhlia aj nejaký ten darček. Aj FKS pre vás jeden pripravilo: prvé kolo príkladov letnej série už teraz, takže pre počítaniachtivých odporúčame www.fks.sk.

Tešíme sa na vás v letnej sérii a veríme, že si aj napriek neustálemu prívalu pracovných povinností nájdete čas aj na FKS. Tak teda Veselé Vianoce a šťastný Nový rok, užite si prázdniny a oddýchnite si.

Vaše

FKS

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 3. série
A – kategória (starší)
20. ročník
zimný semester
školský rok 2004/2005

www. **.sk**

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

A – 3.1 Elektrická pumpa (opravoval Paľo, vzorák Tomáš)

Majme doskový kondenzátor. Jeho dosky sú vzdialené l, ich rozmery sú veľmi veľké. Kondík ponoríme do vody doskami kolmo na hladinu. O koľko stúpne voda v kondíku, keď ho pripojíme na zdroj napätia s napätím U? Kapilárne efekty zanedbajte, relatívna permitivita vody je E_r.

Ahojte! Tento príklad bol svojím spôsobom poučný. Verím, že keď dočítate vzorák, budete so mnou súhlasiť, že bol poučný. Začnime Žofkou, ktorá chcela zistiť, akou silou sa priťahujú dosky obyčajného doskového kondenzátora. Žofka vie, že každá sústava sa snaží zaujať polohu s minimálnou potenciálnou energiou, sila teda pôsobí „v smere“ znižovania potenciálnej energie. V škole jej nakecali, že energia kondenzátora je $E = CU^2/2$, pričom pre doskové kondenzátory platí $C = \varepsilon S/l$, význam symbolov je obvyklý. Čím bude l-ko menšie, tým bude C a teda aj E väčšia. Dosky kondenzátora pripojeného na konštantné napätie sa teda odpudzujú. Napriek tomu, že dosky sú blízko seba a majú opačný náboj, sa odpudzujú. Divné, že? Povedala si Žofka, praštila s fyzikou a začala maľovať.

Teraz vám poviem múdru vetu, ktorú povedal ujo Feynman vo svojich prednáškach: „Nemôžete rátať len časť energie, vždy musíte porátať celkovú energiu vesmíru!“ No a keďže zvyšok vesmíru na náš kondík vplýva len minimálne, obmedzíme vesmír na kondenzátor a hádajte čo... Predsa zdroj napätia ktorý udržuje na kondíku konštantné U-čko.

Poďme teda zrátať skutočnú energiu sústavy zdroj + kondík, zatiaľ všetko bez vody. Energiu budeme vzťahovať na stav, keď na platniach kondíka je nulový náboj (vtedy je teda potenciálna energia nulová). Chceme teraz nabiť platne kondíka nábojom Q ($Q = UC$). Energiu kondíka tým zväčšíme o $E_1 = CU^2/2$, avšak energia zdroja pritom klesne o QU, teda $E_2 = -QU$ (náboj Q prekonal potenciálový skok U). Môžete sa pozastaviť, že čo to vlastne je, energia zdroja? Ak s týmto pojmom máte problém, môžete si zdroj predstaviť ako kondík s obrovskou kapacitou nabitý na potenciál U. Dostanete pri tom ten istý výsledok. Celková energia sústavy je teda

$$E = E_1 + E_2 = CU^2/2 - CU^2 = -CU^2/2.$$

Tento výsledok by Žofku isto potešil – dosky kondenzátora sa konečne priťahujú.

A ideme na náš príklad. Kondík čiastočne ponorený do vody – to sú vlastne dva kondíky – „vzdušný“ a „vodný“ zapojené vedľa seba, ich kapacity sa teda sčítajú. Na základe tejto úvahy ľahko zrátame, že ak voda v kondíku stúpne o hodnotu x, kapacita sa zväčší o

$$\Delta C = \varepsilon(\varepsilon_r - 1)xs/l,$$

kde s je dĺžka dosky (teda xs je plocha dosky, ktorá sa pri stúpnutí vody zatopila), ε je permitivita vákua ($\varepsilon\varepsilon_r$ je teda permitivita vody). Zároveň voda stúpnutá o x zväčšila svoju potenciálnu energiu o $\rho x^2 slg/2$. Čo viac dodať – prírastok ku celkovej energii vesmíru (znie to fakt vzletne, že ☺) je

$$(\rho x^2 slg - \Delta CU^2)/2.$$

Sústava sa ustáli tak, aby tento výraz bol minimálny možný. Keď dosadíme za ΔC, máme kvadratickú funkciu x

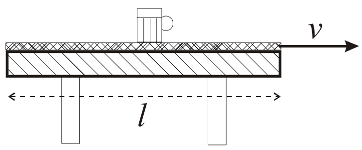
$$f(x) = xs(\rho xlg - U^2\varepsilon(\varepsilon_r - 1)/l)/2,$$

ktorú sa snažíme minimalizovať. Kto prečítal Nietzscheho spis „o krásach a ohavnostiach parabolickej funkcie", isto vie, že jej extrém je presne medzi koreňmi. V našom prípade sú korene 0 a $U^2\varepsilon(\varepsilon_r - 1)/(l^2 g\rho)$. Extrém (minimum) teda dostávame pre

$$x = \frac{U^2\varepsilon(\varepsilon_r - 1)}{2l^2 g\rho}.$$

Však to bol poučný príklad?

A – 3.2 Takmer ho rozb(or)il ... (opravoval Martin)



Rodina Veselá sa túži zúčastniť jednej známej televíznej relácie, a preto poctivo trénuje najnáročnejšiu disciplínu – trh obrusom. Ako to prebieha: na stole dĺžky l je prestretý obrus s rovnakými rozmermi (obr.), takže ho presne pokrýva. V strede stola je položený pohár s hmotnosťou m. Otec Veselý vodorovne ťahá obrus stálou rýchlosťou v. Aká najmenšia môže byť táto rýchlosť, aby pohár zo stola nespadol? Koeficient trenia medzi obrusom a pohárom je f_1 a medzi stolom a pohárom f_2. Rozmery pohára sú oproti rozmerom stola zanedbateľne malé.

Čaute! Škoda, že nikto z vás nenapísal, že robil experiment ☺. Ako experimentálka by to bol určite zaujímavejší príklad. Ale teraz už k riešeniu...

Pohyb pohára po stole sa dá rozdeliť do 2 úsekov: 1) keď sa pohár kĺže po obruse, 2) keď sa zošmykne na stôl a pohybuje sa už len po stole.

1) Pohár sa pohybuje rýchlosťou v (vzhľadom na obrus smerom doľava) a pôsobí naň zrýchlenie (spomalenie) – gf_1. Musí prejsť až na koniec obrusu (musí prejsť vzdialenosť $l/2$)

$$vt - \frac{1}{2}gf_1t^2 = \frac{l}{2},$$

čo mu bude trvať

$$t = \frac{v \pm \sqrt{v^2 - 1.g\,f_1}}{gf_1}.$$

A bude mať rýchlosť

$$v_1 = v - gf_1t = \mp\sqrt{v^2 - l.g.f_1},$$

odkiaľ berieme iba kladné riešenie, čo znamená, že v predošlej rovnici pre čas nás zaujíma len záporné riešenie. Teraz je pohár na konci obrusu (vľavo) a pohybuje sa rýchlosťou $v_2 = v - v_1$ vzhľadom na stôl (tu vidieť, že ak by sme brali v predošlej rovnici (pre v_1) záporné riešenie, tak by sme dostali, že pohár sa po zošmyknutí na stôl pohybuje rýchlosťou väčšou ako v, čo je zjavný nezmysel). A zatiaľ ľavý koniec obrusu stihol prejsť vzdialenosť

$$x = v.t = \frac{v^2 - v\sqrt{v^2 - l.g.f_1}}{g.f_1}.$$

Keďže pohár je už na stole s rýchlosťou v_2, pôsobí naňho zrýchlenie (spomalenie) – gf_2, ktoré ho zastaví za čas (pretože hľadáme minimálnu rýchlosť v, zaujíma nás prípad, kedy sa pohár zastaví až úplne na konci stola)

$$t' = \frac{v_2}{g.f_2}.$$

A pohár zatiaľ stihne prejsť vzdialenosť

$$x' = v_2.t' - \frac{1}{2}gf_2\left(t'\right)^2 = \frac{v_2^2}{2gf_2}.$$

My hľadáme takú rýchlosť v, aby sa pohár zastavil až na pravom konci stola. To znamená, že $x + x = l$ (pretože pohár sa najprv pohybuje po obruse a ten prejde vzdialenosť x a potom keď sa pohár zošmykne na stôl (t.j. bude x vzdialený od ľavého okraja) bude musieť ešte prejsť vzdialenosť $l - x$, aby sa dostal až k pravému okraju).

$$\frac{v^2 - v\sqrt{v^2 - l.g.f_1}}{g.f_1} + \frac{\left(v - \sqrt{v^2 - l.g.f_1}\right)^2}{2g.f_2} = l,$$

$$\frac{v^2 - v\sqrt{v^2 - l.g.f_1}}{g.f_1} + \frac{2v^2 - 2v\sqrt{v^2 - l.g.f_1} - l.g.f_1}{2g.f_2} = l.$$

Prevedieme výrazy na ľavej strane na spoločného menovateľa

$$\frac{2f_2.v^2 - 2f_2v\sqrt{v^2 - l.g.f_1} + 2f_1v^2 - 2f_1v\sqrt{v^2 - l.g.f_1} - 1.\mathrm{g}.f_1^2}{2g.f_1.f_2} = l.$$

Môžeme to upraviť na

$$v^2 - v\sqrt{v^2 - glf_1} = \frac{glf_1(2f_2 + f_1)}{2(f_1 + f_2)},$$

čo je ekvivalentné s

$$\sqrt{v^2 - l.g.f_1} = v - \frac{1.\mathrm{g}.f_1(2f_2 + f_1)}{2v(f_1 + f_2)}.$$

Umocníme obe strany:

$$l.g.f_1 = \frac{1.\mathrm{g}.f_1(2f_2 + f_1)}{(f_1 + f_2)} - \left(\frac{1.\mathrm{g}.f_1(2f_2 + f_1)}{2v(f_1 + f_2)}\right)^2$$

a vyjadríme v^2

$$v^2 = \frac{\left(\frac{1.\mathrm{g}.f_1(2f_2 + f_1)}{2(f_1 + f_2)}\right)^2}{\frac{1.\mathrm{g}.f_1(2f_2 + f_1)}{(f_1 + f_2)} - l.g.f_1}.$$

Po zjednodušení dostaneme

$$v^2 = \frac{glf_1f_2}{f_1 + f_2}\left(1 + \frac{f_1}{2f_2}\right)^2.$$

To je naša hľadaná minimálna rýchlosť, akou musíme „trhnúť" obrusom...

A – 3.3 3dcl vody (opravoval Škrek)

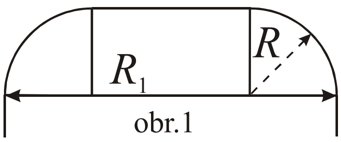
Hrnček tradičných rozmerov (priemer cca 70 mm, výška cca 90 mm) je položený na vodorovnej podložke. Naplníme ho vodou. Experimentom čo najpresnejšie zistite, o koľko percent pritom môžeme presiahnuť jeho vnútorný objem (teda objem hrnčeka až po vrch). Môžete to skúsiť aj vypočítať a potom porovnať tento výsledok s meraniami, bonusový bod vás neminie.

Buď voda! A bola voda. *I buď povrchové napätie!* A voda pojala byť kopcom. Stvoriteľ sa zamyslene pozrel na svoje dielo. Poškrabal sa na hlave, rukou prešiel svoj dlhý biely fúz a pomyslel si: *Snáď z toho nebude žiaden problém...* Schytil pohár vody a s chuťou ho vypil. Voda bola chladná a osviežujúca...

Lenže slovo dalo slovo, a už z toho problém bol a nie hocaký, ale priam fyzikálny! Musím všetkých pochváliť, že ste sa do riešenia tohoto problému pustili s obrovskou vervou a nadšením a zrejme aj s dostatočným množstvom suchých utierok. Všetci ste prišli na to, že za kopcovú vodu môže povrchové napätie. V experimentálnych metódach ste sa rozpadli na dva tábory. Tí, ktorí do hrnčeka dačo hádzali a tí, čo do hrnčeka dačo prilievali (prípadne striekali). Ja som sa zaradil do tábora, o ktorom by nevedomý človek uvažoval ako o spolku drogovo závislých. Pomocou injekčnej striekačky som pridával do hrnčeka vodu, až kým sa nevylial. Považujem túto metódu za presnejšiu ako hádzanie korálok alebo 50 haliernikov do pohára lebo, menej narúša povrch hladiny. Boli ľudia, ktorí sa pokúsili hádzať do pohára ihly alebo spinky. Je to tiež spôsob, dokonca veľmi presný (asi najpresnejší) za predpokladu, že máte doma okolo 900 voľných spiniek alebo ihiel... Nech ste merali akoukoľvek metódou, dôležité bolo vyhodnotenie merania. Všetci ste v konečnom dôsledku priamou alebo nepriamou metódou odmerali objem, ktorý bol v pohári akosi naviac. Nie všetci ste ale už spomenuli, čo všetko mohlo ovplyvniť vaše meranie a akým spôsobom.

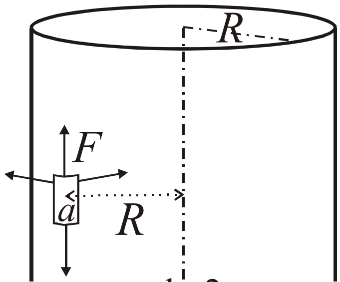
Poďme poporiadku. Dôležité bolo, aby pred začatím merania kopca bola hladina vody v pohári zarovno s jej okrajom. Inak povedané, aby bol okraj pohára vodorovne. Ak je nakrivo, tak na strane, ktorá je nižšie, sa voda vyleje skôr, lebo oproti opačnej strane tam pôsobí vyšší hydrostatický tlak (vyšší stĺpec vody). Okraj pohára musí byť suchý a čo najčistejší, to bolo jasné vcelku každému. Veľa z vás ohodnotilo ako tvarovo najlepší okraj priamy a čo najužší, čo je pravda, ale málo z vás uviedlo ako podstatný faktor teplotu vody, ktorá nezanedbateľne ovplyvňuje jej povrchové napätie (čím teplejšia, tým menšie).

K samotnému experimentu. Môj hrnček mal zhodou okolností vhodné parametre, priemer 70 mm, hĺbku 86 mm. Maximálna hodnota objemu, o aký som bol schopný presiahnuť vnútorný objem pohára, bol 12 ml (± 0,5 ml). V našom prípade som bral smerodajnú hodnotu práve maximálneho presahu, lebo všetky nežiadúce vplyvy iba znižovali naše meranie. A teda pohár som presiahol najmenej o 3,6 %. Vaše percentuálne výsledky sa líšili aj vzhľadom na objem použitého pohára, ale vo všeobecnosti tábor hádzačov uvádzal nižšie hodnoty ako tábor striekačov.



obr.1

K teórií. Tvar kopca si aproximujme ako na obrázku 1. Predpokladajme, že $R_1 >> R$. Hraničnou podmienkou pre roztrhanie blany je rovnosť hydrostatického tlaku vodného stĺpca (nášho kopčeka) a tlaku povrchového napätia. Povrchové napätie je definované ako sila na povrchu kvapaliny pôsobiaca na jednotku jej dĺžky. Rozdeľme si plochu na dve časti. Prvá časť bude kruh rovnobežný s vodorovnou hladinou. Druhá časť bude ostatok (vyzerá ako miska hore dnom s dierou v dne). Prvá časť nás v tejto chvíli prestane zaujímať, pretože v nej je nulový hydrostatický tlak a tiež nulový tlak od povrchového napätia. Rovnosť tlakov krásne sedí a každý mi asi uverí, že táto časť nebude pri prasknutí „povrchovej blany" dôležitá.

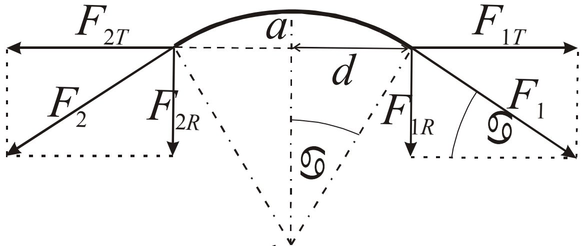


obr.2

Pokiaľ $R_1 >> R$, môžeme aproximovať tlak na povrchu druhej časti tlakom povrchového napätia vo valci. De facto sme našu misku rozrezali a vyrovnali, čím dostaneme štvrť valec. Lenže tam je rovnaký tlak ako vo valci, polvalci, 1/n valci, je to úplne jedno, lebo tlak vo valci je všade rovnaký (závisí iba od tvaru, resp. polomeru krivosti, a ten je pre valec dokonale symetrický okolo jeho hlavnej osi). V plášti nášho valca si teraz vyrežme* taký veľmi malý zahnutý štvorček ako na obrázku 2 o strane dĺžky a. Kolmo na každú stranu tohoto štvorčeka v rovine dotykovej plochy pôsobí sila

$$F = a\gamma, \tag{1}$$

kde γ je povrchové napätie vody. Sily, ktoré pôsobia na strany štvorčeka, ktoré sú kolmé na hlavnú os valca, sú rovnobežné a pôsobia proti sebe, a teda sa vyrušia. Sily pôsobiace na ostatné dve strany pôsobia pod istým uhlom, a teda ich výslednica bude nenulová a bude smerovať smerom do stredu valca. Radšej si nakreslíme obrázok – obr. 3. Je to pohľad na situáciu zhora (tzv. nadhľad). Vypočítame, ako budú jednotlivé zložky prispievať k výslednici. Sily F_1 a F_2 sa dajú rozložiť na zložky F_{1R}, F_{2R} a F_{1T} F_{2T}. Sily F_R sú rovnako veľké, rovnobežné a pôsobia rovnakým smerom. Sily F_T sú rovnako veľké, rovnobežné a pôsobia proti sebe.



obr.3

Inak povedané F_R prežijú a F_T sa vyhasia, hurá zas o silu menej, to je sila. Ďalej pozrime sa na obrázok 3. Z podobnosti trojuholníkov vyplýva, že

$$F_{1R}/F_1 = d/R.$$

Pre dostatočne malé a ($a \lll R$, potom $d \cong a/2$), a teda spolu s (1)

$$F_{1R} = a^2\gamma/2R.$$

Obdobne pre $F_{2R} = A^2\gamma/2R$. Čiže celková výslednica bude

$$F = F_{1\mathrm{R}} + F_{2\mathrm{R}} = a^2\gamma/R,$$

$$F/a^2 = \gamma/R = P.$$

F/a^2 je náš hľadaný tlak zavinený povrchovým napätím a rovná sa povrchovému napätiu krát polomer krivosti povrchu (polomer krivosti = $1/R$). V hĺbke R je hydrostatický tlak $Rg\rho$, čo nám dáva rovnosť

$$\frac{\gamma}{R} = R\rho g \quad => \quad R = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}},$$

kde ρ je hustota vody. Pre objem prečnievajúci nad pohár (opäť berieme do úvahy tvar valca a zanedbáme ohnuté okraje)

$$V = \pi R_1^2 \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}.$$

Pre hodnoty $\gamma = 73.10^{-3}$ Nm^{-1} (pri 20° C), $\rho = 1000$ kgm^{-3}, $R_1 = 0{,}035$ m, $g = 9{,}86$ ms^{-2} dostávame V ≅ 10,5 ml. Rádovo to sedí celkom dobre.

* Škrekovo odvodenie je super v tom, že sa dá použiť úplne všeobecne – pre hocaký tvar vody. Pre polvalec však môžeme nasadiť aj celý register fínt, ako napríklad: majme maličký polvalec vody položený na podložke. Jeho polomer je R a dĺžka v. Tento polvalec tlačí na podložku – okrem svojej tiaže – aj silou $2v\gamma$. Táto sila pochádza od dvoch úsečiek, kde sa povrch polvalca stretá s podložkou. Keď delíme túto silu styčnou plochou $2R.v$, dostávame tlak γ/R. A ani sme nemuseli nič rezať.

A – 3.4 Svetlo na konci tunela (opravovali Peťo a Džony)

Janko s Jurkom sa rozhodli že si budú v noci posielať svetelné správy. Jurko kúpil v samoobsluhe FIBUZS. Aká je najväčšia vzdialenosť, na ktorú bude Janko ešte registrovať Jurkove signály? Citlivosť ľudského oka si zistite.*
**Fyzikálne Idealizovaný Bodový Univerzálny Zdroj Svetla, dostať ho vo väčšine obchodov. Pri výpočtoch môžeš použiť ľubovoľný – baterku, klasickú žiarovku, žiarivku, sviečku, atď., podľa toho, čo sa ti zapáči.*

Ahojte. Pokúsme sa vniesť do tohto príkladu trochu svetla. Náročnosť problému spočívala najmä v tom, že o fyzikálnych veličinách, ktoré sú potrebné na jeho riešenie, sa v škole veľa nehovorí, hoci sa o nich píše v učebnici fyziky pre 4. ročník.

Na vyriešenie príkladu ste potrebovali odhadnúť citlivosť ľudského oka na viditeľné svetlo vyžarované bodovým zdrojom. Tento údaj sa dá nájsť na internete alebo vo vhodnej literatúre, kde však môže byť v jednotkách lm (lumen, jeho ekvivalentom v celej oblasti spektra je watt), kedy sa myslí ako celková energia svetla zachytená okom za jednotku času (svetelný tok plochou oka), alebo v jednotkách lx (1 lux = 1 lm.m^{-2}, intenzita osvetlenia), prepočítaná na jednotku plochy zrenice oka. Pre náš príklad je výhodnejšie počítať s intenzitou osvetlenia (v luxoch), takže v prvom prípade stačí, ak zistený údaj predelíme $\pi d^2/4$, kde d je priemer zrenice akomodovaného oka, čo je približne 8 mm. Ešte pripomeniem, že intenzita osvetlenia ako aj svetelný tok sú fotometrické veličiny, čo znamená, že popisujú len energiu prenášanú žiarením vo viditeľnej časti spektra, t.j. v rozsahu vlnových dĺžok približne 400-750 nm. Pokiaľ by nás zaujímala celková energia prenášaná žiarením, zodpovedali by im rádiometrické veličiny intenzita vyžarovania a žiarivý tok, pričom o toku, či už svetelnom alebo žiarivom, má zmysel hovoriť, iba ak poznáme plochu, cez ktorú svetlo prechádza (tok uzavretou plochou, tok plochou zrenice oka).

Označme teda E hraničnú intenzitu, kedy ešte dokážeme zaregistrovať svetlo voľným okom. Mne sa ju podarilo odhadnúť s použitím Pogsonovej rovnice, ktorá v astronómii určuje súvis medzi hviezdnou veľkosťou m a intenzitou osvetlenia E (v luxoch):

$$m_1 - m_2 = -2{,}5\log(E_1/E_2)$$

(nájdete ju v MFCHT aj v učebnici), kde indexy 1,2 patria nejakým dvom hviezdam na oblohe. Z vlastnej skúsenosti viem, že na oblohe zbadám hviezdy jasnejšie ako 5 mag (v literatúre sa uvádza väčšinou 6 mag, ale medzná hviezdna veľkosť je u každého iná). V literatúre (Zdeněk Mikulášek: Úvod do fyziky hvězd a hvězdných soustav) sa mi podarilo nájsť, že ak má hviezda 0 mag, jej prislúchajúca intenzita osvetlenia je $2{,}54.10^{-6}$ lx, takže pre $m_1 = 5$ mag, $m_2 = 0$ mag dostanem z Pogsonovej rovnice minimálnu vnímateľnú intenzitu osvetlenia $E = 2{,}54.10^{-8}$ lx.

Ďalšia vec, ktorú treba zistiť, je akú svietivosť má FIBUSZ (výkon sprostredkovaný svetlom prepočítaný na jeden steradián, jednotku má 1 cd = 1 kandela, rádiometrickým ekvivalentom je žiarivosť s jednotkou $\mathrm{W.sr^{-1}}$). Uvádza sa, že sviečka má svietivosť približne 1 cd, takže pre malú baterku by to mohlo byť povedzme 10 cd. To znamená, že keby baterka svietila do všetkých smerov rovnako, jej výkon prenášaný svetlom je rovný 4π sr. 10 cd (4π sr je plný priestorový uhol). Medzi svietivosťou I a intenzitou osvetlenia vo vzdialenosti x však platí vzťah

$$E = \frac{I\cos\alpha}{x^2}, \tag{1}$$

kde α je uhol dopadu, čiže v našom prípade 0° (meria sa od kolmice a my hľadíme priamo na zdroj). Z tohto môžeme vypočítať hľadanú vzdialenosť ako

$$x = \sqrt{\frac{I}{E}} \approx \sqrt{\frac{10\,\mathrm{cd}}{2{,}54.10^{-8}\,\mathrm{lx}}} \approx 20\,\mathrm{km}$$

(pri jednotkovej kontrole majte na pamäti, že steradián sa niekedy správa ako bezrozmerné číslo). Tí, ktorých zaujíma odvodenie vzťahu (1), môžu použiť asi nasledujúcu úvahu. Nech svietivosť zdroja vo vzdialenosti x od neho je I a nech svetlo dopadá na malú plôšku ΔS pod uhlom α. Zo zdroja by sme tejto plôške priradili priestorový uhol $\Delta S\cos\alpha/x^2$. Svietivosť však nie je nič iné ako svetelný tok na jednotku priestorového uhla, takže na ΔS dopadá svetelný tok $I\Delta S\cos\alpha/x^2$. Intenzita osvetlenia je svetelný tok prepočítaný na jednotku plochy, takže máme $E = I\cos\alpha/x^2$.

Vyšlo nám teda, že najmenšia vzdialenosť je okolo 20 km. Uvažovali sme však len jeden zo spôsobov poklesu intenzity svetla. Ak svetlo prechádza prostredím ako vzduch, ešte bude dochádzať k jeho absorpcii a rozptylu na časticiach. Tieto efekty sa dosť ťažko zohľadňujú, lebo závisia od stavby molekúl vo vzduchu a podobne. V našom odhade však spôsobia o niečo menšiu chybu ako napríklad odhad svietivosti zdroja a citlivosti oka. Ak napríklad budem počítať s medznou hviezdnou veľkosťou 6 mag, dostanem $E = 1{,}01.10^{-8}$ lx a vzdialenosť x je potom asi o 10 km väčšia, zatiaľ čo pre 4 mag je x o 10 km menšia. Ak vám teda vyšlo číslo z intervalu (100 m, 100000 m), potom ste dostali celkom rozumný výsledok (pre každé číslo z tohto intervalu by mal existovať taký Janko a taký FIBUSZ, pre ktorých je váš výsledok správny). V skutočnosti by táto vzdialenosť závisela aj od toho, či Janko vie, kam presne sa má pozerať, či je dosť trénovaný na sledovanie slabých signálov a na akom pozadí sa premieta svetlo zdroja, t.j. či v jeho okolí nie je niečo svetlejšie, vďaka čomu by bola reálna vzdialenosť o dosť menšia ako to, čo nám vyšlo, ale opäť ide o veci, ktoré sa zle (ak vôbec) počítajú.

Ešte zopár slov k vašim riešeniam. Niektorí z vás vychádzali pri odhade citlivosti oka z predpokladu, že na zrakový vnem musí na jeho sietnicu dopadnúť najmenej 900 fotónov žltého svetla za sekundu. Použitím vzťahu pre energiu fotónu ste potom našli výkon vo viditeľnej oblasti spektra, čo vám po odhade výkonu a účinnosti zdroja stačilo na to, aby ste došli k dobrému výsledku. Tento postup bol samozrejme správny. Najčastejšou a najhoršou chybou v niektorých riešeniach bolo, že ste požadovali, aby boli uhlové rozmery zdroja väčšie ako rozlišovacia schopnosť oka, čo je zhruba jedna uhlová minúta. Keby toto malo byť splnené, nevideli by sme na oblohe nijakú hviezdu okrem Slnka, pretože i tie najbližšie majú uhlové rozmery rádovo stotiny uhlovej sekundy. Nízka rozlišovacia schopnosť Jankových očí ešte neznamená, že neuvidí svetelné signály. Hovorí to len o tom, že Janko bude zdroj vidieť ako kotúčik s uhlovým priemerom cca. jedna uhlová minúta a že ak by sa pokúšal rozlíšiť dva bodové zdroje, ktoré sú príliš blízko seba, nepodarí sa mu to, takže si bude myslieť, že vidí len jeden zdroj. Ďalším nedostatkom niektorých riešení bolo, že ste nenapísali, odkiaľ máte údaj o citlivosti oka. Ak ste uviedli dobrú hodnotu, nestŕhali sme za to body, ale ak ste napísali nesprávne číslo, nemali sme možnosť overiť si, či ste si ho len vymysleli, alebo bola tlačová chyba v nejakej knihe. V mnohých riešeniach by sa zišlo okomentovať získaný výsledok, t.j. aká je jeho presnosť, čo ste zanedbali a podobne.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina A – kategórie po 3. sérii zimného semestra 20. ročníka

	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	②	A-3.1	A-3.2	A-3.3	A-3.4	☠	Σ
1.	Závodný	Jakub	ok.	G BA Grösslingova	40,0	5,0	5,0	5,0	5,0		60,00
2.	Simančík	František	ok.	G BA Grösslingova	34,0	5,0	5,0	4,5	5,0		53,50
3.	Lalinský	Ján			37,3	3,0	2,0	4,0	5,0		51,29
4.	Perešíni	Peter	3 F	G BB Tajovského	31,4	5,0	5,0	3,0	5,0		49,35
5.	Imriška	Jakub	3 A	G BA J. Hronca	34,0	-	5,0	3,9	5,0		47,86
6.	Hrdá	Marcela	3 B	G BA J. Hronca	30,8	3,0	2,0	4,0	5,0		44,79
7.	Dzetkulič	Michal	3 A	G PH Michalovce	30,0	3,2	2,0	2,0	5,0		42,16
8.	Astaloš	Róbert	4 A	G Rimavská Sobota	28,5	5,0	1,5	4,2	2,0		41,20
9.	Kováč	Adrián	4 A	G PH Michalovce	27,5	3,0	3,0	4,0	3,0		40,50
10.	Fačkovec	Boris	se. A	G Piešťany	24,8	3,0	3,5	3,5	5,0		39,81
11.	Pôbišová	Zuzana	3 F	G BB Tajovského	24,5	5,0	2,0	4,0	5,0	-1	39,47
12.	Hergelová	Beáta	3 B	G BST Lučenec	26,8	3,0	5,0	1,0	2,5		38,26
13.	Takács	Michal	3 F	G BB Tajovského	28,0	1,5	1,5	2,0	5,0		37,95
14.	Komorovský	Marek	se.	G Dubnica nad Váhom	26,7	1,0	5,0	3,5	1,5		37,75
15.	Kuchárik	Marcel	3 D	G MRŠ NMV	26,7	2,0	5,0	3,5	0,5		37,67
16.	Mikuláš	Ján	se.	G BST Lučenec	28,5	0,8	2,5	3,5	–		35,32
17.	Vojtko	Andrej	ok. A	G Skalica	18,5	5,0	5,0	2,0	4,0		34,50
18.	Šibík	Juraj	4 D	G Považská Bystrica	21,5	2,5	1,5	3,5	4,5		33,50
19.	Burger	Michal	ok.	G BA Grösslingova	33,0	–	–	–	–		33,00
20.	Štolcová	Jana	se.	G Nitra Párovská	22,5	0,8	1,5	2,2	5,0		31,95
21.	Takáč	Slavomír	3	G Nové Zámky	31,4	–	–	–	–		31,36

22.	Kaniansky	Miroslav	se. A	G Piaristické Nitra	23,5	0,5	2,0	3,5	1,5	30,96
23.	Zámečník	Peter	3 D	G MRŠ NMV	20,4	2,5	4,5	3,0	0,5	30,91
24.	Foltin	Miroslav	3 C	G Jána Hollého	22,5	1,0	2,0	3,0	0,5	28,95
	Sasák	Róbert	4 D	SPŠE Piešťany	19,3	0,0	1,5	3,0	5,0	28,80
26.	Tejiscak	Matus			28,8	–	–	–	–	28,80
27.	Berta	Peter	2 A	G Veľké Kapušany	25,1	–	5,0	–	–	-2 28,12
28.	Molčány	Dušan	3 B	SPŠS BA Feinorovo nábr.	22,5	–	2,0	2,0	–	26,52
29.	Duník	Matej	3 B	G VOZA	25,9	–	–	–	–	25,88
30.	Petrík	Peter	4 B	G BA J. Hronca	15,0	3,0	2,5	–	5,0	25,50
31.	Sudovský	Michal	2 F	G BB Tajovského	12,3	2,5	2,5	–	3,5	20,75
32.	Ďurčík	Miroslav	3 C	G BST Lučenec	15,1	0,8	1,5	3,2	0,0	20,59
33.	Piják	Peter	4 B	G VOZA	17,5	–	–	–	–	17,50
34.	Korch	Jakub	7 A	G Piaristické Nitra	16,6	–	–	–	–	16,61
35.	Rušin	Michal	ok.	G Spišská Stará Ves	16,5	–	–	–	–	16,50
36.	Kravec	Martin	3 A	G PH Michalovce	12,4	–	–	–	–	12,44
37.	Korenčiak	Miloš	se. B	OG ZA Varšavská cesta	11,9	–	–	–	–	11,91
38.	Kubová	Michaela	4 A	G Vrbové	10,7	–	–	–	–	10,70
39.	Zitrický	František	E	G PH Michalovce	7,8	–	–	–	–	7,82
40.	Šťastný	Tomáš	3 C	G Poprad Tatarku	5,7	–	–	–	–	5,70
41.	Angus	Michal	4 B	G BA A. Einsteina	5,0	–	–	–	–	5,00
42.	Kašuba	Mário			4,5	–	–	–	–	4,50
43.	Ladecky	Martin	4 B	G VOZA	3,5	–	–	–	–	3,50
44.	Maslák	Stanislav	5 E		3,0	–	–	–	–	3,00
45.	Bašista	Peter	3 A	G PH Michalovce	2,0	–	–	–	–	2,00
	Kulik	František	4 E	G Humenné	2,0	–	–	–	–	2,00
47.	Vanyo	Milan	7 A	G Piaristické Nitra	1,5	–	–	–	–	1,54

Milá naša mlaď!

Tak ako každý rok, aj tento rok o takomto čase je už rozhodnuté! Niektorým ostanú len oči pre plač, ale najlepší z vás opäť dosiahnu vytúžený a tvrdo vybojovaný cieľ – sústredenie FKS v Kežmarských Žľaboch. Vedúci si už na vás brúsia zuby.

Dúfame, že ste celý rok poslúchali a pod vianočným stromčekom nájdete okrem cibule a uhlia aj nejaký ten darček. Aj FKS pre vás jeden pripravilo: prvé kolo príkladov letnej série už teraz, takže pre počítaniachtivých odporúčame www.fks.sk.

Tešíme sa na vás v letnej sérii a veríme, že si aj napriek neustálemu prívalu pracovných povinností nájdete čas aj na FKS. Tak teda Veselé Vianoce a šťastný Nový rok, užite si prázdniny a oddýchnite si.

Vaše

FKS

38.	Petrík	Peter	4 B	G BA J. Hronca	2,0	3,0	–	–	5,0	10,00