FYZIKÁLNY KOREŠPONDENCNÝ SEMINÁR

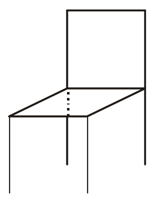
vzorové riešenia 2. série
B – kategória (mladší)
20. rocník
letný semester
školský rok 2004/2005

www. **.sk**

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

B–2.1 Stolicka (opravoval Miro)

Justína sedí v škole na stolicke, ktorá je pozváraná z jedenástich rovnakých železných trubiek dlžky $L = 30$ *cm (pozri obrázok). Celková hmotnost stolicky je* $m = 5$ *kg (hmotnost opierky a dosky, na ktorej sa sedí, je zanedbatelná). Justína si všimla, že zatial co prázdna stolicka sa dá dozadu vychýlit o istý uhol* α *(tak, aby sa po pustení vrátila do pôvodnej polohy), ked sa na nej hojdá ona sama, môže sa vychýlit najviac o 11°. Zistite, aká je velkost uhla* α*. Kolko váži Justína? Pri výpocte predpokladajte, že pri sedení sa Justínino tažisko nachádza presne nad tažiskom stolicky vo vzdialenosti* $h = 30$ *cm od neho. Pri naklánaní sa poloha Justíny a stolicky vôbec nemení, t.j. „sedí ako pribitá“.*

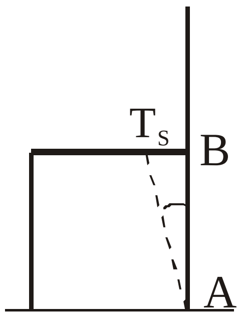


Podme najprv nájst tažisko prázdnej stolicky. Existuje na to viac spôsobov. Zvolíme ten najjednoduchší – kedže všetky trúbky, z ktorých je stolicka, sú rovnaké, tažisko sa nachádza v aritmetickom priemere stredov (tažísk) všetkých trubiek. Špeciálne, pre výšku tažiska h_T máme:

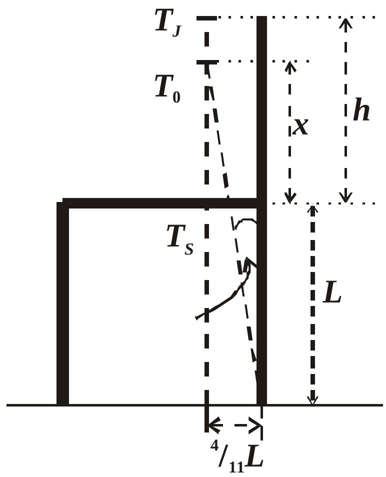
$$h_T = L(1/2+1/2+1/2+1/2_{\text{(nohy)}} + 1+1+1+1_{\text{(sedacka)}} + 3/2+3/2_{\text{(operadlo zvislé)}} + 2_{\text{(horná tyc)}})/11 = L,$$

pre vzdialenost tažiska od zadnej roviny stolicky (rovina zadných nôh a operadla) podobne máme:

$$L.(0+0+0+0+0+0+1/2+1/2+1+1+1) / 11 = 4L/11.$$



Pozrime sa na pravouhlý ? ABT. Naklonená stolicka je v labilnej rovnovážnej polohe ak je T na zvislici nad A (okolo A sa stolicka otáca) keby sme ju naklonili viac, tak už spadne, ak menej, tak sa ešte vráti naspät. Preto hladaný uhol a je uhol TAB, ktorý má velkost $\arctan(4/11) ˜ 19°59´$.



Justína sedí na stolicke a jej tažisko T_J je $h = 30$ cm nad tažiskom stolicky T_S. A teraz už len urcit kde je výsledné tažisko Justíny a stolicky T_0. To sa musí nachádzat na úsecke T_ST_J, povedzme vo vzdialenosti x od T_S. Pretože T_0 je tažiskom celej sústavy, musí byt moment sily v T_S rovný momentu sily v T_J (je to vlastne rovnováha na páke). Ciže platí:

$$m_J g(h - x) = mgx,$$

kde m_J je hmotnost Justíny. Justína sa môže nahnút o uhol $ß = 11°$ aby nepadla, potom

$$\tan b = \frac{4L}{11(L+x)},$$

z coho dostaneme $x ˜ 26{,}12$ cm, po dosadení dostaneme hmotnost Justíny $m_J ˜ 33{,}68$ kg.

No a z toho môžeme usúdit, že Justína má bud okolo 12 rokov, alebo je anorekticka. Osobne sa priklánam k možnosti 1, kedže jej stací 60 centimetrová stolicka… Ked si sa do(po)cítal(a) až sem, tak gratulujem.

B–2.2 Presýpacie hodiny (opravoval Cermo)

Asi všetci poznáte presýpacie hodiny, dva spojené duté kužele, piesok vnútri. Položme ich na váhy, pricom piesok je v hornej casti a je nejakým spôsobom zastavený, t.j. nesype sa. Popíšte, co budú váhy ukazovat, ak piesok pustíme. Zaujíma nás všetko, co sa s váhami bude diat od okamihu, ked piesok uvolníme, až do okamihu, ked do dolnej casti hodín dopadne posledné zrnko piesku.

Aby sme sa vyhli zbytocným komplikáciám, uvažujme hodiny, v ktorých je len tolko piesku, že po presypaní bude výška kopy piesku na dne zanedbatelná oproti výške hodín. Dalej predpokladajme, že hodiny sa sypú konštantne rýchlo, teda okrem zaciatku a konca v hodinách v danom okamihu padá konštantné množstvo piesku.

Rozoberme si práve takýto ustálený režim. Ak sa pozrieme na hodiny, vidíme, že piesok v hornej polovici (pred „padaním“) alebo na dne (po „dopade“) pôsobí na hodiny celou svojou tiažou (ci už priamo alebo prostredníctvom iného piesku).

Potom jediné, co môže vplývat na hmotnost meranú váhami je piesok, ktorý padá. Jeho pôsobenie bude dvojakého charakteru, pocas volného pádu a pri dopade. V prvom prípade, pretože piesok nie je v kontakte s hodinami, pozorujeme „úbytok“ z celkovej tiaže piesku o padajúci piesok. Presnejšie ak N je pocet zrniek piesku, ktoré zacnú padat za 1 s, T je doba pádu zrnka a m_z jeho hmotnost, je úbytok rovný:

$$F_{-} = m_z N g T$$

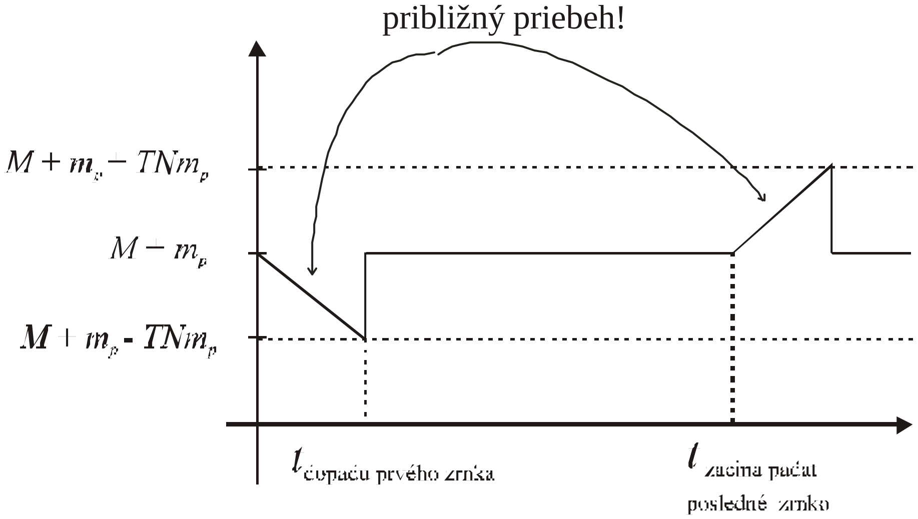
Pri dopade sa musí každé zrnko zastavit o dno hodín. Tie teda musia nanho pôsobit silou, ktorú by sme pozorovali ako „prírastok“ celkovej tiaže piesku. Podla druhého Newtonovho pohybového zákona („*Sila je rovná podielu zmeny hybnosti a casu za ktorý táto zmena nastala.*“*)* môžeme napísat

$$F_{+} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m_z v(\Delta t N)}{\Delta t},$$

kde (N? t) je pocet zrniek piesku, ktoré dopadnú za cas ?t. v je ich rýchlost, ktorú môžeme vypocítat z informácie, že zrnká padajú volným pádom, $v = gT$. Následne:

$$F_{+} = m_z N g T,$$

co je presne rovnaký výsledok ako pri „úbytku“. Z toho vyplýva, že pri ustálenom stave na váhach nebudeme pozorovat žiadne výchylky.



Ohladom zaciatku a konca si stací uvedomit, že sily F_+, F_- v tomto prípade nebudú rovnaké (skúste si premysliet kedy ako). Nakoniec môžeme nakreslit priebeh:

Pre fanúšikov fyzikálnych úvah ponúkame riešenie aj tohto typu (samozrejme s rovnakým koncom). Pocas rovnomerného sypania sa tažisko sústavy hodiny + piesok sa rovnomerne posúva nadol. Pretože tažisko sa hýbe rovnomerne priamociaro, je výsledná sila nanho pôsobiaca nulová → hmotnost na váhach sa nezmení. Iba pri „zaciatku“ a „konci“ tažisko zrýchluje a spomaluje, pozorujeme pokles, respektíve nárast hmotnosti.

Cestu piesku v presýpacích hodinách môžeme podla jeho polohy rozdelit do štyroch etáp. Na zaciatku sa piesok nachádza vhornej polovici hodín apomaly sa zosúva ku otvoru, potom chvílku padá volným pádom, nasleduje okamih dopadu na dno anakoniec sa povaluje niekde na dne.

V každej etape pritom nejako (ne)pôsobí na hodiny a pre výslednú silu na váhe platí:

$$F_{výsl.} = F_{hodiny} + F_{piesku\ hore} + F_{padajúceho\ piesku} + F_{dopadajúceho\ piesku} + F_{piesku\ dole} \quad (1)$$

Pozrime sa podrobnejšie na každý stav. Väcšina z vás prišla na to, že ak je piesok vhornej polovici (pred „padaním“) alebo na dne (po „dopade“) pôsobí na hodiny celou svojou tiažou (ci už priamo alebo prostredníctvom iného piesku),

$$F_{piesku\ hore} = gm_{piesku\ hore} \qquad \text{a} \qquad F_{piesku\ dole} = gm_{piesku\ dole}.$$

Padajúci piesok nám nerobí problémy, pretože nie je v kontakte s hodinami (uvažujeme vzduchoprázdne hodiny), takže $F_{padajúceho\ piesku} = 0$.

Ostala nám posledná cast, ktorá by sa podla väcšiny z vás nemala nijako líšit od prvej a štvrtej etapy, piesok by mal na hodiny pôsobit len svojou hmotnostou. No ale to nie je všetko! Treba si uvedomit co sa vlastne vmomente dopadu deje. Ide vlastne o to, že sa piesok zabrzdí o dno hodín, cím zmení svoj pohybový stav. Na to aby takéto nieco nastalo je treba nejakej sily (presne tej, ktorá vám vriešeniach chýbala). Je jasné, že na piesok musia pôsobit v protismere jeho pádu práve hodiny (o ne sa piesok „zastavuje“). Jej velkost urcíme z druhého Newtonovho pohybového zákona, ktorý hovorí: *„Sila je rovná podielu zmeny hybnosti a casu za ktorý táto zmena nastala.“*. Oznacíme v_h rýchlost padajúceho piesku tesne nad dnom (po volnom páde dlžky h), potom:

$$F_{dopadajúceho\ piesku} = m_{dopadajúceho\ piesku} . v_h / ?t. \quad (2)$$

Teraz si asi poviete, že ako chceme z toho nieco rozumné dostat, ved cas dopadu je velmi malý (je to len okamih), a to by znamenalo hrozne velkú silu a to je akési divné... Pointa je v tom, že hmotnost dopadajúceho piesku je naopak velmi malá, ako si hned ukážeme, a pomer dvoch malých vecí môže dat „rozumný“ výsledok.

Za cas $?t$ dopadne na dno hodín všetok piesok, ktorý sa nachádza do vzdialenosti $?tv_h$ od dna. Hustotu dopadajúceho piesku oznacíme $?_d$ a plochu dopadu (~ ploche otvoru v strede hodín) S. Potom hmotnost piesku dopadnutého za cas $?t$ bude:

$$m_{dopadajúceho\ piesku} = ?_d S ?t v_h. \quad (3)$$

Po dosadení do rovnice (2) máme:

$$F_{dopadajúceho\ piesku} = S ?_d v_h^2 \quad (4)$$

Ak teraz všetky získané informácie použijeme, rovnice (1) bude mat tvar:

$$F_{výsl.} = gm_{hodiny} + g(m_{piesku\ hore} + m_{piesku\ dole}) - S ?_d v_h^2 \quad (5)$$

Aby sme vedeli obidva „pieskové“ príspevky porovnat je vhodné ich vyjadrit pomocou hmotnosti padajúceho piesku, pricom

$$m_{piesku} = m_{piesku\ dole} + m_{piesku\ hore} + m_{padajúceho\ piesku}$$

(tu môžem hmotnost dopadajúceho piesku zanedbat) a

$$m_{padajúceho\ piesku} = Sh ?_p$$

($?_p$ predstavuje priemernú hustotu padajúceho piesku).

Tu si treba dat pozor, pretože $?_p$ sa nerovná $?_d$! Pocas volného pádu sa dlžky „natahujú“ a preto aj hustota zmenšuje. My použijeme taký zjednodušenú úvahu, že je to lineárna závislost, takže potom vztah medzi priemernou hustotou padajúceho piesku a hustotou pri dopade bude $?_p = 2?_d$. (To aby nám to pekne vyšlo☺).

Šupneme to do (5)-ky:

$$F_{výsl.} = g(m_{\,hodiny} + m_{piesku}) + 2?_d Shg - S?_d v_h^2 \qquad (6)$$

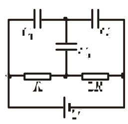
V prípade ak uvažujeme, že piesok padá stále rovnakú vzdialenost (h) vieme si jeho rýchlost vyjadrit: $v_h^2 = 2hg$ (volný pád). Pozorné oko si urcite všimne, že sa nám potom obidva posledné cleny odcítajú a dostaneme výsledok:

$$F_{výsl.} = g(m_{\,hodiny} + m_{piesku}) \qquad (7)$$

Teda váhy budú ukazovat stále rovnakú - celkovú hmotnost. To bude platit ale len vtedy ak bude v hodinách ustálený stav. Skúste si doma premysliet ako to bude vyzerat na zaciatku a konci sypania (ktoré cleny rovnice (6) budú nulové?).

Približné správanie váh potom ukazuje obrázok. HOWGH

B–2.3 Kondíky (opravoval Škrek)

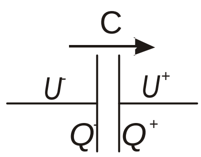


V schéme je zakreslený elektrický obvod, ktorým vdaka ideálnemu zdroju s napätím U preteká prúd. Aké velké je pritom napätie na kondenzátore s kapacitou C_1?

Tvorivá kríza je hnusná vec. Predstavte si stvoritela, ten entuziazmus, tá vitalita, hen sem mrak, tu strom (há, krásne fraktály), frc sem slnko, trošku pokropit nebo jasnými hviezdami a aby to nebolo nudné tak sa to bude menit periodicky. No a potom bum prásk, stvoritel zdrvene sedí na dokonalom pníku, otázka v ociach, odpoved nikde. Co dalej, kto to bude obdivovat? Predstavte si, za 5 dní stvoríte vesmír, zo všetkým co k tomu patrí a potom strávite celý drahocenný den vymýšlaním cloveka! Aký nepomer! K veceru stvoritel vstane z pníka a povie si: Himlhergotkrucifixnakvadrát skopnem ho na svoj obraz a idem spat, sakramenský krám!

Tak a teraz vidíte, aké je to tažké s úvodom ku vzoráku a teraz už kondíky. Na základe vašich riešení si najprv vysvetlíme nejaké pravdy o kondíkoch:

1. V ustálenom stave cez kondíky netecie prúd. Kedže náš zdroj napätia je jednosmerný a ustálená situácia sa dosahuje velmi rýchlo, môžeme rátat, že cez kondíky netecie prúd.
2. na kondíkoch pod napätím sa indukuje náboj, ktorý sa snaží vyrovnat toto napätie, a teda na kondíkoch sa indukuje *indukované napätie* (má rovnakú velkost a opacnú orientáciu ako napätie, na ktoré sme kondík pripojili)
3. ak nad kondík nakreslíme šípku, ktorá bude znamenat smer napätového spádu, oznacíme si potenciáli na oboch koncoch kondíka a indukované náboje (kde Q je ich absolútna velkost) ako na obr.1, potom platí že



obr. 1

$$Q = (U^+ - U^-)C. \qquad (0)$$

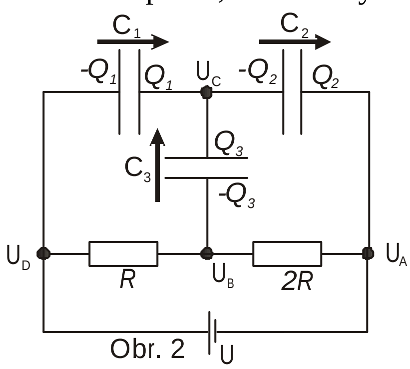
Tento výsledok je velmi dôležitý kvôli znamienkam.

Takže co sa deje s naším obvodom? No prúd ide iba cez vetvu s odpormi, takže celý napätový spád U musí z U klesnút na 0 iba skrz odpory R a $2R$, cez ktoré tecie prúd I. Z Kirchhoffových zákonov vieme:

$$U = U_1 + U_2,$$

$$U_1 = 2U_2 \text{ (lebo } U_1 = 2RI \text{ a } U_2 = IR),$$

kde U_1 je napätový spád na odpore $2R$ a U_2 na odpore R. A co na to kondíky? Oznacme si potenciály uzlov U_A, U_B, U_C a U_D (vid obr. 2 ktorý si o chvílu nakreslíme). Napätie medzi dvoma uzlami je rovné rozdielu ich potenciálov. Vieme, že $U_A = U$ (potenciál pravej strany zdroja), $U_D = U - U_1 - U_2 = 0$



Obr. 2

(potenciál lavej strany zdroja) a $U_B = U - U_1 = U/3$. (to vieme z vyššie napísaných rovníc). Dalej si nakreslíme obr.2 a do neho náš obvod aj so šípockami nad kondíkmi. Po obhliadke obr. c. 2 vieme, že na kondíkoch sa indukuje náboj ktorý zo spojeným z (0) dáva tieto rovnice:

$$\begin{aligned}(U_A - U_C)C_2 &= Q_2\\ (U_C - U_D)C_1 &= Q_1\\ (U_C - U_B)C_3 &= Q_3,\end{aligned} \tag{1}$$

kde Q_i je náboj indukovaný na i-tom kondenzátore (C_i). Dá sa to predstavit aj tak, že ak máme doskový kondenzátor, tak na jednej platni sa indukuje náboj Q a na opacnej strane náboj $-Q$ a bude medzi nimi rovnako velké, ale opacné napätie, než akým boli vyvolané. Treba si uvedomit že to neovplyvní pôvodné napätie, ktorým bol náboj vyvolaný. Je to ako alergická reakcia, kondík sa vyhádže nábojom, kašle, kýcha, opuchne ale elektrická jar ide dalej...

Zatial máme tri rovnice o štyroch neznámych. Ked sa pozrieme na oblast (vid obr. 2) spojenú s uzlom U_C, všimneme si že je prakticky oddelená od ostatného obvodu. Ak bola pred zapojením obvodu elektricky neutrálna (a predpokladáme že bola) tak musí ostat aj po zapojení a teda

$$Q_1 + (-Q_2) + Q_3 = 0. \tag{2}$$

Z (1) a (2) máme

$$U_C = Q_1/C_1, \qquad Q_1 = Q_2 - Q_3, \qquad Q_1 = (U_A - U_C)C_2 + (U_B - U_C)C_3.$$

Z toho dostávame

$$U_C = \frac{(U - U_C)C_2 + \left(\frac{U}{3} - U_C\right)C_3}{C_1},$$

dobúšime do tvaru

$$U_C = \frac{U}{3}\left(\frac{C_3 + 3C_2}{C_1 + C_2 + C_3}\right).$$

Napätie na C_1 je $U_C - U_D = U_C$. Kondicke zdar, nech vás obchádza velkým oblúkom tvorivá kríza.

Krásne riešenie ešte uviedol Michal Sudolský, tu je:

Vyjadríme si energiu obvodu

$$E = \frac{1}{2}\left[C_1(U_C - U_D)^2 + C_2(U_A - U_C)^2 + C_3(U_C - U_B)^2\right],$$

aby bol obvod stabilný, tak jeho energia musí byt vzhladom na U_C minimálna(lebo U_C je premenná). Upravíme výraz pre energiu roznásobením a dosadením za U_B, U_A a U_D ktoré už poznáme z predošlého riešenia:

$$E = U_C^2\frac{1}{2}(C_1 + C_2 + C_3) - U_C(3C_2 + C_3)U + \frac{1}{2}\left(C_3U^2 + \frac{U^2}{9}\right).$$

Minimum pre parabolu v tvare $Ax^2 + Bx + C$ je v bode

$$x = -B/A,$$

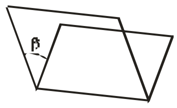
co nám dá minimum pre energiu vzhladom na U_C cuduj sa svete

$$U_C = \frac{U}{3}\left(\frac{C_3 + 3C_2}{C_1 + C_2 + C_3}\right),$$

a vôbec sa nemusíme paprat zo znamienkami!!!

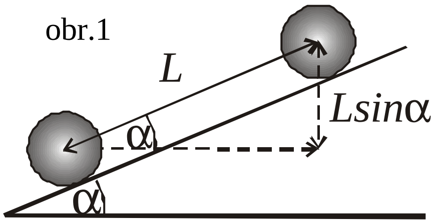
B–2.4 Žlab (opravoval Džony)

Ak vezmeme dva dlhé obdlžniky a jednou stranou ich priložíme k sebe, dostaneme žlab, ako na obrázku. Predstavte si, že do takéhoto žlabu umiestnime plnú gulicku (s hmotnostou m *polomerom r a momentom zotrvacnosti I = 2/5mr^2). Žlab nahneme tak, aby úsecka, kde sa obdlžniky spájajú, zvierala s vodorovnou rovinou uhol* a*. Pritom ho však držíme rovno, teda tak, aby obidva obdlžniky zvierali so zvislicou rovnaký uhol. S akým zrýchlením sa bude pohybovat gulicka? Predpokladajte, že nic neprešmykuje a gulicka sa celá zmestí do žlabu.*



Ahoj,

Dost tažký príklad, však? Aj ked niektorí ho vyriešili bravúrne.



obr.1

Ochutnajme najprv jednoduchšiu situáciu, ako je zadaný žlab, a síce obycajnú naklonenú rovinu, na ktorej sa gúla gula bez prešmykovania. Pozrime sa na obrázok 1: Kedže sa gulicka na zaciatku nepohybuje, potenciálna energia gulicky sa mení na kinetickú. Celková kinetická energia je súctom kinetickej energie posuvného a otácavého pohybu. Teda:

$$mgL\sin a = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Iw^2 \qquad (1)$$

Uhlová rýchlost gulicky sa dá vyjadrit ako:

$$? = v/r. \qquad (2)$$

Pricom v je práve posuvná rýchlost (pretože nic neprešmykuje) a r je polomer, po ktorom sa gulicka valí. V prípade naklonenej roviny je to práve polomer gulicky. Ked dosadíme (2) do (1) a vyjadríme v, dostaneme:

$$v = \sqrt{\frac{2mgL\sin a}{m + I/r^2}} \qquad (3)$$

Kedže ide o rovnomerne zrýchlený pohyb s nulovou pociatocnou rýchlostou, vieme v vyjadrit aj inak, pomocou dráhy, ktorú gulicka prešla, a zrýchlenia a. Vieme, že $L = 1/2at^2$ a $v = at$. Ak si z druhej rovnice vyjadrím cas a dosadím do prvej, platí že:

$$v = \sqrt{2aL} \qquad (4).$$

Porovnaním (3) a (4) už môžeme vyjadrit zrýchlenie:

$$a = \frac{mg\sin a}{m + I/r^2} \qquad (5)$$

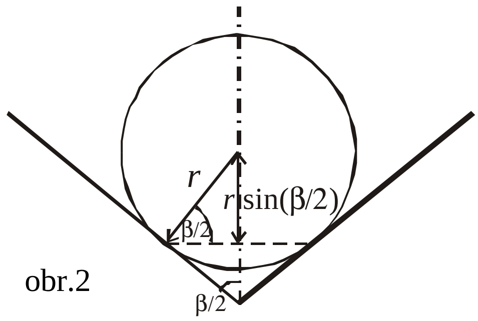
Ked teraz za I dosadíme $2/5mr^2$, dostávame:

$$a = 7/5g\sin a.$$

Pekný výsledok, len co je pravda, ale ako to celé funguje v žlabe?

Pozrime sa na obrázok 2. Jediná zmena je to, že: citujem Stana Fecka: „Gula sa nebude gúlat po celom svojom obvode, ale po menšom, ako keby po kolajnickách." A teda uhlovú rýchlost (vztah (2)) môžeme preformulovat ako:

$$? = v/(r\sin(ß/2)) \qquad (6).$$



obr.2

Zákon zachovania energie platí rovnako, ci už je gula v žlabe alebo na rovine. A teda ked dosadíme túto uhlovú rýchlost do (1), dostaneme:

$$v = \sqrt{\frac{2mgL\sin a}{m + I/(r\sin(b/2))^2}} \qquad (7)$$

Samozrejme, vztah (4) sa vôbec nezmení, pretože pre rovnomerne zrýchlený pohyb platia stále rovnaké rovnice, ci už sa gula valí po rovine alebo po žlabe. Ak teda porovnáme (4) a (7) dostaneme pre a:

$$a = \frac{mg \sin a}{m + I/(r \sin(b/2))^2} \tag{8}$$

Opät dosadíme za $I = 2/5mr^2$, cím sa nám vykráti hmotnost aj polomer gulicky a dostávame finálny výsledok zrýchlenia pre žlab:

$$a = \frac{5g \sin a \sin^2(b/2)}{2 + 5\sin^2(b/2)}.$$

A máme to. Ešte trošku porozmýšlame, ci je to dobre: Ak bude $a = 0$, potom aj $a = 0$. To je fajn, lebo predsa v žlabe, ktorý je horizontálny sa gulicka nemá preco urýchlovat. Ak je b velmi malé, potom aj a je velmi malé. Gula sa síce šialene rozkrúti, ale po malej kružnici, takže vpred bude zrýchlovat málo. Ak by sme za ß dosadili 180°, t.j. žlab by bola vlastne rovina, dostaneme: $a = 5/7g\sin a$. To je presne vztah, ktorý sme odvodili pre naklonenú rovinu. Dobrú chut.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENCNÝ SEMINÁR

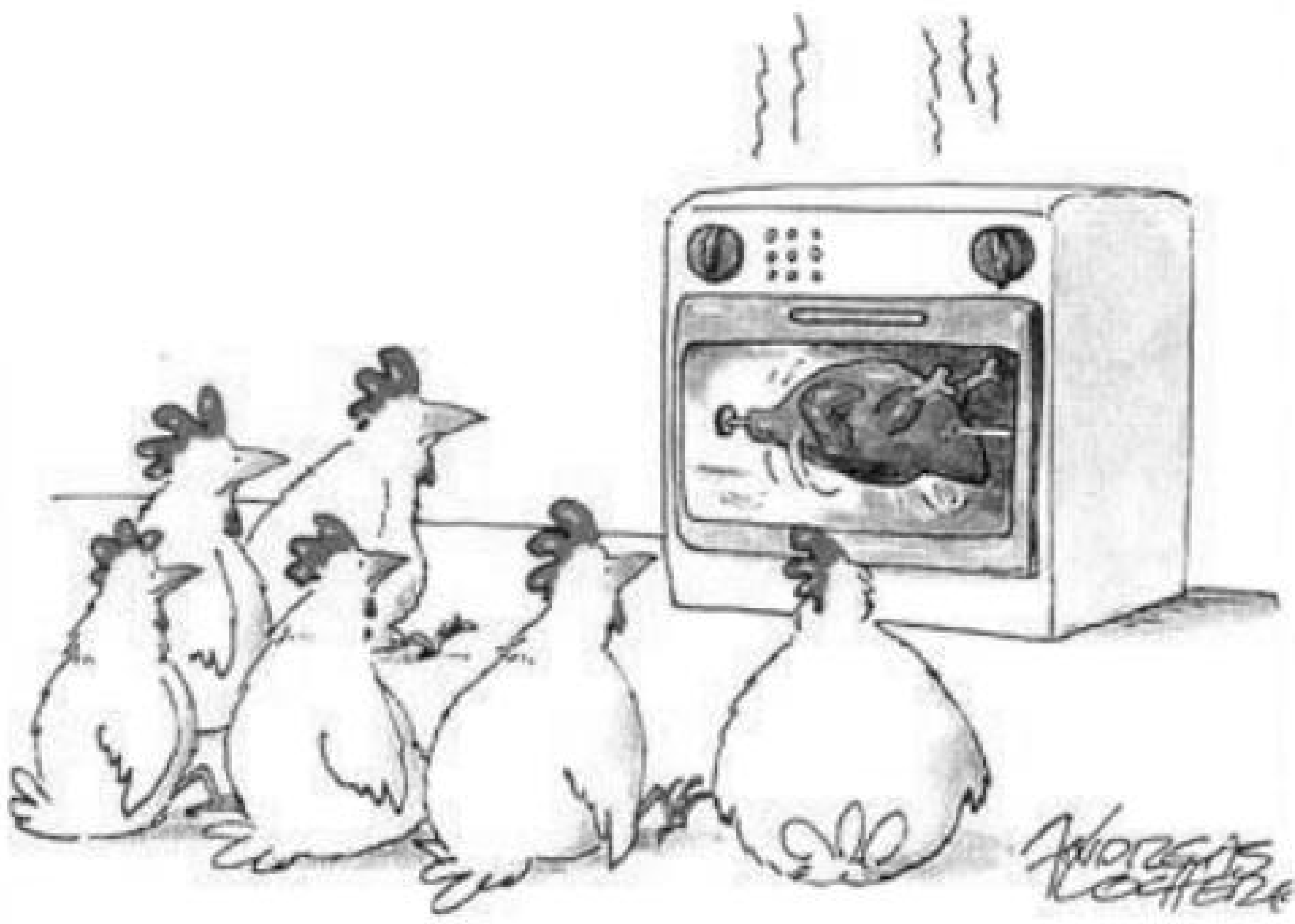
výsledková listina B – kategórie po 2. sérii letného semestra 20. rocníka

	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	①	B-2.1	B-2.2	B-2.3	B-2.4	☠	S
1.	Bzdušek	Tomáš	sx. A	G Pieštany	20,0	5,0	4,9	5,0	5,0		39,90
2.	Danko	Juraj	2 A	G Pieštany	16,0	5,0	2,5	5,0	5,0		33,50
3.	Berta	Peter	2 A	G Velké Kapušany	16,5	5,0	2,5	3,0	5,0		32,00
4.	Bogár	Ondrej	2 E	G LŠ Trencín	15,5	5,0	2,0	3,0	5,0		30,50
5.	Boža	Vladimír	1 C	G Poprad Tatarku	15,7	3,0	2,5	3,0	4,0		29,60
6.	Sudolský	Michal	2 F	G BB Tajovského	13,5	4,0	2,0	5,0	4,5		29,00
7.	Fecko	Stanislav	sx. A	G Pankúchova	18,5	5,0	–	–	5,0		28,50
8.	Rybák	Matúš	kv.	OG Kukucínova	15,7	3,0	3,0	1,5	2,5		27,20
9.	Galica	Tomáš	sx.	G Spišská Stará Ves	12,5	5,0	3,0	–	5,0		25,50
10.	Hreha	Ján	2	G Liptovský Hrádok	13,5	4,5	3,5	–	–		21,50
11.	Salaj	Michal	2 A	G Snina	12,5	3,5	–	2,0	2,5		20,50
12.	Nagy	Jakub	1 C	G sv. T. Akvinského	10,0	1,0	2,0	–	5,0		19,41
13.	Pavlícek	Tomáš	2 C	SPŠE Pieštany	11,5	4,0	0,5	1,5	1,5		19,00
14.	Malik	Tomáš	kv.	1SG BA Bajkalská	15,7	–	–	–	–		15,70
15.	Kerul	Lukáš	kv. A	OG BA Tilgnerova	7,4	2,0	2,0	–	1,0		13,49
16.	Švihorík	Róbert	sx.	G Nitra Párovská	6,3	1,0	0,5	–	5,0		12,80
17.	Korenová	Nikola	1 E	G PH Michalovce	11,0	–	0,5	–	0,5		12,28
18.	Rolníková	Zlatka	kv.	G Skalica	7,3	–	2,0	–	–		9,80
19.	Alankina	Júlia	kv.	G Dunajská Streda	5,0	1,5	0,5	1,0	–		8,73
20.	Celko	Pavol	sx.	G Považská Bystrica	6,0	–	–	–	–		6,00
21.	Baxová	Katarína	9 C	ZŠ D. Hory, Trencín	1,9	-	2,0	-	0,5		5,07
22.	Šnajderová	Lucia	sx. A	OG Varš. 1 Žilina	4,0	–	–	–	–		4,00

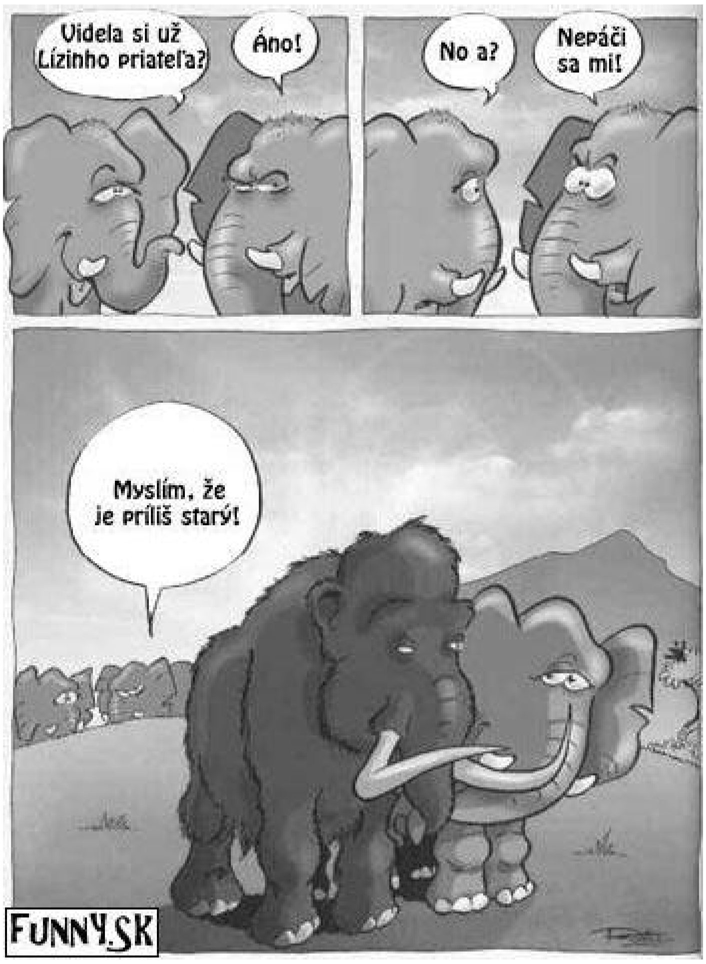
Milá mládež!

Je nám ctou vám oznámit, že v polovici mája sa opät uskutocní v Blave populárna Akadémia Trojstenu a Klub Trojstenu. Každý, kto má matematickofyzikálne srdce, bude obštastnený množstvom zaujímavých prednášok s velkým výberom tém. Preto neváhajte a prídite! Viac informácii sa objaví na stránkach www.kms.sk alebo www.fks.sk.

Vaše FKS



REALITY-TV


Videla si už Lízinho priateľa?
Áno!
No a?
Nepáči sa mi!
Myslím, že je príliš starý!
FUNNY.SK

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

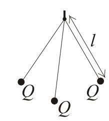
vzorové riešenia 2. série
A – kategória (staršia)
20. ročník
zimný semester
školský rok 2004/2005

www. **.sk**

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

A – 2.1 Tetraéder (opravovala Zuzka B.)

V jednom bode sú upevnené tri rovnako dlhé nite visiace nadol. Na ich koncoch sú rovnaké náboje veľkosti Q (pozri obrázok). Aká má byť veľkosť týchto nábojov, aby boli ich vzájomné vzdialenosti nábojov rovné dĺžke nití? Tiažové zrýchlenie je g.



Ahojte, statoční FKSáci! Hor sa do odhaľovania tajov tetraédera. Tetraéder má niekoľko príjemných vlastností, my využijeme hlavne to, že náboje sa nachádzajú vo vrcholoch rovnostranného trojuholníka pričom, bod závesu sa nachádza presne nad jeho ťažiskom. Toto nám umožňuje celý čas skúmať iba jeden z nábojov a na konci s kamennou tvárou vyhlásiť, že ostatné dva sa správajú rovnako. Pozrime sa teda na najsympatickejší náboj, podľa mňa je to ten vpravo- určite ste si všimli, že na vás občas žmurkne. Aké sily pôsobia na náš náboj? Tu ich máme:

1) dve rovnako veľké odpudivé elektrické sily spôsobené ostatnými dvoma nábojmi
2) gravitačná sila
3) reakčná sila nite

Aby sa náboje nepohybovali, musí byť výslednica týchto síl nulová. Ostatné je len otázkou fyziky a geometrie:

Nech hmotnosť náboja je m (t.j. hmotnosť elektrónov plus nejaký kúsok kovu, v ktorom je náboj „uväznený“). Na náboj pôsobí gravitačná sila v smere kolmom na podstavu tetraédera

$$F_g = mg.$$

Z Coulombovho zákona vyjadríme silu, ktorou pôsobia na seba dva náboje veľkosti Q vo vzdialenosti l

$$F_e = kQ^2/l^2\,, \quad \text{kde} \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon}.$$

Uvedomme si, že na skúmaný náboj pôsobia dve takéto sily rovnobežné s podstavou tetraédera a navzájom zvierajúce uhol 60°. (Sú rovnobežné so stranami rovnostranného trojuholníka, ktorého vrcholy tvoria náboje). Ich výslednicou je teda sila

$$F = 2F_e \sin 60° = \sqrt{3}\,F_e.$$

Táto sila pôsobí v smere rovnobežnom s podstavou tetraédera. Na náboj, a teda aj na nitku, pôsobí výslednica síl F_g a F. Nitka zareaguje - ako inak - reakčnou silou v smere nitky. Ak by náhodou táto sila nebola rovnako veľká a opačného smeru, výslednica všetkých síl pôsobiacich na náboj by nebola nulová a náboj by sa pohyboval. My však máme náboj už pekne zastavený, a preto môžeme vyhlásiť, že reakčná sila nitky JE opačného smeru, ako výslednica síl F a F_g. Preto nám stačí zistiť uhol, pod akým je nitka vzhľadom na podstavu tetraédera. Z obr. vyplýva:

$$\operatorname{tg}\alpha = h/r, \quad \text{kde} \quad r = |\mathrm{AT}| = 2v/3, \;\; v = |\mathrm{AP}| = l\sqrt{3}/2 \;\; \text{a} \;\; h = |\mathrm{DT}|, \;\; \text{potom}$$

$$r = l\sqrt{3}/3 \;\; \text{a} \;\; h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{l^2 - l^2/3} = l\sqrt{2/3}\,.$$

Z toho
$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}\,.$$

Taký istý uhol musí zvierať výslednica síl F a F_g s podstavou tetraédera a teda aj so silou F. Potom platí

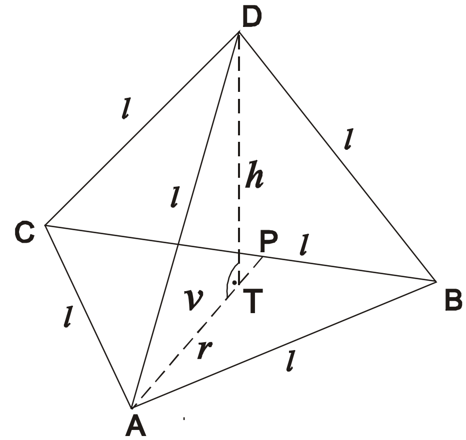
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_g}{F} = \frac{F_g}{\sqrt{3}F_e}\,, \text{ potom } F_e = \frac{F_g}{\sqrt{3}tg\alpha} = \frac{F_g}{\sqrt{6}}\,,$$

po dosadení

$$kQ^2/l^2 = mg/\sqrt{6}\,.$$

Z toho

$$Q = l\sqrt{\frac{mg}{\sqrt{6}k}} = 2l\sqrt{\frac{mg\pi\varepsilon}{\sqrt{6}}}\,.$$



Na konci len poznamenajme, že sme zanedbali hmotnosť nití a tiež gravitačné pôsobenie nábojov na seba (gravitačná interakcia bude pre rozumné hodnoty oveľa slabšia). No a vaše riešenia.. V princípe to nebolo zlé. Akurát: reakčná sila nite je sila pôsobiaca na náboj a je rovnako dobrá ako napríklad sila gravitačná. Preto na ňu nezabúdajte, keď hovoríte o všetkých silách pôsobiacich na náboj, ju to potom deprimuje. Ďalej by ste mali krotiť svoje vzletné odpisy, ktoré používate na popis situácie. Vety ako: "Hľadáme silu, ktorá vyruší gravitačnú…" nie sú principiálne nesprávne, ale zavádzajú. Keď sa potom stretnete so zložitejšou sústavou, bude vás to navádzať na intuitívne úvahy, ktoré väčšinu nešťastnej mládeže sklamú. Suchopárna realita – štyri sily, tri sú známe (vyjadriteľné od m, Q, l), štvrtá má fixovaný smer, nulová výslednica, jedzte veľa vitamínov a podobné mottá vás dovedú k správnemu výsledku.

A - 2.2 Klada a tráva (opravoval Palo)

Kvádrová klada dĺžky l a hmotnosti m sa pozdĺžne šúcha s nulovým trením po ľade rýchlosťou v. Zrazu ľad končí a začína tráva, po ktorej sa klada šúcha s trením f. Aký pohyb bude vykonávať klada, keď bude nabiehať na trávu? Určite, ako ďaleko sa klada po tráve dostane.

Čaute. Táto úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi a tak medzi vašimi riešeniami sa objavilo niekoľko úplne odlišných spôsobov riešenia problematiky. Asi najväčší problém bol opísať, aký pohyb bude vykonávať klada pri nabiehaní na trávu. Tak sa na to teraz pozrime bližšie.

Ak sa na tráve nachádza časť klady s dĺžkou x (na tráve sa teda nachádza x/l našej klady), pôsobí na ňu trecia sila

$$F_T = -fmgx/l, \tag{1}$$

a keďže časť klady na tráve je pevne spojená s druhou časťou, ktorá je na ľade (samozrejme, inak by sme mali dve klady ☺), tak táto sila pôsobí na celú kladu. Teda klada je brzdená silou F_T, až kým celá neprekĺzne na trávu, ak sa to vôbec stane!!! Keď už celá klada bude na tráve, brzdiaca sila bude

$$F_{TK} = -mgf.$$

Ak sa na vzťah (1) lepšie pozrieme, zistíme, že sila závisí lineárne od x a teda existuje analógia medzi mechanickým oscilátorom ($F = -kx$) a našou kladou ($F_T = -fmgx/l$). Môžeme si to predstaviť, ako keby sa klada šmýkala ďalej po ľade, lenže by bola k niečomu (napríklad ku klincu) pripevnená pružinou. Táto pružina pôsobí takým istým silovým účinkom, ako trecia sila, avšak iba dovtedy, kým sa celá klada nedostane na trávu. Potom.. ale to si necháme na potom.

Pohyb oscilátora opisuje rovnica

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi),$$

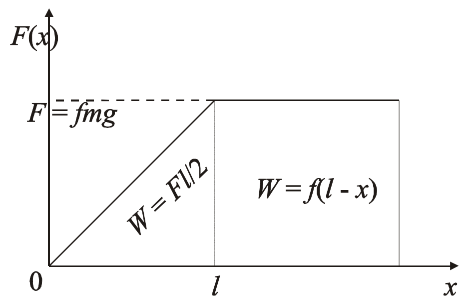
kde A je amplitúda, čiže maximálna výchylka oscilátora a ω je uhlová frekvencia a φ je začiatočná fáza. Našou úlohou je už len nájsť k čomu sú φ, ω a A v našom prípade ekvivalentné. Tak poďme teda na to: Čas budeme počítať od okamihu, keď klada začala nabiehať na trávu. Preto v čase $t = 0$ je $x(0) = 0$, z čoho $\varphi = 0$. Pre uhlovú frekvenciu platí

$$\omega = \sqrt{k/m} \text{ a v našom prípade } k = fmg/l, \text{ teda } \omega = \sqrt{fg/l}\,.$$

Poďme sa teraz zamyslieť nad amplitúdou. Logika vraví, že klada má 3 možnosti ako sa správať, a to:

a) tráva ju zastaví ešte prv, ako sa celá dostane na trávu,
b) klada sa presne celá dostane na trávu,
c) klada sa ešte chvíľu bude šúchať celá po tráve.

Rozoberme si najprv možnosti a), b). Teraz môžeme využiť zákon zachovania energie – kinetická energia klady E_k sa premení na prácu trecích síl E_T (resp. potenciálnu energiu pružiny). My síce žiadnu pružinu nemáme, ale už sme zistili, že trecia sila sa pri nabiehaní správa presne ako pružina s tuhosťou k. Prácu E_T ľahko určíme z grafu závislosti trecej sily od posunutia x (analógie s oscilátorom kde $E_P = kx^2/2$),



$$E_T = \frac{F_T x}{2} = \frac{mgfx^2}{2l}.$$

Teda ak $E_T = E_K$, tak

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mgfA^2}{2l}, \quad \text{odkiaľ} \quad A = v_0\sqrt{\frac{l}{gf}}.$$

A už máme všetko, čo sme potrebovali do našej rovnice, tak teraz už len dosadíme:

$$x(t) = v_0\sqrt{l/gf}.\sin(t\sqrt{gf/l}) \text{ a analogicky } v(t) = v_0\cos(t\sqrt{gf/l}).$$

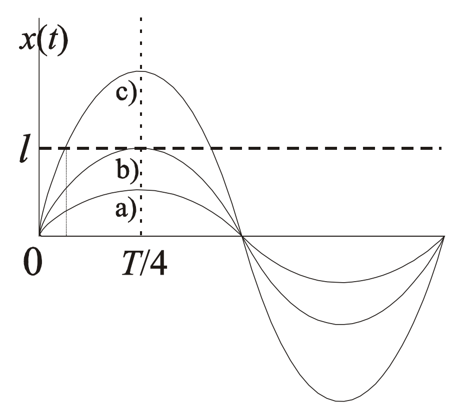
Tak tieto rovnice nám opisujú pohyb, aký vykonáva klada pri nabiehaní na trávu, ale len pri nabiehaní. Ak je celá klada na tráve, potom trecia sila už nie je lineárne závislá od posunutia x, a teda nami použitá analógia prestáva platiť (čo je prípad c)) !!! Ale kedy sa klada dostane celá na trávu? Ak má dostatočne veľkú začiatočnú rýchlosť, aby prekonala vzdialenosť l, k čomu potrebuje mať začiatočnú kinetickú energiu väčšiu ako práca, ktorú vykonajú trecie sily počas úseku l, čiže

$$mv_0^2/2 > mgfl/2.$$

Ak teda platí $v_0 > \sqrt{gfl}$, nastáva prípad c). Po prekonaní vzdialenosti l, pôsobí na kladu konštantná trecia sila F_{TK}. Celková kinetická energia klady sa teda premení na prácu trecích síl pri nabiehaní (natiahnutie pružiny oscilátora) a prácu trecích síl po ukončení nabiehania. Preto platí:

$$mv_0^2/2 = fmgl/2 + (x - l)fgm, \text{ odkiaľ}$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{v_0^2}{fg} + l\right).$$



A teraz sa pozrime na graf. Už presne poznáme funkciu, ktorá opisuje polohu klady počas nabiehania na trávu. Ale ako to vlastne vyzerá??? Krivka (respektíve sínusoida) v prípade a), má amplitúdu menšiu ako l a zastaví sa vo vzdialenosti $x_{max} = A$ v čase $t = T/4$ (na rozdiel od mechanického kyvadla, ktoré by sa po dosiahnutí maximálnej výchylky začalo vracať, teda v našom prípade, keď sa už raz klada zastavila, tak sa už znovu nerozhýbe – no to je teda osud :-)). Krivka v prípade b), sa dotýka práve „našej hranice" x = l tiež v čase $t = T/4$. Celá klada sa zastaví presne na tráve a v prípade c), naša krivka pretne hranicu $x = l$ v čase $t < T/4$, ale ďalej sa už nepohybuje podľa nášho vzťahu, ale keďže odporová sila je už konštantná, pohybuje sa po parabole – rovnomerne spomalený pohyb.

Tak to by bolo asi všetko, majte sa ...

A – 2.3 Prší prší (opravoval Škrek)

Saška s Prikim sa išli jedného krásneho dňa prejsť. Nepozreli si však predpoveď počasia a prekvapil ich dážď. Keď sa utekali skryť všimli si, že veľké kvapky padajú rýchlejšie ako malé. Skúste vysvetliť ich pozorovanie a odhadnite o koľko padá veľká kvapka rýchlejšie ako malá.

Fúúúúú, hvízda vietor, počujem ako letím, dole to je krása … *plesk!!* Fúú, hvízda vie…*plesk!!*

Ako ste sa iste dovtípili, hore uvedené lyrické úvahy patrili životným dráham (mimochodom celkom priamočiarym, ak neuvažujeme bočný vietor…) veľkej a malej kvapky. Nám už zostáva iba zistiť, ktorý príbeh patrí ktorej kvapke.

Predpokladajme, že ten bočný vietor si na chvíľu dal pauzu a išiel do baru na kofolu. Ďalej predpokladajme, že sused náhodou nenarazil na ropu a teda kvapky, čo padajú z neba sú z vody. To nie je ani tak dôležité z hľadiska hustoty, ako z hľadiska povrchového napätia, ktoré má voda celkom veľké. S týmto predpokladom ďalej predpokladajme, že kvapka má tvar gule. Je to veľmi dobrá aproximácia (dokonca by som si odvážil tvrdiť, že lepšia ako klasický tvar slzy[1]) práve vďaka dostatočne vysokému povrchovému napätiu. Ďalej predpokladajme, že kvapky sú oveľa väčšie ako molekuly vzduchu, aby sme mohli zanedbať difúzne javy (ktoré sa napríklad nedajú úplne zanedbať pri skúmaní správania hmly, čo je tiež istá forma dažďa).

Teraz na chvíľu odskočme od predpokladania a rozoberme si aké sily na kvapku pôsobia. Tak určite tam bude gravitačná sila, ako inak by tie kvapky mohli začať padať, že?

$$F_g = mg,$$

kde m - hmotnosť kvapky, g - gravitačné zrýchlenie.

No ale ešte tu máme odporovú silu prostredia. Väčšina z vás správne usúdila, že to bude Newtonova aerodynamická odporová sila:

$$F_{aero} = \frac{1}{2} C S \rho_p v^2,$$

kde C - je konštanta závislá od tvaru, S - plocha kolmého prierezu na smer rýchlosti pohybu, ρ_p – hustota prostredia okolo kvapky.

Za zmienku ešte stojí iná odporová sila, a to Stokesova odporová sila, ktorá závisí od rýchlosti iba lineárne, t.j. v prvej mocnine. Tá sa tu nedá použiť, lebo platí iba pre laminárne prúdenie vo vysoko viskóznych tekutinách, čo nie je náš prípad.

No a hor sa opäť predpokladať, ale teraz už iba krátko. Predpokladajme teda, že kvapky padajú z dostatočne vysokej výšky a odporová sila sa vyrovnala s gravitačnou, a teda padajú konštantnou rýchlosťou. Keď si uvedomíme, že odhadom stačí bohate (veľmi bohate) takých 200 metrov a mraky začínajú pršať vo výške takých 1 až 2 kilometrov, tak náš predpoklad je splnený.

Čiže

$$F_g = F_{aero},$$

$$mg = \frac{1}{2} C S \rho_p v^2 \text{, z toho } \quad v = \sqrt{\frac{2mg}{C S \rho_p}}.$$

Pre hmotnosť m a prierez S gule platí

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_v,\ S = \pi r^2,$$

kde r – je polomer kvapky, ρ_v – hustota kvapky t.j. vody v našom prípade. Z toho dostaneme, že

$$v = \sqrt{\frac{8 r \rho_v g}{3 C \rho_p}}.$$

Vidíme, že rýchlosť kvapky rastie s polomerom, t.j. čím väčší polomer pre daný pomer hustôt, aerodynamickej konštanty a gravitačného zrýchlenia, tým väčšia je rýchlosť kvapky padajúcej dole. Celé to vyplýva z faktu, že gravitačná sila rastie s treťou mocninou r (s objemom) naproti odporovej sile, ktorá rastie iba s mocninou druhou (s plochou), lebo odpor je úmerný zrážkam

[1] Nedá mi nepristaviť sa pri tomto. Viem, že bol vykonaný vedecký výskum, ktorý sa zaoberal kvapkaním vody z vodného kohútika, kde zistili vedci, že kvapka má naozaj tvar gule, bez toho chvostíka na konci!! Neviem do akej miery to platí pri vyšších rýchlostiach, ale myslím, že sa ten tvar práve vďaka silnému povrchovému napätiu veľmi nezmení. Koho by to viac zaujímalo doporučujem knihu Čísla prírody od autora menom Ian Stewart.

molekúl vzduchu s molekulou kvapky na povrchu kvapky, zato tiaž pôsobí na každú molekulu kvapky aj vo vnútri kvapky!

Ostáva nám už iba číselne odhadnúť, o koľko bude väčšia kvapka rýchlejšia od menšej. Najprv si vyriešime problém aerodynamickej konštanty. Pre aerodynamický tvar (blízky tvaru slzy) je $C \cong 0{,}08$, pre tvar gule je $C \cong 0{,}4$. Pokiaľ ide o bodovanie, tak akýkoľvek výber tejto konštanty v rozmedzí od 0,5 po 0,05 bol ohodnotený ako správny. Polomer malej kvapky r môže byť v okolí od 0,5 do 1 mm a polomer veľkej kvapky R okolo 2 – 3 mm, ale aj pri výbere polomerov som bol otvorený iným názorom.

Pre $r = 0{,}0005$ m ; $R = 0{,}002$ m ; $C = 0{,}4$; $g = 9{,}81$ m.s^{-2}; $\rho_v = 1000$ kg.m^{-3}; $\rho_p = 1{,}28$ kg.m^{-3} mi vyšli tieto približné čísla:

$$v(r) \approx 5 \text{ m.s}^{-1}, \quad v(R) \approx 10 \text{ m.s}^{-1}, \quad v(R) - v(r) \approx 5 \text{ m.s}^{-1}.$$

Nakoniec sa zdá, že je zaujímavé dorátať, koľko krát ide väčšia kvapka rýchlejšie ako menšia. Aj túto odpoveď na otázku som považoval za správnu, pokiaľ bola v podobnom tvare ako

$$v(R) = \sqrt{\frac{R}{r}}\, v(r).$$

No a toto už bola naozaj posledná kvapka.

A – 2.4 Ponorka (opravovali Ferko a Martin, vzorák Martin)

Nautilhumus, ponorka chýrneho Mena, používala silný elektrický reflektor, aby sa mohla bezpečne pohybovať aj vo veľkých hĺbkach. Priehľadný kryt reflektora sa vždy pri dlhšom svietení rozpáli až do teploty 150°C. Ohriata voda v jeho blízkosti nemôže voľne odtekať hore (reflektor je na spodku ponorky a navyše v preliačenine), preto sa vždy ohreje až na maximálnu možnú teplotu. Predstavte si, že ponorka je hlboko pod vodou a pomaly sa začne vynárať. Zrazu voda pri reflektore začne vrieť. Vysvetlite prečo a zistite, v akej hĺbke sa to stalo.

Čaute! V tomto príklade ste všetci správne pochopili podstatu problému: Vo vode v určitej hĺbke je tlak vyšší ako tu u nás „suchozemcov“, je tam konkrétne o hydrostatický tlak viacej. No a s rastúcim tlakom sa mení aj teplota, pri ktorej voda vrie. Ak si myslíte, že našich klasických 100 ^{o}C je vševesmírna konštanta, mýlite sa – tá teplota je význačná iba tým, že akurát pri nej tlak nasýtených pár vody presiahne bežný atmosférický tlak vzduchu a voda sa preto začne odparovať v celom svojom objeme (v rámci malých hĺbok, kde ešte nie je rozhodujúci hydrostatický tlak vody) – vedci tento netriviálny jav pomenovali var a môžete sa s ním stretnúť v čaji. No a ako vlastne rastie tlak nasýtených pár vody s rastúcou teplotou? Zložito. A tu nastala schizma vo vašich riešeniach, pretože asi polovica z vás to riešila systémom: otvorím tabuľky a nájdem prvý vzorec, ktorý má nadpis „závislosť teploty varu vody od tlaku“. Našli ste:

$$\frac{t_v}{{}^{0}C} = 71{,}6 + 28.\frac{p}{10^5\,Pa}$$

A pritom ste si asi zabudli prečítať vetu o tom, kedy platí, citujem (MFChT 2002 str. 171): V rozpätí (0,9 - 1,075).10^5 Pa sú odchýlky od správnej hodnoty menšie ako 0,1 %. Hodnota (0,9 - 1,075).10^5 Pa prislúcha teplotám 98 - 102 °C, takže pri teplotách 150 °C bude odchýlka značne väčšia ako 0,1 % (v skutočnosti je dokonca väčšia ako 100 %).

Je to spôsobené tým, že hľadaná závislosť nie je ani zďaleka lineárna, ale je to dosť humusná (veď sme na Nautilhumuse, tak musíme očakávať nejaké humusnosti) exponenciálna závislosť. A túto exponenciálu (ako každú rozumnú funkciu) môžeme v okolí 100 °C približne nahradiť (aproximovať) lineárnou funkciou. Dopustíme sa pritom tým väčšej chyby, čím ďalej od 100 °C budeme náš vzorec používať. Takže to je zdôvodnenie, prečo ste nemohli použiť spomínaný vzorec a prečo išli body dolu. Tí z vás, ktorí si to uvedomili, našli na predchádzajúcej strane MFChT skutočnú závislosť a určili (správne), že teplota varu vody je 150 °C pri tlaku 4,7 10^5 Pa.

No a ďalej vieme, že tlak p v hĺbke h je súčtom hydrostatického a atmosferického tlaku

$$p(h) = p_a + \rho g h = 4{,}7.10^5 \text{ Pa},$$

odkiaľ zistíme, že hĺbka h je cca 37 m.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina A – kategórie po 2. sérii zimného semestra 20. ročníka

	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	①	A-2.1	A-2.2	A-2.3	A-2.4	☠	Σ
1.	Závodný	Jakub	ok.	G BA Grösslingova	20,00	5,0	5,0	5,0	5,0		40,00
2.	Lalinský	Ján			19,65	5,0	5,0	4,5	5,0	2	37,29
3.	Imriška	Jakub	3 A	G BA J. Hronca	15,70	5,0	4,2	3,5	5,0		34,01
4.	Simančík	František	ok.	G BA Grösslingova	15,00	5,0	5,0	4,0	5,0		34,00
5.	Burger	Michal	ok.	G BA Grösslingova	13,00	5,0	5,0	5,0	5,0		33,00
6.	Takáč	Slavomír	3	G Nové Zámky	12,44	5,0	5,0	3,5	5,0		31,36
7.	Perešíni	Peter	3 F	G BB Tajovského	12,97	5,0	4,0	5,0	3,8		31,35
8.	Hrdá	Marcela	3 B	G BA J. Hronca	11,50	5,0	4,5	4,5	5,0		30,79
9.	Dzetkulič	Michal	3 A	G PH Michalovce	14,70	4,5	2,0	2,5	5,0		29,96
10.	Tejiscak	Matus			10,00	5,0	3,8	5,0	5,0		28,80
11.	Astaloš	Róbert	4 A	G Rimavská Sobota	12,50	5,0	2,5	5,0	3,5		28,50
12.	Takács	Michal	3 F	G BB Tajovského	12,00	5,0	1,0	5,0	3,8		27,95
13.	Kováč	Adrián	4 A	G PH Michalovce	11,00	5,0	2,0	4,5	5,0		27,50
14.	Hergelová	Beáta	3 B	G BST Lučenec	10,00	5,0	3,5	5,0	3,5	1	26,76
15.	Komorovský	Marek	se.	G Dubnica n. Váhom	11,49	5,0	2,0	3,5	3,5		26,75
16.	Kuchárik	Marcel	3 D	G MRŠ NMV	12,49	4,5	2,5	1,0	4,8		26,67
17.	Mikuláš	Ján	se.	G BST Lučenec	9,50	5,0	3,2	5,0	3,5		26,20
18.	Duník	Matej	3 B	G VOZA	13,44	5,0	4,0	-	3,0	1	25,88
19.	Berta	Peter	2 A	G Veľké Kapušany	12,97	3,0	1,5	3,5	3,7	1	25,12
20.	Fačkovec	Boris	se. A	G Piešťany	9,44	3,0	4,0	4,5	5,0	2	24,81
21.	Pôbišová	Zuzana	3 F	G BB Tajovského	11,50	5,0	0,5	1,0	5,0		24,47
22.	Kaniansky	Miroslav	se. A	G Piaristické Nitra	6,26	5,0	4,0	3,5	3,8		23,46
23.	Molčány	Dušan	3 B	SPŠS BA Fein. nábr.	7,26	5,0	0,5	3,5	5,0		22,52
24.	Foltin	Miroslav	3 C	G Jána Hollého	9,97	4,5	2,0	1,0	3,5		22,45
	Štolcová	Jana	se.	G Nitra Párovská	11,97	4,5	2,0	-	2,5		22,45
26.	Šibík	Juraj	4 D	G Považská Bystrica	8,50	4,0	3,5	3,0	3,5	1	21,50
27.	Zámečník	Peter	3 D	G MRŠ NMV	8,91	4,5	1,0	1,0	3,5		20,41
28.	Sasák	Róbert	4 D	SPŠE Piešťany	10,00	2,0	4,8	1,0	1,5		19,30
29.	Vojtko	Andrej	ok. A	G Skalica	6,00	3,0	-	4,5	5,0		18,50
30.	Piják	Peter	4 B	G VOZA	3,00	3,0	4,0	5,0	2,5		17,50
31.	Korch	Jakub	7 A	G Piaristické Nitra	5,13	3,0	2,0	1,0	5,0	1	16,61
32.	Rušin	Michal	ok.	G Spišská Stará Ves	4,00	5,0	1,0	3,5	3,0		16,50
33.	Ďurčík	Miroslav	3 C	G BST Lučenec	6,13	3,0	0,5	2,0	3,0	1	15,09
34.	Kravec	Martin	3 A	G PH Michalovce	12,44						12,44
35.	Sudovský	Michal	2 F	G BB Tajovského	6,13	2,0			3,0		12,25
36.	Korenčiak	Miloš	se. B	OG ZA Varšav. cesta	3,44	3,0	-	-	4,1		11,91
37.	Kubová	Michaela	4 A	G Vrbové	8,70	1,0	1,0	1,0	1,0	2	10,70
38.	Zitrický	František	E	G PH Michalovce	7,82						7,82
39.	Šťastný	Tomáš	3 C	G Poprad Tatarku	5,70						5,70
40.	Angus	Michal	4 B	G BA A. Einsteina	1,50	-	0,5	0,5	2,5		5,00
41.	Kašuba	Mário			1,00	-	-	1,0	2,5		4,50
42.	Ladecky	Martin	4 B	G VOZA	3,50						3,50
43.	Maslák	Stanislav	5 E		3,00						3,00
44.	Bašista	Peter	3 A	G PH Michalovce	2,00						2,00
	Kulik	František	4 E	G Humenné	2,00						2,00
	Petrík	Peter	4 B	G BA J. Hronca	2,00						2,00
47.	Vanyo	Milan	7 A	G Piaristické Nitra	1,54						1,54