FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

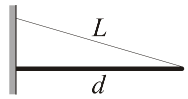
vzorové riešenia 2. série
B – kategória (mladší)
19. ročník
zimný semester
školský rok 2003/2004

www. **.sk**

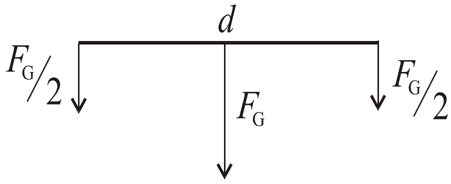
FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

B – 2.1 Visí na nitke (opravoval Stano)

Niť dĺžky $L = 1$ m zanedbateľnej hmotnosti pridržiava tyč dĺžky $d = 60$ cm a hmotnosti $M = 4$ kg pri stene tak, ako na obrázku. Tyč je pritom o stenu iba opretá a je na ňu kolmá. Zistite, pri akej najmenšej hodnote koeficientu trenia medzi tyčou a stenou je uvedená situácia možná.



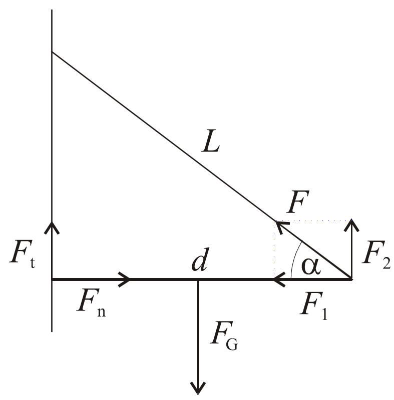
Skôr než začnem so samotným riešením príkladu, rád by som sa vyjadril k veľmi častej chybe. Mnohí z vás nahradili gravitačnú silu F_G, ktorá pôsobí v strede tyče, dvoma silami, ktoré majú veľkosť $F_G/2$, rovnaký smer ako F_G a pôsobisko na koncoch tyče (pozri obr.). To je, samozrejme, správne, ale keďže vy riešite a my opravujeme, tak treba napísať aj patričný dôvod, prečo to tak môžem spraviť. Lebo ani zďaleka to tak nejde vždy. Pravidlo je také. Ak nahradzujem jednu silu dvoma (troma, štyrmi..., na počte nezáleží), tak tie musia mať rovnaký účinok na sústavu ako pôvodná sila. Rovnaký účinok znamená, že ich vektorový súčet je rovnaký ako pôvodná sila a (čo ste prakticky všetci zabudli) ich otáčavý moment na sústavu je tiež rovnaký. Len z prvého pravidla vôbec nevyplýva, že naše dve sily musia mať veľkosť $F_G/2$, veď napríklad platí aj $F_G/3 + 2F_G/3 = F_G$. Ak však navyše uvážime, že sústava (teda tyč) sa neotáča, tak ak majú obe sily pôsobisko, potom musia mať rovnakú veľkosť (ako je to znázornené na obrázku). To plynie priamo z momentovej vety. Alebo trochu zrozumiteľnejšie pre tých, čo nemajú radi slovo moment: stačí si uvedomiť, aký majú obe sily otáčavý účinok vzhľadom na stred tyče.



Ako vidíte, vôbec nie je jednoduché zdôvodniť, prečo môžem urobiť práve takýto rozklad tiažovej sily. Nehovoriac o tom, že aj tak to nič nezjednodušuje. Skôr komplikuje. Nakoniec aj tak musíte povedať všetky potrebné argumenty. Preto odporúčam nasledovné riešenie.

Prvé, čo sa robí v takýchto úlohách je, že sa nájdu všetky sily, čo pôsobia na danú sústavu. Sila je vlastne vyjadrenie vzájomného pôsobenia telies. Každá sila preto pochádza od nejakého telesa. Na našu tyč pôsobia celkovo štyri sily. Tiažová sila F_G, trecia sila od steny F_t, normálová sila od steny F_n a sila od nite F. Sú to vlastne iba tri sily, ale silu od steny som už rozložil na treciu a normálovú. Tak isto si rozložíme silu od nite na F_1 a F_2 (pozri obr.). Keďže tyč sa nehýbe, tak vektorový súčet všetkých síl musí byť nulový. Preto platí:

$$F_1 = F_n, \qquad F_G = F_t + F_2.$$



No a keďže sa naša tyč neotáča, tak súčet momentov všetkých síl musí byť nulový. Vzhľadom na ťažisko je moment síl F_G, F_1 a F_n nulový. Takže musí platiť:

$$\frac{d}{2}F_2 - \frac{d}{2}F_t = 0 \Rightarrow F_2 = F_t \,.$$

Tyč je pritláčaná na stenu silou veľkosti F_n. Na to, aby sa tyč nešmýkala po stene, musí platiť:

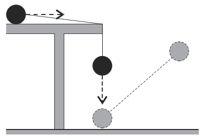
$$F_t \le fF_n.$$

Ak sem dosadíme prvú a tretiu rovnosť, dostaneme $f \ge F_2/F_1$. Z podobnosti trojuholníkov (pozri posledný obrázok) a využitím Pytagorovej vety je jasné, že

$$f \ge \frac{F_2}{F_1} = \frac{\sqrt{L^2 - d^2}}{d} = \frac{4}{3} \;.$$

Takže minimálny koeficient trenia, pri ktorom sa tyč nezošuchne, je 4/3. Toť fsio.

B – 2.2 Padajúce spojené guličky (opravoval Juro)



Máme dve rovnaké guličky hmotnosti m, ktoré sú spojené nehmotnou niťou dĺžky h. Sú položené na stole tak, že jedna gulička prevísa cez stôl spolu s tretinou dĺžky nite. Výška stola je h. Po uvoľnení sa sústava dá do pohybu, prevísajúca gulička nepružne narazí na zem (prilepí sa) a druhá gulička spadne zo stola. V akej výške sa bude druhá gulička nachádzať, keď sa niť opäť napne?

Ahojte. Bez dlhých rečí sa poďme pozrieť priamo na guličky. Spomeňme len toľko, že sa nebudeme trápiť rozmermi guličiek.

Obe spojené guličky tvoria sústavu s hmotnosťou M = 2 m. Po uvoľnení urýchľuje pohyb sústavy tiažová sila spodnej z nich, takže sila $F = mg$. Výsledné zrýchlenie ústavy, a tým aj druhej guličky, ktorá predtým ležala na stole, bude $a = F/M = g/2$. Na dráhe $2h/3$, ktorú prejde počas pádu, nadobudne rýchlosť

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{\frac{2}{3}gh} \,.$$

Na tomto mieste sa dal použiť aj zákon zachovania energie. Veľa z vás v ňom urobilo chybu, preto si cez to prejdime. Za hladinu nulovej potenciálnej energie zvoľme podlahu. Gulička na stole je stále v rovnakej výške, takže jej potenciálna energia sa zatiaľ nemení. Prvá gulička počas pádu stratí svoju potenciálnu energiu, ktorá sa premení na kinetickú energiu oboch guličiek. Tie budú mať rovnakú rýchlosť, pretože sú spojené pevnou niťou. ZZE bude mať tvar

$$mg\frac{2}{3}h = 2\frac{1}{2}mv^2 \,,$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}gh} \,.$$

Prvá gulička nám teda šťastne spadla na zem a druhá je na okraji stola, má rýchlosť v a veľký problém. Chcela by ísť vodorovným vrhom, ale nevie, či ju šnúrka pustí. Nemôže sa totiž od prvej guličky vzdialiť na viac, ako je dĺžka nite.

Zvoľme si súradnicový systém so stredom v dopadnuvšej loptičke, s vodorovnou osou x a zvislou osou y. V takejto sústave by boli súradnice guličky pri vodorovnom vrhu v čase t od opustenia stola

$$x = vt \;,$$

$$y = h - \frac{1}{2}g t^2 \,.$$

Ak sa niť sa napne, bude to v takom bode, ktorého vzdialenosť od stredu sústavy je presne h, to znamená

$$h^2 = x^2 + y^2 \,, \quad h^2 = \frac{2}{3}ght^2 + h^2 - hgt^2 + \frac{1}{4}g^2t^4 \,,$$

$$\left(\frac{1}{3}g\,h-\frac{1}{4}g^2t^2\right)t^2=0\,.$$

To nastane vtedy a iba vtedy, keď je $t_1 = 0$ alebo zátvorka je rovná nule, t.j.

$$t_2{}^2=\frac{4}{3}\frac{h}{g}\,.$$

Prvý čas zodpovedá momentu pádu zo stola, druhý (po dosadení t_2^2 do rovnice pre súradnicu y) výške $h/3$ nad podlahou. Zistili sme, že kružnicová dráha a parabolická dráha vrhu majú v nami uvažovanej časti dva (a iba dva) spoločné body. Ostáva sa ubezpečiť, že pri prelete z jedného do druhého nie je gulička obmedzovaná niťou.

Vypočítajme si vzdialenosť guličky v nejakom čase medzi t_1 a t_2, napríklad $t^2 = h/g$.

$$d^2=x^2+y^2\,,$$

$$d^2=\frac{2}{3}gh\frac{h}{g}+h^2-hg\frac{h}{g}+\frac{1}{4}g^2\frac{h^2}{g^2}=\frac{11}{12}h^2<h^2\,.$$

V tomto bode je vzdialenosť od stredu menšia ako h, to znamená, že nitka tam neobmedzovala parabolický pohyb guličky. Ak je ale medzi časmi t_1 a t_2 gulička bližšie k prvej guličke ako h, musí byť v každom bode medzi nimi. V opačnom prípade by ešte niekde musela mať dĺžku presne h, ale taký bod tam už nie je. Niť sa opäť napne, keď bude druhá gulička vo výške $h/3$ na podlahou.

Najviac chýb ste robili v už spomínaných energiách. Často ste najskôr použili zákon zachovania energie, ale bez druhej guličky na stole, takže ste došli k rýchlosti

$$v_{zlá}=\sqrt{2}v_{správna}$$

a potom ste povedali, že aj druhá gulička bude mať takúto rýchlosť. Avšak odkiaľ sa zobrala energia, ktorú má druhá gulička? Porušuje to zákon zachovania energie a tento postup nie je správny. Vzdialenosť od stredu rovná h vám potom okrem $t = 0$ už nevyšla, z čoho ste zväčša vyvodili nesprávny záver, že niť sa už nenapne. Ak by ste ale urobili podobnú analýzu ako ja, zistili by ste, že to tak nie je. Naopak, ona sa ani neuvoľní a hneď za sebou začne ťahať spodnú guličku. Ale to už nie je o tejto úlohe.

Veľká noc je už za nami, posledná séria, koniec školského roka a hlavne sústredenie stále bližšie a bližšie. Veľa šťastia, síl, nejako to dobojujte a nech vás obíde jarná únava. Majte sa krásne.

B – 2.3 V prúde je sila (opravoval Džony)

Vezmite pohár a naplňte ho v umývadle prúdom vody s prietokom 1 liter/10 s. Odhadnite veľkosť sily, ktorou pôsobí prúd vody na pohár. Všetky potrebné údaje zmerajte.

Ahojte! Niektorí z vás sa zamerali na priame meranie sily, čo však nebolo podstatou tejto úlohy. Mali ste skôr zmerať iba niektoré parametre celého pokusu bez toho, aby ste naozaj prúd vody pustili a pomocou teoretického základu z nich vypočítať hodnotu sily. Samozrejme, experimentálny dôkaz je vítaný a vždy pomôže overiť vypočítané hodnoty.

Ako všetci viete, sila je zmena hybnosti za čas. Možno, lepšie povedané: na to, aby teleso zmenilo svoju hybnosť z hodnoty p_1 na hodnotu p_2 za čas t, je potrebná sila $F = (p_1 - p_2)/t$. Pozrime sa na náš konkrétny prípad. Prúd vody uháňa z vodovodu rýchlosťou v, avšak keď voda narazí na pohár, zastaví sa ($v = 0$; pod v sa myslí rýchlosť v smere kolmom na dno pohárika). Teda hybnosť vody sa zmenila (za nejaký čas t) z nejakej hodnoty p na nulu. To znamená, že na túto zmenu bola potrebná sila

$$F = (p - 0)/t. \qquad (1)$$

Čo je to za sila? Veď predsa sme mali zistiť, akou silou pôsobí prúd vody na pohár a nie silu, ktorá je potrebná na zastavenie vody. Z týchto trápení nám pomôže zákon akcie a reakcie.

Keďže pohár pôsobil na vodu silou (1) aby ju zastavil, voda pôsobila na pohár rovnako veľkou silou. Zjednodušene povedané, zmena hybnosti vody vyvolala silu $F = p/t$.

Keď už vieme, čo je to za sila, môžeme ju vypočítať. Ako je jasné z predošlých úvah, potrebujeme určiť hybnosť vody p. Vieme, že $p = mv$. Dobre, ale aká je to hmotnosť m? Skúsme si teda zobrať taký "kus" vody, ktorý vybehne z vodovodu za čas t a určime jeho hmotnosť a rýchlosť. Zadaný prietok (označíme Q) nám udáva objem vody, ktorá vytečie za nejaký časový úsek t. Čiže objem V nášho "kusu" jednoducho vyjadríme ako $V = Qt$. Jeho hmotnosť už poľahky vypočítame ako

$$m = V\rho = Qt\rho, \qquad (2)$$

kde ρ je hustota vody. A akú rýchlosť má tento "kus" vody? No rýchlosť je vlastne dráha d, ktorú prejde táto voda za čas t ($v = d/t$). Tu si stačí uvedomiť zásadný fakt, že voda sa "vysúka" z vodovodu ako valec, ktorý má plošný prierez S. Za čas t teda z potrubia vylezie valec vody dlhý $d = V/S$, čo znamená, že rýchlosť je

$$v = d/t = Qt/St = Q/S. \qquad (3)$$

Tak konečne môžeme vyjadriť hybnosť a vlastne aj silu. Pomocou (2) a (3)

$$p = Q^2t\rho/S,\ \ F = Q^2\rho/S. \qquad (4)$$

Takouto silou teda pôsobí nami zvolený kus vody na pohár. Z výsledného vzťahu vyplýva výborná skutočnosť. Výsledná sila pôsobiaca na pohár nezávisí od nami zvoleného času t, a teda ani od hmotnosti prislúchajúcej úseku vody. Teda nie je dôležité, aký čas, resp. "kus" vody sme si na začiatku zvolili, sila bude rovná vždy (4). Pre náš odhad hodnoty tejto sily musíme odmerať len plošný obsah vodovodu, pretože hustotu poznáme a prietok máme zadaný. Môžeme ho tiež vypočítať pomocou odmeraného polomeru r ako $S = \pi r^2$. Pre môj prúd (r = 0,1 m) je sila približne F = 0,03 N (pozor na základné jednotky prietoku! [m^3/s]).

Samozrejme, celý výsledok závisí od rýchlosti, akou naráža voda na pohár. Rýchlosť sa ešte vplyvom pôsobenia gravitačnej sily zmení. Ak púšťame vodu zhora dole, výslednú rýchlosť v_v môžeme určiť zo zákona zachovania energie, kde E_{k0} je kinetická energia vody na začiatku, E_{k1} na konci a E_p je potenciálna energia na začiatku. Platí teda, že $E_p + E_{k0} = E_{k1}$, resp. $mgh + 1/2mv^2 = 1/2mv_v^2$ (h je rozdiel výšok kohútika a pohára). Odtiaľ dostaneme výslednú rýchlosť ako:

$$v_v = \sqrt{2gh + v^2}\ . \qquad (5)$$

Treba si uvedomiť, že pri h = 0,3 m (asi hĺbka umývadla) je táto rýchlosť niekoľkonásobne väčšia ako pôvodná v a teda tento efekt rozhodne nemožno zanedbať. Ak do (5) dosadíme vzťah pre v (t.j. (3)) a vypočítame hybnosť a silu pomocou tejto novej rýchlosti, dostaneme vzťah:

$$F = Q\rho\sqrt{2gh + \frac{Q}{S}}\ .$$

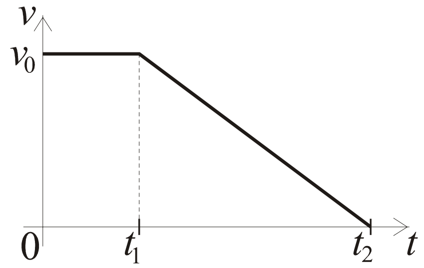
Pre uvedené hodnoty to teda znamená F = 0,25 N. Toto je už aj vcelku fajn merateľná hodnota. Dá sa to jednoducho merať napríklad pomocou váh. Položíte pohár plný vody na váhy a zistíte hmotnosť m_1. Potom naň pustíte prúd vody a odčítate hodnotu m_2. Rozdiel hmotností je spôsobený silou F. Čiže F vypočítame ako $F = (m_2 - m_1)g$.

Tak a to by bolo asi všetko. Myslí vám to. Len tak ďalej.

B – 2.4 Tehla na pedál (opravovala Myška)

Naši poslanci už dávnejšie schválili zvýšenie maximálnej povolenej rýchlosti v obci z 50 na 60 km/h. Odhadnite, ako tým vzrástla brzdná dráha áut.

Auto ide po peknej rovnej dedinskej ceste, keď tu zrazu vodič zbadá prekážku – babička sa vracia z obchodu (mali zlacnený cukor na zaváranie). Keďže sa šofér nechce dostať do konfliktu so zákonom, šliapne na brzdu a v bezpečnej vzdialenosti auto zastaví. Závislosť rýchlosti auta od času je znázornená na obrázku.



Od spozorovania prekážky vodičom po zošliapnutie brzdy prejde čas t_1. Každému človeku totiž chvíľu trvá, kým jeho pozorovanie prejde dostredivými nervovými dráhami do mozgu a odstredivými dráhami späť k výkonným orgánom (v našom prípade sa táto púť signálu začínala v oku a končila v nohe, ktorá zošliapla brzdu). Čas t_1 sa nazýva reakčným časom a u ľudí má hodnotu približne 0,2 – 0,3 sekundy. Počas tohto času sa auto pohybuje stále konštantnou rýchlosťou.

Až po začatí brzdenia je pohyb auta rovnomerne spomaleným pohybom so spomalením a. Predpokladáme, že spomalenie je konštantné (teda vodič stlačil brzdu nadoraz a basta). Platia staré známe rovnice

$$v = v_0 - at\,,\ s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2\,,$$

kde v_0 je začiatočná a v konečná rýchlosť automobilu. Auto na konci svojej cesty zastaví, a preto v = 0 km/h. Z dvoch rovníc dostaneme jednu, ktorá bude vyjadrovať závislosť prejdenej dráhy od začiatočnej rýchlosti:

$$s = \frac{v_0^{\ 2}}{2a}\,. \tag{1}$$

Drvivá väčšina z vás teraz dala do pomeru prejdené dráhy po a pred schválením zákona. Vyšlo niečo takéto (veličiny v_1, s_1 platili pred schválením nového zákona, veličiny v_2, s_2 po jeho úprave):

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{v_2^{\ 2}/2a}{v_1^{\ 2}/2a} = \frac{v_2^{\ 2}}{v_1^{\ 2}} = 1{,}44\,.$$

Rovnako pekný výsledok vyšiel aj pri riešení problému cez energie. V tom prípade sa predpokladalo, že celá kinetická energia auta sa pri úplnom zastavení minie na zohriatie pneumatík (trenie).

Problémom je, že všetci, ktorí ste to riešili takto, ste zabudli uvažovať o spomínanom reakčnom čase. Ak by ste tak urobili, situácia by sa skomplikovala a vy by ste dostali viac bodov:-). Pre brzdnú dráhu ste si mali napísať vzťah (veličiny sú snáď známe z grafu):

$$s = v_0 t_1 + \frac{1}{2}a(t_2 - t_1)^2\,.$$

Dosadením $a = v_0/t_2 - t_1$ si ho upravíme na krajší tvar:

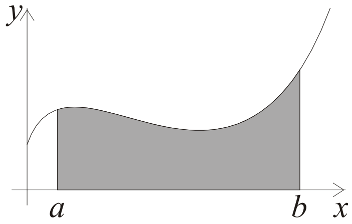
$$s = v_0 t_1 + \frac{v_0^{\ 2}}{2a}\,. \tag{2}$$

Vidíme, že od (1) sa líši. Po tom, ako sa pokúsime dať dráhy pre dva skúmané prípady do pomeru, budeme sklamaní. Spomalenie nám zrejme nevypadne.

Všetky veličiny v tomto vzťahu však poznáme, alebo ich vieme odhadnúť (aj preto to „odhadnite“ v zadaní). Spomalenie a nie je nič iné ako fg, kde g je gravitačné zrýchlenie a f koeficient trenia medzi kolesami a vozovkou. Pre suchý asfalt uvádzajú tabuľky hodnotu 0,55. Dosadením do (2) zistíme, že brzdná dráha pri rýchlosti 50 km/h bude približne 32 m, pri vyššej začiatočnej rýchlosti (60 km/h) až 42 m. Keď nám na vozovku naprší a koeficient trenia sa zmení na 0,35, rozdiel sa zväčší na 15 metrov. A na domácu úlohu si všetci okrem Jakuba Imrišku skúste vypočítať, čo sa bude diať, keď vozovka v zime primrzne...

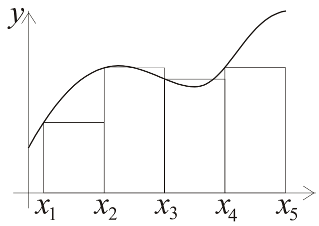
FKS & počítače, časť II.

Prvá časť seriálu sa venovala numerickému hľadaniu koreňov rovníc. Ďalšou úlohou, ktorú počítače často riešia, je numerické integrovanie. Niektorí z vás o integráloch ešte nepočuli, preto si zadajme úlohu „ľudskejšie“: nájdime plochu pod krivkou, ktorú vykresľuje funkcia $f(x)$ na intervale $x \in (a, b)$ (pozri obrázok).



Dĺžku výletu (krivoľakej čiary) na turistickej mape zisťujeme prikladaním pravítka a meraním krátkych aspoň trochu rovných úsekov. Podobne počítanie sivej plochy na obrázku spočíva v rozdelení intervalu (a, b) na kratšie časti, na ktorých už funkcia $f(x)$ nie je „až taká zvlnená“. Pravda, toto sa dá urobiť viacerými spôsobmi, ktoré sa líšia presnosťou výsledku. Spomenieme aspoň niektoré z nich...

I. obdĺžniková metóda:



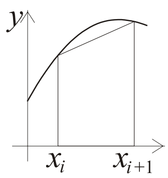
Namiesto slov nech prehovorí obrázok. Ako vidíme, peknú zvlnenú funkciu sme si na ňom nahradili schodiskom, plocha pod ktorým sa rozhodne nerovná hľadanej sivej ploche. Zároveň však vidíme, že zužovaním schodov (teda zmenšovaním dĺžky intervalov Δx, na ktoré delíme zadaný interval (a, b)) sa rozdiel medzi zadanou $f(x)$ a „schodiskom“ stráca. Ak zvolíme dosť malé Δx, dostaneme dosť presný výsledok. Ešte napíšme vzorec pre obsah i-teho obdĺžnika: $S_i = \Delta x\, f(x_i)$, kde x_i je x-ová súradnica začiatku obdĺžnika. Ak delíme interval (a, b) na N častí, tak $\Delta x = (b - a)/N$ a navyše

$$x_i = a + (b - a)(i - 1)/N$$

(vyskúšajte si, či je to tak!). Sčítaním obsahov všetkých obdĺžnikov získavame výsledok

$$S = \Delta x \left(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_N) \right).$$

II. lichobežníková metóda:



Tu je iba malý rozdiel oproti minulému postupu. Opäť vytýčime deliace body x_1, x_2,..., x_N ($x_1 = a$, $x_{N+1} = b$). Teraz však funkciu medzi nimi nahradíme rovnou čiarou a dostaneme tak lichobežník (odtiaľ pochádza názov metódy). Jeho obsah je $S = \Delta x\, (f(x_i) + f(x_{i+1}))/2$. Súčet všetkých lichobežníkov je preto (premyslite si)

$$S = \frac{\Delta x}{2} \left(f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + \ldots + 2f(x_N) + f(x_{N+1}) \right).$$

Vidíme, že grafické vyjadrenie metódy bolo úplne iné ako v prvom prípade, vzorec je však veľmi podobný...

III. Simpsonova metóda:

Všimnime si, že posledné dve metódy fungovali presne iba pre veľmi špeciálne funkcie. V prvom prípade pre funkcie, ktoré boli na malých intervaloch (x_i, x_{i+1}) konštantné (iba vtedy splynú schody presne so zadanou funkciou). V druhom prípade pre funkcie, ktoré boli na malých intervaloch lineárne (vtedy splynie vzniknutý lichobežník s plochou pod funkciou). Čo tak vymyslieť metódu, ktorá by presne fungovala aj pre komplikovanejšie funkcie? Toto si dal za cieľ Simpson a na naše šťastie úlohu aj vyriešil. (Pozor, teraz musí byť N párne číslo!) Zoberme si funkciu, ktorá je na intervale (x_1, x_3) kvadratická (teda má tvar $ax^2 + bx + c$). Potom vzorec $\Delta x\, (f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3))/3$ dáva presnú hodnotu obsahu pod krivkou na tomto intervale (bod x_2 leží v strede medzi x_1 a x_3). Kto vie integrovať, môže sa ľahko presvedčiť.

Takže... Našli sme vzorec, ktorý nám dá presný výsledok aj pre kvadratickú funkciu! A naozaj – táto metóda je spomedzi troch tu spomenutých zvyčajne najvýkonnejšia. Súčet všetkých obsahov je tentoraz

$$S = \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + \ldots + 4f(x_{N-1}) + 2f(x_N) + f(x_{N+1})\right).$$

Úloha: Vezmime si graf funkcie $f(x) = x^2\sqrt{3-x}$ na intervale (1, 2). Presná hodnota tohto integrálu je $S = 2{,}7408864$. Porovnajte odchýlku od tohto výsledku pri spomínaných troch metódach, ak interval delíme na

a) 20,
b) 1000 častí.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina B – kategórie po 2. sérii letného semestra 19. ročníka

	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	①	B-2.1	B-2.2	B-2.3	B-2.4	☠	Σ
1.	Imriška	Jakub	2 A	G BA J. Hronca	20.0	5.0	5.0	5.0	5.5		40.50
2.	Fecko	Stanislav	kv. A	G Pankúchova	18.5	4.5	4.0	5.0	4.0		36.70
3.	Hrdá	Marcela	sx.	G Turčianske Teplice	18.0	5.0	4.0	4.0	4.0		35.00
4.	Bzdušek	Tomáš	kv. A	G Piešťany	20.0	2.5	4.5	2.0	4.0		34.37
5.	Berta	Peter	1 A	G Veľké Kapušany	18.5	2.5	5.0	2.0	4.0		33.36
6.	Kaniansky	Miroslav	sx. A	G Piaristické Nitra	18.0	2.5	3.5	5.0	4.0		33.00
7.	Škrovinová	Katarína	sx.	G Nitra Párovská	19.0	2.5	2.0	5.0	4.0		32.50
8.	Takács	Michal	2 F	G BB Tajovského	17.5	4.5	4.0	2.0	4.0		32.00
9.	Zámečník	Peter	2 D	G MRŠ NMV	16.5	2.5	2.0	5.0	5.0		31.00
10.	Bogár	Ondrej	1 E	G ĽŠ Trenčín	17.8	2.0	2.5	5.0	1.0		29.76
11.	Piterka	Tomáš	sx. A	G Piaristické Nitra	18.0	2.0	0.5	5.0	4.0		29.50
12.	Fačkovec	Boris	kv. A	G Piešťany	18.2	1.5	2.0	2.0	4.0		29.15
13.	Perešíni	Peter	2 F	G BB Tajovského	14.0	4.5	4.0	2.0	4.0		28.50
14.	Komorovský	Marek	sx.	G Dubnica nad Váhom	17.0	3.8	2.0	2.0	3.5		28.30
15.	Molčány	Dušan	2 B	SPŠS BA Feinorovo nábr.	16.0	4.5	3.5	–	4.0		28.00
16.	Foltin	Miroslav	2 C	G Jána Hollého	12.5	2.4	3.5	5.0	4.0		27.40
	Hergelová	Beáta	2 B	G BST Lučenec	13.0	2.4	5.0	3.0	4.0		27.40
18.	Pôbišová	Zuzana	2 F	G BB Tajovského	16.0	4.2	2.0	1.0	4.0		27.20
19.	Regec	Mário	2 A	G PH Michalovce	11.5	4.2	1.5	3.0	4.0		24.20
20.	Štolcová	Jana	sx.	G Nitra Párovská	14.5	2.5	1.0	2.0	4.0		24.00
21.	Mikuláš	Ján	sx.	G BST Lučenec	13.0	0.5	2.5	2.0	4.0		22.00
22.	Švihorík	Róbert	kv.	G Nitra Párovská	11.5	3.0	1.0	2.0	2.0		20.94
23.	Kravec	Martin	2 A	G PH Michalovce	10.5	0.7	2.5	2.0	3.5	-1	18.20
24.	Šomodiová	Kristína	2 A	G Piešťany	6.5	2.0	1.5	2.5	4.0		16.50
25.	Vrbjárová	Michaela	1 A	G BST Lučenec	8.4	–	–	2.0	4.0		15.63
26.	Ďurčík	Miroslav	2 C	G BST Lučenec	6.5	0.5	2.0	2.0	4.0		15.00
27.	Uchytilová	Vendula	2 A	G J.K.Tyla	7.0	0.5	2.0	1.0	3.5		14.00
28.	Melicher	Radoslav	2 A	G BST Lučenec	7.5	0.5	1.5	0.0	1.0		10.50
29.	Malčická	Martina	sx.	G Banská Štiavnica	4.0	0.7	1.0	0.5	4.0		10.20
30.	Nagy	Jakub	9 C	ZŠ Požiarnicka 3	5.0	0.7	–	–	3.5		10.16
31.	Gál	Dárius	2		9.5	–	–	–	–		9.50
	Harmincová	Zuzana			9.5	–	–	–	–		9.50
33.	Beran	Jakub			9.0	–	–	–	–		9.00
34.	Přikrylová	Veronika	kv. A	OG ZA Varšavská cesta	7.8	–	–	–	–		7.82

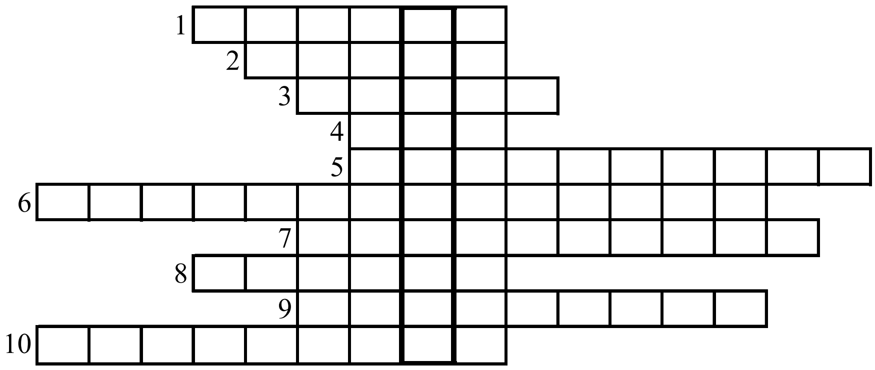
35. Dojčák	Lukáš	2 C	G PH Michalovce	7.0	–	–	–	–	7.00
36. Híreš	Michal	3 F	G VPT Martin	6.0	–	–	–	–	6.00
37. Pašuth	Ondrej	2 A	G PH Michalovce	5.5	–	–	–	–	5.50

Milá naša mládež!

Čas uteká ako utrhnutý z reťaze a koniec letnej série sa blíži. Preto, ako každý rok, aj teraz chystáme pre najlepších z vás letné sústredenie, ktoré bude v **...** (*tajnička*) v termíne od 21.6. do 27.6. 2004.

Tento rok sa z technických príčin neuskutoční LTT (Letný tábor Trojstenu, Trojsten je organizácia združujúca korešpondenčné semináre FKS, KMS, KSP organizované študentmi FMFI UK). Ale nezúfajte, v rámci spolupráce s inými seminármi vám posielame pozvánku na letný tábor Pikomatu a Pikofyzu.

A ešte jedna ponuka pre tých, ktorých nadchýna krásna príroda, železnička a majú chuť urobiť trochu užitočnej roboty. Ak sa chcete zoznámiť s novými ľuďmi a máte viac ako šestnásť rokov, zúčastnite sa na letnom tábore Krúžku (Klub romantikov úzkorozchodných železníc Oravy a Kysúc). Viac info na www.kruzok.sk .



1 – deň odovzdania 3. série
2 – súťaž družstiev, ktorú organizuje FKS
3 – hlavný vedúci FKS je...
4 – desiata cifra čísla π
5 – fyzikálne zariadenie v miestnosti FKS (slúži na oddelenie zložiek kvapaliny podľa teploty varu)
6 – škola vedúcich FKS sa nachádza v Bratislave v....
7 – aktuálny ročník FKS je v poradí...
8 – riešenia FKS je možné posielať slovenskou poštou alebo...
9 – písmeno D v skratke KZDF znamená...
10 – čo majú nové v F1-152 (žerie to papier a je to nové v miestnosti FKS)

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 2. série
A – kategória (starší)
19. ročník
letný semester
školský rok 2003/2004

www.fks.sk

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

A – 2.1 Nepresný čas (opravoval Matúš)

Mnoho ľudí dnes rozpráva o roztápaní ľadovcov. Málokto však vie, ako to ohrozí švajčiarskych výrobcov hodiniek... Predpokladajte, že v najbližších rokoch sa roztopí toľko polárneho ľadu, že hladina oceánov stúpne o jeden meter. Odhadnite, ako to ovplyvní dĺžku pozemského dňa!

Príklad nebol ťažký, no dobrá polovica z vás netrafila klinec po hlavičke. Všetci ste postrehli, že roztopením ľadu v blízkosti pólov sa zväčší pôvodný moment zotrvačnosti Zeme I_1. To preto, lebo voda sa rozprestrie rovnomerne (zanedbávame teda sploštenie Zeme spôsobené jej rotáciou) po celom povrchu oceánov a morí, a tak sa v priemere vzdiali od osi otáčania. Toto zvýši moment zotrvačnosti Zeme na novú hodnotu I_2 a to spôsobí spomalenie jej rotácie. Ale ako presne spôsobí?

Častý argument bol „energia sústavy sa zachováva“. Rotačná energia Zeme pred roztopením je $I_1\omega_1^2/2$, po roztopení $I_2\omega_2^2/2$. Ich porovnaním vieme pomocou známej hodnoty pôvodnej uhlovej rýchlosti otáčania ω_1 (jedna otočka 2π za jeden deň, teda 86 400 sekúnd) vypočítať uhlovú rýchlosť ω_2 a z nej i trvanie nového dňa. Chybička je v tom, že v tomto prípade sa energia nezachováva! Dúfame, že sa s touto smutnou správou rýchlo vyrovnáte. Vo fyzike sa to totiž stáva pomerne často...

Ale teraz vážne – prečo sa nám energia nezachováva? Lebo sa zachováva moment hybnosti a to v tomto prípade vylučuje zachovanie energie (o tom potom). Zíde sa zapamätať si, že zachovanie momentu hybnosti (či bez otáčavých pohybov zachovanie hybnosti) sú zákony tak trochu nadradené zachovaniu energie. Napríklad pri nepružnej zrážke gúľ sa zachováva hybnosť, no energia nie. Presnejšie povedané, časť mechanickej energie sa premieňa na energiu tepelnú, a tak sa vlastne energia ako taká zachováva, ale mechanická energia sa stráca.

Mohlo by nás zaujímať, kam sa stráca energia pri našom veľkom roztápaní. Nuž, ako obyčajne sa premieňa na teplo (to je snáď najčastejší zdroj podobných únikov energie). Iná situácia je napríklad v prípade krasokorčuliarky, ktorá robí piruetu. Pritiahne ruky k telu a zrýchli otáčanie. Ani tu sa nezachováva energia, ale moment hybnosti. Ak by sme vypočítali zmenu rotačnej energie, zistili by sme, že rastie! Ako to? Jednoducho. Krasokorčuliarke ťahá ruky od tela odstredivá sila. Pri ich priťahovaní preto vetché žieňa koná proti tejto sile prácu a táto práca sa prejaví zvyšovaním jej rotačnej energie! Skúste si zistiť, či to naozaj takto vyjde!

Základnou rovnicou je teda zachovanie momentu hybnosti L, ktorý sa počíta ako $L = I\omega$. Preto platí

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \omega_1 \frac{I_1}{I_2}.$$

Ostáva už len vypočítať hodnoty I_1 a I_2. V Encyklopédii astronómie sa dá nájsť rotačná energia Zeme ($2{,}1.10^{29}$ J). Keďže vieme pôvodnú uhlovú rýchlosť otáčania ω_1, je ľahké z toho (pomocou vzorca $E_{ROT} = I\omega^2/2$) dopočítať I_1, vyjde $8{,}0.10^{37}$ kgm^2. Väčšina z vás však na zistenie hodnoty I_1 použila vzorec pre moment zotrvačnosti gule, $I = 2mR^2/5$. Tu však pozor, toto platí iba pre homogénnu guľu a to teda Zem nie je (hustota pri povrchu cca 3000 kg/m^3, v hĺbke 3000 km už 10 000 kg/m^3). Preto je lepšie dobre pohľadať v literatúre a nájsť presnú hodnotu (zistenú experimentálne). Používatelia vzorca sa tentoraz pomýlili o celých 23%.

Aký bude nový moment zotrvačnosti I_2? Čosi ubudne (ľad v okolí pólov) a čosi pribudne (voda do výšky jedného metra všade inde). Povrch oceánov je zhruba 362 mil. km^2. Voda do výšky jedného metra preto znamená jej celkovú hmotnosť $m = 362.10^{15}$ kg. Pôvodne tvorila ľad po obvode Antarktídy, teda na zemepisnej šírke zhruba 70°. Ak označíme polomer Zeme R, takejto zemepisnej šírke zodpovedá vzdialenosť $R\cos 70°$ od zemskej osi. Teleso hmotnosti m vzdialené x od osi otáčania má moment zotrvačnosti mx^2. Preto z hodnoty I_1 ubudne moment zotrvačnosti veľkosti

$$I_- = m(R\cos\ 70°)^2.$$

Keď sa voda rozleje po povrchu Zeme, nejaký moment zotrvačnosti naopak pridá. Zanedbajme to, že oceány nie sú po povrchu Zeme rozložené rovnomerne a tvárme sa, akoby na povrchu pribudla vrstva vody s hrúbkou x (x je menšie než jeden meter a presne také, aby to spolu dalo hmotnosť m, ktorú už poznáme). Môžeme si tipnúť (tak ako niektorí z vás), že voda rovnomerne po povrchu Zeme má rovnaký moment zotrvačnosti ako keby bola na zemepisnej šírke cca 30° (hrubý odhad). Tomu zodpovedá pridaný moment zotrvačnosti veľkosti

$$I_+ = m(R\cos\ 30°)^2.$$

Ak chceme presnejší výpočet, môžeme si nájsť v (dobrých) tabuľkách vzorec pre moment zotrvačnosti tenkej guľovej škrupiny. Je to $I = 2mR^2/3$. Ak nevieme nájsť, tak si ho zistíme sami!

Pôvodný polomer Zeme označme R. Dôležitá myšlienka: vrstva vody je vlastne to isté ako guľa plná vody s polomerom $(R + x)$ mínus guľa plná vody s polomerom R. To isté musí platiť i pre jej moment zotrvačnosti I_+, preto

$$I_+ = \frac{2}{5}\left(\frac{4}{3}\pi(R+x)^3\rho\right)(R+x)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\rho\right)R^2 = \frac{8}{15}\pi\rho\left[(R+x)^5 - R^5\right]$$

Tie škaredé výrazy v zátvorkách sú len hmotnosti prislúchajúce guliam s daným polomerom (teda $V\rho$). Posledný výraz je možné zjednodušiť, ak roznásobíme zátvorky a uvedomíme si, že hodnota x je omnoho menšia než R. Preto vo výslednom (desivom) výraze škrtneme všetky členy obsahujúce vyššie mocniny x (teda x^2, x^3, atď.). Ak sme dobre počítali, mali by samé od seba vypadnúť aj členy bez x a ostane tak iba (skúste si to!)

$$I_+ = \frac{8}{15}\pi\rho R^4 x = \left(4\pi R^2 x\rho\right)\frac{2R^2}{3} = \frac{2}{3}mR^2.$$

Dokázali sme to, odvodili sme moment zotrvačnosti pre guľovú škrupinu. Môžeme si všimnúť, že výsledok je dosť blízky tomu tipnutému $m(R\cos 30°)^2$, to je totiž vlastne $3mR^2/4$. Tipnúť si nebol až taký hriech, dalo sa to celkom dobre trafiť...

Moment zotrvačnosti Zeme po roztopení ľadov teda bude

$$I_2 = I_1 - I_- + I_+ = I_1 + mR^2\left(\tfrac{2}{3} - (\cos\ 70°)^2\right) \approx I_1 + 8{,}1.10^{30}\ \mathrm{kg\,m^2}.$$

Ostáva už len dosadiť číselné hodnoty do vyššie napísaného vzťahu pre ω_2 a máme, čo sme chceli. Ak ešte použijeme

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} \;\Rightarrow\; T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2},$$

dokážeme si spätne dopočítať dĺžku nového, dlhšieho, dňa. Číselne to je zhruba o 0,01 sekundy menej než pôvodný, 86 400 sekúnd trvajúci deň. Za rok sa teda presné švajčiarske hodinky omeškajú zhruba o tri sekundy. A na záver ešte domáca úloha pre tých, čo použili zákon zachovania energie: koľko energie sa pri tomto spomalení Zeme stratí?

A – 2.2 Vodná planéta (opravovala Rebro)

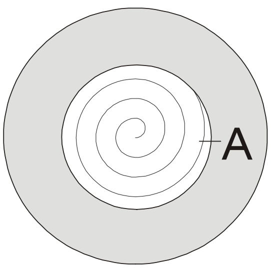
Vedci objavili zaujímavú novú planétu. Má tvar gule s polomerom R = 6400 km. Celý jej povrch je pokrytý oceánom z obyčajnej vody s hĺbkou H = 15 km. Vedci zistili, že zrýchlenie voľne padajúceho telesa zostáva nezmenené po ponorení do oceánu do rôznych hĺbok. Určte na základe týchto údajov zrýchlenie voľne padajúceho telesa na povrchu planéty, t.j. tesne nad vodnou hladinou. Odporové a vztlakové sily neuvažujte.

Hneď na úvod jedna dôležitá informácia. Myslíte si, že by sme boli takí zlí, aby sme vám dali príklad, kde potrebujete derivácie? Alebo integrály? Nieeeeee, brrr. I keď taký pekný integrálik ako relax počas dlhých zimných večerov... Ale, čo som tým chcela povedať, všetky príklady vo FKS by sa mali dať vypočítať bez derivácií, bez integrálov.

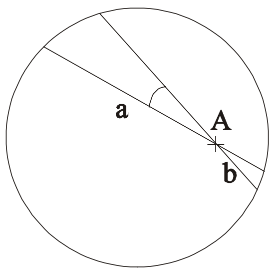
Ste už veľkí, mali by ste vedieť, že máločo vo fyzike vypočítate presne, väčšinou sú to samé priblíženia, zanedbania a pod. Pretože, bez toho nič zložitejšie nezrátate. Je pravda, že v zadaní bolo napísané, že „vedci zistili, že zrýchlenie je konštantné, bla bla.“. A faktom je, že vám mnohým vyšlo, že taká planéta neexistuje. Čo však urobí fyzik od srdca? Začne zanedbávať! Ja viem, mnohým sa to nebude páčiť, ale tak to vo fyzike chodí. Čo ak sa to dá narafičiť tak, aby zmena zrýchlenia bola tak malá, až bude nemerateľná? Nemôžete predsa čakať, že tí vedci to namerali úplne presne.

Poďme teda na príklad. Prvá vec, čo si bolo treba uvedomiť, bolo nájsť v knižke (alebo ste sa aj učili), že ak mám symetrickú guľu (aspoň po vrstvách symetrickú) a pýtam sa, akou silou na mňa pôsobí, resp. aké zrýchlenie mi udeľuje, môžem celú hmotnosť gule sústrediť do jej stredu a rátať akoby s hmotným bodom. Toto platí IBA pokiaľ sa nachádzam mimo gule. A čo ak sa nachádzam v jej vnútri? Vtedy na mňa pôsobí len to, čo je „podo mnou“, teda myslená guľa, ktorá má stred totožný so stredom pôvodnej gule a ja stojím na jej povrchu. Na obr.1 je to vyšpirálovatená guľa.

Šedý zvyšok gule nemá na mňa žiadny silový účinok. Namieste je otázka: Prečo? Pozrite sa na obr.2:



obr.1



obr.2

Skúmajme, ako pôsobí hmotná škrupina na pozorovateľa v bode A, t.j. v jej vnútri. Rozsekajme si škrupinu na malé časti tak, ako na obrázku. Silové pôsobenia takýchto kúskov sa po dvojiciach vyrušia. Prečo? Väčšia časť škrupiny má a/b-krát väčší rozmer. To znamená $(a/b)^2$-krát väčšiu plochu, resp. hmotnosť. Lenže je aj a/b-krát ďalej a sila klesá s druhou mocninou vzdialenosti. No a ak mi uveríte, že škrupina na mňa ozaj nepôsobí žiadnou silou, ostáva už len uveriť, že celé medzigulie môžem rozporcovať na veľa veľa tenkých škrupín.

Ďalej, ako bolo v zadaní, neuvažujeme vztlakovú silu, akýkoľvek odpor a dokonca ani to, že planéta rotuje. Jednak v zadaní nebolo napísané, na akom mieste sa ponáram (a odstredivé zrýchlenie mi dosť závisí od toho, či som na rovníku, či na póle). Druhá vec, vodná planéta má zhruba rozmery Zeme, u nás rozdiel zrýchlenia na rovníku a póle (v dôsledku rotácie) sú nejaké tie percentá, a preto v približnom výpočte môžeme rotáciu zanedbať (tak isto aj na našej vodnej planéte).

Označme si g_x gravitačné zrýchlenie v hĺbke x a g_0 zrýchlenie na povrchu. Napíšeme si rovničky, ktoré musia platiť.

$$g_x = \kappa \frac{M}{(R-x)^2}, \quad g_0 = \kappa \frac{M + M_x}{R^2}$$

$$M_x = \frac{4}{3}\pi\rho_{vody}\left(R^3 - (R-x)^3\right)$$

$$g_x = g_0$$

M je hmotnosť tuhej planéty s vrstvou vody hrúbky $(15 - x)$ km, t.j. do polomeru $(R - x)$ km, M_x je hmotnosť vrstvy vody nado mnou (má hrúbku x). Druhá rovnička je jasná, počítam hmotnosť guľovej vodnej vrstvy. Tretiu rovnicu mám zo zadania. Trošku matematiky (dosadím do tretej rovnice za g_x a g_0, vyjadrím M...) a dostaneme vzťah:

$$g_x = g_0 = \frac{4}{3}\pi\rho_{vody}\frac{3R^2 - 3Rx + x^2}{2R - x}.$$

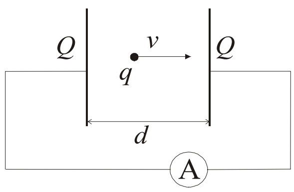
Vidíme, že g závisí od hĺbky ponorenia. Nuž, máme dve možnosti:

1. Povieme si, že $R = 6400$ km (vodná vrstva patrí k planéte, a teda R je polomer planéty aj s vodnou vrstvou) a x je maximálne 15 km, t.j. $x \ll R$. Zanedbáme členy s x a dostaneme
$$g_x = g_0 = \frac{4}{3}\pi\rho_{vody}\frac{3}{2}R,$$
po dosadení hodnôt $g_0 = 2{,}68\ \mathrm{ms}^{-2}$.
2. Za x postupne dosadíme 1 km, 5 km, 10 km, 15 km a zistíme, že výsledok sa nám líši v tisícinách. Prehlásime, že približne $g_0 = 2{,}68\ \mathrm{ms}^{-2}$.

Tak to by bolo asi všetko. Uznávam, pár fintičiek bolo treba, ale veď preto riešite FKS, aby ste sa o takých vecičkách dozvedeli. Pekný deň prajem.

A – 2.3 Náboj (opravil Čermo**,** vzorák podľa Peťa Matáka)

Predstavme si situáciu (pozri obrázok): dve rovnobežné kovové dosky kondenzátora (vzdialenosť d) sú vodivo spojené vodičom s ideálnym ampérmetrom. Na začiatku sú dosky nabité rovnakým nábojom Q. V čase t_0 z jednej dosky vytrhneme guličku s nábojom q (q je omnoho menší ako Q) a budeme ju ťahať k druhej doske konštantnou rýchlosťou v *kolmou na dosky. Zistite a vysvetlite, aký priebeh prúdu I(t) nameriame na ampérmetri.*



Pozrime sa najprv na prístup, ktorý zvolila väčšina z tých, ktorí mali tento príklad aspoň trochu dobre. Na prvý pohľad je jasné, že pri posúvaní náboja musí káblom pretiecť z pravej platne do ľavej presne náboj q. Toto sa musí udiať za čas d/v. Predpokladajme teraz, že ampérmeter nie je úplne ideálny, ale má nejaký malinký odpor. V dôsledku toho bude mať pri presúvaní náboja pravá platňa o čosi väčší potenciál ako ľavá. Označme tento potenciálový rozdiel U. Vo vnútri kondenzátora bude teda intenzita veľkosti $E = U/d$, kde d je vzdialenosť dosiek kondenzátora. Toto je prvé problémové miesto riešenia, aj keď skutočné „trable" ešte len prídu. Tento vzorec totiž platí pre homogénne pole vo vnútri kondíka a to vďaka malému náboju práve nebude. ($q \ll Q$ nie je presvedčivý argument, rozmyslite si, prečo). Dajme tomu, že s tým E je to tak, ako potrebujeme. Počas malého časového okamihu Δt pôsobíme na náboj silou veľkosti Eq (chceme ho udržať v rovnomernom pohybe) a prejdeme s ním dráhu $v\Delta t$. Znamená to, že sústave sme dodali energiu $Eqv\Delta t$. Zároveň sústava nejakú energiu stratila na tom, že náboj $I\Delta t$ sa premiestnil na miesto s nižším potenciálom. Ak celková energia kondíka je stále rovnaká (Hľa vyššie avizované problémy... Prečo by mala byť? Kondenzátor, aj keď skratovaný, v princípe môže uskladňovať energiu), musí platiť

$$Eqv\Delta t = I\Delta tU, \text{ a teda } \quad I = qv/d.$$

Čo ako dobrý by bol toto výsledok, kvôli vyššie spomínaným problémom za takéto riešenie nemôžete dostať príliš veľa bodov. A ako teda malo vyzerať šesťbodové riešenie?

Najprv si dáme krátku teoretickú prípravu. Majme dosku kondenzátora. Táto doska má dva veľké povrchy, na ktorých sa uskladňuje náboj. Ak teda hovoríme o tom, že doska kondíka je nabitá nábojom Q, myslí sa tým, že jej povrchy sú nabité nábojmi, ktoré v súčte dávajú Q. Predpokladajme teraz, že nábojom Q máme nabitý len jeden povrch dosky, náboj však nemusí byť rozmiestnený rovnomerne. Teraz môžeme spraviť nasledovnú úvahu: rozsekajme dosku na malé štvorčeky o ploche ΔS. Ak je táto plocha dostatočne malá, môžeme rátať s tým, že každý štvorček má svoju konštantnú plošnú hustotu náboja. Označme tieto hustoty σ_1, σ_2, σ_3,… Potom zrejme platí

$$\sigma_1\Delta S + \sigma_2\Delta S + \sigma_3\Delta S + ... = Q.$$

Ďalším bonbónikom, ktorý si dáme ešte v rámci rozbehovej teoretickej prípravy, je Gaussova veta. My sa ale uspokojíme s jej dôsledkom, ktorý hovorí, že v bezprostrednej blízkosti kovového predmetu spĺňa intenzita el. poľa dve podmienky:

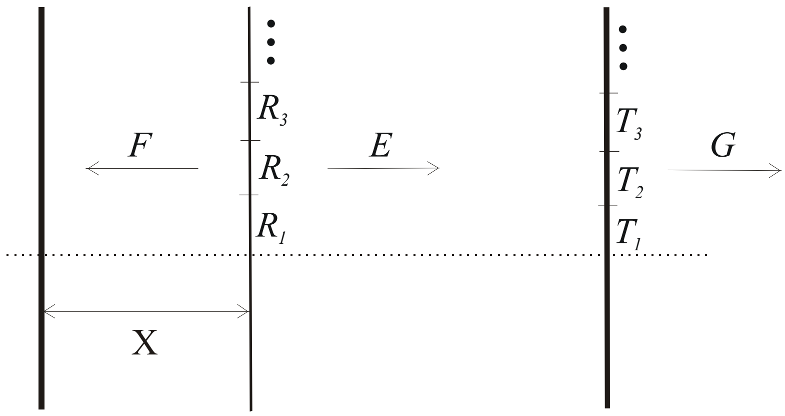
1. jej smer je kolmý na povrch,
2. jej veľkosť je σ/ε, kde ε je permitivita daného prostredia (v našom prípade vákua) a σ je povrchová hustota náboja v danom mieste.

Ďalej si treba uvedomiť, že výsledok nebude závisieť od veľkosti Q. Rovnomerne rozmiestnený náboj Q na oboch doskách totiž spôsobuje nulové elektrické pole. Rátajme teda s $Q = 0$. (Teraz sa síce ťažko bude vyrábať gulička s nábojom q, ale svet fantázie je mocný.) Koniec teoretickej prípravy.

A ideme na to. Majme náboj q vo vzdialenosti x od ľavej dosky. Aký náboj bude v tomto okamihu na pravej doske? Rozsekajme si pravú dosku vyššie popísaným spôsobom na štvorčeky (tenučké kvádriky) s plochou ΔS. Budeme ich nazývať T_1, T_2, T_3 ,...Označme σ_1, σ_2, σ_3,... plošné hustoty náboja prislúchajúce k ľavému povrchu týchto štvorčekov a λ_1, λ_2, λ_3,... k pravému povrchu. Celkový náboj Q pravej dosky potom spĺňa

$$Q = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + ... + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + ...$$

No hej, to sme si teda pomohli… Tu sa zastavíme a túto situáciu si označíme ako situáciu α. Skúsme na chvíľu zabudnúť na náboj q a na jeho mieste si predstaviť dosku podobnú doske kondenzátora rovnobežnú s nimi. Túto dosku si v mysli zase rozsekáme a do každého štvorčeka s plochou ΔS dáme náboj q. Vďaka symetrii celého tohto sa nám náboje q nebudú preskupovať medzi štvorčekmi. Tieto nové štvorčeky nazveme R_1, R_2, R_3,…. Pozrime sa teraz znovu na pravú platňu, zamerajme sa na jej jeden štvorček. Napríklad T_1. Silou naň pôsobia všetky štvorčeky R_1, R_2, R_3 a každý spôsobuje nejakú plošnú hustotu náboja, ktorá by bola v danom mieste nebyť ostatných. Výsledná hustota náboja sa potom rovná súčtu týchto čiastkových hustôt. Označme túto hustotu σ. Čiastkové hustoty náboja, ktoré ju vytvorili, sa ale presne rovnajú hustotám, ktoré spôsobí náboj q v situácii α (resp. osamotený štvorček R_1 v situácii β) na štvorčekoch T_1, T_2, T_3,... (pozri obrázok).



Preto súčet $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots$v prípade α sa vlastne musí rovnať σ v prípade β. Dôsledkom je dôležitá vec: V prípade α je na ľavom povrchu pravej dosky presne taký istý náboj, ako sa v prípade β ukrýva v ľavom povrchu malého štvorčeka T_1. No a to je práve tá šesťbodová úvaha. Porátať, ako to bude vyzerať v prípade β, je jednoduchý, ľahký, spánok navodzujúci príklad. Všetky polia máme teraz homogénne. Označme preto veľkosti príslušných intenzít E a F ako na obrázku. Obe dosky kondenzátora majú rovnaký potenciál (sú predsa vodivo spojené). Platí teda:

$$Fx = E(d - x).$$

Ďalej z Gaussovej vety pre strednú platňu máme:

$$q/\Delta S = (E + F)\varepsilon$$

(nevieme, ako sa rozloží q medzi dva povrchy, ale vieme, že v súčte musia tie náboje dať q). Riešením týchto rovníc dostaneme

$$E = \frac{qx}{d\Delta S\varepsilon}, \quad \text{teda} \quad \sigma = \frac{qx}{d\Delta S}.$$

Na ľavom povrchu štvorčeka T_1 v prípade β sa ukrýva náboj $\sigma\Delta S = qx/d$, čo je náboj na celom ľavom povrchu dosky v situácii α. Posledná vec, ktorú je dôležité si uvedomiť je, že v prípade β bude intenzita G stále rovnaká pre ľubovoľné x. To znamená, že náboj na pravom povrchu pravej dosky sa nemení a jedinú zmenu náboja pravej dosky zabezpečuje ľavý povrch. Náboj, ako vidíme, sa mení lineárne od x, znamená to, že prúd je konštantný a jeho veľkosť je

$$I = qv/d.$$

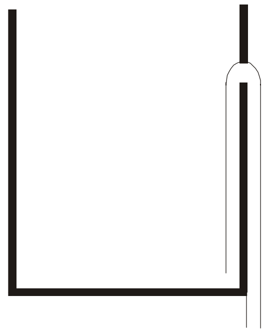
Na záver ešte jedna myšlienka: v prípade α sme ticho neuvažovali, že na pravú dosku kondenzátora pôsobí aj ľavá doska (okrem náboja q). Napriek tomu je tento vplyv zarátaný... rozmyslite si prečo.

A – 2.4 Mystické plnidlo (opravoval Tomáš)

Predstavte si nasledujúce zariadenie (budeme ho volať plnidlo). Do plnidla stále priteká voda. Nejaký čas, povedzme 10 minút, sa plnidlo touto vodou plní. Potom naraz v priebehu krátkej chvíle všetka voda vytečie z plnidla von a proces sa opakuje od začiatku, t.j. zase sa 10 minút plní.. Ale pozor! O plnidle vám prezradím, že neobsahuje žiadnu pohyblivú súčiastku (teda, že žiadna súčiastka ani jej časť nemení svoju polohu). Je možné takéto plnidlo skonštruovať? Ak áno, ako?

Tento príklad na to, aký bol ľahký, vôbec nedopadol dobre. Problém je v tom, že príliš abstinujete, nechováte rybičky a nekradnete benzín. Každý, kto niekedy „sťahoval“ víno, potreboval prečerpať vodu z akvária alebo kradol benzín z nádrže zaparkovaného auta (to som odkukal z nejakého akčného filmu a rozhodne to doma neskúšajte) pozná nasledujúcu fintu (pozrime sa napríklad na to vínko): strčíme jeden koniec hadičky do demižónu. Upravíme svoju polohu tak, aby sa ústna dutina nachádzala pod úrovňou dna demižóna. Druhý koniec hadičky dáme do úst, ktorými nasajeme víno do trubičky. Ak nám chutí môžeme si ešte trochu cucnúť. Odtiahneme papuľu a ľaľa – víno chytilo ťah a pekne nám steká trubičkou von, kde už máme pripravenú nejakú zbernú nádobu (napríklad kamarátove smädné ústa).

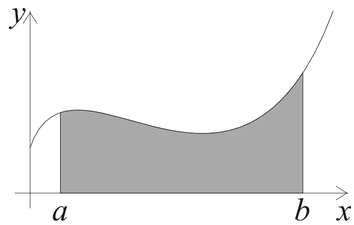
Že prečo to funguje? Samozrejme preto, lebo podtlak ktorý vytvára víno v „ústnej“ časti hadičky stačí na to, aby nacucávalo víno z demižónovej časti. Tento fígeľ by samozrejme nefungoval, keby sme to celé na začiatku neboli nainicializovali – nacucali sme víno do celej dĺžky trubičky. V tomto okamihu si už, dúfam všetci, čo tento príklad nezrátali, búchajú hlavy o stenu. Táto vlastnosť hadičkovej finty je totiž presne to, čo potrebujeme do plnidla – nejaký vytekací mechanizmus, ktorý sa ale musí nejakým spôsobom nainicializovať. No a ako to celé bude vyzerať už ukazuje obrázok. V okamihu, keď voda vystúpi nad oblúk rúrky, táto sa naplní vodou (jej prierez nesmie byť príliš veľký, viedlo by to ku komplikáciám) a postupne vínovým mechanizmom vycucá vodu z nádoby, ktorá sa začne plniť znovu.



No a vaše riešenia (musím uznať) – konštruovať plnidlo na báze kapilárnych javov, ohrievania, odparovania, či namŕzania vody presiahlo moje najbúrlivejšie fyzikálne predstavy. Tieto riešenia väčšinou nedostávali plný počet bodov – ich funkčnosť je totiž hrozne obmedzená. Väčšina kapilárnych plnidiel fungovala iba pre veľmi malé objemy vody, namŕzacie finty zase väčšinou prepustia nejaké množstvo vody aj vtedy, keď by nemali (ťažko si predstaviť vodu, ako si to trieli sklenenou rúrkou a zrazu zwung a je z nej ľad).

FKS & počítače, časť II.

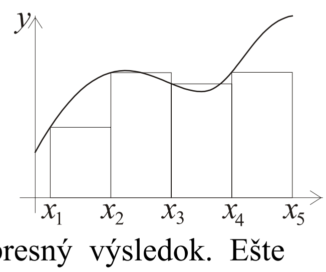
Prvá časť seriálu sa venovala numerickému hľadaniu koreňov rovníc. Ďalšou úlohou, ktorú počítače často riešia, je numerické integrovanie. Niektorí z vás o integráloch ešte nepočuli, preto si zadajme úlohu „ľudskejšie“: nájdime plochu pod krivkou, ktorú vykresľuje funkcia $f(x)$ na intervale $x \in (a, b)$ (pozri obrázok).



Dĺžku výletu (krivoľakej čiary) na turistickej mape zisťujeme prikladaním pravítka a meraním krátkych aspoň trochu rovných úsekov. Podobne počítanie sivej plochy na obrázku spočíva v rozdelení intervalu (a, b) na kratšie časti, na ktorých už funkcia $f(x)$ nie je „až taká zvlnená“. Pravda, toto sa dá urobiť viacerými spôsobmi, ktoré sa líšia presnosťou výsledku. Spomenieme aspoň niektoré z nich...

I. obdĺžniková metóda:

Namiesto slov nech prehovorí obrázok. Ako vidíme, peknú zvlnenú funkciu sme si na ňom nahradili schodiskom, plocha pod ktorým sa rozhodne nerovná hľadanej sivej ploche. Zároveň však vidíme, že zužovaním schodov (teda zmenšovaním dĺžky intervalov Δx, na ktoré delíme zadaný interval (a, b)) sa rozdiel medzi zadanou $f(x)$ a „schodiskom“ stráca. Ak zvolíme dosť malé Δx, dostaneme dosť presný výsledok. Ešte napíšme vzorec pre obsah i-teho obdĺžnika: $S_i = \Delta x\, f(x_i)$, kde x_i je x-ová súradnica začiatku obdĺžnika. Ak delíme interval (a, b) na N častí, tak $\Delta x = (b - a)/N$ a navyše

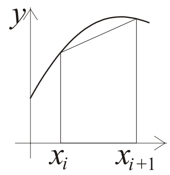


$$x_i = a + (b - a)(i - 1)/N$$

(vyskúšajte si, či je to tak!). Sčítaním obsahov všetkých obdĺžnikov získavame výsledok

$$S = \Delta x\left(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_N)\right).$$

II. lichobežníková metóda:



Tu je iba malý rozdiel oproti minulému postupu. Opäť vytýčime deliace body x_1, x_2,..., x_N ($x_1 = a$, $x_{N+1} = b$). Teraz však funkciu medzi nimi nahradíme rovnou čiarou a dostaneme tak lichobežník (odtiaľ pochádza názov metódy). Jeho obsah je S = $\Delta x\, (f(x_i) + f(x_{i+1}))/2$. Súčet všetkých lichobežníkov je preto (premyslite si)

$$S = \frac{\Delta x}{2}\left(f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + \ldots + 2f(x_N) + f(x_{N+1})\right).$$

Vidíme, že grafické vyjadrenie metódy bolo úplne iné ako v prvom prípade, vzorec je však veľmi podobný...

III. Simpsonova metóda:

Všimnime si, že posledné dve metódy fungovali presne iba pre veľmi špeciálne funkcie. V prvom prípade pre funkcie, ktoré boli na malých intervaloch (x_i, x_{i+1}) konštantné (iba vtedy splynú schody presne so zadanou funkciou). V druhom prípade pre funkcie, ktoré boli na malých intervaloch lineárne (vtedy splynie vzniknutý lichobežník s plochou pod funkciou). Čo tak vymyslieť metódu, ktorá by presne fungovala aj pre komplikovanejšie funkcie? Toto si dal za cieľ Simpson a na naše šťastie úlohu aj vyriešil. (Pozor, teraz musí byť N párne číslo!) Zoberme si funkciu, ktorá je na intervale (x_1, x_3) kvadratická (teda má tvar $ax^2 + bx + c$). Potom vzorec $\Delta x\, (f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3))/3$ dáva presnú hodnotu obsahu pod krivkou na tomto intervale (bod x_2 leží v strede medzi x_1 a x_3). Kto vie integrovať, môže sa ľahko presvedčiť. Takže... Našli sme vzorec, ktorý nám dá presný výsledok aj pre kvadratickú funkciu! A naozaj – táto metóda je spomedzi troch tu spomenutých zvyčajne najvýkonnejšia. Súčet všetkých obsahov je tentoraz

$$S = \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + \ldots + 4f(x_{N-1}) + 2f(x_N) + f(x_{N+1})\right).$$

Úloha: Vezmime si graf funkcie $f(x) = x^2\sqrt{3-x}$ na intervale (1, 2). Presná hodnota tohto integrálu je $S = 2{,}7408864$. Porovnajte odchýlku od tohto výsledku pri spomínaných troch metódach, ak interval delíme na

a) 20,

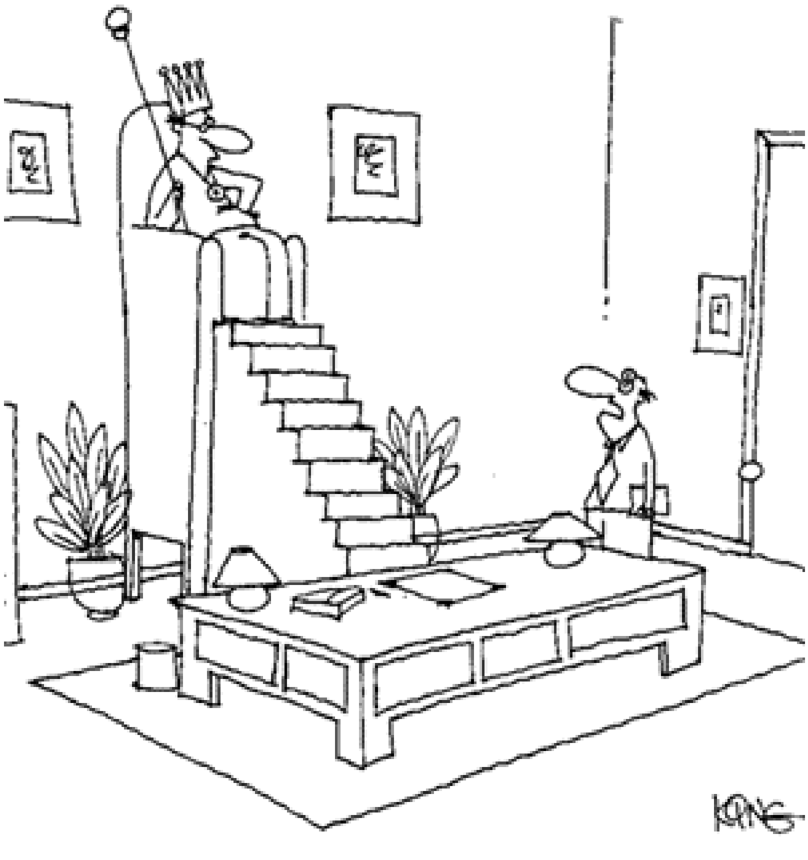
b) 1000 častí.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina A – kategórie po 2. sérii letného semestra 19. ročníka

	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	①	A-2.1	A-2.2	A-2.3	A-2.4	☠	Σ
1.	Maták	Peter	4 E	G VBN Prievidza	20.0	4.5	3.5	6.0	4.0		38.00
2.	Závodný	Jakub	ok.	G BA Grösslingova	20.0	5.0	5.0	3.0	4.0		37.00
3.	Lalinský	Ján	se. A	G Varšavská cesta	18.5	5.0	5.0	0.5	4.0		34.24
4.	Simančík	František	se.	G BA Grösslingova	17.4	4.5	5.0	–	4.0		32.18
5.	Neilinger	Pavol	4 A	G Dunajská Streda	18.0	3.5	5.0	3.0	2.5		32.00
6.	Baník	Dušan	4 A	G Poprad Popr. nábr.	17.0	4.0	4.5	2.0	4.0		31.50
7.	Ďurák	Michal	4 C	G BST Lučenec	20.0	2.5	3.5	2.5	2.5		31.00
8.	Dzetkulič	Michal	3 A	G PH Michalovce	14.8	2.5	5.0	2.0	4.0		29.63
9.	Astaloš	Róbert	3 A	G Rimavská Sobota	17.4	2.0	5.0	2.5	1.0		29.36
10.	Kysel	Róbert	4 A	G BB Š. Moyzesa	16.0	5.0	5.0	1.0	2.0		29.00

11.	Šoltésová	Mária	4 B	G BA Grösslingova	19.0	5.0	3.5	–	1.0	28.50
12.	Ruman	Ján	se.	G BA Grösslingova	13.9	3.5	4.0	1.0	4.0	27.81
13.	Molnárová	Katarína	3 D	G KE Šrobárova	15.5	2.0	5.0	1.0	2.0	27.04
14.	Lauko	Martin	ok. A	G JL Martin	15.0	2.0	5.0	0.5	4.0	26.50
	Mikulík	Andrej	4 B	G BA Grösslingova	14.5	5.0	3.5	1.5	2.0	26.50
16.	Batmendijnová	Zuzana	ok.	G T. Vansovej	14.5	3.0	2.5	2.0	4.0	26.00
17.	Brutovská	Eva	ok.	G Kežmarok	14.0	2.5	4.0	1.0	2.5	24.00
18.	Krššák	Martin	ok. A	G Piaristické Nitra	13.0	2.0	5.0	3.0	0.5	23.50
19.	Sasák	Róbert	3 D	SPŠE Piešťany	12.0	2.0	2.5	1.0	4.0	22.99
20.	Vojtko	Andrej	se. A	G Skalica	9.4	2.0	5.0	0.5	2.0	20.44
21.	Štolc	Miroslav	ok.	G Nitra Párovská	18.5	–	–	–	–	18.50
	Trubenová	Barbora	4 A	G BA J. Hronca	18.5	–	–	–	–	18.50
23.	Džunko	Ján	se.	G Spišská Stará Ves	8.4	2.0	1.5	1.5	2.0	16.73
24.	Šibík	Juraj	3 D	G Považská Bystrica	5.1	2.0	5.0	–	2.5	16.12
25.	Imriška	Jakub	2 A	G BA J. Hronca	6.1	4.5	–	–	4.0	16.09
26.	Mánik	Tomáš	4 C	G BST Lučenec	15.0	–	–	–	–	15.00
27.	Rušin	Michal	se.	G Spišská Stará Ves	6.7	2.0	1.5	1.5	1.5	14.51
28.	Kováč	Adrián	3 A	G PH Michalovce	13.9	–	–	–	–	13.91
29.	Glaus	Peter	4 A	G BA J. Hronca	13.5	–	–	–	–	13.50
30.	Kubová	Miška	3 A	G Vrbové	0.5	2.5	2.5	1.0	4.0	12.04



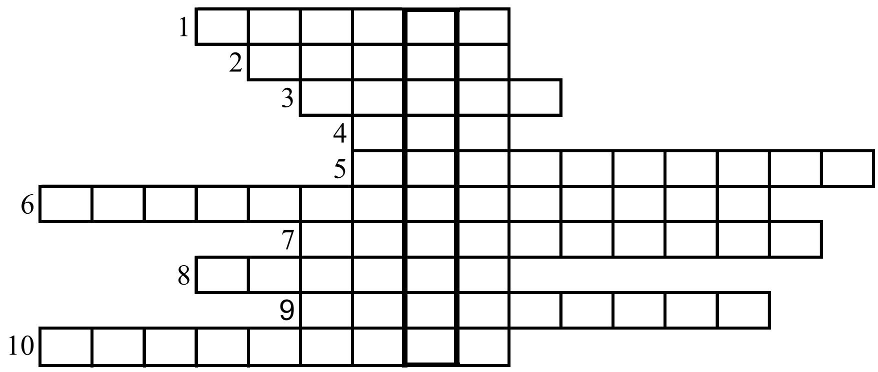
"Prepáčte pán Newton, ale niektorí zo zamestnancov si myslia, že vám to povýšenie stúplo do hlavy."

Milá naša mládež!

Čas uteká ako utrhnutý z reťaze a koniec letnej série sa blíži. Preto, ako každý rok, aj teraz chystáme pre najlepších z vás letné sústredenie, ktoré bude v **...** (*tajnička*) v termíne od 21.6. do 27.6. 2004.

Tento rok sa z technických príčin neuskutoční LTT (Letný tábor Trojstenu, Trojsten je organizácia združujúca korešpondenčné semináre FKS, KMS, KSP organizované študentmi FMFI UK). Ale nezúfajte, v rámci spolupráce s inými seminármi vám posielame pozvánku na letný tábor Pikomatu a Pikofyzu.

A ešte jedna ponuka pre tých, ktorých nadchýna krásna príroda, železnička a majú chuť urobiť trochu užitočnej roboty. Ak sa chcete zoznámiť s novými ľuďmi a máte viac ako šestnásť rokov, zúčastnite sa na letnom tábore Krúžku (Klub romantikov úzkorozchodných železníc Oravy a Kysúc). Viac info na www.kruzok.sk .



1 – deň odovzdania 3. série
2 – súťaž družstiev, ktorú organizuje FKS
3 – hlavný vedúci FKS je...
4 – desiata cifra čísla π
5 – fyzikálne zariadenie v miestnosti FKS (slúži na oddelenie zložiek kvapaliny podľa teploty varu)
6 – škola vedúcich FKS sa nachádza v Bratislave v....
7 – aktuálny ročník FKS je v poradí...
8 – riešenia FKS je možné posielať slovenskou poštou alebo...
9 – písmeno D v skratke KZDF znamená...
10 – čo majú nové v F1-152 (žerie to papier a je to nové v miestnosti FKS)