FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 3. série
B – kategória (mladší)
19. ročník
zimný semester
školský rok 2003/2004

www.fks.sk

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

B – 3.1 Hair (opravovala Saša)

Vzhľadom na veľmi populárny muzikál Vlasy, ktorý mal v týchto dňoch premiéru aj na Slovensku, Vás jeho producenti žiadajú o pomoc. Keďže herci sa pri svojich kreatívnych kúskoch často ťahajú za vlasy, chcú vedieť, koľko toho ešte vydržia. Odmerajte medzu pevnosti ľudského vlasu v ťahu.

Ahoj! Dúfam, že už všetkým dorástli vytrhané vlasy použité na tento pokus a že vaše mamy, spolužiačky a sestry sú hrdé na to, že práve ich vlasy boli použité na vaše vedecké pokusy.

Vašou úlohou bolo odmerať medzu pevnosti ľudského vlasu v ťahu. Medza pevnosti v ťahu σ je definovaná ako podiel maximálnej sily F, pri ktorej ešte nenastane porušenie materiálu a prierezu S telesa z tohoto materiálu, na ktoré táto sila pôsobí. Teda

$$\sigma = \frac{F}{S}.$$

Priamo odmerať medzu pevnosti nevieme. Ľahko ju však spočítame, ak si odmeriame maximálnu silu F, ktorej pôsobenie vlas ešte vydrží (resp. maximálnu hmotnosť m, ktorú vlas udrží a z nej vypočítame silu F ako tiažovú silu $F = mg$) a prierez vlasu S. Keďže vlasy sú akoby dlhé valčeky s kruhovým prierezom, stačí nám zmerať priemer vlasu d a vypočítať prierez vlasu zo vzorca $S = 1/4\pi d^2$. Po dosadení dostávame vzorec na výpočet medze pevnosti, do ktorého už len dosadíme namerané hodnoty.

$$\sigma = \frac{4F}{\pi d^2} \quad \text{resp.} \quad \sigma = \frac{4mg}{\pi d^2}.$$

Pri experimentoch sa patrí určiť aj odchýlky merania, aby sme vedeli, nakoľko sú naše merania presné. Relatívna chyba merania medze pevnosti na základe horeuvedeného vzorca sa určí ako $\delta\sigma = \delta F + 2\delta d$ a absolútna chyba $\Delta\sigma = \sigma.\ \delta\sigma$.

Takže poďme sa zaoberať samotným experimentom. V našom experimente (ktorý kedysi dávnejšie spravil bývalý FKSák Roman, nech mu je česť a chvála), sa použili dva druhy vlasov. Plavý vlas dĺžky 54,5 cm a hnedý vlas dĺžky 12 cm. Ako ste mnohí správne podotkli, pevnosť vlasu často závisí aj od jeho dĺžky (dlhší vlas zvykne byť viac poškodený, vydrží menej), ako aj od jeho pôvodu. Podľa literatúry bývajú plavé vlasy hrubšie ako tmavé a rovnako hrúbka vlasov závisí aj od ľudskej rasy.

V prvej časti experimentu Roman digitálnym mikrometrom zmeral priemer vlasu. Namerané hodnoty v šiestich meraniach uvádzam v nasledujúcich tabuľkách:

plavý vlas	*pokus č.*	1	2	3	4	5	6	*priemer*
	d (mm)	0,060	0,061	0,058	0,058	0,060	0,065	0,060

tmavý vlas	*pokus č.*	1	2	3	4	5	6	*priemer*
	d (mm)	0,043	0,049	0,046	0,044	0,045	0,048	0,046

V prvom prípade je relatívna odchýlka merania priemeru d rovná 3%, v druhom prípade 4%, takže pre plavý vlas máme d = (0,060±0,002) mm, pre tmavý vlas d = (0,046±0,002) mm.

V druhej časti experimentu náš experimentátor nameral silu F jednoducho silomerom. Jeden koniec vlasu niekam pevne ukotvil, druhý pripevnil o silomer a odmeral na silomeri silu, pri ktorej sa vlas roztrhol. Roman mal k dispozícii z každého druhu zrejme len po jednom vlase, a teda pri meraní sily F nerobil viacero pokusov.

Pre plavý vlas nameral hodnotu F = 0,7 N s absolútnou chybou určenia 0,02 N. Relatívna odchýlka teda bola 3%. Tmavý vlas vydržal pôsobenie maximálne sily F = 0,4 N s rovnakou absolútnou chybou, teda relatívna odchýlka tentoraz bola 5%.

No a keď už máme takto všetko namerané, dosadením do horeuvedeného vzorca dostaneme medzu pevnosti. Plavý vlas má medzu pevnosti σ = 248 MPa s relatívnou chybou 9%, a teda tolerancia je σ = (248±22) MPa. Pre tmavý vlas sme dostali nasledujúce výsledky:

σ = 241 MPa s relatívnou chybou 13%, výsledná hodnota leží v intervale σ = (248±22) MPa.

Samozrejme, netreba zabudnúť podotknúť, že vlas sa trhá najčastejšie tam, kde je poškodený, a pritom určený priemer vlasu vôbec nemusí zodpovedať práve tomuto miestu. Na porovnanie pevnosti vlasu uvediem ešte tabuľkové hodnoty medze pevnosti v ťahu niektorých materiálov. Tak napr. pre oceľ je to 350-800 MPa, meď 180-450 MPa, hliník 70-190 MPa a drevo 70-90 MPa. Vyzerá to tak, že medza pevnosti vlasu v ťahu je naozaj vysoká...

Vo vašich riešeniach sa vyskytli nápadité experimenty prevedené v domácich podmienkach, kde ste na vlas skúšali zavesiť všetko od malých závažičiek, cez vodu, soľ a cukor, až po nožnice. Asi polovica z vás priemer vlasu len odhadla, resp. vyčítala z literatúry, pričom ste sa nezaoberali tým, či takýto priemer sa týka práve vašich vlasov. Celkom dobré odhady priemeru vlasu mali okrem mikrometrom merajúcich aj tí, ktorí vlas niekoľkokrát omotali okolo špajle či ceruzky a aj tí, ktorí vlas pozorovali pod mikroskopom a následne prepočítali jeho zväčšenie.

Vaše výsledky sa pohybovali v hraniciach od 11 kPa po 400 MPa, aj keď viaceré extrémne nízke výsledky boli spôsobené len zlým premenením jednotiek či zlým dosadením do vzorca :-) Drvivá väčšina výsledkov tých, ktorí došli až k medzi pevnosti bola od 100 MPa do 400 MPa, čo je pomerne dobrý výsledok. Častou chybou bolo, že ste sa dopracovali len k sile F, ktorú vlas znesie, a tú ste považovali za pevnosť vlasu v ťahu.

Čo sa týka určenia tolerancie výsledku a presnosti vášho merania, na jednej ruke zrátam, koľko bolo tých, čo sa zaoberali aj odchýlkami. Nič to (viem, že mnohí sa to v škole poriadne ani neučíte), ale aspoň nabudúce budete vedieť, že pri experimentálnej úlohe sa to patrí. K experimentálke rovnako patrí aj viacero meraní!. To bola ďalšia častá chyba vo vašich riešeniach.

No čo dodať na záver? Producentom v Hair môžeme odkázať, že vlasy toho vydržia pomerne dosť, ale ako niektorí podotkli, skôr sa vlasy vytrhnú z hlavy aj s korienkami, ako sa pretrhnú, takže s tým ťahaním za vlasy by to tí herci možno len predsa nemali preháňať.

Dúfam, že ste sa pri experimentoch dobre pobavili a teraz šup-šup, už treba vešať vianočné gule na stromček... vianočné zvončeky už zvonia...

B – 3.2 Janove plyny (opravoval Džony)

V jedno studené októbrové ráno sa išiel Ján člnkovať na Dunaj a zbadal nevídanú vec. Slnko zubato svietilo a z vodnej hladiny stúpal hustý biely dym. Vysvetlite Janovo pozorovanie.

Ahoj!

Veľa z vás prišlo na podstatu tejto úlohy, ale nie všetci ste ju aj dobre, do detailov, vysvetlili. Väčšinou ste písali, že voda z Dunaja sa vyparovala a na chladnom vzduchu kondenzovala (skvapalňovala sa). To je fajn, ale prečo by mal byť vzduch chladný a voda nie? Ako je to s tými teplotami?

Tak teda vráťme sa na chvíľku k tomu osudnému ránu.

V októbri bývajú noci na Dunaji už dosť chladné (vzduch má okolo 0°C), ale cez deň sa teplota vzduchu často vyšplhá aj na 15-20°C. Podstatné je zistiť, ako je na tom teplota vody. To uvidíme hneď ako spoznáme fyzikálnu veličinu nazvanú merná tepelná kapacita. Táto veličina vyjadruje množstvo tepla, ktoré musím dodať jednému kilogramu danej látky, aby sa ohrial o jeden stupeň. Takže čím má látka vyššiu mernú tepelnú kapacitu, tým jej musím dodať viac tepla, aby sa ohriala o jeden stupeň. Analogicky to funguje aj v prípade ochladenia. Čím má látka vyššiu tepelnú kapacitu, tým musí viac tepla odovzdať na to, aby sa ochladila o jeden stupeň. Voda má oproti vzduchu omnoho vyššiu mernú tepelnú kapacitu (približne 4-krát). Keď teda dodávam (odoberám) teplo postupne, tak zohriatie (ochladenie) vody trvá dlhšie ako zohriatie vzduchu. V noci, keď klesne teplota, sa vzduch ochladí omnoho rýchlejšie ako voda, resp. teplota vody nestihne do rána klesnúť na hodnotu teploty vzduchu.

Tak a máme krásne ráno. Voda je teplejšia ako vzduch a vyparuje sa (pretože sa vyparuje pri každej teplote). Táto vodná para na vzduchu rýchlo kondenzuje (prípadne až desublimuje), pretože jej teplota klesá pôsobením okolitého vzduchu. Kondenzácia je v podstate premena skupenstva z plynného na kvapalné a sublimácia je z plynného priamo na pevné skupenstvo. Už tesne nad vodou teda vzniká akási zmes maličkých kvapôčiek vody (alebo až kryštálikov ľadu) a vzduchu – hmla. Stúpa z vodnej hladiny preto, že spočiatku má ešte vyššiu teplotu (nižšiu hustotu) ako vzduch. Teplota sa ale dosť rýchlo vyrovná, a preto tieto "kúdoly dymu" stúpajú iba do istej výšky. To, prečo sa hmla javí biela, je už na iné, zložitejšie rozprávanie. Môžeme ale prezradiť, že sa jedná o rozptyl svetla (tiež nazývaný Mieov rozptyl) na čiastočkách vody.

B – 3.3 Iný svet (opravovala Rebro)

Za siedmimi horami, za siedmimi dolinami a troma riekami je hviezdna sústava veľmi podobná tej našej, slnečnej. Rozdiel je iba v tom, že všetky vzdialenosti a rozmery sú tam dvakrát väčšie, zatiaľ čo všetky hustoty sú tam štyrikrát menšie. Ako dlho trvá rok na tamojšej obdobe našej Zeme?

Bolo tu viacero možností, záležalo len na vkuse riešiteľa, ktorú z nich si vyberie. Ja tu dve či tri aj popíšem. Čo mali všetky možnosti spoločné? Bolo si treba uvedomiť, že keď sa menia dĺžky a hustoty, menia sa aj hmotnosti, polomery, rýchlosti atď. Na druhej stranu platia tu tie isté fyzikálne zákony a konštanty zostávajú konštantami.

Prvá možnosť: ak uvážime, že planéty sa pohybujú po kružniciach (je to dobré priblíženie), vieme si vypočítať periódu tohto pohybu ako dĺžku kružnice predelenú rýchlosťou. Vieme, že polomer sa nám zdvojnásobí. Čo sa však stane s rýchlosťou? Uvažujme ďalej. Prečo planéty krúžia okolo centrálneho telesa? Pôsobí na ne príťažlivá gravitačná sila. Máme tu neinerciálnu vzťažnú sústavu. Preto dopĺňame dodatočnú fiktívnu silu – odstredivú (aby sme mohli použiť prvý Newtonov zákon). Teraz sú sily pôsobiace na planétu v rovnováhe, a preto

$$F_g = F_{od} . \qquad (1)$$

Toto rozpíšeme: $$\kappa \frac{mM}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$$

a vyjadríme rýchlosť $$v = \sqrt{\frac{\kappa M}{R}}\,.$$

Tú dosadíme do vzťahu pre periódu $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{R^3}{\kappa M}}$

a máme čas obehu pre našu Zem. Teraz ešte rozpíšeme hmotnosť na drobné. Dosadíme zmenené dĺžky a hustoty a ešte trochu upravíme (r je polomer Slnka):

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{(2R)^3}{\kappa \frac{\rho}{4} \frac{4}{3} \pi (2r)^3}} = 2 \cdot 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\kappa \rho \frac{4}{3} \pi r^3}} = 2 \cdot T$$

Dostávame, že čas obehu „Tej Inej Zeme" je dvakrát väčší ako našej.

Druhá možnosť: Zoberme si tretí Keplerov zákon. Pozor! Je nutné uvedomiť si dôležitú vec. Zvyčajne je napísaný tak, že pomer T^2/a^3 sa rovná konštante. Je to pravda len dovtedy, kým sa nemení centrálne teleso. Ak sa vrátime k vzťahu (1), dá sa z neho odvodiť, že

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\kappa M}\,.$$

Uvažujme pohyb po kružnici a nie po elipse (teda $a = R$). Vidíme, že tu vystupuje hmotnosť centrálneho telesa, a tá sa v našom prípade mení. Zasa by sme podosadzovali zmenené dĺžky...a dostaneme rovnaký výsledok.

Tretia možnosť: Ako na takéto príklady všeobecne? Zasa si napíšeme vzťah (1) a rozdrobíme ho na drobné (hmotnosť, rýchlosť...):

$$\kappa \frac{4\rho\pi r^3}{3R^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} R\,.$$

Zostali nám v ňom okrem konštánt ešte veličiny súvisiace s dĺžkou, periódou pohybu, hustotou. Toto všetko môžeme preškálovať. Povedzme, že dĺžky sa zmenia a-krát, periódy b-krát, hustoty c-krát (a, b, c sú vo všeobecnosti kladné reálne čísla). Po dosadení dostaneme

$$\kappa \frac{4c\rho\pi (ar)^3}{3(aR)^2} = \frac{4\pi^2}{(bT)^2}(aR)\,.$$

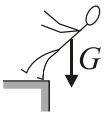
Keď vyjmeme škálovacie parametre, zistíme, že *a-čka* sa nám pokrátia. Tiež môžeme vykrátiť členy vyjadrujúce F_g a F_{od}, pretože sa rovnajú. Zostane nám $cb^2 = 1$ a to nám hovorí, že ak zmeníme hustotu, zmení sa nám automaticky aj obežná doba a naopak. Ak zmením dĺžkové rozmery, nebude to mať vplyv na hustotu ani na obežnú dobu. Dosadíme naše $c = 1/4$ a z toho už máme známy výsledok $b = 2$.

Nuž tak. To by bolo skoro všetko. A ešte Šťastné a Veselé. A to už je naozaj všetko.

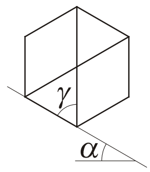
B – 3.4 Rolling pencils (opravoval Matúš)

Na naklonenej rovine je položená ceruzka, bežný model – šesťboký hranol. Položená je tak, že jej najdlhšia os je kolmá na smer sklonu roviny. Ak začneme pomaly zvyšovať sklon naklonenej roviny, tak sa ceruzka, ktorá bola pôvodne v pokoji, začne kotúľať bez šmýkania. Zistite, pri akom najmenšom koeficiente trenia je toto možné!

Vypnime už toho Micka Jaggera a poďme riešiť. Kým je podložka vodorovná, ceruzka na nej spokojne leží a nič sa nedeje. Keď začneme podložku nakláňať, ceruzka držaná na mieste trecou silou (zatiaľ) ostáva na svojom mieste, a preto sa ešte stále nič nedeje. Pri zväčšovaní sklonu však časom prídeme k okamihu, kedy sa ceruzka začne prevracať, resp. kedy sa začne po naklonenej rovine šmýkať nadol. Otázne je iba to, čo nastane skôr. No a toto poradie závisí od koeficientu trenia. Kým je ten malý, ceruzka sa začne šmýkať omnoho skôr, než chyruje o kotúľaní sa. Ak je veľmi veľký, drží na mieste ako prilepená, ale pri určitom sklone sa začne kotúľať. My hľadáme ten medzný koeficient trenia, kedy sa začne prevracať tesne pred začatím šmýkania.



Pri akom sklone α sa začne prevracať? Tento uhol nezávisí od trenia, preto ho zistíme hneď a zaraz. Veci sa prevracajú vtedy, ak sa ich ťažisko nenachádza nad podstavou, ale mimo (pozri obrázok). Kto tomu neverí, môže si vyskúšať malý experiment. Postaviť sa chrbtom k stene, k nohám si položiť cukrík (peniaze, zaujímavý príklad a pod. – každému podľa jeho chuti) a potom sa ho pokúsiť zdvihnúť tak, že pritom nepokrčí nohy. Ak dobre experimentujete, padnete na nos. To všetko kvôli ťažisku mimo podstavy...



Ak hľadáme hraničný uhol α, potom zrejme hľadáme situáciu, kedy je ťažisko presne nad okrajom podstavy ceruzky – toto je zakreslené na druhom obrázku. Keďže ceruzka má 6-uholníkový prierez, uhly pri jej vrcholoch sú rovné 120°. Vyznačený uhol γ (uhol medzi podstavou, hranou a ťažiskom – pozri obrázok) má preto veľkosť 60°. Aby sa ťažisko nachádzalo presne nad spodnou hranou (a tým pádom presne na okraji podstavy), musí byť sklon naklonenej roviny rovný

$$\alpha = 90° - \gamma = 30°.$$

No a my chceme, aby sa ceruzka ani pri tomto sklone nezačala šmýkať dole naklonenou rovinou. Lebo ak sa nezačne, tak naklonenú rovinu ešte trošičku dvihneme a náš Koh-i-noor sa začne veselo kotúľať dole. A práve toto chceme!

Aký koeficient trenia nedovolí ceruzke šmýkať sa nadol pri sklone 30°? Ak označíme prítlačnú silu ceruzky k naklonenej rovine F_N, potom pre treciu silu F_T brániacu šmýkaniu platí

$$F_T \leq fF_N,$$

kde f je koeficient trenia medzi ceruzkou a podložkou. Pritom sila F_N je daná vzťahom $F_N = mg\cos\alpha$, kde m je hmotnosť ceruzky a g je gravitačné zrýchlenie. Dole naklonenou rovinou ťahá ceruzku druhá zložka jej tiaže veľkosti $F_D = mg\sin\alpha$. Ceruzka sa nezošmykne, ak platí $F_D = F_T$ (sila ťahajúca ceruzku nadol je vyrovnaná trením). Ak toto všetko dosadíme do predošlej nerovnosti, dostaneme

$$mg\sin\alpha \leq fmg\cos\alpha.$$

Tu už ľahko vyjadríme f a dosadíme $\alpha = 30°$... Takto dostaneme vytúžený výsledok

$$f \geq 1/\sqrt{3} \approx 0{,}577.$$

Tento zázrak som nenašiel iba ja, ale mnohí riešitelia – šikovní ste!

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina B – kategórie po 3. sérii zimného semestra 19. ročníka

	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	②	B-3.1	B-3.2	B-3.3	B-3.4	☠	Σ
1.	Imriška	Jakub	2 A	G BA J. Hronca	37.5	3.5	5.0	5.0	5.0		56.00
2.	Perešíni	Peter	2 F	G BB Tajovského	34.5	5.0	4.0	5.0	5.0		53.50
3.	Foltin	Miroslav	2 C	G Jána Hollého	32.5	5.0	4.0	5.0	5.0		51.50
	Škrovinová	Katarína	sx.	G Nitra Párovská	33.5	3.5	5.0	5.0	4.5		51.50
5.	Takács	Michal	2 F	G BB Tajovského	31.8	4.5	4.0	5.0	5.0		50.30
6.	Štolcová	Jana	sx.	G Nitra Párovská	34.5	4.5	3.0	5.0	2.5		49.50
7.	Pôbišová	Zuzana	2 F	G BB Tajovského	29.0	5.0	5.0	5.0	5.0		49.00
8.	Hrdá	Marcela	sx.	G Turčianske Teplice	32.5	4.5	2.5	4.0	5.0		48.50
9.	Komorovský	Marek	sx.	G Dubnica nad Váhom	29.5	4.5	4.0	4.5	4.0		46.50
	Molčány	Dušan	2 B	SPŠS BA Feinorovo nábr.	30.5	4.0	4.0	5.0	3.0		46.50

11.	Bzdušek	Tomáš	kv. A	G Piešťany	27.5	4.5	3.5	5.0	5.0		46.08
12.	Dojčák	Lukáš	2 C	G PH Michalovce	25.5	4.5	4.0	5.0	5.0		44.00
13.	Kaniansky	Miroslav	sx. A	G Piaristické Nitra	23.5	4.5	5.0	5.0	5.0		43.00
14.	Zámečník	Peter	2 D	G MRŠ NMV	28.5	5.0	–	5.0	3.5		42.00
15.	Berta	Peter	1 A	G Veľké Kapušany	23.5	5.0	3.0	5.0	5.0		41.99
16.	Hergelová	Beáta	2 B	G BST Lučenec	25.0	3.0	5.0	5.0	5.0	-2	41.00
17.	Mikuláš	Ján	sx.	G BST Lučenec	24.0	2.5	3.5	5.0	5.0	-1	39.00
18.	Pašuth	Ondrej	2 A	G PH Michalovce	22.0	4.0	5.0	5.0	3.5	-2	37.50
19.	Kravec	Martin	2 A	G PH Michalovce	21.0	4.5	2.0	5.0	4.5	-1	36.00
20.	Švihorík	Róbert	kv.	G Nitra Párovská	22.0	2.0	3.0	4.5	2.0	-1	33.95
21.	Fačkovec	Boris	kv. A	G Piešťany	21.9	4.5	2.0	2.5	1.5		33.92
22.	Bogár	Ondrej	1 E	G ĽŠ Trenčín	17.0	4.0	4.0	4.0	3.5		33.59
23.	Fecko	Stanislav	kv. A	G Pankúchova	14.3	4.0	5.0	3.0	5.0		32.03
24.	Vrbjárová	Michaela	1 A	G BST Lučenec	19.2	3.5	3.0	2.0	2.5		31.67
25.	Uchytilová	Vendula	2 A	G J.K.Tyla	14.0	3.0	3.0	5.0	5.0		30.00
26.	Križanovič	Michal	2 B	G PH Michalovce	16.0	3.5	3.0	5.0	1.0		28.50
27.	Šomodiová	Kristína	2 A	G Piešťany	18.1	1.0	3.0	3.0	3.0		28.10
28.	Ďurčík	Miroslav	2 C	G BST Lučenec	16.5	0.5	2.0	5.0	2.0		26.00
29.	Pham van	Hieu	2 C	G Šurany	18.0	–	1.5	2.0	3.5		25.00
30.	Regec	Mário	2 A	G PH Michalovce	23.5	–	–	–	–		23.50
31.	Nagy	Jakub	9 C	ZŠ Požiarnicka 3	13.9	2.5	1.0	4.0	–		22.77
32.	Híreš	Michal	F	G VPT Martin	16.0	0.5	3.5	2.0	0.5		22.50
33.	Škorík	Ján	1	G Vrbové	14.9	1.0	2.5	2.0	0.5		22.19
34.	Kováč	Michal	sx.	G BA Grösslingova	19.0	–	0.5	2.0	0.5		22.00
35.	Malčická	Martina	sx.	G Banská Štiavnica	15.5	–	1.0	2.0	1.5		20.00
36.	Melicher	Radoslav	2 A	G BST Lučenec	14.5	2.0	1.0	2.0	1.0	-1	19.50
37.	Šanoba	Ľuboš	2 C	G Považská Bystrica	19.0	–	–	–	–		19.00
38.	Oremus	Vladimír	2 A	G BA J. Hronca	8.5	2.0	3.0	2.0	1.5	-1	16.00
39.	Kubovičová	Lucia	3 F	G VPT Martin	8.6	0.5	3.0	0.5	0.5		14.16
40.	Boorová	Kristína	2 B	G Vrbové	8.0	2.5	1.0	0.5	2.5	-1	13.50
41.	Holko	Ivan		G VPT Martin	10.5	–	–	–	–		10.50
42.	Přikrylová	Veronika	kv. A	OG ZA Varšavská cesta	7.3	–	–	–	–		7.26
	Országhová	Andrea	1 E	G PH Michalovce	1.4	–	3.0	2.0	1.5	-2	7.26
44.	Czókolyová	Eva	2 A	G Piešťany	5.5	–	–	–	–		5.50
45.	Bernadič	Michal	1 B	G Vrbové	3.8	–	–	–	–		3.77
46.	Káčer	Marek	kv.		3.5	–	–	–	–		3.55
47.	Obuchová	Lucia	2 B	G Vrbové	0.0	2.5	1.0	–	1.0	-1	3.50
48.	Macko	Juraj	sx.	G BA Grösslingova	2.0	–	–	–	–		2.00
49.	Matúška	Radoslav	1 B	G BST Lučenec	0.0	–	–	–	–		0.00
50.	Ondreička	Petrik	1	G Vrbové	0.0	–	–	–	–		0.00
51.	Mesároš	Jozef	1 A	Evanjelické gym. BA	-1.4	–	–	–	–		-1.35

No a opäť sú tu Vianoce!

Tretia séria sa šťastne skončila a víťazi sú už známi. Všetkým ďakujeme za účasť, víťazom gratulujeme a tešíme sa na nich na sústredení na Počuvadle. Prajme šťastné a veselé, veľa darčekov, málo cibule a uhlia. Všetko dobré do nového roka a najmä veľa zdaru v letnej časti.

Zajtra lepšie ako dnes, želá všetkým e**FK**áe**S**!


Och, oni predpokladali, že budem mať padák!!!
SKY SURFING FOR DUMMIES

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 3. série
A – kategória (staršia)
19. ročník
zimný semester
školský rok 2003/2004

www. **.sk**

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

A – 3.1 Chladnička (opravoval Juro)

Rodinka sa vybrala na výlet. Pozatvárali všetky okná, povypínali všetky spotrebiče a vyrazili. Zabudli však na chladničku, ktorú nechali otvorenú bežať. Ako sa zmenila teplota vzduchu v kuchyni keď sa na druhý deň vrátili z výletu? Chladnička má výkon P, účinnosť η a v kuchyni je vzduch s objemom V. Kuchyňu považujte za tepelne izolovanú. Najprv uvažujte, že kuchyňa je prázdna a potom sa pokúste zistiť, ako tento výsledok ovplyvnia bežné predmety v nej.

Chladnička vám mnohým narobila nejednu vrásku na čele. Poďme sa teda na začiatok pozrieť, čo to taká chladnička je a čo vlastne robí.

Chladnička pracuje s médiom, s ktorým vykonáva určitý cyklický dej. V ňom toto médium, ktoré sa v danej chvíli nachádza v plynnom skupenstve, stlačí, čím ho skvapalní. Kvapalné médium následne prejde cez mriežku na zadnej strane chladničky. Tu odovzdá okolitému vzduchu teplo, ktoré sa predtým odobralo vzduchu v chladničke. Médium potom ďalej putuje do výparníka, kde sa zníži jeho tlak a vyparí sa. Na to potrebuje odniekadiaľ tepelnú energiu. Tú si zoberie od vzduchu v chladničke. Vyparený plyn putuje na miesto, kde sa začalo naše rozprávanie o chladničke, t.j. do kompresora, kde je plyn opäť stlačený a všetko sa opakuje.

Teraz, keď vieme, ako to v chladničke funguje, pozrime sa, čo sa v miestnosti dialo, keď chladnička zostala otvorená. Chladnička odobrala vzduchu, ktorý sa v nej nachádzal, určité teplo. Onedlho ho však „vypľula" späť cez mriežku v jej zadnej časti. Celková tepelná energia vzduchu v miestnosti sa nezmenila. Chladnička však za ten čas nasávala z elektrickej siete elektrickú energiu. Príkon chladničky označme P_0. Platí $P_0 = P/\eta$. Chladnička za čas Δt načerpá z elektrickej siete energiu

$$E = P_0 \Delta t. \tag{1}$$

Na základe zákona zachovania energie sa táto energia nemôže len tak stratiť. Premení sa na tepelnú energiu predmetov v miestnosti. Ak za jediný predmet v miestnosti považujeme vzduch, ktorý má hustotu ρ, mernú tepelnú kapacitu c a objem V, platí

$$Q = \rho V c \Delta T = P_0 \Delta t, \tag{2}$$

kde ΔT je rozdiel teplôt, ktorý vznikne za čas Δt. Platí teda

$$\Delta T = \frac{P_0 \Delta t}{\rho V c} = \frac{P \Delta t}{\eta \rho V c}. \tag{3}$$

Podľa zadania Δt = 86400 s, z tabuliek $\rho \cong$ 1,27 kg.m-3 a $c \cong$ 1000 J.kg^{-1}.K^{-1}, objem kuchyne dajme V = 2,5m x 3m x 4m = 30 m^3, výkon chladničky P_0 = 100 W. Chladnička má spotrebu elektrickej energie rádovo 1 kWh za 24 hodín. Dostávame potom rozdiel teplôt $\Delta T \cong$ 55 K. To je teda veľa. To by boli členovia rodinky poriadne prekvapkaní pri návrate domov. Našťastie sú v miestnosti predmety, ktoré odoberú veľkú časť tepla. Označme tepelnú kapacitu všetkých predmetov v miestnosti C. Vzťah (2) potom prejde do tvaru

$$Q' = (\rho V c + C)\Delta T = P_0 \Delta t, \tag{4}$$

čo vedie k vzťahu

$$\Delta T' = \frac{P_0 \Delta t}{\rho V c + C} = \frac{P \Delta t}{\eta(\rho V c + C)} . \qquad (5)$$

Vidíme, že $\Delta T' < \Delta T$, nakoľko $C > 0$. Skúsme odhadnúť, koľko to asi môže byť. Mnohí z vás, ktorí ste skúsili odhadnúť túto hodnotu, zjednodušili predmety v miestnosti na drevo a železo. Prečo nie, však ono to tak v skutočnosti skoro je. Povedzme teda, že je v miestnosti asi 150 kg železa s $c_{Fe} \cong 450$ J.kg^{-1}.K^{-1} a tak isto 150 kg dreva s $c_{Dr} \cong 1000$ J.kg^{-1}.K^{-1}. Tepelná kapacita predmetov v miestnosti je potom $C = 217{,}5$ kJ.K^{-1}. Pri použití tých istých hodnôt ako predtým dostávame rozdiel teplôt $\Delta T' \cong 8$ K. To už je rozumnejšie. Ani táto hodnota však nie je realistická. V skutočnosti by strašne veľa tepla ušlo cez okná a steny, nakoľko kuchyňa je všetko, len nie tepelne izolovaná. Nakoniec jediné, čo by si výletníci všimli, by bol zvýšený účet za elektrinu.

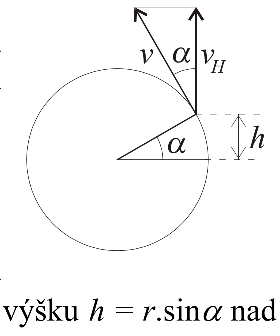
K vašim riešeniam len niekoľko slov. Najčastejšou chybou bol predpoklad, že na tepelnú energiu sa premení iba tá časť príkonu, ktorá sa nepremení na výkon, teda straty. Na čo by sa premenil výkon? Na niečo sa musí premeniť všetka energia, ktorá príde do kuchyne cez káble v stene. A keďže chladnička žiadnu mechanickú prácu nekoná, musí sa na tepelnú energiu premeniť celý príkon. Mnohí z vás tiež došli k podobným vzťahom ako sú tie hore. Súčasťou úlohy však bolo aj odhadnúť nejaké konkrétne hodnoty a napísať o vašich výsledkoch diskusiu.

Dúfam, že sa vám príklad páčil a že ste sa pri jeho riešení dozvedeli mnoho nových vecí o tak často používanej, užitočnej a pritom tak neznámej veci, akou je chladnička. Veľa šťastia a uvidíme sa na sústredku.

A – 3.2 Koleso (opravovali Priky a Tomáš)

Bicykel ide po mokrej podložke. Zrátajte do akej maximálnej výšky odfrkne kvapka z kolesa (voda odlieta od všetkých bodov kolesa v smere dotyčnice v danom bode), ak polomer kolesa je r a bicykel ide rýchlosťou v. Odpor vzduchu zanedbajte.

Najprv niekoľko slov k vašim riešeniam:
Verte vedúcim! Ak je v zadaní napísané, že kvapky odletujú od kolesa všade, je naozaj zbytočné zamýšľať sa nad vecami ako „voda sa určite nedostane až sem, lebo všetka odstrekne už tu a skončí na tvári prekvapeného chodca". Jednoducho voda špliecha všade. Ďalej, ak sú v zadaní napísané hodnoty r a v, tak chceme riešenie, ktoré bude fungovať pre hocijaké hodnoty r a v. Nemá teda zmysel riešiť úlohu pre nejaké „rozumné" hodnoty, pre ktoré platí čosi. Tak a teraz už dlho očakávaný vzorák:



Toto bol úplne typický príklad zo série find&maximize. Máme zrátať, do akej výšky odletí kvapka. Keby nám dobrá víla Amálka prezradila niečo typu „najvyššie sa dostanú kvapky, ktoré sa odtrhnú presne pod uhlom 0°" (pozri obr.), určite by výslednú výšku nebol problém zrátať. My však túto zázračnú informáciu nemáme (kto si myslí, že 0° je ideálny uhol pre kvapku, nech sa zamyslí nad prípadom, keď je v strašne malá a r dosť veľké, vtedy je ideálny uhol 90°...) Tak čo s tým? Predpokladajme, že kvapka, ktorá vyhrá cenu za najvyšší dolet, sa odtrhne od kolesa v uhle α. Táto kvapka dostane do vienka počiatočnú výšku $h = r.\sin\alpha$ nad stredom kolesa a rýchlosť v zvislom smere $v_H = v.\cos\,\alpha$. S touto výzbrojou do života dosiahne výšku

$$H = h + \frac{v_H^2}{2g} = r.\sin\alpha + v^2\frac{\cos^2\alpha}{2g},$$

vysmeje sa všetkým sokyniam, lebo práve ONA je najvyššie a vráti sa späť. Označme $s = \sin\alpha$, teda $\cos^2\alpha = 1 - s^2$ a dosaďme:

$$H = -\frac{v^2}{2g}s^2 + rs + \frac{v^2}{2g}.$$

No a my musíme určiť také α, aby H bolo maximálne. Niektorí ste na vyšetrenie funkcie $H(s)$ použili derivácie. No toto – čo neveríte svojim vedúcim? Predsa by sme vám nedali rátať derivácie! $H(s)$ je obyčajná kvadratická funkcia, ktorej maximum nájdeme klasickou úvahou: konštantný člen zrejme nemá na polohu maxima vplyv. Zvyšok, t.j. $-v^2s^2/(2g) + rs$ má korene $s = 0$ a $s = 2gr/v^2$ Pohliadnime s vďačnosťou na parabolu, ktorá vďaka svojej symetrickosti bude mať maximum presne medzi koreňmi, teda pre $s_m = gr/v^2$. Treba si uvedomiť, že my môžeme za s dosadzovať iba čísla od –1 po 1 (lebo s je sínus čohosi), kým s_m môže nadobúdať všetky kladné hodnoty. Preto ak $s_m \leq 1$ (tj. $gr \leq v^2$) bude maximálna výška dosahovaná pre $s = s_m$ a teda:

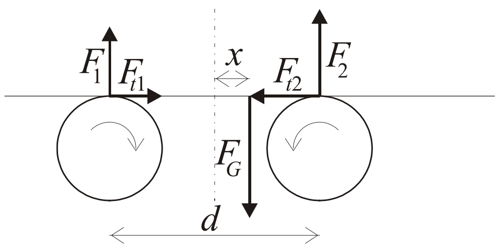
$$\alpha = \arcsin\left(\frac{gr}{v^2}\right) \quad \text{a} \quad H = \frac{gr^2}{2v^2} + \frac{v^2}{2g}.$$

Ak $s_m > 1$, bude maximálna výška pre $s = 1$ (lebo funkcia $H(s)$ až po s_m rastie) $\alpha = 90°$ a $H = r$ (H je merané nad stredom kolesa). Tí, čo maximum našli derivovaním, by mali túto úlohu dokončiť presne touto istou úvahou.

A – 3.3 Netradičné oscilácie (opravoval Stano)

Predstavte si, že dva kotúče umiestnené v tej istej horizontálnej rovine, ktorých osi otáčania sú vo vzájomnej vzdialenosti d*, sa otáčajú v navzájom opačných smeroch. Na nich je položená homogénna tyč dĺžky* l*, ktorej ťažisko je bližšie k jednému z kotúčov. Okrem toho vieme, že koeficient šmykového trenia medzi kotúčmi a tyčou je* f*. Mohli by ste skúsiť uhádnuť, čo sa s tyčou bude diať. Ale keďže vedúci FKS sú veľmi dobrí a majú vás radi, prezradíme vám to. Tyč začne kmitať. Zostáva teda už len ľahučká úloha, vypočítať periódu jej kmitov. A to je na vás.*

Základ úspechu riešenia tohto príkladu je nakreslenie pekného obrázka. Tyč na obrázku nakreslíme v polohe, v ktorej je jej ťažisko vychýlené od rovnovážnej polohy (stred medzi kotúčmi) o x.



Na obrázku je už naznačené, že na našu tyč pôsobí päť síl. Dve trecie sily F_{t1} a F_{t2} vo vertikálnom smere a tri sily v horizontálnom smere: gravitačná F_G a sily od kotúčov F_1 a F_2. Posledné dve sú spôsobené reakciou kotúčov na tiaž tyče.

Kmitanie tyče spôsobujú trecie sily od kotúčov a tie sú zas dôsledkom síl F_1 a F_2. Vzťah medzi nimi je

$$F_{t1} = fF_1 \quad \text{a} \quad F_{t2} = fF_2.$$

Našou úlohou je preto zistiť veľkosti síl F_1 a F_2. Keď to budeme mať, bude už cieľ veľmi blízko. To je však ľahké, len si treba uvedomiť dve veci:

1. Tyč sa nepohybuje v zvislom smere, preto bude výslednica vertikálnych zložiek všetkých síl rovná nule. To znamená $F_G = F_1 + F_2$.
2. Tyč sa neotáča, preto bude výsledný moment síl vzhľadom na nami vybraný bod nulový. Ak si vyberieme ťažisko (bod T) bude to znamenať rovnosť
   $F_1.(d/2 + x) = F_2.(d/2 - x)$.

Z posledných dvoch vzťahov sa po krátkom boji dajú získať hľadané veľkosti síl F_1 a F_2.

$$F_1 = \frac{mg}{2d}(d - 2x), \qquad F_2 = \frac{mg}{2d}(d + 2x). \tag{1}$$

Pre veľkosť výslednej sily vo vodorovnom smere potom platí:

$$F = |F_1 - F_2| = \frac{2mgf}{d} x .$$

Celý čas sme sa bavili iba o veľkostiach daných veličín (síl alebo momentov), aby sme to zbytočne nekomplikovali. Preto sa treba teraz zamyslieť, kam smeruje sila *F*. To je však zrejmé, lebo ak je ťažisko tyče bližšie k jednému z valcov, tak trecia sila od tohto valca je väčšia (vyplýva to zo vzťahov (1)). Výsledná sila *F* preto smeruje proti výchylke *x* od rovnovážnej polohy, čo sa v poslednom vzťahu prejaví pridaním mínusu.

$$F = -\frac{2mgf}{d} x .$$

To je však známa rovnica kmitov, t.j. sila závisiaca priamoúmerne od výchylky $F = -kx$. Tuhosť *k* je v našom prípade $k = (2mgf)/d$. Perióda kmitov potom je:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{2gf}} .$$

Čo je vzťah, ktorý sme mali nájsť (decentným úsmevom :))) prejavíme našu radosť).

Nakoniec poznámka pre vášnivých záujemcov. Keďže sa jedná o translačný pohyb tyče, mohli sme za *m* jednoducho dosadiť hmotnosť tyče. Toť fsio.

A – 3.4 Noc je tmavá (opravoval Tomáš)

Ak sa pozrieme na oblohu ďalekohľadom, vidíme viac hviezd, než bez neho. Odhadnite, koľko hviezd môžeme vidieť na oblohe ďalekohľadom s priemerom šošovky 5 cm. Koľkokrát dovidíme takýmto ďalekohľadom ďalej než voľným okom?

Veeeeľa hviezd. Prečo je ich tak veľa? Keď sú také malinké... ? Ešte menšie ako ovečka... Oveľa menšie ako jedna uhlová minúta, čo je podľa kníh fyziky najmenší uhol, pod ktorým sme schopní pozorovať nejaký predmet.. Kto neverí, ráta:

Majme hviezdu so 100-krát väčším polomerom ako Slnko. V akej vzdialenosti môže byť, aby sme ju videli pod uhlom aspoň 1′ ? Slnko je od nás vzdialené asi 8 svetelných minút a pozorujeme ho pod uhlom 0,5°. Potom pre hľadanú vzdialenosť *x* dostaneme trojčlenkou:

$$x\,.1' = 8\ \text{min}.0{,}5°.100,$$

z čoho $x = 17$ dní. Keď uvážime, že druhá najbližšia hviezda je od nás vzdialená asi 4 svetelné roky, verdikt je jasný: drvivú väčšinu hviezd na oblohe pozorujeme pod uhlom oveľa menším ako 1′. Prečo ich teda vidíme? Samozrejme ide o to, že hviezdy svietia. Naše oko je konštruované tak, že dostatočne silnú hviezdu uvidíme, aj keby bola strašne malá. Uhol 1′ hovorí iba o tom, že dve hviezdy, ktoré budeme pozorovať pod menším uhlom, nám splynú do jednej.

Ďalekohľad teda iba zväčší veľmi veľmi veľmi malú bodku na veľmi veľmi malú bodku. Dôležité je ale to, že vďaka ďalekohľadu nám do oka príde z hviezdy viacej svetla než bez neho. Pretože namiesto otvoru s priemerom asi 0,5 cm (priemer zreničky človeka pod vplyvom narkotík) zrazu „vnímame“ svetlo z kruhu s priemerom 5 cm. (samozrejme sú tu nejaké straty). Tak dostaneme do oka asi $(5/0{,}5)^2 = 100$-krát viac svetla. To znamená, že hviezda ktorú sme videli voľným okom, teraz môže byť o čosi ďalej a my ju stále uvidíme. Čo zoslabí diaľka, to zosilní ďalekohľad. Vieme, že intenzita svetla klesá s druhou mocninou vzdialenosti. Naša hviezda môže byť teda 10-krát ($10^2 = 100$) ďalej a my ju stále budeme vidieť rovnako dobre. A to je presne odpoveď na otázku, koľkokrát ďalej dovidíme. Uvedomte si, že toto vôbec neznamená, o koľko ďalej dovidíme ďalekohľadom cez deň. Vtedy nás zaujíma práve zväčšenie ďalekohľadu.

Skúsme na chvíľu predpokladať, že všetky hviezdy žiaria rovnako. Teda to, akú silnú hviezdu vidíme, je spôsobené len jej vzdialenosťou od Zeme. Potom sú viditeľné tie hviezdy, ktoré sú k nám bližšie ako nejaká kritická vzdialenosť – hviezdy ktoré patria do gule s týmto polomerom (a nie sú pod obzorom). No a použitím ďalekohľadu sa tento polomer zväčší 10-krát, objem gule sa teda zväčší 1000-krát. Ak sú hviezdy vo vesmíre rozmiestnené približne rovnomerne, uvidíme asi 1000-krát viac hviezd. No a koľko ich uvidíme bez ďalekohľadu.. To je samozrejme individuálne. Napríklad ja bez okuliarov vidím asi 10, ale inak približne to vychádza na 2000 hviezd. S ďalekohľadom ich teda uvidíme asi 2 000 000.

Nakoniec sa ešte treba zamyslieť nad jedným nepríjemným javom – ak budú hviezdy dostatočne blízko seba, tak nám splynú do jednej hviezdy a my teda jednu hviezdu neuvidíme.. Čo s tým? Rátal som, koľko hviezd sa zmestí na oblohu tak, aby žiadne 2 nesplývali (neboli bližšie ako 1′) a závery sú maximálne upokojujúce – nebo je dosť veľké pre všetky, aj bez použitia ďalekohľadu sa nám doň zmestí asi 120 000 000 hviezd, teda asi 60-krát viac ako potrebujeme. V priemernom prípade teda strácame týmto spôsobom ani nie 1/60 hviezd. Čo nám od začiatku kazí celý výpočet je fakt, že hviezdy nie sú rozložené vo vesmíre rovnomerne, najviac ich vidíme v Mliečnej dráhe. Okrem toho, že číslo 2 000 000 môže byť premrštené, čo môže nechutne zvýšiť počet prekrývajúcich sa hviezd. Napríklad, ak si 1000 hviezd povie, že sa ľúbia veľmi veľmi a natlačia sa blízko seba tak ich vnímame ako jednu hviezdu a pokiaľ sú dosť ďaleko, ďalekohľad nám na ich oddelenie nepostačí.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina A – kategórie po 3. sérii zimného semestra 19. ročníka

	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	②	A-3.1	A-3.2	A-3.3	A-3.4	☠	Σ
1.	Maták	Peter	4 E	G VBN Prievidza	38.5	5.0	5.0	5.0	5.0		58.50
	Závodný	Jakub	ok.	G BA Grösslingova	38.5	5.0	5.0	5.0	5.0		58.50
3.	Ďurák	Michal	4	G BST Lučenec	35.0	2.5	5.0	5.0	5.0		52.50
4.	Brutovská	Eva	ok.	G Kežmarok	34.0	2.5	5.0	5.0	4.0		50.50
5.	Zalom	Peter	5 G	G Poprad Tatarku	30.5	4.5	5.0	4.5	5.0		49.50
6.	Lalinský	Ján	se. A	G Varšavská cesta	31.6	4.5	5.0	5.0	2.0		48.96
7.	Batmendijnová	Zuzana	ok.	G T. Vansovej	33.0	3.5	5.0	5.0	2.0		48.50
8.	Trubenová	Barbora	4 A	G BA J. Hronca	28.0	5.0	5.0	4.5	5.0		47.50
9.	Glaus	Peter	4 A	G BA J. Hronca	28.0	5.0	5.0	5.0	4.5	-1	46.50
10.	Molnárová	Katarína	3 D	G KE Šrobárova	25.9	4.5	5.0	5.0	5.0	-1	44.55
11.	Sasák	Róbert	3 D	SPŠE Piešťany	31.4	2.0	3.5	4.0	0.5		42.89
12.	Neilinger	Pavol	4 A	G Dunajská Streda	30.5	2.0	3.0	5.0	2.0		42.50
13.	Kysel	Róbert	4 A	G BB Š. Moyzesa	26.5	4.5	2.5	5.0	3.0		41.50
	Mánik	Tomáš	4 C	G BST Lučenec	32.0	1.5	2.0	5.0	1.0		41.50
15.	Dzetkulič	Michal	3 A	G PH Michalovce	23.5	5.0	2.5	4.5	5.0		41.22
16.	Šoltésová	Mária	4 B	G BA Grösslingova	29.0	2.0	5.0	4.5	–		40.50
17.	Štolc	Miroslav	ok.	G Nitra Párovská	25.5	2.5	5.0	4.5	2.0		39.50
18.	Baník	Dušan	4 A	G Poprad Popr. nábr.	26.0	2.0	1.5	5.0	4.0		38.50
	Krššák	Martin	ok. A	G Piaristické Nitra	26.5	2.0	1.5	4.5	5.0	-1	38.50
20.	Džunko	Ján	se.	G Spišská Stará Ves	26.8	4.5	1.0	3.0	1.0		37.81
21.	Vojtko	Andrej	se. A	G Skalica	25.8	1.0	5.0	1.0	3.0		37.31
22.	Mikulík	Andrej	4 B	G BA Grösslingova	26.5	2.5	3.0	4.0	1.0		37.00
23.	Astaloš	Róbert	3 A	G Rimavská Sobota	19.9	1.0	3.5	3.0	1.0		29.89
24.	Rušin	Michal	se.	G Spišská Stará Ves	20.2	2.5	1.0	3.5	1.0		29.67
25.	Domány	Dušan	3 A	G PH Michalovce	21.6	2.0	0.5	–	3.5		28.89
26.	Piják	Peter	3 B	G VOZA	18.9	2.0	4.0	–	–		26.19

27.	Fialka	Vlado	4 E	G K2 Prešov	25.0	–	–	–	–		25.00
28.	Savincová	Katarína	3 E	G PH Michalovce	15.5	1.5	1.0	1.0	1.5		21.64
29.	Svrček	Matúš	ok.	G Terézie Vansovej	19.5	–	–	–	–		19.50
30.	Lauko	Martin	ok. A	G JL Martin	16.5	–	–	–	–		16.50
31.	Kubová	Miška	3 A	G Vrbové	10.5	0.5	0.5	0.5	1.0	-2	11.68
32.	Šimko	Peter	3 C	G BA J. Hronca	4.1	–	–	–	–		4.13
33.	Luptáková	Jozefína	4 C	G BB Sládkoviča	1.5	–	–	–	–		1.50
34.	Michnová	Mária	4 B	G Banská Štiavnica	1.0	–	–	–	–		1.00

No a opäť sú tu Vianoce!

Tretia séria sa šťastne skončila a víťazi sú už známi. Všetkým ďakujeme za účasť, víťazom gratulujeme a tešíme sa na nich na sústredení na Počuvadle. Prajme šťastné a veselé, veľa darčekov, málo cibule a uhlia. Všetko dobré do nového roka a najmä veľa zdaru v letnej časti.

Zajtra lepšie ako dnes, želá všetkým e**FK**áe**S**!