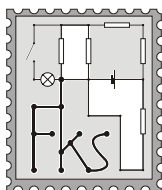


# FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 3. série  
B–kategória (mladší)  
18.ročník  
letný semester  
školský rok 2002/2003.



www.fks.sk

FKS, KZDF FMFI UK  
Mlynská dolina  
842 48 Bratislava  
riesenia@fks.sk  
info@fks.sk

## B – 3.1 To sa im skáče (opravovala Rebro)

Lyžiar-skokan sa púšťa z výšky  $h = 50$  m. Na konci mostíka je krátky vodorovný úsek (na rozdiel od skutočných skokanských mostíkov). Lyžiar sa zabudol odraziť a už letí vzduchom. Doskočisko je svah so sklonom  $\alpha = 30^\circ$ . Vypočítajte, ako ďaleko od hrany mostíka sa dotkne zeme. Odpor vzduchu i trenie na mostíku zanedbajte. Skúste považovať nad reálnymi mostíkmi, čo všetko sa zmení?

Nuž milí moji, zdá sa, že vrhy vám už nerobia problémy, až na pár z vás, ktorí by si mali toto vzorové riešenie pozorne prečítať.

Aj tentoraz sa dalo postupovať viacerými cestami. Na začiatok bolo treba zistiť, ako rýchlosťou skokan opustí mostík. Keďže zanedbávame trenie i odpor vzduchu, energia sa nám „ne stráca“ a možno si povedať asi toľko, že akú energiu má lyžiar na vrchu mostíka, takú bude mať i dole. Uvažujeme teda len zmenu potenciálnej energie na kinetickú, teda  $mgh = mv^2/2$ , kde  $h$  je výška mostíka,  $m$  je hmotnosť lyžiara, ktorá nám však vypadne,  $v$  je jeho rýchlosť na konci mostíka. Ako som už vyššie spomenula, trenie neuvažujeme, môžeme tvrdiť, že touto rýchlosťou opustí i krátky vodorovný úsek. Druhý spôsob, ako sa dopracovať k danej rýchlosti spočíva v tom, že si uvedomíme, že ak neuvažujeme trenie ani odpor vzduchu rýchlosť, lyžiara bude rovnaká, ako keby padal z výšky  $h$  voľným pádom. Vieme, že  $v = gt_1$  a  $h = gt_1^2/2$ . Po vylúčení času  $t_1$  dostávame ten istý vzťah ako z energetického prístupu, teda  $v = \sqrt{2gh}$ .

Ďalej si bolo potrebné uviesť, že lyžiar sa pohybuje „vodorovným vrhom“. Ak si zvolíme počiatok súradnicovej sústavy do bodu, kde „začína“ doskočisko, t.j. do miesta, kde lyžiar opúšťa pevnú pôdu pod lyžami, môžeme pre súradnice jeho pohybu zapísať vzťahy  $x = vt_2$  a  $y = -gt_2^2/2$ , kde  $t_2$  je čas, ktorý letí vzduchom. Doskočisko je ale naklonená rovina, resp. môžeme hovoriť o priamke, ktorú možno popísať vzťahom  $y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha$ , kde  $\alpha$  je uhol sklonu roviny. Nuž a dostávame tri rovnice o troch neznámych. Z prvej si vyjadríme čas  $t_2$ , dosadíme do druhej a porovnáme s treťou, dostaneme tak

$$-\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v^2} = x \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Vieme, že  $x$  je isto rôzne od nuly, môžeme ním rovnicu predeliť a vyjadriť si  $x$  a ďalším spätným dosadením aj  $y$ . Vzdialenosť dopadu lyžiara od hrany mostíka vypočítame z Pytagorovej vety:  $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Niektorí z vás si súradnú os pootočili tak, že potom uvažovali šikmý vrh a vzdialenosť dopadu počítali známym spôsobom ako dĺžku šikmého vrhu. Vyhli sa tomu, že neuvažovali prienik doskočiska s krivkou letu (medzi rečou parabolou), ale na druhú stranu museli rozkladať na zložky jednak rýchlosť lyžiara i gravitačné zrýchlenie.

Po dosadení zadaných hodnôt, dostaneme  $s = 133,3$  m.

To by bolo skoro všetko, už len malé zamyslenie sa, ako je to s reálnymi mostíkmi. Jednak, ako väčšina z vás správne napísala, hrá tu rolu trenie i odpor vzduchu na mostíku, reálny lyžiar bude mať menšiu rýchlosť na konci mostíka. Ale! Reálny mostík nekončí krátkym

vodorovným úsekom, je zakrivený nahor a navyše lyžiari sa na jeho konci odrážajú. Výsledok je ten, že majú rýchlosť nielen v smere osi  $x$ , ale aj v smere osi  $y$ . A v tomto okamihu využívajú tiež odpor vzduchu. Keď si pozriete nejaké skokanské preteky, určite si všimnete, že skokani letiaci vzduchom pôsobia, ako keby ležali v smere osi  $x$  (chcem tým povedať vodorovne) a teda kladú čo najväčší odpor vzduchu v smere osi  $y$  a najmenší v smere osi  $x$ . Preto aj ich kombinézy pôsobia tak divne, sú z materiálu, ktorý čo najmenej prepúšťa vzduch. A posledná vec, doskočisko nemá tvar naklonenej roviny, je prehnuté dovnútra. Koniec zimným radovánkam, prajem krásne leto.

### B – 3.2 Závažíčka (opravovala Lucka)

Na obrázku sú dve závažia s hmotnosťou  $m$  spojené pružinou tuhosti  $k$ , tá má na začiatku pokojovú dĺžku. Závažia sa môžu pohybovať po vodorovnej podložke bez trenia. Obom udelíme rovnakú rýchlosť  $2v$  tak, ako na obrázku: jednému závažiu v smere kolmom na pružinu, druhému v smere pružiny. Aké bude maximálne predĺženie  $\Delta l$ , ktoré pružina pri pohybe závaží dosiahne?

Predstavme si, že máme pružinu, ktorá sa pohybuje nejakou rýchlosťou  $v$ , pružinu, ktorá sa nehýbe a pružinu, ktorá sa na mieste otáča okolo svojho stredu. Predĺženie každej z nich závisí len od toho, ako veľmi sú na koncoch naťahované. Maximálne predĺženie môže mať pružina napríklad aj vtedy, keď sa zároveň otáča. Jej kinetická energia preto nemusí byť nulová. Toto je jedna z vecí, ktorú ste si nie všetci uvedomili, a ku ktorej sa ešte vrátíme.

Predtým by sme sa mali pozrieť, ako celá situácia vyzerá v sústave ťažiska pružiny. Čo to znamená sústava ťažiska? Kde je ťažisko pružiny so závažiami? Predstavme si, že náš kamarát sedí v strede pružiny a spolu s ňou sa od nás vzdáľuje. (My stojíme na veľkej podložke tam, kde bol na začiatku stred pružiny a pozeráme sa za ním.) Aká bude jeho dráha? Ako iste tušíte, bude sa od nás vzdáľovať šikmo nahor pod uhlom  $45^\circ$ . Aká veľká bude jeho rýchlosť? No predsa

$$V_T = v\sqrt{2}.$$

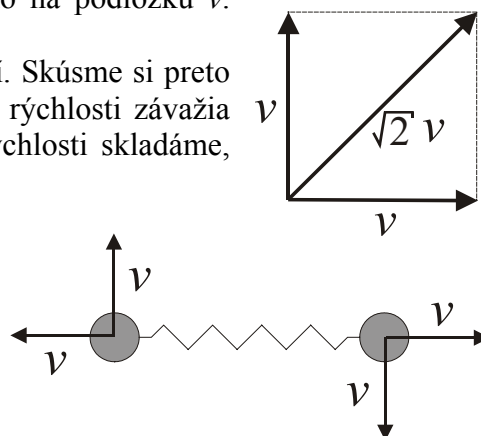
Prečo je to tak? Keď si predstavíme, že obe závažia schováme do stredu pružinky, a na koncoch neponecháme nič, potom sa stred pružinky musí pohybovať tak rýchlo, aby sa celková hybnosť nezmenila. Takže, v smere podložky bola hybnosť od pravého závažia  $2vm$ . Preto aj náš stred pružinky bude mať do smeru podložky hybnosť  $2vm$ . Podobne, v smere kolmom na podložku malo ľavé závažie rýchlosť  $2v$  a hmotnosť  $m$ , teda hybnosť  $2vm$ . Preto aj stred pružinky bude mať v kolmom smere na podložku hybnosť  $2vm$ . A keďže do stredu pružinky sme schovali všetku hmotnosť, t.j.  $2m$ , potom rýchlosť nebude mať inú možnosť, iba mať veľkosť do smeru podložky, aj do smeru kolmého na podložku  $v$ . Pozrite si obrázok.

Rýchlosť ťažiska  $V_T$  sa počas celého pohybu nezmení. Skúsme si preto prekresliť začiatočnú zadanú situáciu tak, že od každej rýchlosti závažia odpočítame rýchlosť ťažiska. Treba si uvedomiť, že rýchlosti skladáme, a tak hľadáme výslednice.

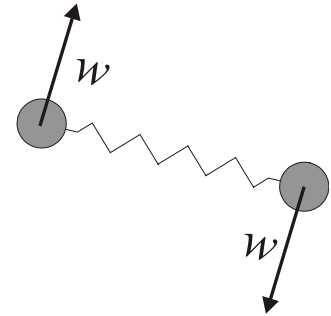
Týmto krokom sme sa dostali do sústavy ťažiska, v ktorej sleduje závažia náš kamarát. V nej sa stred pružiny, ťažisko, nehýbe. Prečo? Lebo

$$\vec{V}_T - \vec{V}_T = 0.$$

Rozoberme si ešte, čo vidíme. Pružina sa začína naťahovať od nás preč, pôsobením rýchlostí  $v$  v smere jej osi. Zároveň sa otáča okolo stredu, pôsobením rýchlostí  $v$  kolmo na ňu.



Na chvíľu sa pozrime niekam preč, za slniečkom, a nesledujme pohyb pružiny. Teraz sa pozrime späť. Nech je pružina maximálne natiahnutá. Ako celá situácia vyzerá? Oproti začiatočnému stavu je pružina natočená. A stále, rýchlosti v smere kolmom na jej os sú nejaké, označíme ich  $w$ . Rýchlosti v smere pružiny, ktoré ju natáhovali, sú však nulové, inak by pružina nebola maximálne natiahnutá a predlžovala by sa ďalej. Pozri obrázok.



Mimochodom, celú úlohu si môžeme predstaviť aj v našej pôvodnej (nie ťažiskovej) sústave. Ako tam vyzerá maximálne predĺženie pružinky? Využijeme obrázok z našej ťažiskovej sústavy a ku rýchlosti  $w$  zase pripočítame späť rýchlosť ťažiska  $V_T$ , podobne ako sme to robili na začiatku, pri prechode do ťažiskovej sústavy. A je to. Kreslenie obrázkov prenechám na vás. Predĺženie pružinky však zostane to isté, pretože sme len pridali každému bodu pružinky nejakú, rovnakú, rýchlosť navyše.

Ďalej budeme vo vzorovom riešení počítať už len v sústave ťažiska. Na určenie predĺženia  $\Delta l$  využijeme dva zákony. Zákon zachovania energie,  $E_k = E_k' + E_p$ . Ten hovorí, že celá kinetická energia na začiatku pohybu  $E_k$  je rovná celkovej energii pri maximálnom predĺžení pružiny, t.j. kinetickej energii otáčavého pohybu závaží  $E_k'$  a potenciálnej energii  $E_p$  pružiny

$$2 \frac{1}{2} m (\sqrt{2}v)^2 = 2 \frac{1}{2} m w^2 + \frac{1}{2} k (\Delta l)^2.$$

A zákon zachovania momentu hybnosti,  $mvr = \text{konšt.}$  má tvar

$$2m \frac{l}{2} v = 2m \left( \frac{l}{2} + \frac{\Delta l}{2} \right) w,$$

kde  $l$  je jej začiatočná dĺžka pružiny,  $l + \Delta l$  je dĺžka pružiny pri maximálnom predĺžení.

Prečo máme moment hybnosti? V niektorých sústavách, keď porovnáme momenty hybnosti pre dve situácie, podobne ako keď porovnáваме energie, zistíme, že sa nemenia. A to je dôležité vedieť. Napríklad krasokorčuľárka na ľade, keď má ruky rozpažené a zrazu ich pripaží (urobí piruetu), zvýši svoju otáčavú rýchlosť. Moment hybnosti  $L$  sa určuje zo vzťahu  $L = mvr$ . Rýchlosť  $v$  je otáčavá rýchlosť, a teda kolmá k polomeru otáčania  $r$ . Pre naše závažia, napr. na začiatku pohybu, máme  $L = 2mvl / 2$ . Prečo? Polomer otáčania pre obe závažia je polovica z ich vzájomnej vzdialenosti, t.j.  $l/2$ . Ich rýchlosť v smere kolmom na pružinku je  $v$  a hmotnosť  $m$ . Moment hybnosti pre jedno závažie je teda  $mv l / 2$ . A keďže sú tie závažia dve, celkový moment hybnosti je  $2mvl / 2$ . Moment hybnosti, ako už iste tušíte, sa zachováva v situáciách, kedy nejaká sila pôsobiaca na teleso má smer do stredu jeho otáčania. V našom prípade je to pružina, ktorá svojou silou ťahá závažia k sebe. V prípade planét a Slnka je to gravitačná sila.

Vráťme sa ale k výpočtu predĺženia pružiny  $\Delta l$ . Zo vzťahov pre zákony zachovania dostávame,  $w = vl / (l + \Delta l)$ , a pre  $\Delta l$  platí

$$\frac{l^2}{(l + \Delta l)^2} + \frac{k}{2mv^2} (\Delta l)^2 - 2 = 0.$$

Táto rovnica sa vo všeobecnosti veľmi ťažko rieši, a preto si urobíme jednoduché priblíženie. Predpokladajme, že závažiam udelíme na začiatku relatívne malú rýchlosť. Potom aj výchylka  $\Delta l$  bude malá. Nespravíme tak veľkú chybu, ak povieme, že  $l + \Delta l \approx l$  a prvý člen v rovnici nahradíme číslom 1. Potom pre  $\Delta l$  dostaneme

$$\Delta l = v \sqrt{\frac{2m}{k}}.$$

Pre veľké začiatkové rýchlosti by sme úlohu riešili podobne, s tým rozdielom, že výchylky  $\Delta l$  by boli v porovnaní s  $l$  veľké (a teda by sme mohli hodnotu  $l$  zanedbať).

Tento záver nebol ľahký, nechajte si to prejsť hlavou (najlepšie viackrát). Dôležitejší však bol úvod a ponaučenia, ktoré z neho plynú: „ťažisková sústava často pomáha“, „zákon zachovania momentu hybnosti býva pri otáčavých pohyboch dôležitý“.

### B – 3.3 A predsa sa točia! (opravoval Matúš)

*V čase, keď je Jupiter k Zemi najbližšie (Slnko vtedy leží na spojnici týchto planét) zakrýva Jupiter z pohľadu pozorovateľa na Zemi vzdialenú hviezdu. Ako dlho trvá tento zákryt – aký dlhý je čas medzi prvým a posledným kontaktom hviezdy s diskom planéty? Predpokladajte, že obe planéty sa pohybujú v jednej rovine, v ktorej leží aj zakrývaná hviezda.*

V okamihu, ktorý sme popísali v zadaní úlohy, ležia na jednej priamke Slnko, Zem a Jupiter (v tomto poradí). Vzdialenosť Zem-Slnko je 1 AU, od Slnka k Jupiteru je to 5,2 AU (AU je skratka pre astronomickú jednotku, 1 AU je polomer obežnej dráhy Zeme, teda asi  $149,6 \cdot 10^9$  km). Rýchlosť obehu oboch planét buď nájdeme v tabuľkách, alebo si ju dopočítame. Dopočítanie je ľahké, platí totiž tretí Keplerov zákon, podľa ktorého

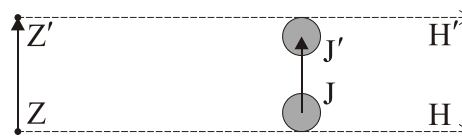
$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2},$$

kde  $a_1$  a  $a_2$  sú polomery obežných dráh planét (tieto obežné dráhy sú elipsy, preto je presnejšie hovoriť „veľké poloosi obežných dráh planét“). Doby obehu po týchto dráhach sme označili  $T_1$  a  $T_2$ . Keďže vieme dobu obehu Zeme okolo Slnka (1 rok), ľahko si dorátame, koľko to trvá Jupiteru – 11,86 roka (tento údaj sa ale tiež dal nájsť v mnohých tabuľkách). Ešte si vypočítajme obežné rýchlosti planét. Vieme, že prejdú dráhu  $2\pi a$  za čas  $T$  a tak ľahko určíme  $v_1 = 29,79$  km/s pre Zem a  $v_2 = 13,06$  km/s pre Jupiter.

Už je najvyšší čas začať sa venovať samotnému riešeniu úlohy, ktorú sme doteraz dosť zanedbávali. Začnime tým, že si zjednodušíme všetko, čo sa dá. Predovšetkým si uvedomme, že zákryt, o ktorom je reč, trvá krátky čas. Niektorí to vedia, iným to navráva intuícia. Ostatní teraz zatnú zuby a presvedčí ich až pohľad na výsledok, ktorý získame. Krátke trvanie zákrytu znamená, že planéty počas neho stihnú prejsť iba krátky úsek svojej dráhy. No a malý kúsok kružnice... To si rovno môžeme povedať, že sa počas tohto času hýbu po priamkach (nezmenenou rýchlosťou), výsledok tým určite nepokazíme.

Tiež nezabúdajme na to, že zakrývaná hviezda je veľmi vzdialená, preto sa počas zákrytu na oblohe neposunie ani dôsledkom nášho, ani vplyvom vlastného pohybu. A ešte zatiaľ zabudnime na rotáciu sa Zeme. Alebo ešte lepšie, zanedbajme úplne jej rozmery, nech je na chvíľu menšia než špendlíková hlavička.

Na obrázku je zaznamenaný pohyb planét od začiatku zákrytu (polohy Z, J a smer ku hviezde H) až do jeho konca (polohy Z' a J', nezmenený smer H'). Dobré si ten obrázok pozrite. Hneď ako Vám bude jasné, že je to nakreslené skutočne dobre, máme vyhrané. Ostáva už

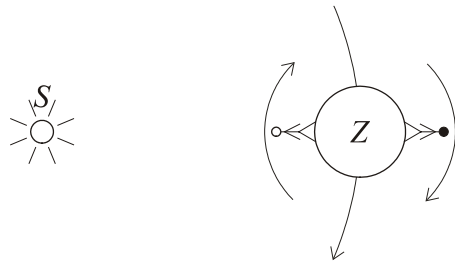


totiž iba jednoduchý výpočet, podľa obrázka sa vzdialenosť prejdená Zemou rovná vzdialenosti prejdenej Jupiterom zväčšenej o dva jeho polomery. Polomer Jupitera označme  $R_J$  (má hodnotu 71 400 km), hľadanú dobu trvania zákrytu  $\Delta t$ . Platí teda

$$|ZZ'| = |JJ'| + 2R_J \Rightarrow v_1 \cdot \Delta t = v_2 \cdot \Delta t + 2R_J.$$

Odtiaľ už ľahko vyjadríme  $\Delta t$  ako  $\Delta t = 2R_J / (v_1 - v_2)$ . Číselne to je asi 142 minút.

Ostáva už len doriešiť tú na chvíľu zabudnutú rotáciu Zeme. Kľúčové je najprv zistiť, či sa Zem otáča rovnakým smerom ako obieha Slnko, alebo nie. Premyslite si to (oplatí sa predstaviť si, kam sa Slnko hýbe po oblohe počas dňa a kam v rámci svojho celoročného pohybu). Mali by ste prísť k záveru, že tieto dva pohyby sú navzájom pre „poludňajšieho pozorovateľa“ opačné. Presne tak, ako na obrázku.



Na obrázku si ale zároveň ľahko všimnete, že v noci, kedy pozorujeme náš Jupiter, je to presne naopak – obeh Zeme okolo Slnka a jej rotácia sa sčítajú! To znamená, že uváženie tejto rotácie zväčší vzdialenosť ZZ' prejdenú pozorovateľom zákrytu (zanáša ho totiž v smere jej pohybu). No a to zväčší výslednú rýchlosť pohybu pozorovateľa z hodnoty  $v_1$  na nejakú väčšiu. Pri pohľade na náš výsledný vzťah je jasné, že zákryt sa tým skrúti. Povedať, o koľko presne bude dlhší, je už ťažšie – v zadaní nebola udaná poloha pozorovateľa na Zemi, ani okamih pozorovania (či pri východe, alebo západe Jupitera, či keď je na oblohe najvyššie). Tieto údaje zavážia – stačí si predstaviť pozorovateľa na zemskom póle, ktorého rotácia Zeme vôbec neovplyvní.

Aby sme neostali bez číselného výsledku, vezmime si pozorovateľa na rovníku, toho unáša rotácia Zeme rýchlosťou asi 150 m/s (obvod Zeme vydelený 24 hodinami). Ak pozoruje zákryt hviezdy v okamihu, keď je Jupiter na oblohe najvyššie – o polnoci (vtedy celá táto rýchlosť znižuje jeho relatívnu rýchlosť voči Jupiteru, premyslite si to). Preto je jeho „efektívna“ rýchlosť pohybu nie 16,73 km/s, ale až 16,88 km/s. Dosadením do nášho skvelého vzťahu dostaneme trvanie zákrytu necelých 141 minút. Môžeme teda skončiť s vedomím, že pre pozorovateľa hocikde na Zemi je ten čas niečo medzi dvoma získanými hodnotami – teda zhruba medzi 141 a 142 minútami (komusi vyšiel magický výsledok 2 hodiny 22 minút 22 sekúnd)...

### B – 3.4 Auto (opravoval Peťo)

*Iste ste videli tie reklamné zábery, kedy nové auto nechajú konštruktéri naraziť do steny, aby zistili, či je bezpečné. Skúste zistiť, akou rýchlosťou musí takéto testovacie vozidlo naraziť čelne do steny (crash – test), aby bol náraz pre vodiča ekvivalentný s čelnou zrážkou dvoch protiidúcich áut s rôznymi hmotnosťami idúcich rýchlosťou 50 km/h. Rozoberte možné prípady pomeru ich hmotností.*

Ako úplne prvé by som chcel vyvrátiť jednu nesprávnu mienku o tom, že keď sa zrazia dve autá idúce rýchlosťou 50 km/h, je to ekvivalentné s nárazom auta, idúceho rýchlosťou 100 km/h, do steny. Nie je to pravda. Takáto zrážka zodpovedá nárazu 50 km/h do steny. Tento omyl je spôsobený tým, že keď si posunieme súradnú sústavu tak, aby prvé auto bolo v jej začiatku a v pokoji, tak druhé sa vzhľadom naň približuje rýchlosťou 100 km/h.

Prvý háčik spočíva v tom, že pri takejto zrážke sa výsledná „zrazenina“ bude ďalej pohybovať (konkrétne rýchlosťou 50 km/h) a tak ten náraz určite nemôže byť taký ničivý ako náraz rovnakou rýchlosťou 100 km/h proti masívnej nehybnej stene. Ďalší problém nastáva pri transformácii sústav, lebo transformácia energie nie je ekvivalentná. Energia pôvodnej sústavy (dvoch áut) je

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mv^2.$$

V posunutej sústave (kde  $v = 100$  km/h) to však je

$$E = \frac{1}{2}m(2v)^2 = 2mv^2.$$

Vidíme, že tieto energie sa nerovnajú, nemôžeme teda len tak prejsť do inej sústavy.

Teraz už k riešeniu. Treba povedať, že realitu nárazu áut lepšie vystihuje model nepružnej zrážky a nie dokonale pružná zrážka. Autá sa pohybujú rýchlosťou  $v = 50 \text{ km/h}$ , nech majú hmotnosti  $m_1$  a  $m_2$ . Podľa zákona zachovania hybnosti platí  $m_1v - m_2v = (m_1 + m_2)v'$ , kde  $v$  je rýchlosť áut pred a  $v'$  rýchlosť po zrážke. Tiež funguje zákon zachovania energie, treba ho však písať v tvare  $E_{K1} + E_{K2} = E_{K3} + E_0$ , kde  $E_{K1}$  a  $E_{K2}$  sú kinetické energie áut,  $E_{K3}$  je kinetická energia šrotu po zrážke (ak sa ešte pohybuje) a  $E_0$  je celková strata energie (ukladá sa napríklad v deformáciách častí áut a podobne). Odtiaľ máme

$$E_0 = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 - \frac{1}{2}v^2\frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2} = 2v^2\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}.$$

Táto energia  $E_0$  je energia, ktorá sa rozdelí na deformáciu oboch áut. Ale v akom pomere? Keď si budeme všímať účinok zrážky na vodiča v aute s hmotnosťou  $m_1$ , pomer na jeho auto pripadajúci bude  $m_2 / (m_1 + m_2)$ .

Prečo je to tak? Rozpíšme deformačnú prácu do tvaru  $E_0 = W_1 + W_2 = Fd_1 + Fd_2$  (hodnoty  $W_1$  a  $W_2$  sú jej časti pripadajúce na prvé, resp. druhé auto). Každá z častí  $W_1$ ,  $W_2$  závisí od deformačnej sily  $F$  a od dráhy  $d$  na ktorej pôsobila. Pritom deformačné sily pôsobiace na obe autá sú určite rovnaké (hovoriť nám to 1. Newtonov zákon: akcia sa rovná reakcii!). Preto pomer  $W_1 / W_2$  závisí iba od pomeru  $d_1 : d_2$ . Teraz prejdime do ťažiskovej sústavy. V nej autá na konci zrážky stoja, preto vzdialenosti prejdenej počas zrážky (ak predpokladáme nemennú deformačnú silu) sú  $d_1 = a_1t^2 / 2$ ,  $d_2 = a_2t^2 / 2$ . Keďže  $a_1 = F / m_1$ ,  $a_2 = F / m_2$  (Newtonov zákon), zrejme platí

$$d_1 : d_2 = \frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2}.$$

Teraz už poznáme, akou energiou (prácou) bude deformované auto s hmotnosťou  $m_1$ . Stačí vynásobiť vypočítanú  $E_0$  čerstvo nájdeným pomerom a máme

$$E_0 = 2v^2m_1\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2.$$

Porovnaním s čelným nárazom do steny, kedy je  $E_{01} = mv_0^2 / 2$  a celá  $E_K$  auta sa spotrebuje na deformačnú prácu, dostávame porovnaním  $E_{01} = E_0$  hľadaný vzťah pre rýchlosť  $v_0$

$$v_0 = 2v\frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

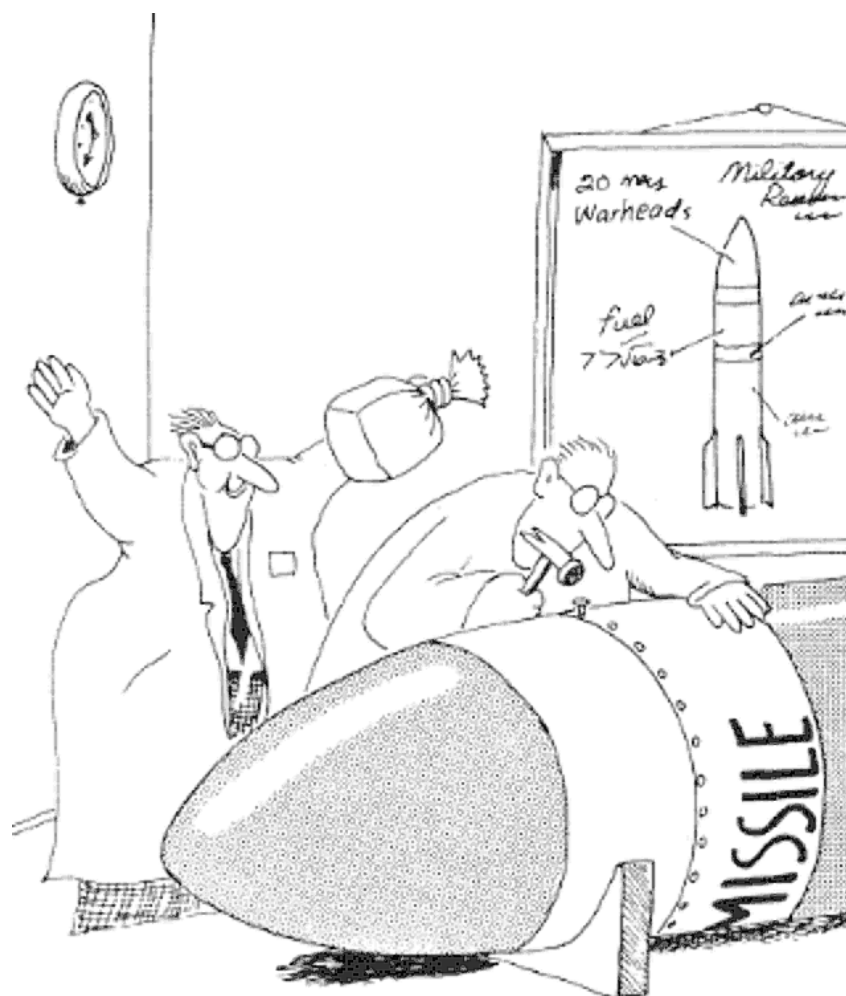
Touto rýchlosťou musí naraziť auto s hmotnosťou  $m_1$  do steny, aby bol tento náraz ekvivalentný so zrážkou dvoch protiidúcich vozidiel. Napríklad pre pomer hmotností  $m_1 : m_2 = 1 : 2$  bude pre vodiča v aute s hmotnosťou  $m_1$  táto zrážka ekvivalentná nárazu do steny rýchlosťou  $v = 66,67 \text{ km/h}$ .

Ak sa niekomu zdá byť hore napísané riešenie komplikované, môže porozmýšľať o inom postupe riešenia. Aké zrážky sa nám zdajú byť rovnaké z hľadiska zmeny našej hybnosti pri nich? Ak správne odpoviete túto otázku a vypočítate jednoduchú nepružnú zrážku dvoch áut, odpoveď na našu otázku budete mať na dosah. A čo je najlepšie, bude to odpoveď zhodná s hore uvedenou! No nie je tá fyzika úžasná? :-)

## Na záver

Tak a to už je pre tento rok naozaj všetko. Aj keď ... S týmto konštatovaním určite nesúhlasí tých 32 z Vás, ktorí sa zúčastnia akčného letného sústreďenia našich najlepších riešiteľov. To sa uskutoční v malebných horách východoslovenskej Gelnice a čo sa tam bude diať ... No však uvidíte, tí menej šťastní si to časom budú môcť prečítať na našej www-stránke.

Krátko po sústreďení nastanú (konečne) pravé a ničím nerušené prázdniny. Užite si počas nich veľa príjemných zážitkov. Veríme, že v septembri sa oddýchnutí vrátite nielen k svojim školským povinnostiam, ale aj k nášmu semináru (terajším štvrtákom veľa zdraru na školách, ktoré si vyberiete). Nech sa darí!





# FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

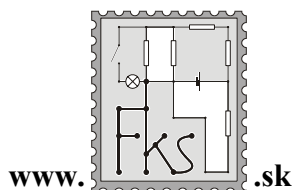
výsledková listina B – kategórie po 3. sérii letného semestra 18. ročníka

| Priezvisko     | Meno      | Trieda | Škola                | ⊙    | B-3.1 | B-3.2 | B-3.3 | B-3.4 | ⊘  | Σ     |
|----------------|-----------|--------|----------------------|------|-------|-------|-------|-------|----|-------|
| 1. Lalinský    | Ján       | sx. A  | G Varšavská cesta    | 36.0 | 5.0   | 5.0   | 4.5   | 5.0   |    | 55.50 |
| Simančík       | František | sx.    | G BA Grösslingova    | 38.5 | 5.0   | 5.0   | 5.0   | 2.0   |    | 55.50 |
| 3. Škrovinová  | Katarína  | kv.    | G Nitra Párovská     | 37.1 | 5.0   | 1.3   | 5.0   | 5.0   |    | 54.24 |
| 4. Hrdá        | Marcela   | kv.    | G Turčianske Teplice | 37.1 | 5.0   | 2.5   | 4.5   | 4.0   |    | 54.01 |
| 5. Komorovský  | Marek     | kv.    | G Dubnica nad        | 33.3 | 5.0   | 3.8   | 5.0   | 5.0   |    | 52.43 |
| 6. Perešini    | Peter     | 1 F    | G BB Tajovského      | 34.3 | 5.0   | 1.8   | 6.0   | 3.0   |    | 51.07 |
| 7. Imriška     | Jakub     | 1 A    | G BA J. Hronca       | 35.1 | 5.0   | 3.8   | 2.0   | 4.0   |    | 51.04 |
| 8. Zámečník    | Peter     | 1 D    | G MRŠ NMV            | 35.4 | 5.0   | 3.8   | 4.5   | 1.0   |    | 50.89 |
| 9. Štolcová    | Jana      | kv.    | G Nitra Párovská     | 35.3 | 5.0   | 2.5   | 5.0   | 1.0   |    | 50.12 |
| 10. Dzetkulič  | Michal    | 2 A    | G PH Michalovce      | 35.9 | 4.5   | 1.3   | 3.5   | 5.0   | -1 | 49.15 |
| 11. Ruman      | Ján       | sx.    | G BA Grösslingova    | 35.0 | 5.0   | 2.5   | 4.5   | 2.0   |    | 49.00 |
| 12. Pôbišová   | Zuzana    | 1 F    | G BB Tajovského      | 30.3 | 5.0   | 0.0   | 4.5   | 5.0   |    | 46.02 |
| 13. Foltin     | Miroslav  | 1 C    | G Jána Hollého       | 33.0 | 5.0   | 2.5   | 2.0   | 1.0   |    | 45.02 |
| 14. Molnárová  | Katarína  | 2 D    | G KE Šrobárova       | 31.5 | 5.0   | 5.0   | 4,5   | 4,5   | -1 | 45.00 |
| Savincová      | Katarína  | 2 E    | G PH Michalovce      | 30.5 | 5.0   | 2.5   | 4.5   | 2.5   |    | 45.00 |
| 16. Kravec     | Martin    | 1 A    | G PH Michalovce      | 25.6 | 5.0   | 2.0   | 3.0   | 5.0   |    | 41.69 |
| 17. Sasák      | Róbert    | 2 D    | SPŠE Piešťany        | 32.5 | 5.0   | 2.0   | 4,5   | 2.0   |    | 41.50 |
| 18. Džunko     | Ján       | sx.    | G Spišská Stará Ves  | 29.4 | 4.0   | 2.0   | 3.5   | 2.0   |    | 40.90 |
| 19. Czókolyová | Eva       | 1 A    | G Piešťany           | 31.3 | 5.0   | –     | 2.0   | 1.0   |    | 40.77 |
| 20. Hergelová  | Beáta     | 1 B    | G BST Lučenec        | 27.8 | 5.0   | 1.8   | 3.0   | 1.5   |    | 40.53 |
| 21. Kováč      | Adrián    | 2 A    | G PH Michalovce      | 24.5 | 5.0   | 2.3   | 3.0   | 5.0   |    | 39.75 |
| 22. Molčány    | Dušan     | 1 B    | SPŠS BA Feinorovo    | 29.7 | 5.0   | –     | –     | 3.0   |    | 39.11 |
| 23. Šomodiová  | Kristína  | 1 A    | G Piešťany           | 26.5 | 5.0   | 2.3   | 2.0   | 1.5   |    | 38.75 |
| 24. Duník      | Matej     | 1 B    | G VOZA               | 24.6 | 4.5   | 3.8   | 4.0   | –     |    | 38.28 |
| 25. Vojtko     | Andrej    | sx. A  | G Skalica            | 25.0 | 4.5   | 2.5   | 2.0   | 3.5   |    | 37.50 |
| 26. Bratko     | Milan     | sx. A  | G BA Pankúchova      | 36.0 | –     | –     | –     | –     |    | 36.00 |
| 27. Ďurčík     | Miroslav  | 1 C    | G BST Lučenec        | 21.9 | 5.0   | 1.5   | 3.0   | 1.0   |    | 33.87 |
| 28. Dzurňák    | Tomáš     | 1 E    | G Spišská Nová Ves   | 27.7 | 5.0   | –     | –     | –     |    | 33.86 |
| 29. Uhrin      | Tomáš     | 2 E    | G PH Michalovce      | 17.5 | 5.0   | 2.8   | 3.0   | 5.0   |    | 33.25 |
| 30. Kulík      | František | 2 E    | G Humenné            | 16.9 | 5.0   | 1.8   | 3.0   | 1.0   |    | 27.65 |
| 31. Rušin      | Michal    | sx.    | G Spišská Stará Ves  | 17.0 | 5.0   | 0.8   | 4.0   | 0.5   |    | 27.25 |
| 32. Regec      | Mário     | 1 A    | G PH Michalovce      | 14.8 | 5.0   | 0.5   | 2.0   | 1.5   |    | 25.30 |
| 33. Gašparík   | Peter     | 2 B    | G AV Levice          | 18.0 | 4.5   | –     | –     | –     |    | 22.50 |
| 34. Šanoba     | Ľuboš     | 1 C    | G Považská Bystrica  | 21.0 | –     | –     | –     | –     |    | 21.00 |
| 35. Kováč      | Michal    | kv.    | G BA Grösslingova    | 19.4 | –     | –     | –     | –     |    | 19.41 |
| 36. Kuchta     | Miroslav  | 3 A    | Evanjelické gym. BA  | 7.3  | 5.0   | –     | 1.0   | 0.5   |    | 15.12 |
| 37. Malčícká   | Martina   | kv.    | G Banská Štiavnica   | 10.0 | 1.5   | –     | 1.0   | 1.0   |    | 14.40 |
| 38. Rochová    | Alica     | kv.    | G Banská Štiavnica   | 10.1 | 2.0   | 0.5   | 0.5   | 0.0   |    | 13.85 |
| 39. Kázmér     | Ladislav  | 1 A    | G Veľké Kapušany     | 6.8  | 5.0   | –     | –     | –     |    | 12.94 |
| 40. Gottweis   | Martin    | 1 B    | G BA J. Hronca       | 12.4 | –     | –     | –     | –     |    | 12.44 |
| 41. Holičková  | Ivana     | kv.    | G Banská Štiavnica   | 8.9  | –     | 0.5   | 0.5   | 0.0   |    | 10.21 |
| 42. Pápayová   | Zuzana    | 1 A    | G Veľké Kapušany     | 7.2  | 1.0   | 0.5   | 0.5   | –     |    | 9.72  |
| 43. Lampášová  | Júlia     | sx.    | G Považská Bystrica  | 7.0  | –     | –     | –     | –     |    | 7.00  |
| 44. Karasová   | Barbora   | 1 B    | G Púchov             | 3.7  | 1.5   | 0.5   | 0.5   | 0.0   |    | 6.85  |
| 45. Bruncko    | Milan     | 2 C    | G V.P.Tótha          | 1.0  | –     | –     | –     | 1.5   |    | 2.50  |
| 46. Kubová     | Miška     | 2 A    | G Vrbové             | 1.5  | –     | –     | –     | 0.0   |    | 1.50  |



# FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 3. série  
A–kategória (starší)  
18.ročník  
letný semester  
školský rok 2002/2003.

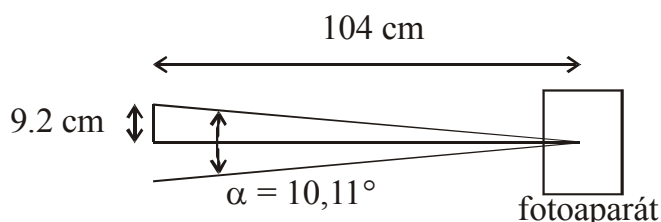


FKS, KZDF FMFI UK  
Mlynská dolina  
842 48 Bratislava  
riesenia@fks.sk  
info@fks.sk

## A – 3.1 Priemerné Slnko (opravoval Roman)

- a) Vymyslíte a prakticky realizujete experiment, pri ktorom čo najpresnejšie zistíte uhlový priemer Slnka (teda uhol, pod ktorým vidíme slnečný kotúč).  
b) Zistíte, či je „Mesiac je väčší nízko nad obzorom, než keď ho máme vysoko nad hlavou.“

Vzhľadom na množstvo digitálnych fotografií, ktoré sa mi podarilo vytvoriť, rozhodol som sa využiť tento archív. Vybral som fotografie Mesiaca nízko nad obzorom a vysoko nad obzorom a fotografie Slnka robené pri maximálnom zome (6×). Pri tomto istom zome (6×) som odfotoval pravítka zo vzdialenosti 104 cm. Na širšiu stranu fotografie sa zmestilo 18,4 cm z dĺžky pravítka. Tomu zodpovedá uhol  $\alpha = 2\arctan(9,2 \text{ cm}/104 \text{ cm}) = 10,11^\circ$ .



V grafickom programe som pokrýval kotúč Slnka alebo Mesiaca kruhom, pričom som odmeral jeho priemer  $d$ . Šírka fotografie bola 722,5 mm. Uhlový priemer  $\phi$ , ktorý zaberali Slnko a Mesiac som vypočítal ako  $\phi = \{d\} \text{ mm} / 722,5 \text{ mm} \times 10,11^\circ$ .

Chyby, ktoré sa prejavujú na výsledkoch, mohli vzniknúť pri fotografovaní pravítka – meranie vzdialenosti a pravítka, pri zakrývaní kotúča kruhom – odhadovaní, kedy je už kotúč zakrytý, ale hlavne pretečením náboja do okolitých buniek rastra na senzore digitálneho fotoaparátu pri fotografovaní takého jasného zdroja ako Slnko alebo Mesiac, čo spôsobilo zväčšenie priemeru kotúča.

- a) Slnko, priemerná hodnota  $\phi = 34,7'$ . Údaje sú uvedené v nasledovnej tabuľke.

| veľkosť / mm | uhol / ' | Čas              | miesto                        |
|--------------|----------|------------------|-------------------------------|
| 40,4         | 33,9     | 27.11.2002 12:59 | Bratislava, Dostojevského rad |
| 40,4         | 33,9     | 27.11.2002 12:59 | Bratislava, Dostojevského rad |
| 39,7         | 33,3     | 27.11.2002 12:59 | Bratislava, Dostojevského rad |
| 40,8         | 34,3     | 27.11.2002 12:59 | Bratislava, Dostojevského rad |
| 40,7         | 34,2     | 27.11.2002 13:01 | Bratislava, Dostojevského rad |
| 41,2         | 34,6     | 27.11.2002 13:02 | Bratislava, Dostojevského rad |
| 46,4         | 38,9     | 12.01.2003 16:11 | Bratislava, Jasovská          |
| 45,1         | 37,8     | 27.02.2003 16:55 | Bratislava, Ilkovičova        |
| 40,0         | 33,6     | 09.03.2003 06:32 | Bratislava, Okánikova         |
| 39,7         | 33,3     | 27.03.2003 17:59 | Bratislava, Botanická         |
| 40,2         | 33,7     | 27.03.2003 17:59 | Bratislava, Botanická         |

Podľa klasických MFCh tabuliek je zdanlivý stredný polomer slnečného kotúča  $15'59,63''$  čomu zodpovedá priemer približne  $32'$ . Myslím si, že najväčšiu chybu pri meraní spôsobilo práve pretečenie náboja. Mimochodom, výrobcovia neodporúčajú fotografovať digitálnym fotoaparátom takéto jasné objekty.

b) Mesiac nízko nad obzorom, priemerná hodnota  $\phi = 32,7'$

Mesiac vysoko nad obzorom, priemerná hodnota  $\phi = 32,2'$

Údaje sú uvedené v nasledovnej tabuľke.

|               | veľkosť / mm | uhol /' | čas              | miesto                     |
|---------------|--------------|---------|------------------|----------------------------|
| Mesiac nízko  | 39,7         | 33,3    | 19.12.2002 16:18 | Bratislava, Mlynská dolina |
|               | 37,6         | 31,6    | 20.12.2002 16:58 | Bratislava, Obchodná       |
|               | 39,5         | 33,1    | 16.04.2003 19:03 | Bratislava, Smolenická     |
| Mesiac vysoko | 37,4         | 31,4    | 17.10.2002 21:38 | Bochum, SRN                |
|               | 37,8         | 31,7    | 12.01.2003 16:10 | Bratislava, Jasovská       |
|               | 39,9         | 33,5    | 15.03.2003 22:33 | Bratislava, Okánikova      |

Podľa spomínaných tabuliek je zdanlivý polomer mesačného kotúča  $15'33''$ , čomu zodpovedá priemer  $31'$ . Namerané hodnoty sú opäť trochu väčšie, čo opäť dávam za vinu senzoru. V oboch prípadoch vyšiel približne rovnaký uhlový priemer. Čo sa teda týka povery, že mesiac nízko nad obzorom je väčší, v tomto prípade ide o optický klam. Mesiac nízko nad obzorom porovnávame s objektmi, ktoré vidíme blízko od neho (stromy, domy, paneláky...). Keď je Mesiac vysoko, tak nám na porovnanie ostanú napr. prsty, vtáky a podobne.

### A – 3.2 Kobylka (opravovala Miška)

*Odhadnite výkon kobyľky zelenej pri odraze ku skoku do výšky jeden meter.*

Kvety kvitnú, slnko svieti, lúka rozvoniava a kobyľky plné energie skáču do závratných výšok. Tá naša mala vyskočiť do výšky jeden meter. A my sme chceli vedieť, ako sa jej pri tom bude dariť, však?

Nuž, pristupovať k závažnému kobyľkovskému problému sa dalo rôzne. Nie každý z vás však prišiel na to, že aj celkom jednoducho. Ako? Takto...

Kobyľka sa má po odraze dostať do výšky 1 meter. Keďže jej výkon iba odhadujeme, stačí, aby skákala zvislo nahor. Dobré vieme, že na to potrebuje energiu  $E = mgh$ . (Skoky pod uhlami 45, 60 alebo 75 stupňov nám náš výsledok priveľmi nezmenia (skúste si to niekde na lúke spočítať :-). Odhadnutých odhadov totiž pri výpočte ešte bude habadej a všetky naše zdanlivé spresnenia sa tam zaručene stratia. Z toho istého dôvodu sa nebudeme zaoberať ani odporom vzduchu.) Zo ZZE si určíme rýchlosť, ktorú potrebuje mať kobyľka na začiatku svojho skoku:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh}.$$

Túto rýchlosť dosiahne (ako ste mnohí správne vo svojich riešeniach uviedli) pri svojom odraze – teda pri “vystieraní” svojich nôh, ktorých dĺžku si označíme  $l$ . Predpokladajme, že kobyľka na tejto dráhe rovnomerne zrýchľuje z pokoja až na rýchlosť  $v$ . Výkon je práca vykonaná za nejaký ten čas a čas, kedy nôžky kobyľky pracovali (kobyľka nadobúdala potrebnú kinetickú energiu), dostaneme v našom zjednodušenom prípade z rovníc pre rovnomerne zrýchlený pohyb.

Teda platí

$$l = \frac{1}{2}vt \quad \Rightarrow \quad t = 2l/v,$$

a po dosadení za rýchlosť

$$t = 2l/\sqrt{2gh}.$$

Vieme, akú prácu kobylka pri skoku vykonala a vieme aj to, ako dlho jej to trvalo. Aspoň trochu fyzikálne uvedomelý občan si hneď uvedomí, že k úspešnému koncu nám už veľa nechýba. Približný výkon kobylky totiž bude

$$P = W/t = mgh/t = mgh\sqrt{2gh}/2l.$$

Po číselnom vyjadrení encyklopedických alebo racionálne odhadnutých hodnôt dĺžok jej končatín a hmotnosti (celkom vhodné sa zdajú byť napríklad hodnoty  $l = 3 \text{ cm} = 0,03 \text{ m}$ ,  $m = 3 \text{ g} = 0,003 \text{ kg}$ ) zistíme, že kobylka podala pri svojom skoku výkon približne

$$P \approx 2W.$$

Samozrejme, konečný verdikt v nemalej miere závisí od voľby týchto parametrov (teda od druhu kobylky :-). Výkony vašich súkromných kobyliek (vďaka za krásne názorné obrázky) sa pohybovali od 0,2 do 5 W, rádovo však vždy na úrovni niekoľkých wattov.

V úvode tejto rozpravy o skákajúcom hmyze som spomínala, že okrem jednoduchého prístupu volili mnohí z vás aj prístupy zložitejšie. Ako však vidíte, vôbec to nebolo potrebné. Odhad bude totiž vždy len odhad a zaoberať sa nerovnomerným zrýchlením, odporom prostredia (mimochodom, opäť ide o výpočet plný odhadov) a skokom pod rôznymi uhlami si vyžaduje množstvo času navyše. Ak ho však máte, naozaj vám ho mnohí ľudia vrátane mňa môžu iba závidieť:-). Prajem vám všetkým krásny deň a leto plné kobyliek...

### A – 3.3 Vlak (opravoval Stano)

*Vlak sa pohybuje po priamej ceste. Vnútri vlaku je o podlahu pevne pripevnený stôl. Na stole je zápalková škatuľka. Vlak začne zrazu brzdiť (rovnomerne spomaľovať), čím sa zápalková škatuľka dá do pohybu, až nakoniec padne na zem. Ako ďaleko od stola dopadne? Uvažujte, že vlak brzdí po celý čas pádu zápalkovej škatuľky. Trenie medzi stolom a škatuľkou je nulové.*

Pri riešení tejto úlohy ste sa mohli štylizovať do pózy čakajúceho na stanici, alebo cestujúceho vo vlaku. Mohli ste si teda vybrať inerciálnu, alebo neinerciálnu vzťažnú sústavu. Výber je iba otázkou vkusu. V každom prípade, keď ste si už raz vybrali, je vhodné pri tomto výbere ostať. Ak však silou mocou chcete uprostred riešenia meniť sústavu, z ktorej sa na celú vec pozeráte, treba si dať veľký pozor, ako to robíte, lebo to môže celé zle skončiť. Aj keď nič horšie sa vám nemôže stať, ako stratiť pár bodov :-). Poďme však už k samotnému riešeniu.

*Pohľad z inerciálnej vzťažnej sústavy (čakajúci na stanici).*

Kým sa vzhľadom na krajinu vlak pohybuje rovnomerným priamočiarym pohybom rýchlosťou  $v$ , všetky telesá v ňom sa pohybujú vzhľadom na krajinu tou istou rýchlosťou  $v$ . Z prvého Newtonovho zákona vyplýva, že kým na veci vo vlaku nezačne pôsobiť nejaká sila, v tomto rovnomernom priamočiarom pohybe aj zotrávajú. To je aj náš prípad, keďže trenie medzi stolom a škatuľkou je nulové, a taktiež zanedbávame odpor vzduchu počas letu škatuľky. Škatuľka sa teda po celý čas pohybuje rýchlosťou  $v$  (vo vodorovnom smere), a to aj keď vlak začne brzdiť. Keď teda vlak začne spomaľovať spomalením  $a$ , prejaví sa to tým, že škatuľka sa začne pohybovať vzhľadom na vlak zrýchlením  $a$ .

Označme:

$t_1$  – čas, za ktorý škatuľka prejde vzdialenosť  $l$  po stole,

$t_2$  – čas, za ktorý škatuľka prejde vzdialenosť  $s$  vzduchom,

$s$  – vzdialenosť bodu dopadu od stola.

Škatuľka prejde od začiatku brzdenia vlaku po dopad na podlahu vzdialenosť  $v(t_1+t_2)$ . Vlak spomaľuje, prejde teda vzdialenosť  $v(t_1+t_2) - 0,5a(t_1+t_2)^2$ . Rozdiel týchto dráh je vzdialenosť, ktorú prejde škatuľka vo vnútri vlaku, a to je  $l+s$ . Môžeme teda písať:

$$l+s = 0,5a(t_1+t_2)^2. \quad (1)$$

Vzdialenosť  $l$  vo vnútri vlaku prejde škatuľka za čas

$$t_1 = \sqrt{2l/a} \quad (\text{lebo } l = at_1^2/2). \quad (2)$$

Nakoniec  $t_2$  je čas, za ktorý škatuľka spadne z výšky  $h$ . Jedná sa o voľný pád, čiže

$$t_2 = \sqrt{2h/g} \quad (\text{lebo } h = gt_2^2/2). \quad (3)$$

Po skombinovaní (1), (2) a (3) dostaneme:

$$s = ah/g + 2\sqrt{ahl/g}.$$

*Pohľad z neinerciálnej vzťažnej sústavy (cestujúci vo vlaku).*

Tu si treba uvedomiť, že ak sme vo vagóne, tak od začiatku brzdenia vlaku začne na všetky veci v ňom pôsobiť zotrvačná imaginárna sila. Imaginárna preto, že jej pôvod je v spomaľovaní vlaku, čím ju cítia len telesá vo vlaku a pre všetkých ostatných mimo vlaku tu žiadna sila nie je. Pod vplyvom tejto sily sa začne pohybovať škatuľka rovnomerne zrýchleným pohybom so zrýchlením  $a$ . Vo vodorovnom smere prejde vzdialenosť  $s+l$ , pričom jej to trvá čas  $t_1+t_2$ . Čiže môžeme napísať:

$$l+s = a(t_1+t_2)^2/2.$$

Čo je ale to isté ako vzt'ah (1), a teda nakoniec počítame to isté ako pred chvíľou, pričom obdržime ten istý výsledok  $s = ah/g + 2\sqrt{ahl/g}$ . To však nie je prekvapujúce, veď problém je ten istý, len pohľad naň sme zmenili. Ináč povedané, úvahy môžeme mať rôzne, ale technicky počítame nakoniec to isté. Toť fsio.

### **A – 3.4 Zrkadielko, povedzže mi..** (opravoval Tomáš, vzorák podľa Kuba Závodného)

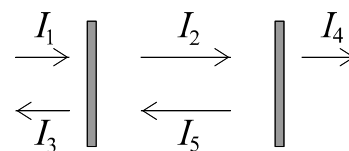
*Predstavte si polopriepustné zrkadlo. Keď naň zasvietime svetelným lúčom intenzity  $I$ , tak zrkadlo prepustí lúč intenzity  $2/3I$  a zvyšok, t.j. lúč intenzity  $1/3I$  odrazí späť. Majme 3 takéto zrkadlá postavené za sebou. Lúč akej intenzity prepustí resp. odrazí táto optická sústava keď na ňu zasvietime lúčom intenzity  $I$ ?*

*Pre makačov (bonus bod): riešte túto úlohu pre  $n$  zrkadiel postavených za sebou.*

Tak tentoraz to bolo o čosi zložitejšie, úlohu ste ale viacerí perfektne zvládli, pričom ste použili niekoľko principiálne odlišných metód. Riešenia boli najčastejšie 2 typov: prvým bolo porátať výslednú intenzitu približne. Nakoľko však existuje presná metóda (a podľa všetkého nebolo až také ťažké na ňu prísť), dával som za tieto riešenia do 2,5 bodu. Správne riešenia vyzerali najčastejšie tak, že ste robili úvahy o lúčoch a nakoniec spočítali geometrický rad. Ja ukážem trochu iný spôsob, pri ktorom nepotrebujeme rátať ani to.

Skúsme najprv vyrátať, lúč akej intenzity prejde sústavou zloženou z dvoch zrkadiel pričom prvé zo zrkadiel prepúšťa  $k$  a druhé  $m$  z dopadajúceho svetla. (tým pádom odrážajú množstvá  $1-k$  a  $1-m$  z dopadajúceho svetla) Označme intenzity medzi zrkadlami tak, ako je to znázornené nižšie. Potom zrejme platia rovnice popisujúce odrážanie a prepúšťanie svetla jednotlivými zrkadlami. Tie si nájdete na nasledujúcej strane ...

$$\begin{aligned}
 I_2 &= kI_1 + (1 - k) I_3, \\
 I_3 &= (1 - m) I_2, \\
 I_4 &= mI_2, \\
 I_5 &= kI_3 + (1 - k) I_1.
 \end{aligned}$$



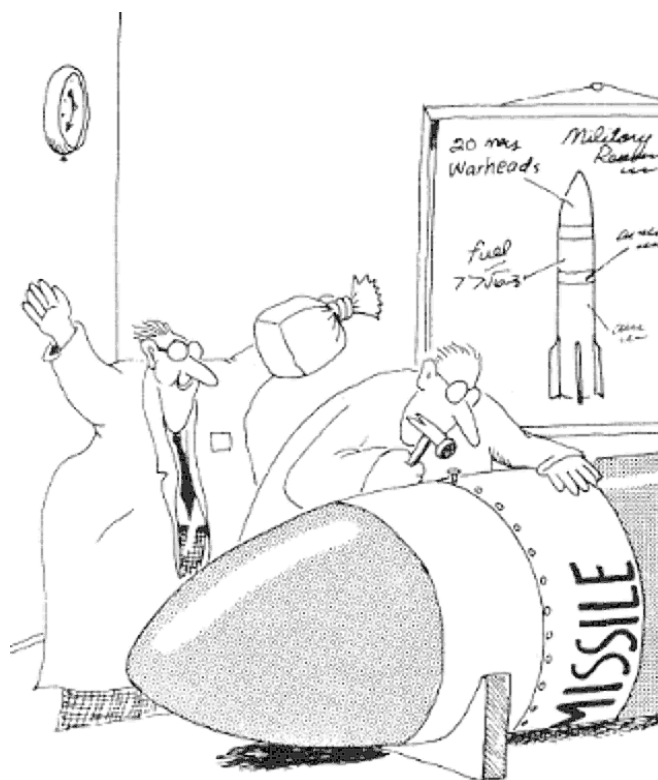
Riešením tejto sústavy dostávame  $I_4 = I_1 \times km / (k + m - km)$  a  $I_5 = I_1 - I_4$  (čo neprejde, to sa musí odraziť).

Nech koeficient  $A_n$  vyjadruje, koľko z dopadajúceho svetla prepustí sústava  $n$  zrkadiel. Zrejme  $A_1 = 2/3$ . Predpokladajme že poznáme hodnotu  $A_n$  a skúsme pomocou tejto hodnoty zrátať  $A_{n+1}$ . Sústavu  $n + 1$  zrkadiel si predstavme ako sústavu  $n$  zrkadiel plus jedno na záver. Lenže sústava  $n$  zrkadiel sa správa presne tak isto ako 1 zrkadlo ktoré prepustí  $A_n$  z dopadajúceho svetla (a zvyšok odrazí). Celé sa to teda správa tak isto ako vyššie zrátaná sústava 2 zrkadiel pre  $k = A_n$  a  $m = 2/3$ . Po dosadení tak dostávame  $A_{n+1} = 2A_n / (2 + A_n)$ . Keď si dosadíme niekoľko hodnôt, ľahko zrátame  $A_2 = 1/2 = 2/4$  a  $A_3 = 2/5$ . Nech  $A_n = p/q$ . Potom platí  $A_{n+1} = p / (q + p/2)$ . Z toho už vidno, že čitateľ zlomku bude stále 2 a menovateľ bude stále rásť o 1, platí teda  $A_n = 2 / (n + 2)$ .

### Na záver

Tak a to už je pre tento rok naozaj všetko. Aj keď ... S týmto konštatovaním určite nesúhlasí tých 32 z Vás, ktorí sa zúčastnia akčného letného sústreduenia našich najlepších riešiteľov. To sa uskutoční v malebných horách východoslovenskej Gelnice a čo sa tam bude diať ... No však uvidíte, tí menej šťastní si to časom budú môcť prečítať na našej www-stránke.

Krátko po sústreduení nastanú (konečne) pravé a ničím nerušené prázdniny. Užite si počas nich veľa príjemných zážitkov. Veríme, že v septembri sa oddýchnutí vrátite nielen k svojim školským povinnostiam, ale aj k nášmu semináru (terajším štvrtákom veľa zdraru na školách, ktoré si vyberiete). Nech sa darí!



# FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina A – kategórie po 3. sérii letného semestra 18. ročníka

| Priezvisko        | Meno     | Trieda | Škola                | ②    | A-3.1 | A-3.2 | A-3.3 | A-3.4 | ⊗  | Σ     |
|-------------------|----------|--------|----------------------|------|-------|-------|-------|-------|----|-------|
| 1. Závodný        | Jakub    | se.    | G BA Grösslingova    | 39.3 | 4.7   | 5.0   | 5.0   | 6.0   |    | 60.09 |
| 2. Neilinger      | Pavol    | 3 A    | G Dunajská Streda    | 35.1 | 4.5   | 5.0   | 5.0   | 2.5   |    | 53.11 |
| 3. Baník          | Dušan    | 3 A    | G Poprad Popr. nábr. | 32.8 | 3.7   | 5.0   | 5.0   | 6.0   |    | 52.91 |
| 4. Maták          | Peter    | 3 E    | G VBN Prievidza      | 31.2 | 4.0   | 5.0   | 5.0   | 6.0   |    | 51.49 |
| 5. Zalom          | Peter    | 4 G    | G Poprad Tatarku     | 30.0 | 5.0   | 5.0   | 5.0   | 6.0   |    | 51.00 |
| 6. Tekel          | Juraj    | ok.    | G M.M. Hodžu         | 29.0 | 5.0   | 5.0   | 5.0   | 4.0   |    | 48.00 |
| 7. Kvašňáková     | Katka    | 3 E    | G K2 Prešov          | 31.1 | 3.0   | 2.5   | 5.0   | 5.0   |    | 47.87 |
| 8. Fialka         | Vlado    | 3 E    | G K2 Prešov          | 28.1 | 3.0   | 5.0   | 5.0   | 6.0   |    | 47.66 |
| 9. Štolc          | Miroslav | se.    | G Nitra Párovská     | 27.2 | 3.0   | 5.0   | 5.0   | 6.0   |    | 46.80 |
| 10. Šoltésová     | Mária    | 3 B    | G BA Grösslingova    | 26.8 | 4.0   | 5.0   | 5.0   | 5.0   |    | 46.38 |
| 11. Batmendiynová | Zuzana   | se.    | G T. Vansovej        | 27.6 | 2.0   | 5.0   | 5.0   | 6.0   |    | 46.37 |
| 12. Burger        | Michal   | se.    | G BA Grösslingova    | 32.7 | –     | –     | 5.0   | 6.0   | -1 | 44.30 |
| 13. Smrek         | Ján      | ok. N  | 1SG BA Bajkalská     | 28.5 | 2.5   | 3.5   | 5.0   | 4.0   |    | 43.50 |
| 14. Lauko         | Martin   | se. A  | G JL Martin          | 22.9 | 5.0   | 4.0   | 5.0   | 6.0   |    | 43.18 |
| 15. Mikulík       | Andrej   | 3 B    | G BA Grösslingova    | 24.3 | 2.5   | 5.0   | 5.0   | 5.0   |    | 42.75 |
| 16. Svrček        | Matúš    | se.    | G Terézie Vansovej   | 25.7 | 2.5   | 3.0   | 5.0   | 5.0   |    | 42.46 |
| 17. Kysel         | Róbert   | 3 A    | G BB Š. Moyzesa      | 25.0 | 4.7   | 3.5   | 4.5   | 1.5   |    | 40.61 |
| 18. Brutovská     | Eva      | se.    | G Kežmarok           | 20.2 | 4.8   | 5.0   | 5.0   | 5.0   |    | 40.38 |
| 19. Potočková     | Zuzana   | se.    | G Liptovský Mikuláš  | 21.8 | –     | 5.0   | 5.0   | 4.5   |    | 37.72 |
| 20. Krššák        | Martin   | se. A  | G Piaristické Nitra  | 13.3 | 3.5   | 4.0   | 5.0   | 2.5   |    | 29.62 |
| 21. Molčány       | Michal   | 3 E    | SPŠE BA K.Adlera     | 10.9 | 4.0   | 2.5   | 0.0   | 5.0   |    | 23.99 |
| 22. Čajka         | Jozef    | 3 A    | G Spišská Stará Ves  | 13.3 | 2.0   | 2.0   | 1.0   | 1.5   |    | 21.24 |
| 23. Trubenová     | Barbora  | 3 A    | G BA J. Hronca       | 11.5 | –     | –     | –     | –     |    | 11.50 |
| 24. Budáčová      | Hana     | 3 C    | G BST Lučenec        | 11.0 | –     | –     | –     | –     |    | 11.00 |
| 25. Nad'          | Miroslav | 3 A    | G Veľké Kapušany     | 1.8  | 0.5   | 2.5   | 1.5   | 2.5   |    | 10.24 |
| 26. Žák           | Vladimír | 3 A    | G LS Bardejov        | 9.5  | –     | –     | –     | –     |    | 9.49  |
| 27. Dzetkulič     | Michal   | 2 A    | G PH Michalovce      | 8.9  | –     | –     | –     | –     |    | 8.91  |
| 28. Majorošová    | Gabriela | 3 A    | G Veľké Kapušany     | 5.7  | 0.2   | 1.5   | –     | –     |    | 7.88  |
| 29. Feketeová     | Erika    | 3 A    | G Veľké Kapušany     | 3.2  | –     | 1.0   | 0.5   | –     |    | 5.10  |
| 30. Santusová     | Iva      | 3 C    | G VPT Martin         | 5.1  | –     | –     | –     | –     |    | 5.08  |
| 31. Lakatoš       | Pavol    | 3 A    | G Veľké Kapušany     | -2.8 | –     | –     | –     | –     |    | -2.84 |