# FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

**vzorové riešenia 2. série**
**B**–kategória (mladší)
18.ročník
letný semester
školský rok 2002/2003.

**www.** **.sk**

**FKS, KZDF FMFI UK**
**Mlynská dolina**
**842 48 Bratislava**
*riesenia@fks.sk*
*info@fks.sk*

---

**B – 2.1 Vesmírne radovánky** (opravoval Fajo)

*Vo voľnom priestore sa vznáša vesmírna stanica tvaru valca s polomerom $R = 50$ m. Stanica sa otáča takou rýchlosťou, aby na jej vnútornom obvode vytvorila zdanie zemskej gravitácie ($g = 10$ m/s$^2$). Na tom vnútornom obvode stojí zvedavec a chystá sa vyhodiť kameň zvislo nahor takou rýchlosťou, ktorá by ho na Zemi dopravila do výšky 5 metrov.*

a) *Akou uhlovou rýchlosťou $\omega$ sa otáča stanica?*
b) *Do akej najväčšej výšky (výšku meriame ako vzdialenosť od plášťa stanice) sa dostane kameň počas svojho letu?*

Ahojte experti, tento príklad bol čisto teoretický, pretože vyskúšať to niekde prakticky... Jedine v bubne automatickej pračky, ale to by bolo trochu nebezpečné (preto boli zaujímavé vety typu: „Odhadujem, že to je okolo 6 m.“). Aj tak ste sa ukázali ako skúsení fyzici a mnohí ste to bezchybne vypočítali.

Najskôr by som chcel objasniť pôvod odstredivej a dostredivej sily, pretože niektorí ste s tým mali problémy. Na to nám dobre poslúži klasický príklad kolotoča: Na retiazkovom kolotoči sa točí malý Ferko a vedľa na zemi stojí jeho kamarát Kubko. Keďže Kubko stojí, nachádza sa ako pozorovateľ v inerciálnej vzťažnej sústave, pretože výslednica síl na neho pôsobiacich je nulová. Z jeho pohľadu sa Ferko na kolotoči pohybuje rovnomerne po kružnici, a teda na Ferka pôsobí nejaká sila – sila reťaze (ináč by sa musel pohybovať rovnomerne priamočiaro). Tá sa nazýva dostredivá, a ako názov napovedá, smeruje do stredu kolotoča. Čo si ale o celej situácii myslí Ferko? Jemu sa zdá (ak by na kolotoči prežil celý život), že stojí a celý svet sa točí okolo stredu kolotoča. Ak teleso stojí, znamená to, že výslednica síl na teleso pôsobiacich je nulová. My ale vieme, že na Ferka už pôsobí dostredivá sila, preto z jeho pohľadu naň musí pôsobiť aj opačná sila rovnakej veľkosti – odstredivá sila. Je to teda zdanlivá sila, ktorá sa uplatňuje len v neinerciálnych sústavách. Dôležité je, že ak sa reťaz preruší, teda prestane pôsobiť dostredivá sila, zanikne aj sila odstredivá.

Ale späť k našemu príkladu: Rotujúci valec je neinerciálna vzťažná sústava (kolotoč), preto človeku na jeho povrchu sa zdá, že na neho pôsobí odstredivé zrýchlenie, ktorého veľkosť je $a_{\mathrm{od}} = v^2/R$, kde $R = 50$ m je polomer valca a $v$ je rýchlosť na jeho povrchu. Tú si môžeme vyjadriť ako $v = \omega.R$, kde $\omega$ je uhlová rýchlosť otáčania. V našom prípade chceme, aby bolo odstredivé zrýchlenie $a_{\mathrm{od}}$ také isté ako gravitačné $g$ na Zemi:

$$a_{\mathrm{od}} = \omega^2.R = g \quad \text{z toho} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}\,. \tag{1}$$

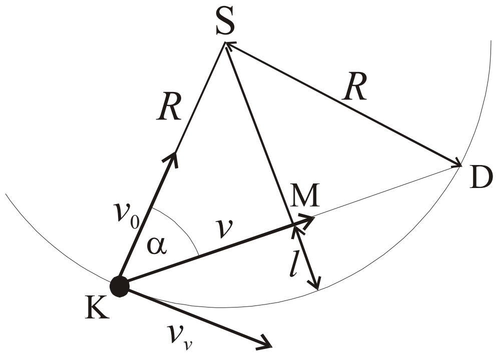
Po dosadení dostaneme $\omega = 0{,}44\ \mathrm{s}^{-1}$. Túto časť úlohy ste mali takmer všetci správne, až na malé výnimky, ale väčšinou šlo iba o numerické chyby.

V druhej časti na začiatku bolo treba vypočítať, akou zvislou rýchlosťou $v_0$ musí byť hodený kameň na Zemi, aby vyletel do výšky $h$. Na to použijeme už starý známy zákon zachovania energie: počiatočná kinetická energia kameňa $E_{\mathrm{k}} = 1/2mv_0^2$ sa spotrebuje na zmenu polohovej energie $E_{\mathrm{p}} = mgh$ vo výške $h$. Keďže $E_{\mathrm{p}} = E_{\mathrm{k}}$, dostaneme:

$$v_0 = \sqrt{2gh}\,. \tag{2}$$

Tým sme dostali veľkosť rýchlosti, akou hádže človek na valci kameň. Jej smer je kolmo hore, čo v preklade znamená smerom do stredu (osi) valca.

A teraz to príjde!: Kým je kameň na valci (človek ho drží), pôsobí naň valec dostredivou silou, ktorá spôsobuje jeho pohyb po kružnici. Akonáhle sa ale kameň od valca odlepí, nebude naň pôsobiť žiadna sila (podobne ako pri pretrhnutí reťaze na kolotoči) a začne sa pohybovať rovnomerne priamočiaro v smere celkovej rýchlosti $v$, ktorá mu bola udelená. Okrem rýchlosť $v_0$ od človeka má kameň aj rýchlosť $v_v$ – obvodovú rýchlosť valca, ktorou sa pohybuje po kružnici. Tá smeruje kolmo na polomer, teda aj kolmo na rýchlosť $v_0$ (obrázok). Výsledná rýchlosť $v$ je teda súčtom oboch rýchlostí $v_v$ a $v_0$. Kameň K sa bude pohybovať po priamke, až kým znova nedopadne na valec v bode D. Nás zaujíma maximálna výška $l$ nad valcom, čo nie je nič iné ako najväčšia vzdialenosť kameňa od valca počas letu. Tú dosiahne kameň, v dôsledku rovnoramennosti trojuholníka KDS, v bode M, čo je stred úsečky KD. Pre dĺžku $l$ platí: $l = R - |MS|$, kde si dĺžku $|MS|$ môžeme vyjadriť podľa uhla $\alpha$ ako $|MS| = R.\sin\alpha$. Potom:




$$l = R(1 - \sin\alpha). \qquad (3)$$

K úplnému šťastiu si ešte potrebujeme vyjadriť $\sin\alpha$ pomocou rýchlostí $v_v$ a $v_0$. Keďže tie sú na seba kolmé, platí:

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_v^2}$$

Potom pre $\sin\alpha$ dostaneme vzťah:

$$\sin\alpha = \frac{v_v}{v} = \frac{v_v}{\sqrt{v_0^2 + v_v^2}}. \qquad (4)$$

Keď vzťahy (4) a (2) dosadíme do rovnice (3) získame konečnú haluz:

$$l = R\left(1 - \frac{v_v}{\sqrt{v_0^2 + v_v^2}}\right) = R\left(1 - \frac{\omega R}{\sqrt{\omega^2 R^2 + 2gh}}\right) = R\left(1 - \sqrt{\frac{R}{R + 2h}}\right).$$

Pri poslednej úprave sme využili aj vzťah (1). Po dosadení nám vyjde $l$ = 4,36 m, čo je trocha menej ako max. výška na Zemi.

No, myslím, že to nebolo až také ťažké, najdôležitejšie bolo uvedomiť si, že ak kameň opustí valec, nepôsobí naň žiadna sila a letí priamo. Preto už nemá zmysel hovoriť o zmenšujúcej sa uhlovej rýchlosti smerom k osi valca a pod. To by platilo v prípade radiálneho gravitačného poľa so stredom v osi, kde grav. sila pôsobí stále, ale potom by sa ten výpočet zvrhol na riadny humáč. Tak sa majte fajn a užívajte si posledný sneh, lebo v lete nebude.

---

**B – 2.2 Lyžiar a kotva** (opravovala Saša)

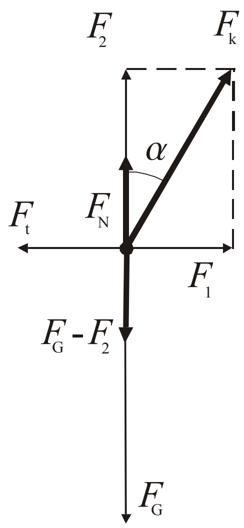
*Možno nie všetci, ale niektorí z vás boli túto zimu na lyžovačke. Prídete k vleku, zachytíte sa kotvy, kotva sa pomaly hýbe, vy stojíte a v určitom okamihu to s vami trhne a vy sa veziete. Majme lyžiara hmotnosti m = 80 kg, ktorý sa zachytil kotvy na rovine, súčiniteľ trenia lyží s povrchom je f = 0,2. Dĺžka nezaťaženej kotvy je $l_0$ = 2 m. Súčasťou kotvy je aj pružina neznámej tuhosti k. V okamihu, keď kotva zviera so zvislým smerom uhol $\alpha$ = 30°, pohnete sa. Vypočítajte tuhosť pružiny k!*

Jarné slniečko nás už stihlo pozdraviť a tak máme jednu z posledných šancí zalyžovať si. Nie všetci majú to šťastie a tak si poďme spoločne aspoň zaspomínať na zimné lyžovačky a na to, ako to s takou kotvou na vleku vlastne vyzerá.

Začneme tým, čo je vlastne tuhosť pružiny a čo nám k jej výpočtu treba. Tuhosť pružiny $k$ vyjadruje, akou silou treba pôsobiť na pružinu, aby sa predĺžila o jeden meter. Teda sila, ktorá je potrebná na predĺženie o $\triangle l$ sa dá vyjadriť - čo sa týka jej veľkosti – ako $F = k\triangle l$. Z toho pre tuhosť máme

$$k = F/\triangle l. \tag{1}$$

Záporné znamienko nám hovorí o tom, že predĺženie má opačný smer ako pôsobiaca sila.



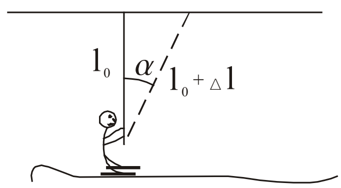

Čo je v našom prípade sila $F$? Z princípu akcie a reakcie vieme, že na kotvu (a teda pružinu v nej) pôsobí lyžiar takou silou, akou pôsobí kotva na neho. Označme túto silu ako $F_k$. Keď človek nasadne na kotvu a aj keď sa pohne, je kotva v približne rovnakej výške, takže si celú situáciu môžeme jednoducho znázorniť pomocou obrázka. No a teraz prichádza najdôležitejšia úvaha riešenia. Lyžiar na rovine sa pohne vtedy, ak sa sily, ktoré naňho pôsobia vo vodorovnom smere vyrovnajú. Konkrétne ide o vodorovnú zložku sily $F_k$ (na obr. sila $F_1$) a treciu silu $F_t$. Z pravouhlého trojuholníka ľahko určíme $F_1 = F_k \sin\alpha$. Proti nej pôsobí trecia sila, ktorej veľkosť je $F_t = f.F_N$, kde $f$ je daný súčiniteľ trenia medzi snehom a lyžami a $F_N$ je reakcia podložky tzv. normálová sila. No a tu bol kameň úrazu. Totižto, mnohí zabudli práve na zvislú zložku sily $F_k$ (sila $F_2 = F_k \cos\alpha$), ktorá nadľahčuje lyžiara a tým znižuje normálovú silu, čo ma za dôsledok zmenšenie trecej sily lyžiara. V zvislom smere teda pôsobí na lyžiara sila $F_G - F_2$ a jej veľkosť je rovná veľkosti normálovej sily. Dokopy teda dostávame pre veľkosť trecej sily vzťah

$$F_t = f\,(F_G - F_k \cos\alpha).$$

Ako som spomenula vyššie, trecia sila $F_t$ musí byť vykompenzovaná silou $F_1$. Z rovnosti $F_t = F_1$ si teda môžeme vyjadriť hľadanú silu $F_k$:

$$f\,(F_G - F_k \cos\alpha) = F_k \sin\alpha$$

$$F_k = \frac{fmg}{f\cos\alpha + \sin\alpha}. \tag{2}$$




No a teraz nám k šťastiu chýba už len dopočítať, o koľko sa predĺži pružina, keď kotva zviera so zvislým smerom uhol $\alpha = 30°$. Z pravouhlého trojuholníka (pozri obr.) ľahko zistíme, že platí $\cos\alpha = l_0 / (l_0 + \triangle l)$, z čoho vyjadríme predĺženie

$$\Delta l = l_0\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right). \tag{3}$$

Spojením vzťahov (2) a (3), dosadením do (1) a po matematických úpravách dostávame pre tuhosť vyjadrenie

$$k = \frac{fmg}{l_0\left(1/\cos\alpha - 1\right)\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)}.$$

Po dosadení číselných hodnôt zo zadania a $g = 9{,}81\ \mathrm{ms^{-2}}$ dostaneme, že tuhosť pružiny, ktorá je súčasťou kotvy, je približne 753, 56 $\mathrm{Nm^{-1}}$.

Najčastejšou chybou vo vašich riešeniach bolo to, že ste akosi pozabudli na zvislú zložku sily $F_k$ a počítali ste len s jej vodorovnou zložkou. Ponaučenie do budúcnosti, keď už rozkladáme sily, tak ich treba rozložiť poriadne.

Tak vám prajem na budúcu zimu šťastné nasadanie na kotvu - mne to vždy robilo ťažkosti ☺ - a dovtedy si treba čo najlepšie užiť jar, a potom leto, a potom jeseň a potom jar a potom leto a potom ...

**B – 2.3 Čierna skrinka** (opravoval Mišo)

*Čierna skrinka je krabička, v ktorej je plno elektronických súčiastok a na povrchu je zopár dierok. Keď chceme zistiť, čo sa ukrýva vo vnútri, vyberieme dve dierky a spojíme ich cez zdroj napätia (napr. jednosmerný s + na prvej dierke, potom jednosmerný s – na prvej dierke) a ampérmeter. Takto systematicky premeriame prúdy pre všetky dvojice dierok. V tabuľke sú uvedené prúdy pre čiernu skrinku s tromi dierkami, označme ich 1,2,3. V čiernej skrinke môžu byť rezistory a diódy. Nakreslite zapojenie vnútri čiernej skrinky a vypočítajte odpory rezistorov.*

| | dierky | 1 ; 2 | 1 ; 3 | 2 ; 3 |
|---|---|---|---|---|
| U [+ -] = 5,0 V | I [+ - (mA)] | 10,0 | 8,33 | 0,00 |
| U [- +] = 5,0 V | I [- + (mA)] | 0,00 | 0,00 | 12,5 |

Ahojte všetci obdivovatelia MC Erika a aj vy ostatní. Tento príklad nebol veľmi náročný a asi aj preto ste ho väčšinou riešili správne. Napriek tomu sa našli mnohí, čo ho podcenili, a tak neprišli k správnemu riešeniu, hoci príklad sa dal vyriešiť nespočetne veľa spôsobmi – presnejšie ∞.

Prvý kľúč k úspechu bol prečítať si dôkladne zadanie a správne dešifrovať tabuľku. Potom už bolo pomerne jednoduché vypočítať celkové odpory medzi jednotlivými dierami našej záhadnej čiernej skrinky. El. prúdom a odporom v skrinke dáme indexy podľa toho, medzi ktorými dierami tečú resp. sú – vidíme, že prúd môže tiecť medzi ľubovoľnými dvoma dierami pri nejakom zo zapojení. Teda:

$$R_{12} = U/I_{12} = 500\ \Omega$$
$$R_{13} = U/I_{13} = 600\ \Omega$$
$$R_{23} = U/I_{23} = 400\ \Omega$$

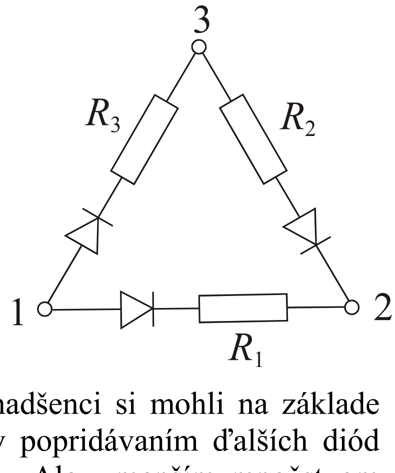
Niektorí sa s týmito výsledkami uspokojili, ale práve teraz bol ten správny okamih obetovať čas určený na každodennú telenovelu a porozmýšľať .

Najprv si ujasnime, že dióda je niečo, čo nám prepustí prúd jedným smerom s nulovým odporom a opačným nám ho neprepustí vôbec, lebo má nekonečne veľký odpor - takáto dióda je tzv. ideálna dióda. Teda medzi dierou 1 a 2 prúd tečie iba z 1 do 2 ale nie opačne z toho je jasné, že niekde medzi nimi musí byť akási dióda. Tiež z 1 do 3 tečie a naopak netečie, takže tiež tam je nejaká dióda. A z 2 do 3 netečie a opačne tečie čo avízuje ďalšiu diódu. Keď si všetko toto uvedomíme môžeme nakresliť schému začať kresliť schému. Záleží od nálady či sa rozhodneme pre tvar trojuholníka alebo hviezdy (jediného uzla), lebo oba vedú k správnemu riešeniu a my z našich vedomostí aj tak už ovládame, že hviezdu vieme pretransformovať na trojuholník a naopak. Môžeme však voliť aj iné, komplikovanejšie, schémy, ale ich podstata je práve v týchto 2 elementárnych schémach.

Teda tu je riešenie trojuholníka:

a) 1,2,3 sú diery v čiernej skrinke. Pre $R_2$ a $R_3$ je to veľmi jednoduché lebo ako z 1 do 3 aj z 3 do 2 prúd môže tiecť iba jednou vetvou teda:

$$R_2 = U/I_{32} = 400\ \Omega,$$
$$R_3 = U/I_{13} = 600\ \Omega.$$




Z 1 do 2 sa vieme dostať jednak cez rezistor $R_1$ alebo cez $R_3$, dieru 3 a $R_2$ teda:

$$1/R_{12} = 1/R_1 + 1/(R_2 + R_3).$$

Z toho pre $R_1$ vyplýva vzťah:

$$R_1 = \frac{R_{12}\left(R_2 + R_3\right)}{R_2 + R_3 - R_{12}}.$$

Po dosadení získame výsledok $R_1 = 1000\ \Omega$.

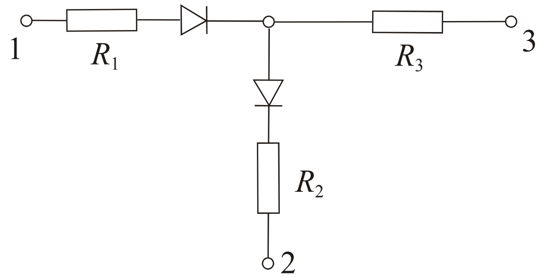
Takže toto je jedno z elementárnych riešení. Samozrejme, nadšenci si mohli na základe tohto riešenia vytvoriť mnoho ďalších schém čiernej skrinky popridávaním ďalších diód a rezistorov ,takých aby bolo zachované celkové $R_{12}$, $R_{13}$, $R_{23}$. Ale z menším množstvom komponentov to takto cez trojuholník nejde.

Ešte pre špekulantov uvediem, že pre rezistory v čiernej skrinke by mohlo platiť:

$$R_1 = R_{12}\,,\ R_2 = R_{23}\,,\ R_3 = R_{13}\,,$$

ale potom by čierna skrinka musela byť konštruovaná tak, že diery- vrcholy trojuholníka by neprepustili prúd pokiaľ by neboli zapojené. Takúto možnosť zadanie nevylučuje ale je dôležité ju uviesť pri schéme skrinky.

Úloha sa dala riešiť aj pomocou jediného uzla:




b) riešenie pomocou hviezdy

Podľa schémy zostavíme rovnice:

$$R_1 + R_2 = R_{12},$$
$$R_1 + R_3 = R_{13},$$
$$R_3 + R_2 = R_{23},$$

Potom $R_1 = 350\ \Omega$, $R_2 = 150\ \Omega$, $R_3 = 250\ \Omega$. Toto je ďaľšie elementárne riešenie, ktoré si môžeme podľa nálady skomplikovať pridaním ďaľších diód a rezistorov.

Teda príklad sme úspešne doriešili a v našich mysliach vŕta už len posledná, ale závažná otázka:“ Načo je takáto skrinka dobrá?“. To ťažko povedať, niekde je možno použiteľná (ale najskôr ako domov pre hmyz a pavúky).

---

**B – 2.4 Ako variť?** (opravovala Rebro)

*Všetci vieme, že v dnešnej dobe treba šetriť. Skúste preto experimentálne určiť, koľko energie (percentuálne) sa ušetrí pri zohrievaní 2 litrov studenej vody do varu v hrnci s pokrievkou a bez pokrievky. Skúste takisto aj určiť závislosť „ušetrenej energie“ od prierezu použitého hrnca. Svoje experimentálne výsledky aj teoreticky zdôvodnite!*

Zdravím všetkých varičov a varičky. Nuž na úvod. Ak je v zadaní napísané experimentálne určite, treba robiť nejaký ten experiment. Týmto pozdravujem všetkých tých, ktorí mali dobré úvahy, ale strhnuté body. Na druhú stranu v zadaní bola aj veta, že svoje experimentálne výsledky teoreticky zdôvodnite. Takže pozdravujem aj tých, ktorý síce experiment robili, ale len skonštatovali, čo namerali a koniec. A ešte pár estetických doporučení. Ak ste namerali viac hodnôt, určite vyzerajú prehľadnejšie v peknej tabuľke. A keď už experimentujete, pokojne urobte viac meraní, výsledky budú hodnovernejšie.

A teraz k samotnému príkladu. Experimentovala som i ja. Merania som uskutočnila pre tri rôzne hrnce, pre každý hrniec som stopovala čas, za ktorý sa v ňom uvarili dva litre vody s pokrievkou a bez nej. Spotrebovanú energiu môžem vypočítať ako $E = P.t$, kde $P$ výkon plameňa a $t$ čas. Potrebujem vedieť pomer energií potrebných na ohriatie vody a keďže výkon plameňa sa počas experimentu nemenil, pomer energií je vlastne rovný pomeru časov potrebných na ohriatie. Stačilo to len takto jednoducho, pretože si uvedomujem, že väčšina z vás doma nemá prostriedky na presnejšie merania. V tabuľke sú uvedené priemery hrncov, čas potrebný na zovretie vody bez pokrievky, s pokrievkou. V poslednom stĺpci sú uvedené percentá ušetrenej energie. K danému číslu som sa dostala tak, že za základ som zobrala čas bez pokrievky (100%), a vypočítala si koľko „percent“ je rozdiel nameraných časov. Za základ som zobrala čas bez pokrievky, pretože ak by sme si zobrali za základ čas s pokrievkou a nastal by prípad, kedy by trvalo ohrievanie vody s pokrievkou polovicu času ako bez pokrievky, vyšlo by nám, že sme ušetrili 100% energie a to vyzerá určite divne. Ďalšie upozornenie pre väčšinu z vás. Málokto mal uvedené, ako sa dostal k daným percentám. Uviedli ste číslo bez toho, aby ste povedali, odkiaľ sa vzalo.

Tabuľka nameraných hodnôt:

| priemer [cm] | čas s pok. [s] | čas bez [s] | množstvo [l] | ušetrené |
|---|---|---|---|---|
| 18 | 490 | 530 | 2 | 7,5% |
| 20 | 450 | 510 | 2 | 11,8% |
| 22 | 420 | 470 | 2 | 10,6% |

Z tabuľky vidíme, že sme ušetrili 7-12% energie. Nie je to veľmi veľa, pravdu povediac čakala som viac. Vo vašich riešeniach sa objavovali hodnoty od 3% do 40%. Ako ste viacerí z vás sami skonštatovali, merania neboli nejako veľmi presné. Pravda je, že určiť presne kedy sa voda už varí, je bez teplomera trochu problém (navyše, keď nakukujem pod pokrievku, že či to už bublinkuje), na druhú stranu určovať to s presnosťou na 30 s a viac, je už naozaj nepresné.

Nuž a čím je spôsobený ten rozdiel? Keď ohrievame vodu, „uteká nám energia kade-tade". Jednak cez steny hrnca, jednak samotným odparovaním zohrievanej vody. Tie prvé straty sú v oboch prípadoch (s pokrievkou a bez) rovnaké, tie druhé však nie. Čo sa vlastne deje pri vyparovaní? Kvapalinu opúšťajú najrýchlejšie molekuly, teda tie, čo majú najväčšiu energiu a tým kvapalina energiu stráca. Čím väčší priemer hrnca, tým väčší povrch kvapaliny, väčší výpar, väčšie straty. Keď však dáme na hrniec pokrievku, voda sa bude vyparovať do okamihu, v ktorom pod pokrievkou nastane stav tzv. nasýtenej pary, čo znamená, že koľko molekúl kvapalinu opustí (vyparí sa), toľko isto sa do nej vráti (skondenzuje). A teda voda ďalej energiu nestráca a ohrievane trvá kratšie. Z toho tiež vidno, že ušetríme tým viac, čím je menší priestor pod pokrievkou, pretože tým skôr nastane stav nasýtenia. Prvé dva hrnce som mala naplnené prakticky po okraj, kým posledný bol naplnený len „po uši". To je možno jeden z dôvodov, prečo sa neušetrilo viac energie ako pri prostrednom hrnci, ako by sme očakávali pre vyššie uvedené dôvody. Niektorí z vás nezabudli spomenúť, že pri zvyšovaní tlaku pod pokrievkou sa zvyšuje i teplota varu vody. Žiadna pokrievka však na hrniec neprilieha presne (nie je to kuchta), a preto zmena teploty varu bude zanedbateľná.

A čo sa ešte týka rozmerov hrnca. Ako som už spomínala, čím väčší priemer hrnca, tým väčšia plocha na odparovanie...Ale tiež ste sa zamýšľali nad tým, že ak mám malý hrniec a veľký plameň, ktorý mi šľahá okolo hrnca, míňam energiu na ohrievanie kuchyne.

Na záver vodu ohrievajte s pokrievkou, v primeranom hrnci vzhľadom na veľkosť plameňa resp. rozmer platničky. Nuž a či je nejaká úspora súvisiaca s tým, či vodu ohrievam na malom plameni-pomalšie, alebo väčšom-rýchlejšie, to niekedy nabudúce. Dozvarenia.

# FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

**vzorové riešenia 2. série**
**A**–kategória (starší)
18.ročník
letný semester
školský rok 2002/2003.

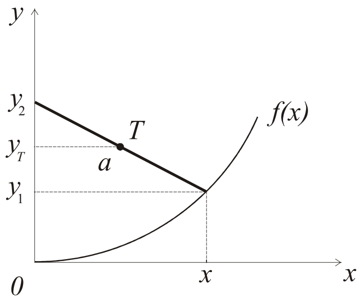
www. .sk

**FKS, KZDF FMFI UK**
**Mlynská dolina**
**842 48 Bratislava**
*riesenia@fks.sk*
*info@fks.sk*

---

**A – 2.1 Rampa** (opravoval Stano)

*Tyč dĺžky a sa opiera jedným koncom o hladkú zvislú stenu a druhým koncom o rampu v tvare funkcie f(x). Aký má mať tvar rampa (aká je závislosť f(x)), aby bola tyč v ľubovolnej polohe v rovnováhe?*




Spôsobov riešenia tejto úlohy bolo viac. Všetky však musia vychádzať z nejakého fyzikálneho princípu opisujúceho rovnovážnu polohu. Jedným je princíp minimálnej energie. Voľne povedané: „Každá uzavretá sústava sa snaží dostať do stavu s minimálnou energiou“ (tzv. princíp maximálnej lenivosti: „Čo nemusím, to neurobím“ ☺).

V tomto prípade uvažujeme len mechanickú energiu tyče. Keďže kinetická energia je vždy kladná, tak minimum nadobudne práve vtedy, keď bude nulová. Čiže tyč sa nebude pohybovať (čo je triviálny fakt). Ostáva len potenciálna energia, ktorá v tomto prípade závisí od výšky ťažiska ako $mgy_T$ (pozri obr.). Takže ak chceme, aby bola tyč v každej polohe v rovnováhe, musí byť ťažisko stále v rovnakej výške.

Čiže musí platiť $y_T$ = konšt. $y_T$ sa dá vyjadriť ako $y_T = (y_1 + y_2)/2$, a keďže $y_1 = f(x)$ a $y_2 = f(x) + (a^2 - x^2)^{1/2}$ , môžeme písať:

$$y_T = \frac{y_1 + y_2}{2} = konšt.$$

$$\frac{f(x) + \sqrt{a^2 - x^2} + f(x)}{2} = konšt. \qquad \text{alebo} \qquad f(x) = konšt. - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2}.$$

Daná konštanta závisí len od zvolenia počiatku rampy. Ak položíme $f(0) = 0$, bude konečný výsledok:

$$f(x) = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2},$$

čo po menšej úprave dá rovnicu

$$\left[a - 2f(x)\right]^2 + x^2 = a^2 .$$

Ako niektorí z vás správne poznamenali, ide o sploštenú kružnicu (resp. elipsu). Toť fsio.

---

**A – 2.2 Fontánka** (opravoval Nagi)

*Na obrázku je fontánka – voda strieka z trysky s prierezom S nahor, tryska je v hĺbke H pod hladinou vody v nádobe. Prúd vody drží vo vzduchu vodorovnú platňu (samozrejme, je to platňa Michala Davida) hmotnosti m. V akej výške h je fontánka schopná takúto platňu udržať? Predpokladajte, že voda sa pri dopade na platňu rozstrekuje iba do strán (teda v prvom okamihu po dopade je jej rýchlosť vodorovná).*

Ľudia moji, Michal David by z Vás nebol nadšený. Ani ja z Michala Davida nie ☺. Preto budeme ďalej radšej hovoriť o platni Michala Kocába – veď sa aj to jeho meno podobá na „kocábku“, teda lodičku, ktorá si vo výške $h$ šantí na vodotrysku.

Akouže rýchlosťou to vyteká voda z trysky? Podľa Toricelliho je to

$$v_0 = \sqrt{2Hg}.$$

Za čas $\Delta t$ teda vytečie z trysky voda s objemom

$$V = Sv_0\Delta t.$$

Keďže sa nám voda po ceste nikde „nestráca“, toto bude aj objem vody dopadajúci za čas $\Delta t$ na platňu. Dôležité je však uvedomiť si, že rýchlosť vody $v$, ktorou naráža na platňu, bude menšia. Zo zákona zachovania energie (pre vodu na hladine, vodu vytekajúcu z trysky a vodu narážajúcu na platňu) máme

$$MgH = \frac{1}{2}Mv_0^{\ 2} = Mgh + \frac{1}{2}Mv^2.$$

Z toho hneď vidno, že Toricelliho vzorec je priamym dôsledkom zákona zachovania energie pre „kúsok vody“.

Teraz prichádza kritický moment. Ako zistiť silu, ktorou pôsobí prúd vody na platňu? Podľa Newtona je sila daná zmenou hybnosti za čas, $F = \Delta p/\Delta t$. Vieme, aké množstvo vody nám za čas $\Delta t$ na platňu dopadne. Táto voda so sebou prináša hybnosť

$$p = Mv = \rho V v = \rho\left(Sv_0\Delta t\right)v.$$

Táto hybnosť má smer zvislo nahor. Keďže po náraze na platňu sa voda rozstrekuje do bokov, úplne stráca hybnosť v zvislom smere – a odovzdáva ju platni. Pre zmenu hybnosti $\Delta p$ platí $\Delta p = p - 0 = p$. Voda teda pôsobí na platňu silou

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \rho S\sqrt{2Hg}\sqrt{2(H-h)g},$$

za $v_0$ a $v$ sme dosadili vyjadrenia zo zákona zachovania energie.

Keďže platňa si kľudne hovie na vrchole vodotrysku, je jasné, že sila $F$ sa musí rovnať jej tiaži. Zo vzťahu $F = mg$ nakoniec ľahko vyjadríme výšku $h$ ako

$$h = H\left(1 - \frac{m^2}{4\rho^2 S^2 H^2}\right).$$

To by bolo takmer všetko, môžeme si ale ešte všimnúť, že výška $h$ môže výjsť aj záporná. Znamenalo by to, že prúd vody platňu neudrží. Stane sa to vtedy, ak je priťažká. Teda ak

$$m > 2\rho SH.$$

A to je teda všetko.

---

**A – 2.3 Podpaľač** (opravoval Tomáš)

*Ujo Archimedes bol veľký filozof a matematik a ešte k tomu sa aj dobre rozumel zrkadlám. V bitke o Syrakúzy zapaľoval pomocou naleštených štítov celé lode... Odhadnite koľko potrebujeme vojakov s naleštenými štítmi, aby sa nám za slnečného dňa podarilo podpáliť lode natreté čiernou farbou. Je teda legenda o Archimedovi pravdivá, alebo je to len výmysel?*

Ahoj podpaľači. Na začiatok jedno upresnenie – v staršej verzii zadaní sa uvádzalo, že ten ujo, ktorý údajne podkuroval Rimanom v podpalubí, sa volal Aristoteles. Samozrejme, ide o omyl a myslel sa tým ujo Archimedes.

Poďme sa teda nad tým trochu zamyslieť. Loď chceme zapáliť v podstate iba slnečným svetlom. Slnko, ako ste mnohí z tabuliek zistili, nám v ideálnom prípade (pravé poludnie, bezoblačnosť, atď) svieti žiarivým výkonom približne $w$ = 1,4 kJ.m$^{-2}$.s$^{-1}$. Tento údaj ste mnohí vyrátali z celkového výkonu Slnka a zo vzdialenosti Slnko-Zem. Predstavme si namiesto štítu ideálne rovinné zrkadlo. Ak odraz Slnka z takýchto $n$ zrkadiel nasmerujeme na 1 miesto na lodi, bude situácia v tomto nešťastnom bode lode presne taká, ako keby na ňu svietilo $n$ Slnc celkovým žiarivým výkonom $n.w$. Zápalná teplota suchého dreva je čosi okolo 300 $^0$C, teda približne 570 K.

Drevo, ktoré je dosť vysoko nad hladinou, bude už suché a navyše môže byť na povrchu nejaká smola alebo čosi také, čo zápalnú teplotu len zníži. Drevo, ktoré začneme ohrievať, sa začne ochladzovať, a to hlavne dvoma spôsobmi: vyžarovaním a prestupom tepla do vzduchu. Vedenie tepla v dreve môžeme zanedbať, lebo drevo má relatívne nízku tepelnú vodivosť. Prestup tepla do vzduchu je ale hrôza, až sa mi pred očami zatemnilo a porátať čosi také je určite nad rámec tejto úlohy.

Hm. Ak neviem niečo zrátať, neviem to náhodou zmerať? Zavolám chalanov z vchodu, vezmeme nejaké štíty… no vážne. Možno ste skúšali niekedy zapaľovať oheň lupou. No a to je vlastne zapaľovanie lode v malom. (Nasledujúci experiment mám od Kubusa Závodného) Ak lupou s polomerom 2 cm viem za nejaký rozumný čas zapáliť drevo, pričom ten krúžok, ktorým to zapaľujem, má polomer asi 0,5 mm, tak je v ňom sústredený výkon $(20 / 0,5)^2\, w = 1600w$, čiže 1600-krát väčší ako prichádza zo Slniečka. Podľa tohto experimentu by sme teda potrebovali okolo 1600 zrkadiel. Je tento údaj premrštený alebo podhodnotený?

Tu sa na chvíľu zastavme a skúsme sa zamyslieť: Koľko z tepelných strát je spôsobených vyžarovaním a koľko stratami do vzduchu? Vyžarovanie vieme celkom jednoducho zrátať. Nech na loď mieri $n$ zrkadiel, pričom kritické miesto je zohriate na spomínaných $T$ = 570 K a sústava je v rovnováhe, t.j. vyžiari sa práve toľko tepla, koľko tam štítmi nasmerujeme. Ak loď vyžaruje ako ideálne čierne teleso, vieme, že jej vyžarovaný výkon na jednotku plochy je rovný $kT^4$, kde $k$ sa nazýva Stefan -Boltzmannova konštanta a $T$ je termodynamická teplota objektu. Z rovnosti

$$kT^4 = n.w$$

zrátame, že by nám stačilo čosi okolo 5 (slovom päť) štítov. Ak nám 5 štítov stačí na udržanie rovnováhy pri maximálnej teplote, tak na zapálenie v nejakom rozumnom čase potrebujeme povedzme 10.

Načo teda potrebujeme zvyšných neviemkoľko zrkadiel? Zrejme ich potrebujeme kvôli tepelným stratám do okolitého vzduchu, ktoré, ako náš výpočet ukázal, budú ozaj veľké. Aké veľké budú ale straty, keď namiesto malého fliačika lupou sústredeného svetla budeme zapaľovať relatívne veľkým odrazom zo štítu? Predstavme si malý fliačik lupou sústredeného Slnka, ktorý sa snaží zapáliť kus dreva. Po chvíľke sa zrejme v okolí zapaľovanej plochy vytvorí vzdušné prúdenie, ktoré bude dosť efektívne "ovievať" zapaľované miesto, čo náš fliačik zbytočne deprimuje a zapaľovanie nápadne sťaží. Ak ale budeme zapaľovať veľkými štítmi väčšiu (uvažujme zvislo orientovanú) plochu, prúdenie nám už toľko vadiť nebude. Vyššie umiestnené časti bude ofukovať vzduch, ktorý sa už predtým ohrial od spodnejších horúcich častí zapaľovaného dreva. Relatívne tepelné straty môžu byť teda pri zapaľovaní vo veľkom o dosť menšie ako pri zapaľovaní lupou. Odhad 1600 zrkadiel sa z tohto pohľadu zdá byť značne nadsadený.

Proti pravdivosti tejto legendy sa stavajú teda hlavne argumenty technického typu. Vojaci nemohli byť úplne dokonale zorganizovaní a určite sa im nepodarilo naraz všetkým presne zamieriť na to isté miesto. A hlavný argument proti je, že štít predsa len nie je rovinné zrkadlo. Okrem toho, že môže určité percento žiarivého výkonu zachytávať, môže svetlo aj dosť nechutne rozptyľovať, čo nám vadí najviac. Takže aj keď by také zapálenie teoreticky nebolo nemožné, v praxi je prudko závislé na "kvalite" miestnych štítov. Ešte k riešeniam: vašou úlohou nebolo rozhodnúť, či sa to ozaj stalo alebo nie. O tom, či je takéto zapálenie realizovateľné sa už dlho diskutuje v kruhoch tuhých fyzikálnych nadšencov a názory sa rozchádzajú. Skôr sa od vás čakalo, že predostriete nejaký váš, fyzikou podporený, názor.

## A – 2.4 **Čierna skrinka** (opravoval Roman)

*Čierna skrinka je krabička, v ktorej môžu byť elektronické prvky (rezistory, kondenzátory a cievky) a na povrchu sú štyri dierky, označme ich 1,2,3,4. Keď chceme zistiť, čo sa ukrýva vo vnútri, vyberieme dve dierky a spojíme ich cez zdroj napätia (najskôr striedavý s frekvenciou f = 50 Hz, potom jednosmerný) a ampérmeter. Takto systematicky premeriame prúdy pre všetky dvojice dierok (tabuľka - ac znamená striedavé napätie, dc jednosmerné napätie). Prvky v čiernej skrinke sú zapojené v sérií, tzn. že netvoria uzavretý obvod. Nakreslite zapojenie vnútri čiernej skrinky a vypočítajte parametre elektronických prvkov.*

| | | dierky | 1 ; 2 | 1 ; 3 | 1 ; 4 | 2 ; 3 | 2 ; 4 | 3 ; 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ac | u = 5,0 V | i [mA] | 5,00 | 13,9 | 7,07 | 6,87 | 7,07 | 13,9 |
| dc | U = 5,0 V | I [mA] | 0,00 | 25,0 | 10,0 | 0,00 | 0,00 | 16,7 |

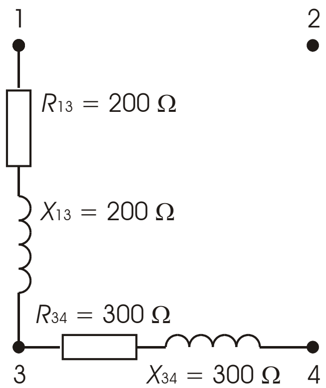
Na začiatok si ujasnime, čo znamená, že prvky netvoria uzavretý obvod. Zoberme si tri dierky 1, 2, 3 a uvažujme, že sú priamo prepojené každá s každou. Za predpokladu, že samotná dierka nebráni prechodu prúdu (aj keď v nej nie je umiestnený spojovací vodič), tvorí naša sústava uzavretý obvod a pri počítaní impedancie $Z_{12}$ alebo rezistancie $R_{12}$ musíme vziať do úvahy aj paralelný príspevok $Z_{13}$ a $Z_{23}$, resp. $R_{13}$ a $R_{23}$. Takže hor sa počítať. Podľa zadanej tabuľky určíme impedancie $Z_{ij} = u/i_{ij}$ , rezistancie $R_{ij} = U/I_{ij}$ a reaktancie

$$X_{ij} = \sqrt{Z_{ij}^2 - R_{ij}^2}$$

pre príslušné časti obvodu.

| | | dierky | 1 ; 2 | 1 ; 3 | 1 ; 4 | 2 ; 3 | 2 ; 4 | 3 ; 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ac | $u$ = 5,0 V | $Z$ [Ω] | 1000 | 360 | 707 | 728 | 707 | 360 |
| dc | $U$ = 5,0 V | $R$ [Ω] | ∞ | 200 | 500 | ∞ | ∞ | 300 |
| | | $X$ [Ω] | 1000 | 300 | 500 | 728 | 707 | 200 |

Pre elektronické prvky v našej čiernej skrinke platia pravidlá: Ak je v obvode prítomný iba *kondenzátor* – prúd pri jednosmernom prúde je nulový,
*rezistor* – prúd je rovnaký pri striedavom aj jednosmernom prúde,
*cievka* – prúd pri striedavom prúde je menší oproti jednosmernému.
Prvý pohľad na tabuľku hovorí, že $R_{13}$ a $R_{34}$ sú zaradené za sebou (200 Ω + 300 Ω = 500 Ω) a medzi ne nie je zaradený kondenzátor. Reaktancie $X_{13}$ a $X_{34}$ sa taktiež rovnajú $X_{14}$.




Z tohoto dostávame informácie pre časti obvodov 13 a 34:
13 – induktancia 200 Ω (cievka) a rezistancia 300 Ω (samotný odpor cievky a prípadne ďalšie rezistory)
34 – induktancia 300 Ω (cievka) a rezistancia 200 Ω (samotný odpor cievky a prípadne ďalšie rezistory)

Keďže prvky nemajú tvoriť uzavreté obvody, ostáva už iba jedna možnosť z možných $Z_{12}$, $Z_{23}$, $Z_{24}$, kam umiestniť kondenzátor. Postupným vypočítaním všetkých sériových impedancií nám vyjde, že tejto podmienke vyhovuje $Z_{12}$.
12 – kapacitancia 1000 Ω (kondenzátor)
Príslušné hodnoty induktancií, kapacitancií a rezistancií sú v nasledovnej tabuľke.

| dierky | 1 ; 2 | 1 ; 3 | 1 ; 4 | 2 ; 3 | 2 ; 4 | 3 ; 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_L$ [Ω] | - | 300 | 500 | 300 | 500 | 200 |
| $X_C$ [Ω] | 1000 | - | - | 1000 | 1000 | - |
| R [Ω] | - | 200 | 500 | 200 | 500 | 300 |

Výsledná schéma by sa dala nakresliť podľa nasledovného obrázka. Potom parametre elektronických prvkov, ktoré vypočítame zo známych vzťahov $X_C = 1/\omega C$ a $X_L = \omega L$, $\omega = 2\pi f$, $f = 50$ Hz, sú:

$$C_{12} = 3{,}2\ \mu\text{F}\ ,\ L_{13} = 0{,}96\ \text{H}$$
$$R_{13} = 200\ \Omega\ ,\ L_{34} = 0{,}64\ \text{H}$$
$$R_{34} = 300\ \Omega.$$